

РОЗРОБЛЕННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ВИПРОМІНЮЮЧОЇ ГІДРОАКУСТИЧНОЇ СТРУКТУРИ З КРАТНОЮ ПЕРІОДИЧНІСТЮ

© Гоблик В.В., 2009

Розв’язано задачу збудження циліндричної структури, поверхневий імпеданс якої модульований кратними періодичними послідовностями функцій Гаусса. Розроблено математичні моделі та досліджено особливості формування розподілу акустичного поля таких структур.

Ключові слова – поверхневий імпеданс, функції Гаусса, акустичне поле, модель

The problem of excitation of cylindrical structure, superficial impedance of which is modulated by multiple periodical sequences of Gauss functions, is solved. Mathematical models are elaborated and peculiarities of formation of acoustic field distribution of such structures are investigated.

Keywords – superficial impedance, Gauss functions, acoustic field, model

Вступ

Розроблення та дослідження математичних моделей, що описують особливості дифракції та збудження акустичних хвиль у структурах з модуляцією їх конструктивних параметрів складними періодичними законами, привертають увагу як з теоретичної, так і практичної точок зору. Такі задачі мають важливе практичне значення для створення гідроакустичних антен, просторових фільтрів акустичного поля та фононних кристалів з покращеними технічними характеристиками, що забезпечить в майбутньому розв’язання широкого спектра прикладних задач, починаючи від задач дослідження океану, закінчуючи задачами розвитку акусто-електроніки, акустооптики, та наноакустики [1, 2]. Однак, не зважаючи на значний прогрес в розвитку обчислювальних методів та засобів, деякі задачі дифракції та збудження акустичних хвиль на складних періодичних структурах, актуальність яких тільки збільшується, до сих пір не розв’язано. Непереборні труднощі виникають при дослідженні явищ дифракції в резонансних областях, коли просторовий період модуляції параметрів структури є відповідним довжині хвилі, а кількість періодів структури вимірюється тисячами та десятками тисяч довжин хвиль.

Для розв’язання такого класу задач в роботі [3] запропоновано строгий метод, який дає розв’язок задачі в замкнутому вигляді за умови, що модуляція конструктивних параметрів структури здійснюється періодичною послідовністю δ -функцій. У роботі [4] згаданий метод поширено на випадок модуляції параметрів плоских структур накладеними одна на одну кратними періодичними послідовностями прямокутних функцій без обмежень на глибину модуляції поверхневого імпедансу. У результаті отримано асимптотичний розв’язок задачі у вигляді гіллястих ланцюгових дробів, який переходить в точний при граничному переході від прямокутних функцій до δ -функцій. У роботі [5] цей метод поширено на розв’язання акустичної задачі збудження нескінченно довгого колового циліндра, поверхневий імпеданс якого модульований кратними періодичними послідовностями прямокутних функцій.

Метою цієї роботи є розв’язання задачі збудження колового циліндра, поверхневий імпеданс якого модульований вздовж його осі кратними періодичними послідовностями функцій Гаусса. В результаті отримано у замкнутому вигляді асимптотичний розв’язок задачі, точність якого зростає при спрямуванні функцій Гаусса до δ -функцій.

Отриманий розв'язок задачі у вигляді гіллястого ланцюгового дробу відрізняється новизною. Воно покладено в основу розроблення ефективної, з точки зору числового дослідження математичної моделі, яка описує спектр просторових гармонік акустичного поля над структурою, що збуджена δ -джерелом. Засобами МАТЛАБ досліджені важливі для практичного застосування особливості формування акустичного поля над таким модульованим імпедансним циліндром при зміні періоду та величини неоднорідностей імпедансу.

Формулювання задачі

Розглянемо нескінченно довгий імпедансний коловий циліндр з поперечним перерізом радіуса α , у якого розподіл поверхневого акустичного імпедансу залежить тільки від повздовжньої координати z , а в напрямку азимутального кута φ імпеданс є незмінним (рис. 1).

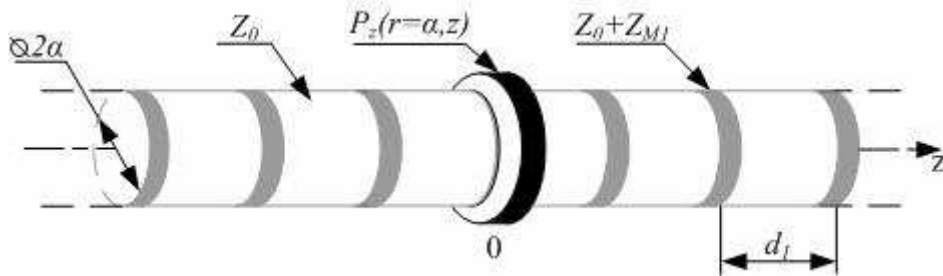


Рис. 1. Модульований імпедансний коловий циліндр

Акустична імпедансна гранична умова на поверхні циліндра у спектральному вигляді визначається таким співвідношенням [6,7]:

$$Z_n(z) = \left. \frac{P_z(r, z)}{W_\varphi(r, z)} \right|_{r=\alpha} = -iW_0 \frac{k \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\chi)J_0(\alpha p) + f(\chi)H_0^{(2)}(\alpha p)\} e^{-i\chi z} d\chi}{\int_{-\infty}^{\infty} \{[F(\chi)J_1(\alpha p) + f(\chi)H_1^{(2)}(\alpha p)]/p\} e^{-i\chi z} d\chi}, \quad (1)$$

де $P_z(r = \alpha, z)$ та $W_\varphi(r = \alpha, z)$ – акустичний тиск та коливна швидкість на поверхні модульованого імпедансного циліндра відповідно; $F(\chi)$ – спектральна густина поля сторонніх джерел; $f(\chi)$ – спектральна густина поля, наведеного на циліндрі; J_0, J_1, H_0^2, H_1^2 – функції Бесселя та Ханкеля; $p = \sqrt{k^2 - \chi^2}$; W_0 – питомий акустичний опір середовища; k – хвильове число для середовища.

Співвідношення (1) зв'язує між собою спектральну густину “падаючого” акустичного поля та “розсіяного” від циліндра поля за допомогою поняття поверхневого імпедансу [5–7], який визначається конструктивними параметрами структури. Це співвідношення можна покласти в основу для розв'язання трьох задач. Виділимо насамперед задачу аналізу, в якій заданими є розподіл поверхневого імпедансу $Z_H(z)$ вздовж осі z та спектральна густина падаючого поля (поля джерела) $F(\chi)$, а шуканою функцією є спектральна густина розсіяного поля від структури $f(\chi)$. Наступною за складністю є задача синтезу, в якій за заданим розподілом $Z_H(z)$ та заданим розсіяним полем $f(\chi)$ необхідно знайти закони збудження структури $F(\chi)$. Однак, для практики проектування гідроакустичних антен та інших засобів гідроакустичних систем, найважливішою є задача конструктивного синтезу, яка полягає в тому, що за заданими розподілами поля $F(\chi)$ та $f(\chi)$ необхідно знайти відповідний закон розподілу поверхневого імпедансу $Z_H(z)$, а відтак, параметри конструкції структури, які забезпечать формування заданих розподілів поля.

Для задачі аналізу, за умови, що $Z_H(z) = \text{const}$, або є лінійно-зростаючою, чи лінійно-спадною функцією координати z , отримано точний розв'язок у замкнутому вигляді [6]. Для інших випадків застосовують наближені методи, які дають придатні для практики результати, коли довжина

циліндра становить декілька десятків довжин хвиль. Для випадків, коли довжина циліндра становить тисячі, десятки і більше тисяч довжин хвиль, відомі наближені методи аналізу та конструктивного синтезу виявляються не придатними для використання. Для таких випадків розроблені ефективні строгі методи розв'язання згаданих задач для певного класу законів модуляції поверхневого імпедансу, а саме законів, які є результатом накладання одна на одну кратних періодичних послідовностей імпульсних функцій [3,4,9,10].

Розв'язання задачі

Нехай розподіл поверхневого акустичного імпедансу $Z_H(z)$ вздовж осі z циліндра описується таким співвідношенням:

$$Z_H(z) = Z_0 + Z_{M_1} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \exp[-(z - n_1 d_1)^2 / 2b^2], \quad (2)$$

де Z_0 – постійна складова поверхневого імпедансу; Z_{M_1} – амплітуда імпульсних функцій; d_1 – період модуляції поверхневого імпедансу імпульсними функціями; b – параметр, який визначає крутизну фронтів імпульсних функцій.

Співвідношення (1) подамо в еквівалентному вигляді

$$Z_H(z) \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\chi) e^{-i\chi z} d\chi = -i \int_{-\infty}^{\infty} pR(\alpha p) \xi(\chi) e^{-i\chi z} d\chi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2iF(\chi)}{\pi \alpha p H_1^2(\alpha p)} e^{-i\chi z} d\chi, \quad (3)$$

де позначено
$$\xi(\chi) = [F(\chi)J_0(\alpha p) + f(\chi)H_1^2(\alpha p)] / p; \quad (4)$$

$$R(\alpha p) = H_0^2(\alpha p) / H_1^2(\alpha p)$$

та враховано відоме співвідношення для функцій Бесселя [8]

$$H_{\nu-1}^{(2)}(z)J_{\nu}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z)J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi iz}.$$

Якщо функція $\xi(\chi)$ знайдена, то із співвідношення (4) шукана функція $f(\chi)$ однозначно визначиться за допомогою такого виразу:

$$f(\chi) = \frac{p\xi_1(\chi) - F(\chi)J_1(\alpha p)}{H_1^2(\alpha p)} \quad (5)$$

Підставимо далі вираз (2) у співвідношення (3) і застосувавши до лівої та правої частин отриманого рівняння перетворення Фур'є (ПФ) вигляду $\tilde{f}(\chi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp(i\chi z) dz$, а також використовуючи теорему про згортку для ПФ, перейдемо до такого рівняння:

$$Z_0 \xi_1(\chi) + \xi_{T_1, \Delta}(\chi) = pR(\alpha p) \xi_1(\chi) + \frac{2iF(\chi)}{\pi \alpha p H_1^2(\alpha p)}, \quad (6)$$

де $\xi_{T_1, \Delta}(\chi) = Z_{M_1} \Delta \sqrt{2\pi} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \xi_1(\chi - n_1 T_1) \exp(-2n_1^2 \pi^2 \Delta^2)$; $\Delta = b/d_1$; $T_1 = 2\pi/d_1$.

Із рівняння (6) знайдемо

$$\xi(\chi) = \xi_0(\chi) - \frac{1}{D_{0, \Delta}(\chi)} \xi_{T_1, \Delta}(\chi); \quad (7)$$

де

$$\xi_0(\chi) = \frac{2iF(\chi)}{\pi\alpha p H_1^2(\alpha p) D_{0,\Delta}(\chi)}; \quad D_{0,\Delta}(\chi) = pR - Z_0. \quad (8)$$

У роботі [4] показано, що на інтервалі $-\infty < \chi < \infty$, в будь-якій метриці, існує гранична періодична функція $\xi_{T_1}(\chi)$, яка описується у явному вигляді таким виразом:

$$\xi_{T_1}(\chi) = \frac{\lim_{\Delta \rightarrow 0} Z_{M_1} \Delta \sqrt{2\pi} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \xi_1(\chi - n_1 T_1) \exp(-2n_1^2 \pi^2 \Delta^2)}{\lim_{\Delta \rightarrow 0} D_{1,\Delta}(\chi)} \quad (9)$$

$$\text{де } D_{1,\Delta}(\chi) = 1 + Z_{M_1} \Delta \sqrt{2\pi} \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=\infty} \frac{\exp(-2n_1^2 \pi^2 \Delta^2)}{D_{0,\Delta}(\chi - n_1 T_1)} \quad (10)$$

Формула (9) разом з формулою (7) з достатньою для практики точністю описує діаграму спрямованості гідроакустичних антен на базі модульованих імпедансних структур. Розглянемо загальний випадок, коли закон розподілу поверхневого імпедансу структури вздовж осі z являє собою суму постійної складової Z_0 та накладених одна на одну N - кратних періодичних послідовностей функцій Гаусса з амплітудами Z_{M_i} ($i=1,2,\dots,N$) та $\alpha \ll \lambda$, тобто коли функція $Z_H(z)$ має вигляд

$$Z_H(z) = Z_0 + \sum_{i=1}^N Z_{M_i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-(z - nd_i)^2 / 2b^2], \quad \text{де } d_N = \prod_{i=1}^N P_i d_0; \quad P_i - \text{послідовність}$$

цілих чисел. Тоді за аналогією роботи [4] можна показати, що спектральна густина коливного акустичного тиску $\xi_N(\chi)$ описується рекурентною формулою

$$\xi_N(\chi) = \xi_{N-1}(\chi) - \frac{Z_{M_N} \Delta \sqrt{2\pi} \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \xi_{N-1}(\chi - n_N T_N) \exp(-2n_N^2 \pi^2 \Delta^2)}{\prod_{m=0}^N D_{m,\Delta}(\chi)}, \quad (11)$$

де

$$D_{N,\Delta}(\chi) = 1 + Z_{M_N} \Delta \sqrt{2\pi} \sum_{m=1}^N \frac{\exp(-2n_N^2 \pi^2 \Delta^2)}{\prod_{m=1}^N D_{m-1,\Delta}(\chi - n_N T_N)}$$

причому $T_N = 2\pi / d_N$; $\xi_0(\chi)$ та $D_{0,\Delta}(\chi)$ визначаються формулами (8).

Співвідношення (11) у розгорнутому вигляді має будову гіллястого ланцюгового дробу з N -гілками розгалужень з комплексними компонентами. Такий клас гіллястих ланцюгових дробів виникає в задачах дифракції хвиль на структурах з кратною періодичністю зміни їх конструктивних параметрів [11]. Зокрема, на основі таких структур будуються сучасні фотонні, плазмонні та фононні кристали, фільтри просторових гармонік поля та трансформатори типів хвиль, мультиплексори, інтерферометри, коліматори для роботи у широкому діапазоні хвиль, зокрема гідроакустичні антени та просторові фільтри гармонік акустичного поля. Доречно звернути увагу на те, що дискретний аналог гіллястого ланцюгового дробу, розроблений в роботі [10] є, наприклад, ефективною математичною моделлю електродинамічних властивостей широкого кола фотонних надграток та лінійних антенних надрешіток з N - кратною періодичністю зміни комплексних величин навантажень їх випромінювачів.

Нижче, як приклад, наведемо математичну модель та розрахунок просторових діаграм спрямованості гідроакустичних антен на базі циліндричної імпедансної структури, поверхневий акустичний імпеданс якої модульований однією періодичною послідовністю функцій Гаусса.

Математична модель та результати розрахунку

Побудуємо математичну модель гідроакустичної структури у вигляді колового циліндра (рис.1), гідроакустичні властивості якого описуються поняттям поверхневого імпедансу (1). Нехай циліндр радіуса α збуджується стороннім джерелом поля у вигляді синфазного кільця коливного тиску. В такому випадку вздовж осі циліндра z збуджуються повздовжні акустичні коливання, симетричні відносно осі z . Математичною моделлю такого джерела є таке співвідношення: $P_z(r = \alpha, z) = P_0 \delta(r - \alpha') \delta(z - z')$, де P_0 – амплітуда коливного тиску.

Взявши далі до уваги співвідношення (7)–(10) та враховуючи, що спектральна густина поля δ - джерела є константа $\Phi_0 = -iP_0 / 4\pi$, побудуємо таку математичну модель циліндра з модуляцією однією періодичною послідовністю функцій Гаусса:

$$\xi_1(\chi) \cong \Phi_0 \varphi_0(\chi) \varphi_{1,\Delta}(\chi), \quad (12)$$

де

$$\varphi_0(\chi) = 2/D_{0,\Delta}(\chi); \quad \varphi_{1,\Delta}(\chi) = 1/D_{1,\Delta}(\chi).$$

Фізичний зміст співвідношення (12) прозорий: множник $\varphi_0(\chi)$ описує вплив однорідного імпедансного циліндра на поле синфазного кільця коливного тиску, а множник $\varphi_{1,\Delta}(\chi)$ описує вплив на це поле періодичної модуляції поверхневого імпедансу. Далі обмежимо дослідження акустичних властивостей гідроакустичної структури в зоні “видимих кутів” ($k \leq \chi \leq k$), тобто, перейдемо до дослідження особливостей формування діаграми спрямованості періодично-неоднорідного імпедансного циліндра в дальній зоні.

Для цього здійснимо таку заміну змінних у співвідношенні (12) – замість змінної χ введемо нову просторово-кутову змінну:

$$\chi = k \sin(\theta^0) \quad (13)$$

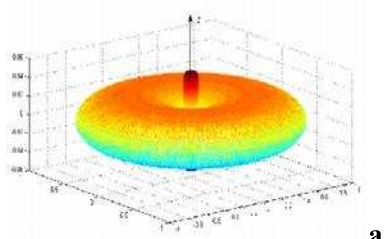
де θ^0 – кут, який відраховується від нормалі до осі циліндра (рис.1).

Взявши до уваги формули (1), (4), (7), (8) та (13), подамо математичну модель (12) у такому вигляді:

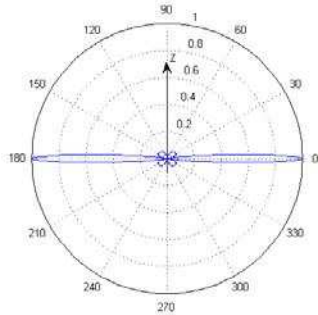
$$\xi_1(\theta^0) = \Phi_0 \frac{\cos(\theta^0)}{(R \cos(\theta^0) - Z_0)(1 + Z_{M1} \Delta \sqrt{2\pi}) \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=\infty} \frac{\exp(-2n_1^2 \pi^2 \Delta^2)}{R \sqrt{(1 - (\sin(\theta) - n_1 \lambda / d_1)^2) - Z_0}}}. \quad (14)$$

Математична модель (14) зв'язує між собою параметри конструкції модульованого акустичного імпедансного циліндра, такі, як: період модуляції поверхневого імпедансу d_1 ; величину b , що визначає крутизну фронтів функції Гаусса; величини постійної складової поверхневого імпедансу Z_0 та його змінної складової Z_{M1} з розподілом акустичного поля циліндра в дальній зоні. Це означає, що математична модель (14), побудована на основі розв'язання сформульованої акустичної задачі в замкнутому вигляді, дозволяє ефективно розв'язувати як задачі аналізу, так і задачі синтезу конструкції гідроакустичних антен за заданим розподілом поля.

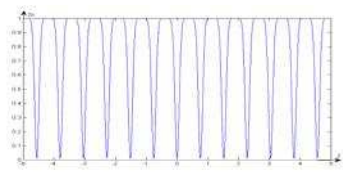
Для прикладу, на основі математичної моделі (12) виконані числові дослідження особливостей формування діаграм спрямованості (рис. 2–4 а, б) модульованим імпедансним циліндром для ряду значень періодів d_1 та параметра b модуляції поверхневого акустичного імпедансу періодичною послідовністю функцій Гаусса (рис. 2–4 с). Нормовані величини постійної складової поверхневого імпедансу Z_0 та амплітуди імпульсних функцій Z_{M1} залишались для всіх чотирьох випадків розрахунку незмінними і приймалися такими, що дорівнюють: $Z_0=1.0$; $Z_{M1}= - 0.99$.



a

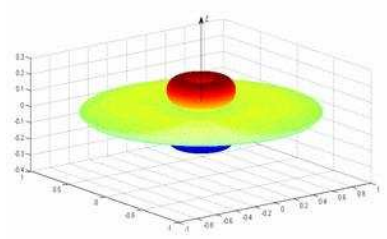


b

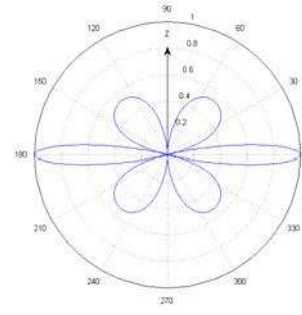


c

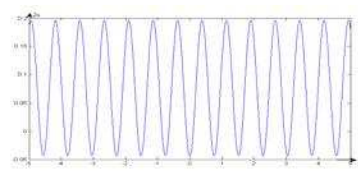
Рис. 2. Діаграми спрямованості (a,b) та розподіл імпедансу (c) для $d_1=0.76\lambda$ $b=0.05\lambda$



a

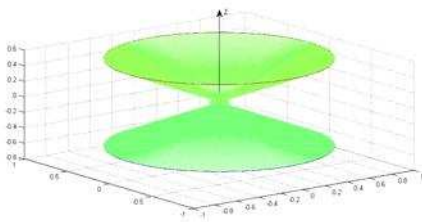


b

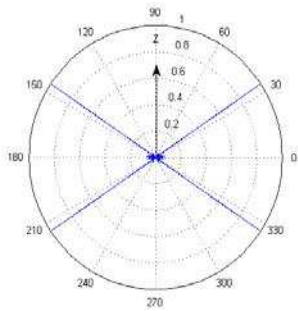


c

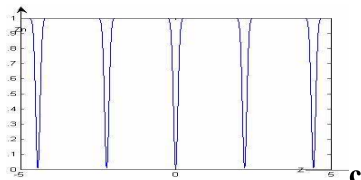
Рис. 3. Діаграми спрямованості (a,b) та розподіл імпедансу (c) для $d_1=0.76\lambda$ $b=0.2\lambda$



a

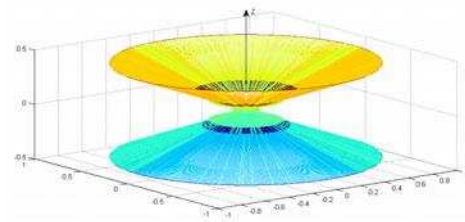


b

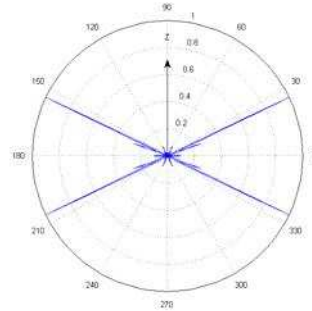


c

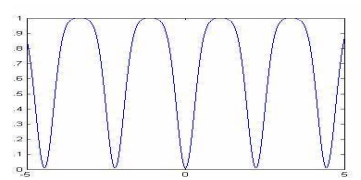
Рис.4. Діаграми спрямованості (a,b) та розподіл імпедансу (c) для $d_1=2.22\lambda$ $b=0.05\lambda$



a



b



c

Рис.5. Діаграми спрямованості (a,b) та розподіл імпедансу (c) для $d_1=2.22\lambda$ $b=0.2\lambda$

Результати досліджень виявили, що характеристики спрямованості періодично-неоднорідного імпедансного циліндра, збудженого симетричним відносно осі джерелом поля здебільшого мають “лійкоподібний” характер. В окремих випадках, коли період d_1 розташування неоднорідностей

поверхневого імпедансу починає дорівнювати або бути кратним довжині хвилі нульової (основної) просторової гармоніки поля, що поширюється вздовж осі z структури, спостерігається ефект випромінювання поля вздовж нормалі до осі z структури. Діаграми спрямованості структур у таких випадках приймають форму диска (рис. 2 а,b), а в інших випадках комбінацію диско- та лійко-подібних форм (рис. 3–5, а,b). Аномальний ефект випромінювання поля вздовж нормалі до осі модульованої циліндричної імпедансної структури підтверджений експериментально [12]. Такий ефект має важливе практичне значення для побудови гідроакустичних антен з дископодібними діаграмами спрямованості, які використовуються в системах зв'язку з довільно розташованими кореспондентами.

Висновки

У результаті виконання цієї роботи розроблено математичну модель – ефективний інструмент аналізу особливостей розподілу поля періодично-неоднорідного колового імпедансного циліндра, що збуджується симетричним відносно осі циліндра акустичним полем, що уможливило виконання серії числових експериментів дослідження особливостей формування поля такою структурою. Аналіз результатів числового дослідження особливостей розподілу поля для ряду періодів розташування неоднорідностей поверхневого імпедансу циліндра показав, що періодично-неоднорідні структури – складні гідроакустичні системи і приховують значні потенційні можливості для розв'язання широкого кола актуальних прикладних задач. Вони наділені властивостями, які дозволяють зарахувати їх до класу одновимірних фононних кристалів, а також мають багато інших цінних гідроакустичних властивостей, необхідних для побудови нових засобів для прикладної гідроакустики.

1. "Волны и дифракция" Том.1 // Краткие тезисы докладов 8-го Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн в трех томах. – М.: ИРЭ АН СССР, 1981. – 361 с. 2. Богомолов В.Н., Парфеньева Л.С., Смирнов И.А., Мисиорек Х., Ежовский А. // Физика твердого тела, 2002. – Т. 44. – Вып. 1. – С.175–179. 3. Чаплин А.Ф. Возбуждение периодически неоднородных импедансных структур // Тр. VIII Всесоюзн. симп. "Волны и дифракция". Т. 3. – М.: ИРЭ АН СССР, 1981. – С.73–76. 4. Гоблик В.В. Анализ поля над импедансной плоскостью с периодическими дискретными неоднородностями методом А.Ф.Чаплина / Теоретические и экспериментальные методы исследования антенн и устройств СВЧ: Сборник / Львов. политехн. ин-т. – Львов, 1984. – С.27–70. – Рус. - Деп. В УкрНИИИТИ 11.11.84, №1874, Ук-84. 5. Гоблик В.В. Возбуждение периодически неоднородного импедансного цилиндра // Акустические методы и средства исследования океана. Межв. сборн. – Владивосток, ДВПИ, 1986. – С.24–29. 6. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1983. – 296 с. 7. Жуков В.Б. Расчет гидроакустических антенн по диаграмме направленности. – Л.: Судостроение, 1977. – 184 с. 8. Ямке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1964. – 344 с. 9. Гоблик В.В., Гоблик Н.М. Про один розв'язок задачі збудження періодично-неоднорідної імпедансної площини. // Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка" "Теорія і проектування напівпровідникових та радіоелектронних пристроїв". – Львів, 1998. – № 343. – С. 53–57. 10. Гоблик В.В. До теорії еквідистантних решіток з параметрами, що змінюються за періодичними законами. // Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка" "Теорія і проектування напівпровідникових та радіоелектронних пристроїв". – Львів, 1998. – № 343. – С. 49–52. 11. Hoblyk V.V., Hoblyk N.N. About solution of the Fredholm integrated equation in a branched continual fraction type. International School-Seminar "Continued Fraction, their General-ization and Application", Uzhhorod National University, 2002.-p. 16-18. 12. Гоблик В.В., Чаплин А.Ф. Антенна поверхностной волны. А.с. СССР №1078512 от 02.12.82г. – Оpubл. в Б.И., 1984, № 9.