

УДК 621.01

О. С. Ланець, В. М. Боровець, Р. Я. Качмар*
 Національний університет “Львівська політехніка”,
 кафедра механіки та автоматизації машинобудування
 *кафедра експлуатації та ремонту автомобільної техніки

ОБҐРУНТУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНОЇ ДОВЖИНИ ДОВГОВИМІРНОГО РОБОЧОГО ОРГАНА ВІБРАЦІЙНОГО ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ

© Ланець О. С., Боровець В. М., Качмар Р. Я., 2017

Наводиться аналітична залежність, що встановлює для довговимірного вібраційного транспортного засобу раціональну довжину робочого органа як тіла з розподіленою масою, за умови унеможливлення збігу його власної частоти коливань з вимушеною.

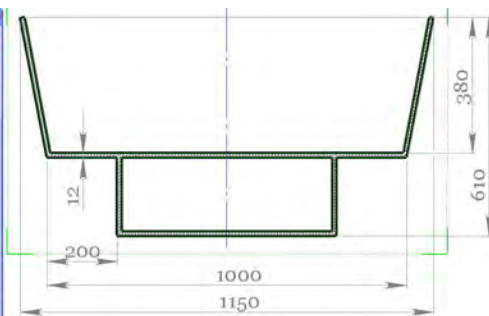
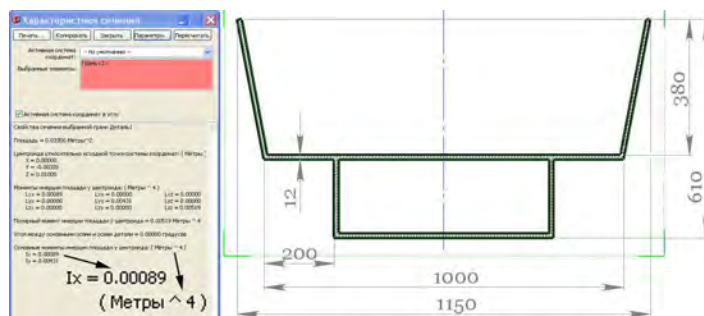
Ключові слова: вібраційний конвеєр, власна частота коливань, резонанс.

The article deduces an analytical dependence that establishes for a long vibration vehicle a rational length of a working body, as a body with a distributed mass, since it is impossible to match its own frequency of oscillations with the forced.

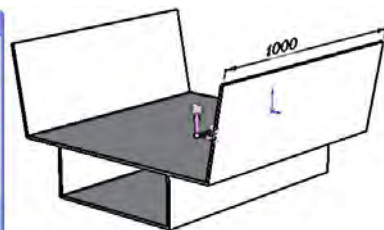
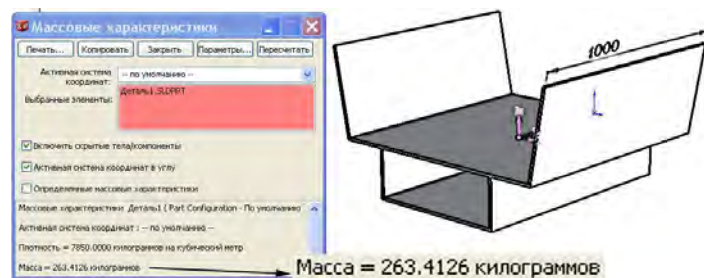
Key words: vibration conveyor, natural frequency, resonance.



Рис. 1. Вібраційний живильник виробництва фірми Carrier Vibrating Equipment, Inc. (США)



а



б

Рис. 2. Визначення моменту поперечного перерізу (а) та погонної маси (б) жолоба робочого органа вібраційного живильника у програмному продукті SolidWorks

Вступ. Для стабільного та рівномірного вібраційного транспортування виробів необхідно забезпечити власну частоту коливань робочого органа, як тіла з розподіленою масою, принаймні у 3К4 рази вищою за вимушену. Тобто необхідно, щоб на частоті вимушених коливань робочий орган здійснював коливальний рух як абсолютно тверде тіло, тобто був достатньо жорстким і водночас легким, конструктивно простим та дешевим у виготовленні.

Аналіз останніх досліджень та постановка проблеми. Розглянемо випадок довговимірного робочого органа, наприклад, вібраційного живильника з дебалансним приводом, що приводиться в рух від асинхронних двигунів (рис. 1). Його довжину вибирають як з конструктивних міркувань, так і з умови можливості накопичення певного запасу маси середовища завантаження. За рекомендаціями [1], максимальну довжину можна приблизно встановити за

$$L_{\max} = 3 \cdot 4 \sqrt{\frac{EJ}{\rho_n \Omega^2}}, \quad (1)$$

де E – модуль пружності матеріалу жолоба на розтяг, Па; J – момент інерції поперечного перерізу жолоба, м^4 ; ρ_n – погонна маса жолоба (маса жолоба завдовжки 1 м), $\text{кг}/\text{м}$; $\Omega = \omega$ – колова частота вимушених коливань, $\text{рад}/\text{с}$.

Нехай момент інерції поперечного перерізу жолоба проектованого живильника (рис. 2, а) становитиме $J = 8.9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$, а його погонна маса з врахуванням маси завантаження $\rho_n \approx 350 \text{ кг/м}$ (рис. 2, б). Модуль пружності жолоба зі сталі $E = 2.05 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, колова частота вимушених коливань становить $\omega = \Omega = 149 \text{ рад/с} \approx 23.7 \text{ Гц}$ (близько 1420 *обертів/хв* для асинхронного двигуна, синхронна частота якого 1500 *обертів/хв*). У такому випадку максимально можлива довжина робочого органа згідно з (1) становить:

$$L_{\max} = 3 \cdot 4 \sqrt{\frac{E J}{\rho_n \Omega^2}} =$$

$$= 3 \cdot 4 \sqrt{\frac{2.05 \cdot 10^{11} \cdot 0.00089}{350 \cdot 149^2}} = 6.65 \text{ м}$$

Виконання умови (1) унеможливить виникнення паразитних коливань на робочій частоті живильника. Тобто тіло поводитиме себе, як абсолютно тверде. Забезпечивши значення маси погонного метра на рівні $\rho_n \approx 350 \text{ кг/м}$ (рис. 3, а), ми бачимо, що за довжини жолоба $L_{\max} = 6.65 \text{ м}$ його перша власна циклічна частота, як тіла з розподіленою масою, становить $\nu_6 = 54.5 \text{ Гц}$ (рис. 3, б) і є в 2.3 *рази* вищою за вимушену $N = 23.7 \text{ Гц}$. Отримане значення першої власної частоти коливань робочого органа є достатнім для того, щоб вважати робочий орган абсолютно твердим тілом під час роботи живильника на частоті вимушених коливань. Проте необхідно відобразити послідовність виведення цієї формули, щоб досконаліше зрозуміти її суть і тим самим перевірити її правильність.

Виклад основного матеріалу. Як отримано формулу (1)? Для спрощення розрахунків власних частот можна використати метод, який застосовується для стрижня з умови, що його момент інерції поперечного перерізу буде ідентичний з перерізом жолоба (рис. 4). Розглянемо тільки поперечні коливання у площині його відображення, вважаючи, що у жолоба це найпіддатливіший напрям. Рівняння вільних коливань стрижня як тіла з розподіленою масою має такий вигляд [2]:

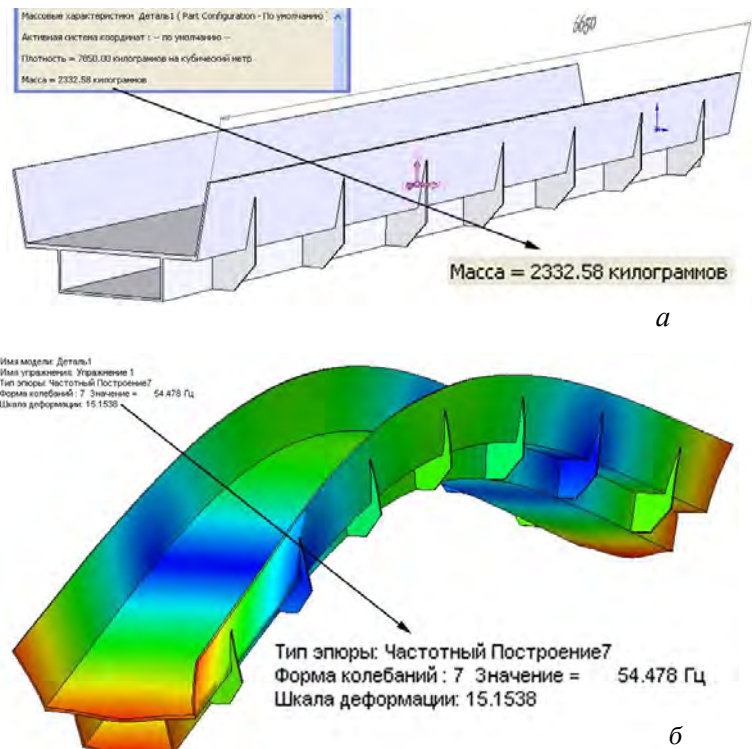


Рис. 3. Визначення маси робочого органа вібраційного живильника (а) та встановлення його першої власної частоти коливань у програмному продукті SolidWorks (б)



Рис. 4. Робочий орган вібраційного живильника у вигляді жолоба (а) завдовжки $L = L_{\max}$ та його схема заміщення у вигляді балки з вільними кінцями (б)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \mathbf{h}^2 \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} = 0, \quad (2)$$

де

$$\mathbf{h} = \sqrt{EJ/\rho_n}. \quad (3)$$

Найпростішим періодичним розв'язком рівняння (2) є функція $x(y,t)$ відхилень точок осі жолоба за поперечних коливань, яка змінюється в часі за гармонічним законом:

$$x(y, t) = f(y) \sin(\omega t + Z), \quad (4)$$

де Z – зсув фаз; $f(y)$ – функція, що встановлює закон розподілу (по довжині y жолоба) амплітудних значень відхилень точок на осі жолоба (вздовж x) від положення рівноваги і називається формою головного коливання або власною формою. Цих форм безліч і кожній відповідає певне значення власної частоти ω_g . Для того, щоб отримати рівняння власних форм, підставимо (4) у (2). Після скорочення на $\sin(\omega t + Z)$ отримаємо:

$$f^{IV}(y) - k^4 f(y) = 0, \quad (5)$$

де

$$k^4 = \frac{\rho_n \omega^2}{EJ}. \quad (6)$$

Рівняння (5) має такі чотири незалежні часткові розв'язки: $\cos(ky)$, $\sin(ky)$, $\text{ch}(ky)$, $\text{sh}(ky)$, а його загальний розв'язок запишеться як

$$f(y) = A \cos(ky) + B \sin(ky) + C \text{ch}(ky) + D \text{sh}(ky). \quad (7)$$

Цей розв'язок містить чотири довільні сталі C_1, C_2, C_3, C_4 , які повинні бути визначені з крайових умов для функції $f(x)$, тобто з умов закріплення кінців жолоба. Для звичайних умов кількість крайових умов дорівнює кількості довільних сталих – по два на кожному кінці. Усі вони визначаються із рівності нулю двох із таких чотирьох величин $f(y)$, $f'(y)$, $f''(y)$, $f'''(y)$. Саме відхилення та відповідні його похідні відповідають прогину, куту повороту, згинальному моменту і поперечній силі в крайніх точках $y=0$ та $y=L$. У нашому випадку крайові умови для жолоба з вільними кінцями мають такий вигляд:

$$f''(0) = f'''(0) = 0; \quad f''(L) = f'''(L) = 0, \quad (8)$$

адже згинальний момент і поперечна сила у перерізі відсутні. Друга та третя похідні рішення (7) у загальному вигляді запишуться так:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(y) = -C_1 k^2 \cos(ky) - C_2 k^2 \sin(ky) + C_3 k^2 \text{ch}(ky) + C_4 k^2 \text{sh}(ky); \quad (9)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} f(y) = C_1 k^3 \sin(ky) - C_2 k^3 \cos(ky) + C_3 k^3 \text{sh}(ky) + C_4 k^3 \text{ch}(ky). \quad (10)$$

Отже, за $y=0$ вирази (9) та (10) набудуть такого вигляду:

$$-C_1 k^2 + C_3 k^2; \quad (11)$$

$$-C_2 k^3 + C_4 k^3. \quad (12)$$

За $y=L$ вирази (9) та (10) перепишуться так:

$$-C_1 k^2 \cos(kL) - C_2 k^2 \sin(kL) + C_3 k^2 \text{ch}(kL) + C_4 k^2 \text{sh}(kL); \quad (13)$$

$$C_1 k^3 \sin(kL) - C_2 k^3 \cos(kL) + C_3 k^3 \text{sh}(kL) + C_4 k^3 \text{ch}(kL). \quad (14)$$

Прирівнявши вирази (11)–(14) до нуля, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} -C_1 k^2 + C_3 k^2 = 0; \\ -C_2 k^3 + C_4 k^3 = 0; \\ -C_1 k^2 \cos(kL) - C_2 k^2 \sin(kL) + C_3 k^2 \operatorname{ch}(kL) + C_4 k^2 \operatorname{sh}(kL) = 0; \\ C_1 k^3 \sin(kL) - C_2 k^3 \cos(kL) + C_3 k^3 \operatorname{sh}(kL) + C_4 k^3 \operatorname{ch}(kL) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

з якої і отримаємо необхідний розв’язок. Сталі C_1, C_2, C_3, C_4 , що визначають власну форму (функцію $f(y)$), нас не цікавлять. Нам важливо встановити власну частоту. Тому (15) у матричному вигляді можна подати як:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -k^2 & 0 & k^2 & 0 \\ 0 & -k^3 & 0 & k^3 \\ -k^2 \cos(kL) & -k^2 \sin(kL) & k^2 \operatorname{ch}(kL) & k^2 \operatorname{sh}(kL) \\ k^3 \sin(kL) & -k^3 \cos(kL) & k^3 \operatorname{sh}(kL) & k^3 \operatorname{ch}(kL) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Нас цікавить матриця коефіцієнтів за невідомих, яку називають ще частотною. Її визначник дорівнює

$$k^{10} [\operatorname{ch}^2(kL) - \operatorname{sh}^2(kL) - 2 \operatorname{ch}(kL) \cos(kL) + \cos^2(kL) + \sin^2(kL)]. \quad (17)$$

Спростивши (17) та прирівнявши отриманий вираз до нуля

$$1 - \operatorname{ch}(kL) \cos(kL) = 0, \quad (18)$$

його коренем (без нульового кореня) буде значення (рис. 5):

$$kL = 4.73. \quad (19)$$

Тоді вираз (6) можна переписати як

$$\frac{(4.73)^4}{L^4} = \frac{\rho_n \omega^2}{EJ}. \quad (20)$$

З (20) перша власна колова частота коливань визначатиметься за такою формулою:

$$\omega = \omega_{e1} = 22.37 \sqrt{\frac{EJ}{\rho_n L^4}}, \quad (21)$$

а максимально можлива довжина жолоба буде:

$$L_{\max} = 4.73 \cdot 4 \sqrt{\frac{EJ}{\rho_n \omega^2}}. \quad (22)$$

Перейшовши на циклічну частоту коливань, вирази (21) та (22) переписуть у такому вигляді:

$$v = v_{e1} = \frac{22.37}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{\rho_n L^4}} = 3.56 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\rho_n L^4}}; \quad (23)$$

$$L_{\max} = 1.89 \cdot 4 \sqrt{\frac{EJ}{\rho_n v^2}}. \quad (24)$$

Проте у формулі (1) числовий коефіцієнт замість 4.73 (вираз (22)) становить 3, що пов’язано із закладанням півторакратного запасу за довжиною (допустима довжина жолоба скорегована у менший бік). Це збільшує першу власну частоту коливань тіла з розподіленою масою, унеможливаючи збіг її з вимушеною.

Спробуємо зіставити результат розрахунку власної частоти жолоба виконаним методом скінченних елементів (рис. 3, б) з результатом, отриманим за формулою (23). Так, перша власна циклічна частота коливань становить

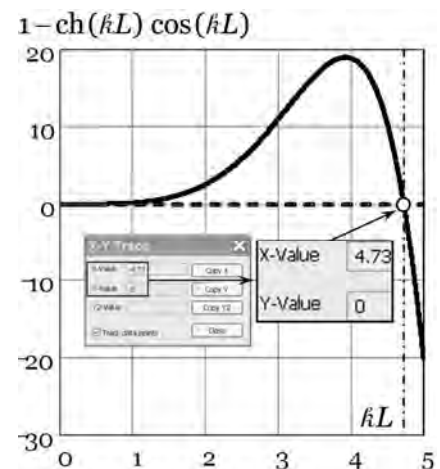


Рис. 5. Вікно програмного продукту MathCAD, у якому відображений розв’язок рівняння (18)

$$v_{\text{в1}} = 3.56 \cdot \sqrt{\frac{2.05 \cdot 10^{11} \cdot 0.00089}{350 \cdot 6.65^4}} = 58.1 \text{ Гц},$$

і зважаючи, що розрахунок наближений, він добре узгоджується з результатами числового аналізу.

Висновок. З проведеного аналізу зрозуміло, що формула (1) є правильною і її можна застосовувати під час розрахунку власних частот довговимірних робочих органів вібраційних транспортних засобів. Недоліком цієї формули є те, що вона встановлює тільки поздовжні згинальні коливання, не враховуючи крутних.

1. Спиваковский А. О. *Транспортирующие машины: учеб. пособ. для машиностроительных вузов; 3-е изд., перераб.* / А. О. Спиваковский, В. К. Дьячков. – М.: Машиностроение, 1983. – 487 с.
2. Бабаков И. М. *Теория колебаний* / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 650 с.
3. Синтез конструкції та дослідження роботи резонансного двомасового вібраційного стола з електромагнітним приводом / О. С. Ланець, В. М. Боровець, О. В. Ланець, Я. В. Шпак, В. І. Лозинський // *Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: Український міжвідомчий науково-технічний збірник.* – 2015. – № 49. – С. 36–60.