ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 601, 2007, с. 5–11

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 601, 2007, p. 5–11

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Г.П. Доманська

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, 79001, Львів, Україна

(Отримано 18 червня 2007 р.)

Розглянуто мішану задачу для нелінійного псевдопараболічного рівняння з виродженням в необмеженій (за просторовими змінними) області. Одержано достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку незалежно від його поведінки при$|x| \to +\infty$.

Ключові слова: нелінійні псевдопараболічні рівняння, виродження
2000 MSC: 35K70
УДК: 517.95

Вступ

Для лінійних псевдопараболічних рівнянь відомим є той факт [1], що класи коректності задач залежать від поведінки розв'язку на нескінченності. Зокрема, у праці [1] показано, що класом єдиності задачі Коші для лінійного псевдопараболічного рівняння є функції, що задовольняють нерівність $|u(x,t)| < Ce^{\lambda|x|}$ ($C = \mathrm{const}$), а на прикладі задачі

$$u_{xxt} - u_t + u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = 0$$

проілюстровано, що покращити цей результат не можна.

Результати аналогічного змісту для лінійних параболічних рівнянь отримано у праці Тихонова [2], де доведено однозначну розв'язність задачі Коші для рівняння теплопровідності за умови, що початкова функція $u_0(x)$ задовольняє умову зростання

$$|u_0(x)| \le Ce^{a|x|^2} \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty.$$

Проте, для певних нелінійних параболічних [3, 4, 5, 6, 7, 8] та псевдопараболічних [9, 10] рівнянь вдалося встановити існування та єдиність розв'язку задач без припущення щодо його поведінки при $|x| \to +\infty$. У цій праці запропоноване нелінійне псевдопараболічне рівняння з виродженням (відсутні похідні третього порядку за частиною змінних), для якого отримано аналогічні результати.

Постановка задачі та деякі допоміжні факти

Нехай Ω° – обмежена область в $\mathbb{R}^m_{x_1,\dots,x_m}$, Ω' – необмежена область в $\mathbb{R}^{n-m}_{x_{m+1},\dots,x_n}$ $(n > m)$ і така, що її можна вичерпати зліченною кількістю підобластей $\Omega'^R = \Omega' \cap B^R$ регулярних в сенсі Кальдерона [11], де $B^R = \{\mathrm{x}' = (x_{m+1},\dots,x_n) \big| |\mathrm{x}'|^2 = x^2_{m+1} + \dots + x^2_n < R,$ $R \in \mathbb{N}\}$. Нехай $0 < T < +\infty$, $\Omega = \Omega^\circ \times \Omega'$, $\Omega^R = \Omega^\circ \times \Omega'^R$, $Q = \Omega \times (0,T)$; $\partial\Omega$ – межа Ω і нехай вона є кусково гладкою. Позначимо $\Omega_\eta = Q \cap \{t = \eta\}$.

Для просторів Лебега і Соболєва в деякій області D використовуватимемо загальноприйняті позначення $L^p(D)$ та $H^1(D)$ відповідно. Нехай $H^1_0(\Omega)$ – замикання множини функцій $C^\infty_0(\Omega)$ за нормою простору $H^1(\Omega)$. Індекс "loc" біля позначення функціонального простору $Y_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ (або $Y_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$) вказуватиме, що елементами цього простору є функції, що належать до $Y\big(\Omega^R\big)$ (відповідно $Y\big(\Omega^R \times (0,T)\big)$) для всіх $R \in \mathbb{N}$; $(\cdot,\cdot)_{Y(\Omega)}$ – скалярний добуток в просторі $Y(\Omega)$. Якщо X – банахів простір, то через $L^p\big((0,T);X\big)$ $(1 \le p < \infty)$ позначатимемо множину всіх вимірних за Бохнером функцій $v : (0,T) \to X$ [11], для яких

$$\|v\|_{L^p\left((0,T);X\right)} = \left(\int\limits_0^T \|v(s)\|^p_X ds \right)^{1/p} < \infty,$$

де $\|\cdot\|_X$ – норма в X. Аналогічно введемо простір $H^1\big((0,T);X\big)$. Нехай

$$H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \left\{ u : u \in H^1(\Omega^R), u\big|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega^R} = 0, \forall R > 0 \right\}.$$

В області Q розглянемо задачу

$$u_t - \sum_{i=1}^m u_{x_i x_i t} - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + |u|^{q-2}u = f(x,t), \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = u_0, \qquad (2)$$

$$u\big|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, \qquad (3)$$

де $q > 2$.

Означення 1. Функцію u називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1) – (3), якщо виконуються такі умови:

1) $u \in L^q_{\text{loc}}(\overline{Q})$; $u \in L^2\big((0,T); H^1_{0,\text{loc}}(\overline{\Omega})\big)$; $\{u, u_{x_j}\} \subset \subset C\big([0,T]; L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega})\big)$ $(j \in \{1,\ldots,m\})$;

2) u задовольняє умову (2) майже скрізь в Ω;

3) для довільної функції $v \in C^1\left([0,T]; C^1_0(\Omega)\right)$ і для майже всіх $\tau \in [0,T]$ справджується інтегральна тотожність

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Bigg[-uv_t - \sum_{i=1}^m u_{x_i} v_{x_i t} + \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i} + +|u|^{q-2}uv - fv \Bigg] dxdt + \int\limits_{\Omega_\tau} \left[uv + \sum_{i=1}^m u_{x_i} v_{x_i} \right] dx - - \int\limits_{\Omega_0} \left[u_0 v + \sum_{i=1}^m u_{0x_i} v_{x_i} \right] dx = 0. \quad (4)$$

Розглянемо допоміжну задачу

$$-\eta w_{\eta t}(x,t) + w_\eta(x,t) = u(x,t),$$

$$w_\eta(x,t_2) = u(x,t_2), \quad x \in \Omega, \quad t_1 \le t \le t_2, \quad \eta > 0. \quad (5)$$

Відомо [11] (т. 1.7, с. 153), що якщо $u \in C\left((t_1,t_2); X\right)$, де X – банахів простір, то формула

$$w_\eta(x,t) = u(x,t_2) e^{\frac{t-t_2}{\eta}} + \frac{1}{\eta} \int\limits_t^{t_2} u(x,\xi) e^{\frac{t-\xi}{\eta}} d\xi \quad (6)$$

визначає диференційовну майже скрізь на (t_1,t_2) функцію $w_\eta \in C\left([t_1,t_2]; X\right)$, яка є єдиним розв'язком задачі (5).

Легко перевірити такі твердження.

Твердження 1. Якщо $u \in L^q\left((t_1,t_2); L^q_{\text{loc}}(\overline{\Omega})\right)$, то існує така послідовність $\eta_k \longrightarrow +0$ при $k \to \infty$, що $w_{\eta_k} \longrightarrow u$ при $k \to \infty$ слабко в $L^q\left((t_1,t_2); L^q_{\text{loc}}(\overline{\Omega})\right)$, $\eta_k w_{\eta_k t} \longrightarrow 0$ при $k \to \infty$ слабко в $L^q\left((t_1,t_2); L^q_{\text{loc}}(\overline{\Omega})\right)$, де w_{η_k} – розв'язки задачі (5).

Твердження 2. Якщо $u \in L^2\left((t_1,t_2); H^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega})\right)$, $u(\cdot,t_2) \in H^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$, то існує послідовність $\eta_k \longrightarrow +0$ при $k \to \infty$ така, що $w_{\eta_k} \longrightarrow u$ при $k \to \infty$ сильно в $L^2\left((t_1,t_2); H^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega})\right)$, де w_{η_k} – розв'язки задачі (5).

Основні результати

Теорема 1. *Нехай* $2 < q < \frac{2(n-m)}{(n-m)-2}$, *якщо* $(n-m) > 2$ *і* $q > 2$, *якщо* $(n-m) \in \{1,2\}$. *Тоді задача (1) – (3) не матиме більше одного узагальненого розв'язку.*

□ *Доведення.* Нехай u^1, u^2 – розв'язки задачі (1) – (3). Для кожного з них запишемо інтегральну рівність (4), віднімемо їх та в отриманій рівності приймемо, що $u = u^1 - u^2$, $v = w_\eta \varphi(\mathrm{x}')$, де w_η – розв'язок задачі (5) при $t_2 = \tau$; $\varphi \ge 0$, $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^{n-m})$. Отримаємо

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Bigg[-uw_{\eta t}\varphi - \sum_{i=1}^m u_{x_i} w_{\eta t x_i}\varphi + + \sum_{i=1}^n u_{x_i} \left(w_{\eta x_i}\varphi + w_\eta \varphi_{x_i}\right) + + \left(|u_1|^{q-2}u_1 - |u_2|^{q-2}u_2\right) w_\eta \varphi \Bigg] dxdt + + \int\limits_{\Omega_\tau} \left[u^2 + \sum_{i=1}^m u^2_{x_i} \right] \varphi dx = 0,$$

а звідси

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \left[u^2 + \sum_{i=1}^m u^2_{x_i} \right] \varphi dx + + \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{i=1}^n u_{x_i} \left(w_{\eta x_i}\varphi + w_\eta \varphi_{x_i}\right) + + \left(|u_1|^{q-2}u_1 - |u_2|^{q-2}u_2\right) w_\eta \varphi \Bigg] dxdt \le 0.$$

За означенням

$$\{u^1, u^2\} \subset C\left([0,T]; H^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega})\right),$$

$$\{u^1_{x_i}, u^2_{x_i}\} \subset C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right).$$

Отже, $u \in L^2\left((0,T); H^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega})\right)$. Функція u задовольняє умови попередніх тверджень. Виберемо таку послідовність $\eta_k \longrightarrow +0$ при $k \to \infty$, що $w_{\eta_k} \longrightarrow u$ при $k \to \infty$ сильно в просторі $L^2\left((0,T); H^1_{\text{loc}}(\overline{\Omega})\right)$ та слабко в просторі $L^q\left((0,T); L^q_{\text{loc}}(\overline{\Omega})\right)$, де w_{η_k} – розв'язки задачі (5). Використовуючи наведені твердження, перейдемо в останній нерівності до границі при $k \to \infty$. Отримаємо

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \left[u^2 + \sum_{i=1}^m u^2_{x_i} \right] \varphi dx + + \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{i=1}^n u_{x_i} \left(u_{x_i}\varphi + u \varphi_{x_i}\right) + + \left(|u_1|^{q-2}u_1 - |u_2|^{q-2}u_2\right) u \varphi \Bigg] dxdt \le 0. \quad (7)$$

Приймемо, що $\varphi(\mathrm{x}') = \psi^\alpha(\mathrm{x}')$, де α – додатна стала, $\psi \in C^1_0(\mathbb{R}^{n-m})$, $\psi \ge 0$. Оцінимо кожен з доданків отриманої нерівності (7). За лемою 1.2 [12]

$$I_1 = \int\limits_0^\eta \int\limits_\Omega \left(|u_1|^{q-2}u_1 - |u_2|^{q-2}u_2\right) u \psi^\alpha dxdt \ge \ge 2^{2-q} \int\limits_0^\eta \int\limits_\Omega |u|^q \psi^\alpha dxdt.$$

Використовуючи нерівність Гельдера, отримаємо

$$I_2 = \int\limits_0^\eta \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i} u \left(\psi^\alpha\right)_{x_i} dxdt \geq$$

$$\geq -\alpha \sum_{i=m+1}^n \int\limits_0^\eta \int\limits_\Omega |u_{x_i}||u||\psi_{x_i}|\psi^{\alpha-1} dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{\alpha\delta_1}{2} \int\limits_0^\eta \int\limits_\Omega \sum_{i=m+1}^n u_{x_i}^2 \psi^\alpha dxdt -$$

$$-\frac{\alpha\delta_1(n-m)}{q} \int\limits_0^\eta \int\limits_\Omega |u|^q \psi^\alpha dxdt -$$

$$-\frac{\alpha(q-2)}{2q\delta_1^{\frac{q+2}{q-2}}}\eta \int\limits_\Omega \psi^{\alpha-\frac{2q}{q-2}} \sum_{i=m+1}^n \left|\psi_{x_i}\right|^{\frac{2q}{q-2}} dx =$$

$$= -\frac{\alpha\delta_1}{2} \int\limits_0^\eta \int\limits_\Omega \sum_{i=m+1}^n u_{x_i}^2 \psi^\alpha dxdt -$$

$$-\frac{\alpha\delta_1(n-m)}{q} \int\limits_0^\eta \int\limits_\Omega |u|^q \psi^\alpha dxdt - \frac{\alpha(q-2)}{2q\delta_1^{\frac{q+2}{q-2}}}\eta\Psi_1,$$

де $\delta_1 > 0$. З (7) та наведених оцінок отримуємо

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega_\tau} \left[u^2 + \sum_{i=1}^m u_{x_i}^2\right]\psi^\alpha dx + \\
&+2\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \left[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + 2^{2-q}|u|^q\right]\psi^\alpha dxdt \leq \\
&\leq \alpha\delta_1 \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \left[\sum_{i=m+1}^n u_{x_i}^2 + \frac{2(n-m)}{q}|u|^q\right]\psi^\alpha dxdt + \\
&+\frac{\alpha(q-2)}{q\delta_1^{\frac{q+2}{q-2}}} T\Psi_1.
\end{aligned} \tag{8}$$

Нехай δ_1, μ_1 такі, що

$$2^{2-q} - \frac{\alpha\delta_1(n-m)}{q} \geq \mu_1 > 0,$$

$$2 - \alpha\delta_1 \geq \mu_1 > 0, \quad \mu_1 \leq 1.$$

Тоді

$$\int\limits_{\Omega_\eta} \left(\sum_{i=1}^m u_{x_i}^2 + u^2\right)\psi^\alpha dx \leq \frac{\alpha(q-2)}{q\mu_1\delta_1^{\frac{q+2}{q-2}}} T\Psi_1,$$

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + |u|^q\right)\psi^\alpha dxdt \leq \frac{\alpha(q-2)}{q\mu_1\delta_1^{\frac{q+2}{q-2}}} T\Psi_1.$$

Приймемо, що

$$\psi(\mathrm{x}') = \begin{cases} \frac{R^2-|\mathrm{x}'|^2}{R}, & 0 \leq |\mathrm{x}'| \leq R, \\ 0, & |\mathrm{x}'| > R. \end{cases}$$

Тоді

$$\psi_{x_i}(\mathrm{x}') = \begin{cases} -\frac{2x_i}{R}, & 0 \leq |\mathrm{x}'| \leq R, m+1 \leq i \leq n, \\ 0, & |\mathrm{x}'| > R \text{ або } i \leq m, \end{cases}$$

$$|\psi| \leq 2R, \quad |\psi_{x_i}| \leq 2.$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \int\limits_\Omega \psi^{\alpha-\frac{2q}{q-2}} \sum_{i=m+1}^n \left|\psi_{x_i}\right|^{\frac{2q}{q-2}} dx \leq \\
&\leq \operatorname{mes}\Omega^\circ \int\limits_{\Omega'^R} (2R)^{\alpha-\frac{2q}{q-2}}(n-m)2^{\frac{2q}{q-2}} d\mathrm{x}' \leq \\
&\leq 2^\alpha(n-m)R^{\alpha-\frac{2q}{q-2}+n-m} P_{(n-m)} \operatorname{mes}\Omega^\circ,
\end{aligned}$$

де $R \in \mathbb{N}$, а $P_{(n-m)}$ – коефіцієнт з рівності

$$\int\limits_{B^R} d\mathrm{x}' = P_{(n-m)}R^{n-m} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!}R^{2k}, & n-m = 2k, \\ \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!}R^{2k+1}, & n-m = 2k+1. \end{cases}$$

Отже,

$$\int\limits_{\Omega_\eta} \left(\sum_{i=1}^m u_{x_i}^2 + u^2\right)\left(\frac{R^2-|\mathrm{x}'|^2}{R}\right)^\alpha dx \leq$$

$$\leq \frac{\alpha T(q-2)2^\alpha(n-m)}{\mu_1 q\delta_1^{\frac{q+2}{q-2}}} R^{\alpha-\frac{2\gamma}{q-2}+n-m} P_{(n-m)} \operatorname{mes}\Omega^\circ,$$

$$\int\limits_0^\eta \int\limits_\Omega \left(|u|^q + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)\left(\frac{R^2-|\mathrm{x}'|^2}{R}\right)^\alpha dxdt \leq$$

$$\leq \frac{\alpha T(q-2)2^\alpha(n-m)}{\mu_1 q\delta_1^{\frac{q+2}{q-2}}} R^{\alpha-\frac{2\gamma}{q-2}+n-m} P_{(n-m)} \operatorname{mes}\Omega^\circ$$

для майже всіх $\eta \in [0, T]$. Оцінимо інтеграли в лівих частинах цих нерівностей знизу через інтеграли по області $\Omega^{R_0} = \Omega^\circ \times \Omega'^{R_0}$, $R_0 < R$, $R_0 \in \mathbb{N}$, тобто,

$$\int\limits_{\Omega_\eta^{R_0}} \left(\sum_{i=1}^m u_{x_i}^2 + u^2\right)(R-R_0)^\alpha dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_\eta} \left(\sum_{i=1}^m u_{x_i}^2 + u^2\right)\left(\frac{R^2-|\mathrm{x}'|^2}{R}\right)^\alpha dx \leq$$

$$\leq \frac{\alpha T(q-2)2^\alpha(n-m)}{\mu_1 q\delta_1^{\frac{q+2}{q-2}}} R^{\alpha-\frac{2\gamma}{q-2}+n-m} P_{(n-m)} \operatorname{mes}\Omega^\circ,$$

$$\int\limits_0^\eta \int\limits_{\Omega^{R_0}} \left(|u|^q + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)(R-R_0)^\alpha dxdt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\eta \int\limits_{\Omega_?} \left(|u|^q + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)\left(\frac{R^2-|\mathrm{x}'|^2}{R}\right)^\alpha dxdt \leq$$

$$\leq \frac{\alpha T(q-2)2^\alpha(n-m)}{\mu_1 q\delta_1^{\frac{q+2}{q-2}}} R^{\alpha-\frac{2\gamma}{q-2}+n-m} P_{(n-m)} \operatorname{mes}\Omega^\circ.$$

Отже,

$$\int\limits_{\Omega_\eta^{R_0}} \left(\sum_{i=1}^{m} u_{x_i}^2 + u^2\right) dx \leq$$
$$\leq \frac{\alpha T(q-2)2^{\alpha}(n-m)}{\mu_1 q \delta_1^{\frac{q+2}{q-2}}} R^{-\frac{2q}{q-2}+n-m} \times$$
$$\times \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\alpha} P_{(n-m)} \mathrm{mes}\,\Omega^{\circ},$$
$$\int\limits_0^{\eta} \int\limits_{\Omega^{R_0}} \left(|u|^q + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\right) dxdt \leq$$
$$\leq \frac{\alpha T(q-2)2^{\alpha}(n-m)}{\mu_1 q \delta_1^{\frac{q+2}{q-2}}} R^{-\frac{2q}{q-2}+n-m} \times$$
$$\times \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\alpha} P_{(n-m)} \mathrm{mes}\,\Omega^{\circ}.$$

Оскільки $(n-m) < \frac{2q}{q-2}$, то для достатньо великих R праву частину цих оцінок можна зробити достатньо малою. Отже, для довільного фіксованого R_0 і для $\eta \in [0,T]$ ми довели єдиність розв'язку в $\Omega^{R_0} \times [0,\eta]$, а отже, встановили єдиність в Q. Теорему доведено. ■

Як допоміжний факт для доведення існування узагальненого розв'язку задачі (1) – (3), доведемо існування узагальненого розв'язку задачі

$$\varepsilon u_{tt} + u_t - \sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i t} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + |u|^{q-2}u =$$
$$= f^*(x,t), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0, \qquad (9)$$

$$u|_{t=0} = u_0^*, \qquad (10)$$

$$u|_{\partial\Omega^* \times (0,T)} = 0, \qquad (11)$$

$$u_t|_{t=0} = 0, \qquad (12)$$

в області $Q^* = \Omega^* \times (0,T)$ (Ω^* – обмежена підобласть області Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega^*$ і нехай надалі $\Omega_\eta^* = Q^* \cap \{t=\eta\}$).

Означення 2. Функцію $u^{*,\varepsilon}$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (9) – (12), якщо:

1) $u^{*,\varepsilon} \in L^q(Q^*)$; $u^{*,\varepsilon} \in L^2\left((0,T); H_0^1(\Omega^*)\right)$; $u_t^{*,\varepsilon} \in L^2(Q^*)$; $u_{x_j t}^{*,\varepsilon} \in L^2(Q^*)$ $(j \in \{1,\ldots,m\})$;

2) $u^{*,\varepsilon}$ задовольняє (10), (12) майже скрізь в Ω^*;

3) для довільної функції v такої, що $v \in C^1\left([0,T]; C_0^1(\Omega^*)\right)$, $v|_{t=T} = 0$ виконується інтегральна тотожність

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^*} \Bigg[-\varepsilon u_t^{*,\varepsilon} v_t + u_t^{*,\varepsilon} v + \sum_{i=1}^{m} u_{x_i t}^{*,\varepsilon} v_{x_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^{*,\varepsilon} v_{x_i} + |u^{*,\varepsilon}|^{q-2} u^{*,\varepsilon} v \Bigg] dxdt =$$
$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^*} f^*(x,t) v\, dxdt. \qquad (13)$$

Твердження 3. Нехай $u_0^* \in H_0^1(\Omega^*) \cap L^q(\Omega^*)$; $f^* \in L^2(Q^*)$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (9) – (12).

□ *Доведення.* Нехай $\{\varphi^{*,k}\}$ – база простору $H_0^1(\Omega^*) \cap L^q(\Omega^*)$, ортонормована стосовно скалярного добутку в $L^2(\Omega^*)$, і кожна з функцій $\varphi^{*,k}$ належить до $C_0^1(\Omega^*)$. Приймемо, що $u^{*,\varepsilon,N} = \sum\limits_{s=1}^{N} \varphi^{*,k}(x) c_k^N(t)$, де c_k^N визначають із задачі Коші

$$\varepsilon \sum_{s=1}^{N} \left(c_s^N\right)'' \int\limits_{\Omega^*} \varphi^{*,s} \varphi^{*,k} dx =$$
$$= -\int\limits_0^{\eta} \int\limits_{\Omega^*} \Bigg[\sum_{s=1}^{N} \left(c_s^N\right)' \varphi^{*,s} \varphi^{*,k} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{N} \left(c_s^N\right)' \varphi_{x_i}^{*,s} \varphi_{x_i}^{*,k} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{N} c_s^N \varphi_{x_i}^{*,s} \varphi_{x_i}^{*,k} +$$
$$+ \Big| \sum_{s=1}^{N} c_s^N \varphi^{*,s} \Big|^{q-2} \sum_{s=1}^{N} c_s^N \varphi^{*,s} \varphi^{*,k} -$$
$$- f^*(x,t) \varphi^{*,k} \Bigg] dxdt \equiv \widehat{\phi}\left(\left(c_s^N\right)', c_s^N, t\right), \qquad (14)$$

$$c_k^N(0) = \left(u_0^*, \varphi^{*,k}\right)_{L^2(\Omega^*)}, \qquad (15)$$

$$\left(c_k^N\right)'(0) = 0. \qquad (16)$$

На підставі теореми Каратеодорі [13] (с. 53) і поданих нижче оцінок існує функція $c^N(t) = \left(c_1^N(t), \ldots, c_N^N(t)\right)$, яка є абсолютно неперервною разом із своєю похідною і яка є розв'язком задачі (14) – (16). Домножимо кожне з рівнянь системи (14) на $\left(c_k^N(t)\right)'$, підсумуємо ці рівняння за k від 1 до N та зінтегруємо по проміжку $[0;\eta]$, $\eta \in (0,T]$. Отримаємо

$$\int\limits_0^{\eta} \int\limits_{\Omega^*} \Bigg[\varepsilon u_{tt}^{*,\varepsilon} u_t + \left(u_t^{*,\varepsilon}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(u_{x_i t}^{*,\varepsilon}\right)^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^{*,\varepsilon} u_{x_i t}^{*,\varepsilon} + |u^{*,\varepsilon}|^{q-2} u^{*,\varepsilon} u_t^{*,\varepsilon} \Bigg] dxdt =$$
$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^*} f^*(x,t) u_t^{*,\varepsilon} dxdt. \qquad (17)$$

З перетворень

$$I_3 = \int\limits_0^{\eta} \int\limits_{\Omega^*} \varepsilon u_{tt}^{*,\varepsilon,N} u_t^{*,\varepsilon,N} dxdt = \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\Omega_\eta^*} \left(u_t^{*,\varepsilon,N}\right)^2 dx,$$

$$I_4 = \int\limits_0^{\eta} \int\limits_{\Omega^*} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^{*,\varepsilon,N} u_{x_i t}^{*,\varepsilon,N} dxdt =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\eta^*} \sum_{i=1}^{n} \left(u_{x_i}^{*,\varepsilon,N}\right)^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0^*} \sum_{i=1}^{n} \left(u_{x_i}^{*,\varepsilon,N}\right)^2 dx,$$

$$I_5 = \int\limits_0^{\eta} \int\limits_{\Omega^*} \left|u^{*,\varepsilon,N}\right|^{q-2} u^{*,\varepsilon,N} u_t^{*,\varepsilon,N} dxdt =$$
$$= \frac{1}{q} \int\limits_{\Omega_\eta^*} \left|u^{*,\varepsilon,N}\right|^q dx - \frac{1}{q} \int\limits_{\Omega_0^*} \left|u^{*,\varepsilon,N}\right|^q dx,$$

$$I_6 = \int\limits_0^{\eta} \int\limits_{\Omega^*} f^*(x,t) u_t^{*,\varepsilon,N} dxdt \leq$$
$$\leq \int\limits_0^{\eta} \int\limits_{\Omega^*} \frac{\delta_2}{2} \left(u_t^{*,\varepsilon,N}\right)^2 dxdt +$$
$$+ \int\limits_0^{\eta} \int\limits_{\Omega^*} \frac{1}{2\delta_2} \left(f^*(x,t)\right)^2 dxdt, \ \delta_2 > 0,$$

та з (17) отримуємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\eta^*}\left[\varepsilon\left(u_t^{*,\varepsilon,N}\right)^2+\sum_{i=1}^n\left(u_{x_i}^{*,\varepsilon,N}\right)^2+\frac{2}{q}\left|u^{*,\varepsilon,N}\right|^q\right]dx+$$
$$+\int\limits_0^\eta\int\limits_{\Omega^*}\left[\left(1-\frac{\delta_2}{2}\right)\left(u_t^{*,\varepsilon,N}\right)^2+\sum_{i=1}^m\left(u_{x_it}^{*,\varepsilon,N}\right)^2\right]dxdt\le$$
$$\le\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^*}\left[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^{*,\varepsilon,N}+\frac{2}{q}\left|u^{*,\varepsilon,N}\right|^q\right]dx+$$
$$+\frac{1}{2\delta_2}\int\limits_0^\eta\int\limits_{\Omega^*}\left(f^*(x,t)\right)^2dxdt. \qquad (18)$$

Вибравши $\delta_2\le 1$, отримаємо, що
$\|u_t^{*,\varepsilon,N}\|$ обмежена в $L^2(Q^*)$,
$\|u^{*,\varepsilon,N}\|$ обмежена в $L^\infty((0,T);L^q(\Omega^*))$,
$\|u_{x_jt}^{*,\varepsilon,N}\|$ обмежена в $L^2(Q^*)$, $(j\in\{1,\dots,m\})$,
$\|u_{x_i}^{*,\varepsilon,N}\|$ обмежена в $L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega^*)\right)$, $(i\in\{1,\dots,n\})$.

Отже, з $\{u^{*,\varepsilon,N}\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{*,\varepsilon,N_k}\}$, що при $N_k\to\infty$
$u^{*,\varepsilon,N_k}\to u^{*,\varepsilon}$ в $L^\infty((0,T);L^q(\Omega^*))$ $*$-слабко,
$u_t^{*,\varepsilon,N_k}\to u_t^{*,\varepsilon}$ в $L^2(Q^*)$ слабко,
$u_{x_i}^{*,\varepsilon,N_k}\to u_{x_i}^{*,\varepsilon}$ в $L^\infty\left((0,T);L^2(\Omega^*)\right)$ $*$-слабко $(i\in\{1,\dots,n\})$,
$u_{x_jt}^{*,\varepsilon,N_k}\to u_{x_jt}^{*,\varepsilon}$ в $L^2(Q^*)$ слабко $(i\in\{1,\dots,m\})$,
$\left|u^{*,\varepsilon,N_k}\right|^{q-2}u^{*,\varepsilon,N_k}\to\zeta$ в $L^{\frac{q}{q-1}}(Q^*)$ слабко. Користуючись методом монотонності [14] (с. 171), легко показати, що $\zeta=|u^{*,\varepsilon}|^{q-2}u^{*,\varepsilon}$.

Домножимо кожне з рівнянь системи (14) на довільну функцію $p^k(t)$ з простору $C^\infty([0,T])$, $p^k(T)=0$, підсумуємо усі ці рівняння за k та проінтегруємо за змінною t по відрізку $[0,T]$. Приймаючи, що $v=\sum\limits_{k=1}^N p^k(t)\varphi^{*,k}(x)$, отримаємо

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^*}\left[-\varepsilon u_t^{*,\varepsilon,N}v_t+u_t^{*,\varepsilon,N}v+\sum_{i=1}^m u_{x_it}^{*,\varepsilon,N}v_{x_i}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^{*,\varepsilon,N}v_{x_i}+\left|u^{*,\varepsilon,N}\right|^{q-2}u^{*,\varepsilon,N}v\right]dxdt=$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega^*}f^*(x,t)vdxdt. \qquad (19)$$

Зазначимо, що рівність (19) виконується для довільної $v\in C^1\left([0,T];C_0^1(\Omega^*)\right)$, $v\big|_{t=T}=0$. Перейдемо в цій рівності до границі при $N\to+\infty$, враховуючи наведені вище міркування, і одержимо рівність

$$\int\limits_0^\eta\int\limits_{\Omega^*}\left[-\varepsilon u_t^{*,\varepsilon}v_t+u_t^{*,\varepsilon}v+\sum_{i=1}^m u_{x_it}^{*,\varepsilon}v_{x_i}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^{*,\varepsilon}v_{x_i}+|u^{*,\varepsilon}|^{p-2}u^{*,\varepsilon}v\right]dxdt=$$
$$=\int\limits_0^\eta\int\limits_{\Omega^*}f^*(x,t)vdxdt,$$

тобто рівність (13) є правильною. Виконання (11) випливає з побудови функції $u^{*,\varepsilon}$. Покажемо, що функція $u^{*,\varepsilon}$ задовольняє умови (10) та (12). Оскільки $u^{*,\varepsilon,N}\in L^q(Q^*)$, $u_t^{*,\varepsilon,N}\in L^2(Q^*)$, то $u^{*,\varepsilon,N}\in C\left([0,T];L^2(\Omega^*)\right)$ [14] (лема 1.2, с. 20). Проте $u^{*,\varepsilon,N}\big|_{t=0}\to u_0^*$ сильно в $L^q(\Omega^*)\cap H_0^1(\Omega^*)$, а тому функція $u^{*,\varepsilon}$ задовольняє умову (10). Виконання умови (12) випливає з рівності (19), тобто $u^{*,\varepsilon}$ є узагальненим розв'язком задачі (9) – (12). Твердження доведено. ■

Твердження 4. За умов твердження 3 існує узагальнений розв'язок задачі (9) – (11) при $\varepsilon=0$.

□ *Доведення.* Зазначимо, що оцінка (18) є правильною для функції $u^{*,\varepsilon}$ і права частина цієї оцінки не залежить від ε. Тому ми можемо вибрати підпослідовність $\{u^{*,\varepsilon_m}\}$ таку, що $u^{*,\varepsilon_m}\to u^*$ в $L^q(Q^*)$ слабко, $u_{x_i}^{*,\varepsilon_m}\to u_{x_i}^*$ в $L^2(Q^*)$ $(i\in\{1,\dots,n\})$ слабко, $u_{x_jt}^{*,\varepsilon_m}\to u_{x_jt}^*$ в $L^2(Q^*)$ $(j\in\{1,\dots,m\})$ слабко і $u_t^{*,\varepsilon_m}\to u_t^*$ в $L^2(Q^*)$ слабко при $\varepsilon_m\to+0$. Легко показати, що $|u^{*,\varepsilon_m}|^{q-2}u^{*,\varepsilon_m}\to|u^*|^{q-2}u^*$ в $L^{\frac{q}{q-1}}(Q^*)$ слабко при $\varepsilon_m\to+0$. Отже, перейшовши в (13) до границі при $\varepsilon_m\to+0$, отримаємо, що u^* є розв'язком (9) – (11) при $\varepsilon=0$. Твердження доведено. ■

Теорема 2. *Нехай* $2<q<\frac{2(n-m)}{n-m-2}$, *якщо* $n-m>2$ *і* $q>2$, *якщо* $(n-m)\in\{1,2\}$; $u_0\in H_{0,\mathrm{loc}}^1(\overline{\Omega})$, $f\in L_{\mathrm{loc}}^2\left(\overline{Q}\right)$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1) – (3).*

□ *Доведення.* У кожному з циліндрів $Q^\tau=\Omega^\tau\times(0,T)$ $(\Omega^\tau=\Omega^\circ\times\Omega'^\tau,\ \tau\in\mathbb{N})$ розглянемо задачу

$$u_t-\sum_{i=1}^m u_{x_ix_it}-\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}+|u|^{q-2}u=f^\tau(x,t), \qquad (20)$$

$$u|_{t=0}=u_0^\tau,\quad u|_{\partial\Omega^\tau\times(0,T)}=0, \qquad (21)$$

де f^τ – звуження функції f на Q^τ відповідно, тобто

$$f^\tau(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & (x,t)\in Q^\tau,\\ 0, & (x,t)\in Q\setminus Q^\tau.\end{cases}$$

За u_0^τ вибрано $u_0(x)\zeta^\tau(|\mathrm{x}'|)$, де функція ζ^τ з $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ така, що $\zeta^\tau(r)=1$ при $|r|\le\tau-\delta$, $\zeta^\tau(r)=0$ при $|r|\ge\tau$, $0\le\zeta^\tau(r)\le1$ при $\tau-\delta<|r|<\tau$; $\delta\in(0,1)$.

Задача (20), (21) має узагальнений розв'язок u^τ такий, що
$u^\tau\in L^q(Q^\tau)$, $u_{x_i}^\tau\in L^2(Q^\tau)$ $(i\in\{1,\dots,n\})$,
$u_t^\tau\in L^2(Q^\tau)$, $u_{x_jt}^\tau\in L^2(Q^\tau)$ $(j\in\{1,\dots,m\})$.
Продовжимо його нулем на всю область Q. Тоді рівність

$$\int\limits_0^\eta\int\limits_\Omega\left[u_t^\tau v+\sum_{i=1}^m u_{x_it}^\tau v_{x_i}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^\tau v_{x_i}+|u^\tau|^{q-2}u^\tau v\right]dxdt=$$
$$=\int\limits_0^\eta\int\limits_\Omega f^\tau(x,t)vdxdt \qquad (22)$$

є правильною для всіх v з носієм $\mathrm{supp}v\subset Q^\tau$ таких, що $v\in L^2\left((0,T);H_{0,\mathrm{loc}}^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)\cap L^q\left((0,T);L_{\mathrm{loc}}^q\left(\overline{\Omega}\right)\right)$. Виберемо довільне $R\in\mathbb{N}$. Запишемо рівність (22) для u^{τ_1} та u^{τ_2}, де $\tau_1>R$, $\tau_2>R$, віднімемо ці рівності і в отриманій різниці приймемо, що $u^{\tau_1,\tau_2}=u^{\tau_1}-u^{\tau_2}$,

$v = u^{\tau_1,\tau_2}\psi^{\alpha}(x')$, $\alpha > 0$, ψ – неперервно диференційовна функція з носієм, що міститься в кулі B^R. Оскільки

$$I_7 = \int_0^\eta \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i}^{\tau_1,\tau_2} \left(u^{\tau_1,\tau_2}\psi^\alpha\right)_{x_i} dxdt =$$

$$= \int_0^\eta \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 \psi^\alpha + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=m+1}^n u_{x_i}^{\tau_1,\tau_2} u^{\tau_1,\tau_2} \alpha \psi^{\alpha-1}\psi_{x_i} \right] dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{\alpha(q-2)}{2q\delta_3^{\frac{q+2}{q-2}}} T\Psi_1 + \int_0^\eta \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{\alpha\delta_3}{2} \sum_{i=m+1}^n \left(u_{x_i}^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 - \frac{\alpha(n-m)\delta_3}{q} \left|u^{\tau_1,\tau_2}\right|^q \right] \psi^\alpha dxdt,$$

$$I_8 = \int_0^\eta \int_\Omega \left(\left|u^{\tau_1}\right|^{q-2} u^{\tau_1} - \left|u^{\tau_2}\right|^{q-2} u^{\tau_2} \right) \times$$

$$\times u^{\tau_1,\tau_2}\psi^\alpha dxdt \geq 2^{2-q} \int_0^\eta \int_\Omega \left|u^{\tau_1,\tau_2}\right|^q \psi^\alpha dxdt,$$

де $\delta_3 > 0$, то з (22) випливає, що

$$\int_0^\eta \int_\Omega \left[\left(2^{2-q} - \frac{\alpha(n-m)\delta_3}{q} \right) \left|u^{\tau_1,\tau_2}\right|^q + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{\alpha\delta_3}{2}\right) \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 \psi^\alpha \right] dxdt +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} \left[\sum_{i=1}^m \left(u_{x_i}^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 + \left(u^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 \right] \psi^\alpha dx \leq \frac{\Psi_2}{2}, \quad (23)$$

де $\Psi_2 = \frac{\alpha(q-2)}{q\delta_3^{\frac{q+2}{q-2}}} T\Psi_1$.

Якщо вибрати δ_3 та μ_2 з умов

$$2^{3-q} - \frac{2\alpha(n-m)\delta_3}{q} \geq \mu_2 > 0,$$

$$2 - \alpha\delta_3 \geq \mu_2 > 0, \qquad \mu_2 \leq 1,$$

то

$$\int_{\Omega_\eta} \left(\sum_{i=1}^m \left(u_{x_i}^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 + \left(u^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 \right) \psi^\alpha dx \leq \frac{\Psi_2}{\mu_2},$$

$$\int_0^\eta \int_\Omega \left(\left|u^{\tau_1,\tau_2}\right|^q + \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 \right) \psi^\alpha dxdt \leq \frac{\Psi_2}{\mu_2}.$$

Нехай ψ – функція, описана в теоремі 1, $R_0 < R$, $R_0 \in \mathbb{N}$, тоді

$$\int_{\Omega_\eta^{R_0}} \left(\sum_{i=1}^m \left(u_{x_i}^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 + \left(u^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 \right) dx \leq$$

$$\leq \frac{\alpha T(q-2)2^\alpha(n-m)}{\mu_2 q \delta_3^{\frac{q+2}{q-2}}} R^{-\frac{2q}{q-2}+n-m} P_{(n-m)},$$

$$\int_0^\eta \int_{\Omega^{R_0}} \left(\left|u^{\tau_1,\tau_2}\right|^q + \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^{\tau_1,\tau_2}\right)^2 \right) dxdt \leq$$

$$\frac{\alpha T(q-2)2^\alpha(n-m)}{\mu_2 q \delta_3^{\frac{q+2}{q-2}}} R^{-\frac{2q}{q-2}+n-m} P_{(n-m)}.$$

З умов теореми та вибору $R > R_0$ випливає, що послідовності $\{u^\tau\}$ та $\{u_{x_i}^\tau\}$ є фундаментальними в просторі $C\left([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}\left(\overline{\Omega}\right)\right)$. Враховуючи це, перейдемо в рівності (22) до границі при $\tau \to +\infty$ і одержимо, що u є узагальненим розв'язком задачі (1) – (3). Теорему доведено. ■

Зауваження 1. Для спрощення викладень і для більшої прозорості доведень рівняння (1) записано зі сталими коефіцієнтами. Проте для системи

$$u_t - \sum_{i,j=1}^m \left(A_{ij}(x,t)u_{x_i t}\right)_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x,t)u_{x_i}\right)_{x_j} +$$

$$+\mathcal{D}(x,t,u;p) = F_0(x,t) - \sum_{i=1}^n \left(F_i(x,t)\right)_{x_i},$$

де $u = (u_1, \ldots, u_s)^T$,
$F_j(x,t) = (F_{j_1}(x,t), \ldots, F_{j_s}(x,t))^T$ $(j = 0, \ldots, n)$,

$$\mathcal{D}(x,t,v;p) =$$

$$= \begin{cases} (d_1(x,t)|v_1|^{p-2}v_1, \ldots, d_s(x,t)|v_s|^{p-2}v_s)^T, & p > 2, \\ D(x,t)v, & p = 2, \end{cases}$$

де d_i – скалярні функції; A_{ij}, B_{ij}, D – квадратні матриці порядку s,

всі результати роботи є правильними за деяких припущень на коефіцієнти системи.

Висновки

У цій роботі розглянуто нелінійне псевдопараболічне рівняння з виродженням у необмеженій (за частиною просторових змінних) області. Використовуючи зрізаючу функцію спеціального вигляду, доведено існування та єдиність розв'язку вказаного рівняння з початковими умовами та умовами Діріхле на межі.

При доведенні існування розв'язку використано метод монотонності [14] та результати праці [11] про простори інтегровних за Бохнером функцій. Доведено, що класи коректності не залежать від поведінки розв'язку при $|x| \to +\infty$.

Література

[1] *Rundell William.* The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – 76, N. 2. – P. 253–257.

[2] *Тихонов А.Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Математический сборник. – 1935. –Т. 42. N 2. С. 199–216.

[3] *Калашников А.С.* О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1976. – Т. 16, N 3. – С. 599–606.

[4] *Brezis H.* Semilinear equations in R^N without conditions at infinity // Appl. Math. Optim. – 1984. – Vol. 12, N 3. – P. 271–282.

[5] *Бокало Н.М.* Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сибирс. матем. журн. – 1993. – Т. 34, N 4. – С. 620—627.

[6] *Бокало Н.М.* Краевые задачи для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сибирс. матем. журн. – 1996. – Т. 37, N 5. – С. 977–985.

[7] *Гладков А.Л.* Об уравнении фильтрации-абсорбции с переменным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37, № 1. – С. 42–47.

[8] *Gladkov A., Guedda M.* Diffusion-absorption equation without growth restrictions on the data at infinity // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 274, № 1. – P. 16–37.

[9] *Доманська Г.П.* Про існування розв'язку мішаної задачі для однієї псевдопараболічної системи в необмеженій області // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 27–33.

[10] *Domans'ka G.P., Lavrenyuk S.P.* The initial-boundary value problem for nonlinear pseudoparabolic system // Математичні Студії. – 2002. – V. 17, В 2. – P. 175-188.

[11] *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

[12] *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды семинара имени И.Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3–44.

[13] *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 475 с.

[14] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 608 с.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR PSEUDOPARABOLIC DEGENERATE EQUATION

H.P. Domanska

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universytetska Str., 79001, Lviv, Ukraine

The initial boundary value problem for nonlinear pseudoparabolic degenerate equation in an unbounded (in space variables) domain is considered. The existence and uniqueness of the generalized solution are obtained without any conditions if$|x| \to +\infty$.

Keywords: nonlinear pseudoparabolic equation, degeneration

2000 MSC: 35K70

UDK: 517.95