

## ЗАСТОСУВАННЯ ДРУГОГО МЕТОДУ НЕЙМАНА ДО СФЕРИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА СФЕРИЧНІЙ ТРАПЕЦІЇ

Б. Джуман

Національний університет “Львівська політехніка”

**Ключові слова:** сферичні функції, другий метод Неймана, сферична трапеція.

### Постановка проблеми

Існує багато методів для побудови регіональної моделі гравітаційного або магнітного поля Землі із використанням сферичних функцій Лежандра [2]. До таких методів належать SCNA [7, 11], ASHA [1, 4], TOSCHA [5], R-SCNA [10]. Кожен з цих методів має певні переваги та недоліки. Одним з головних недоліків усіх перерахованих вище методів є те, що базові системи функцій не мають властивості ортогональності. У зв'язку з цим у роботі [6] запропоновано використовувати сферичні функції, які володіють властивістю ортогональності на сферичній трапеції. Очевидно, для таких функцій можна

$$\left. \begin{aligned} P_{km} &= \sin^m(q - q_{\min}) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(q - q_{\min})}{2}\right), \text{ if } q_{\min} \leq q \leq q_{\text{mean}} \\ P_{km} &= (-1)^{k+m} \sin^m(q_{\max} - q) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(q_{\max} - q)}{2}\right), \text{ if } q_{\text{mean}} \leq q \leq q_{\max} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

де  $k$  і  $m$  – цілі числа,  $q_{\min}$ ,  $q_{\max}$  – мінімальна і максимальна зенітні відстані,  $q_{\text{mean}}$  – середнє значення, а саме  $q_{\text{mean}} = (q_{\min} + q_{\max})/2$ . Своєю чергою, значення  $n_k$  залежатимуть від  $k$  і  $m$ .

Функції (1) формують на відрізку  $[q_{\min}; q_{\max}]$  ортогональну систему функцій за вагою  $\sqrt{\sin(q_0 - |q - q_{\text{mean}}|)}$ , де  $q_0 = (q_{\max} - q_{\min})/2$ , тобто [6]

$$\int_{q_{\min}}^{q_{\max}} P_{k_1 m}(q) P_{k_2 m}(q) \sin(q_0 - |q - q_{\text{mean}}|) dq = 0, \quad k_1 \neq k_2. \quad (2)$$

Оскільки функціям (1) притаманна властивість ортогональності, очевидно, можна знайти таку сітку, використовуючи яку, всіма елементами матриці нормальних рівнянь, окрім елементів головної діагоналі, можна буде знехтувати. Це дасть змогу істотно скоротити час обчислень невідомих коефіцієнтів та уникнути похибок, які виникатимуть у разі обернення матриці нормальних рівнянь [3].

$$\left. \begin{aligned} P_{km}(t) &= (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - t}{2}\right), \text{ якщо } \cos q_0 \leq t \leq 1, \\ P_{km}(t) &= (-1)^{k+m} (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - t}{2}\right), \text{ якщо } 2 \cos q_0 - 1 \leq t \leq \cos q_0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

де  $t \in [1; 2 \cos q_0 - 1]$ .

застосувати другий метод Неймана. Це дасть змогу адаптувати запропонований метод для побудови моделей високих порядків, якими сьогодні, безумовно, є моделі гравітаційного поля Землі.

### Постановка завдання

У цій роботі поставлено завдання адаптувати другий метод Неймана для сферичних функцій на сферичній трапеції.

### Виклад основного матеріалу дослідження

У роботі [6] для моделювання регіонального потенціального (зокрема гравітаційного) поля запропоновано використовувати на сферичній трапеції такі сферичні функції

Отже, необхідно знайти такі вузли  $q_i$  і ваги  $w_i$ , для яких виконуватиметься умова

$$\sum_{i=1}^N w_i P_{k_1 m}(q_i) P_{k_2 m}(q_i) = \min, \quad k_1 \neq k_2, \quad (3)$$

де  $N$  – кількість паралелей. Для цього спочатку введемо замість  $q$  нову змінну  $t$ , областю визначення якої буде відрізок  $[1; 2 \cos q_0 - 1]$ . Для переходу від змінної  $q$  до змінної  $t$  можна використати такі формули:

$$\left. \begin{aligned} t &= \cos(q - q_{\min}), \text{ якщо } q_{\min} \leq q \leq q_{\text{mean}}; \\ t &= 2 \cos q_0 - \cos(q_{\max} - q), \text{ якщо } q_{\text{mean}} \leq q \leq q_{\max}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Очевидно, зворотні формули переходу мають такий вигляд

$$\left. \begin{aligned} q &= \arccos t + q_{\min}, \text{ якщо } q_{\min} \leq q \leq q_{\text{mean}}; \\ q &= q_{\max} - \arccos(2 \cos q_0 - t), \text{ якщо } q_{\text{mean}} \leq q \leq q_{\max}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Тоді функції (1) з урахуванням заміни (4)–(5) набудуть вигляду

Можемо переписати формулу (2) так

$$\int_{2 \cos q_0 - 1}^1 P_{k_1 m}(t) P_{k_2 m}(t) dt = 0, \text{ якщо } k_1 \neq k_2. \quad (7)$$

Квадратурні формули Гаусса подамо у вигляді

$$\int_a^b f(t) dt \approx \sum_{i=1}^N w_i f(t_i). \quad (8)$$

Із формули (6) бачимо, що в нашому випадку функція  $f$  – це поліном нескінченного порядку від  $t$ . Добре відомо, що алгебраїчний степінь точності квадратурної формули Гаусса, побудованої за  $N$  вузлами, не може перевищувати  $2N - 1$  [8].

Для використання квадратурної формули Гаусса за „канонічний” інтервал приймають  $[-1; +1]$ . В такому випадку сітка складається з нулів полінома Лежандра  $P_N(x) = 0$ , а ваги  $c_i$  обчислюють як [9]

$$c_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)(P'_N(x_i))^2}, \quad (9)$$

де  $i=1, N$ .

Знаючи координати вузлів і ваги для “канонічного” інтервалу, можна знайти координати вузлів і ваги для довільного інтервалу  $[a, b]$ , скориставшись такими співвідношеннями

$$t_i = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)x_i; \quad (10)$$

$$w_i = \frac{1}{2}(b-a)c_i.$$

У нашому випадку  $a = 2 \cos q_0 - 1$ ,  $b = 1$ . Тоді формула (10) переписеться

$$t_i = \cos q_0 + (1 - \cos q_0)x_i; \quad (11)$$

$$w_i = (1 - \cos q_0)c_i.$$

Знайдемо координати вузлів сітки і вагу для функцій (1) на відрізку  $[20^\circ; 70^\circ]$  для п'ятого порядку. Для „канонічного” інтервалу координати вузлів сітки і ваги подано в табл. 1.

Таблиця 1

**Координати вузлів сітки і ваги на “канонічному” інтервалі для п'ятого порядку**

N = 5	
x	c
-0,90618	0,236927
-0,53847	0,478629
0	0,568889
0,538469	0,478629
0,90618	0,236927

Виконавши перетворення (11), а також зважаючи на (5), отримуємо координати вузлів сітки і ваги на інтервалі, наприклад  $[20^\circ; 70^\circ]$ . Їх подано в табл. 2.

Таблиця 2

**Координати вузлів сітки і ваги на інтервалі  $[20^\circ; 70^\circ]$  для п'ятого порядку**

t	$\omega$	q	$\omega$
0,821406	0,022198	62,398	0,022198
0,855857	0,044844	53,089	0,044844
0,906308	0,053300	45,000	0,053300
0,956758	0,044844	36,911	0,044844
0,991210	0,022198	27,602	0,022198

Отримані ваги зображено на рис. 1.

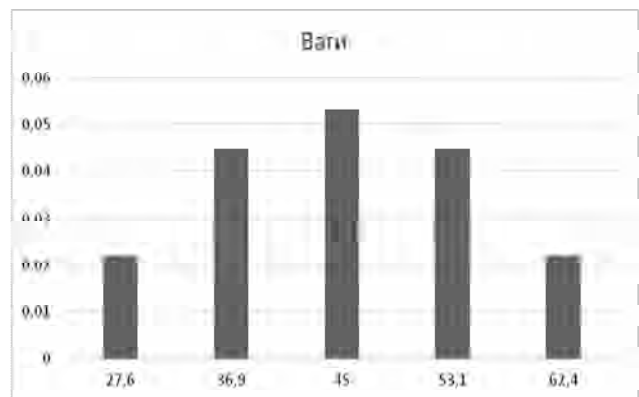


Рис. 1. Ваги на відрізку  $[20^\circ; 70^\circ]$ , якщо  $N=5$

Легко помітити, що, якщо  $k_1 + k_2 = \text{нечетне число}$ , всі функції  $P_{k_1 m}(q) P_{k_2 m}(q) \in \text{нечетні}$ . Тому в такому випадку унаслідок симетричності вузлів і ваг  $\sum_{i=1}^N w_i P_{k_1 m}(q_i) P_{k_2 m}(q_i) = 0$ . У табл. 3 подано значення суми  $\sum_{i=1}^N w_i P_{k_1 m}(q_i) P_{k_2 m}(q_i)$  до четвертого степеня/порядку, якщо  $k_1 + k_2 = \text{парне число}$ , а також якщо  $k_1 = k_2$ , обчислені на гріді Гаусса для  $N = 64$ .

**Висновки**

За результатами роботи можна зробити такі висновки:

- адаптовано другий метод Неймана для використання сферичних функцій на сферичній трапеції;
- встановлено (табл. 3), що ряд числового інтегрування з використанням квадратурних формул Гаусса збігається дуже повільно. Інакше кажучи, навіть для низьких порядків необхідно використовувати порівняно велику сітку.

Таблиця 3

Суми  $P_{k_1m}(q)P_{k_2m}(q)$ , якщо  $k_1+k_2 = \text{парне число}$  і  $k_1 = k_2$   
до четвертого степеня/порядку  
на гріді Гаусса для  $N = 64$

$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{20}(q_i) P_{00}(q_i)$	6,8075e-010	$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{21}(q_i) P_{21}(q_i)$	0,0016
$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{30}(q_i) P_{10}(q_i)$	8,5900e-009	$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{22}(q_i) P_{22}(q_i)$	6,7561e-004
$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{31}(q_i) P_{11}(q_i)$	-2,7352e-010	$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{30}(q_i) P_{30}(q_i)$	0,0220
$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{40}(q_i) P_{00}(q_i)$	1,3250e-008	$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{31}(q_i) P_{31}(q_i)$	5,8826e-004
$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{40}(q_i) P_{20}(q_i)$	-2,1825e-009	$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{32}(q_i) P_{32}(q_i)$	7,3237e-005
$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{41}(q_i) P_{21}(q_i)$	2,0853e-010	$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{33}(q_i) P_{33}(q_i)$	5,0132e-005
$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{42}(q_i) P_{22}(q_i)$	-2,3582e-011	$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{40}(q_i) P_{40}(q_i)$	0,0171
$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{00}(q_i) P_{00}(q_i)$	0,1874	$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{41}(q_i) P_{41}(q_i)$	2,6532e-004
$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{10}(q_i) P_{10}(q_i)$	0,0513	$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{42}(q_i) P_{42}(q_i)$	1,9496e-005
$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{11}(q_i) P_{11}(q_i)$	0,0101	$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{43}(q_i) P_{43}(q_i)$	3,9908e-006
$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{20}(q_i) P_{20}(q_i)$	0,0309	$\sum_{i=1}^{64} w_i P_{44}(q_i) P_{44}(q_i)$	3,9391e-006

**Література**

1. Джуман Б. Б. Апроксимація аномалій сили ваги методом АША на територію Арктики / Б. Б. Джуман // Геодезія, картографія та аерофотознімання. – 2014. – № 80. – С. 62–68.
2. Джуман Б. Б. Про побудову моделі локального гравітаційного поля / Б. Б. Джуман // Геодинаміка. – 2013. – № 1(14). – С. 29–33.
3. Марченко О. М. Побудова матриці нормальних рівнянь для моделювання локального гравітаційного поля / О. М. Марченко, Б. Б. Джуман // Геодезія, картографія та аерознімання. – 2014. – № 79. – С. 29–34.
4. De Santis A. Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field / A. De Santis – Geophys. Res. Lett. – 1992, 19. – P. 1065–1067.
5. De Santis A. Translated origin spherical cap harmonic analysis // Geophys. J. Int. – 1991, 106, P. 253–263.
6. Dzhuman B. B. Modeling of the gravitational field on spherical trapezium // Geodesy, cartography and aerial photography, 2018. – Vol. 86. – P. 5–10.
7. Haines G. V. Spherical cap harmonic analysis / G. V. Haines // J. Geophys. Res. – 1985, 90. – P. 2583–2591.

8. Marchenko A. Regional quasigeoid determination: an application to arctic gravity project / A. Marchenko, B. Dzhuman // *Geodynamics*. – 2015. – Vol. 1(18). – P. 7–17.
9. Sneeuw N. Global spherical harmonic analysis by least squares and numerical quadrature methods in historical perspective // *Geophys. J. Int.* – 1994, 118. – P. 707–716.
10. Thebault E., Manda M. & Schott J. Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA) // *J. geophys. Res.* – 2006. 111. – P. 111–113.
11. Yankiv-Vitkovska L. M. & Dzhuman B. V. Constructing of regional model of ionosphere parameters // *Geodesy, cartography and aerial photography*. – 2018. – Vol. 85. – P. 27–35.

#### **Застосування другого методу Неймана до сферичних функцій на сферичній трапеції**

Б. Джуман

Розглянуто використання сферичних функцій на сферичній трапеції для моделювання регіонального гравітаційного чи магнітного поля. Ці функції формують ортогональну за вагою систему функцій на довільній сферичній трапеції. У зв'язку з цим розроблено методику використання квадратурних формул Гаусса (другого методу Неймана) для моделювання регіонального потенціального поля на довільній сферичній трапеції із використанням сферичних функцій. Встановлено, що ряд числового інтегрування з використанням квадратурних формул Гаусса в цьому випадку збігається доволі повільно. Незважаючи на це, такий підхід дає змогу використовувати діагональну матрицю нормальних рівнянь для обчислення невідомих коефіцієнтів шуканої моделі.

#### **Применение второго метода Неймана к сферическим функциям на сферической трапеции**

Б. Джуман

Рассмотрено использование сферических функций на сферической трапеции для моделирования регионального гравитационного или магнитного поля. Эти функции формируют ортогональную по весу систему функций на произвольной сферической трапеции. В связи с этим разработана методика использования квадратурных формул Гаусса (второго метода Неймана) для моделирования регионального потенциального поля на произвольной сферической трапеции с использованием сферических функций. Установлено, что ряд численного интегрирования с использованием квадратурных формул Гаусса в этом случае совпадает довольно медленно. Несмотря на это, такой подход позволяет использовать диагональную матрицу нормальных уравнений при вычислении неизвестных коэффициентов искомой модели


#### **Application of the second Neumann's method to spherical functions on a spherical trapezium**

B. Dzhuman

In this paper we considered the use of spherical functions on a spherical trapezium for modeling a regional gravitational or magnetic field. These functions form an orthogonal system of functions with weight on an arbitrary spherical trapezium. In this connection we developed method for using Gauss quadrature formulas (the second Neumann's method) for modeling a regional potential field on an arbitrary spherical trapezium with using of spherical functions. It is established that a series of numerical integration using quadrature Gaussian formulas in this case converges quite slowly. Nevertheless, this approach allows us to use the diagonal matrix of normal equations in the computation of unknown coefficients of the wanted model.

- теоретичні засади наземного лазерного сканування
- аналіз найбільш вживаних приладів
- мобільне наземне лазерне сканування
- прикладне застосування сканування

Дорожинський О. Л.  
**НАЗЕМНЕ ЛАЗЕРНЕ СКАНУВАННЯ В ФОТОГРАМЕТРІЇ**  
 Навчальний посібник.  
 Видавництво Львівської політехніки, 2014. 96 с. ISBN 978-617- 607-617-9



## Нові технології – ключ до успіху геодезиста