

ЖИТТЄВИЙ І ТВОРЧИЙ ШЛЯХ ГЕНІАЛЬНОГО УКРАЇНСЬКОГО МАТЕМАТИКА ГЕОРГІЯ ВОРОНОГО

М. Л. Горбачук^a, Б. Й. Пташник^b, В. С. Ільків^c

^aІнститут математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, 01004, Київ, Україна

^bІнститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
вул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна

^cНаціональний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 30 жовтня 2017 р.)

Висвітлено життєвий і творчий шлях геніального українського вченого, світової слави математика Георгія Вороного¹.

Ключові слова: аналітична теорія чисел, паралелоєдр, діаграма Вороного.

2000 MSC: 01A70

УДК: 51(09)

Глибина і важливість обширних досліджень Вороного залишили глибокий слід у сучасній теорії чисел.

Б. Делоне

Видатний український математик Георгій Вороний — мабуть, одна із найяскравіших особистостей в історії математики кінця XIX – початку XX століть. Його наукові праці, які визнали геніальними ще його сучасники, стосувались, переважно, теорії чисел, яку великий Гаусс назвав царицею математики.

Теорія чисел належить до найдавніших математичних наук.

Глибокі результати у цій галузі одержала ще піфагорійська школа (580–500 рр. до н.е.), головна теза якої була такою: „Суть речей — числа, сила чисел проявляється в усіх діяннях і думках людства, в усіх ремеслах і музиці“. Найважливіші досягнення з теорії чисел стародавнього періоду підсумовані в сьомій та десятій книгах „Початків“ Евкліда й „Арифметиці“ Діофанта — величезних наукових трактатах грецько-римської античності.

Першим, хто збентежив світ своїми арифметичними дослідженнями в епоху європейського Відродження, був Ферма. Теореми, які він сформулював без доведень, зацікавили багатьох математиків світу. Чимало зусиль було витрачено, щоб їх довести. Та пощастило лише вибраним — Ейлерові, Лагранжу та Лежандру. У 1801 р. вийшла знаменита книга Гаусса „Арифметичні дослідження“, у якій теорію чисел уперше викладено вже як струнку науку із власними методами і проблемами. Книга справила величезний вплив на розвиток цієї теорії впродовж усього століття, а закладені в ній ідеї — на всю математику (так звана епоха арифметизації математики). Дослідження ж Діріхле, Рімана, Чебишова,

Дедекінда, Куммера, Кронекера, Ерміта, Гільберта та ін. перетворили теорію чисел на одну з основних галузей сучасної математики. Вирішення важкої проблеми теорії чисел — неабияка честь для математика.

Теорія чисел складається із трьох гілок — аналітичної, алгебричної та геометричної. Г. Вороний працював у всіх трьох напрямках, розв’язавши у кожному задачі принципового значення. За висловом Б. Делоне, він, поряд з Г. Мінковським, є творцем геометричної теорії чисел, а його робота 1903 р. про кількість цілочислових точок під гіперболою — віха, з якої починається сучасна аналітична теорія чисел.

Г. Вороний завжди проникав глибоко у суть проблем і досягав успіху, застосовуючи нові методи. Другою характерною рисою його досліджень є їхня алгоритмічна спрямованість, не поширена серед математиків цього профілю. Третя і, можливо, найголовніша особливість його творчості — гармонійне поєднання талантів геометра і аналітика.

За своє коротке життя (лише 40 років) Г. Вороний написав чимало: шість великих мемуарів та шість статей, опублікованих протягом 1890–1908 рр. Вони залишили істотний слід у сучасній теорії чисел глибиною та значущістю результатів, що містяться в них. Г. Вороного справедливо вважають найбільшим арифметиком своєї епохи.

Феномен Г. Вороного полягає ще й у тому, що праці його, написані століття тому, не втратили актуальності і в наш час. Навпаки — майже всі роботи вченого знаходять застосування у сучасних дослідженнях, зокрема, в різних галузях прикладних наук: кристалографії, фізиці, астрономії, хімії, мікробіології, комп’ютерній графіці, проблемах штучного інтелекту, проблемах розпізнавання образів, офтальмології. Більш як тридцять років тому в науковій термінології почали широко вживати та-

¹Стаття подана до друку у 2008 р. за життя авторів Мирослава Львовича Горбачука та Богдана Йосиповича Пташника. З незалежних від авторів видавничо-технічних причин публікується лише тепер.

кі терміни, як „діаграма Вороного“, „клітина Вороного“, „розбиття Вороного“, „мозаїка Вороного“. В Англії поняття діаграми Вороного („Voronoi diagram“) введене у програму шкільної освіти.

Г. Вороний народився 16 (28) квітня 1868 р. в селі Журавка Полтавської губернії (нині Чернігівська область) у садибі свого батька Феодосія у мальовничому куточку України. Впродовж усього свого життя він не поривав зв'язків із батьківською хатою, часто приїздив туди – ще гімназистом, студентом, уже професором. Ще й дотепер можна почути приємні спогади односельців про сердечну й дуже порядну родину Вороних. Середню освіту Георгій здобув у Бердянській (до п'ятого класу) та Прилуцькій гімназіях. Вже гімназистом виявив неабиякі математичні здібності. 1885 р. він вступив до Петербурзького університету на математичне відділення. На той час це був найкращий математичний заклад як щодо програми навчання, так і щодо рівня викладацького складу.

У 1889 р. Г. Вороний блискуче склав випускні іспити і його залишили при університеті для здобуття звання професора. Цього ж року одружився з Ольгою Крицькою, землячкою, дорогою і вірною на все життя. Хоч найбільше часу Г. Вороний віддавав поклику свого серця – математиці, демократичний дух виховання, настанови батька, до якого Георгій ставився з великою шаною і повагою, зробили свою справу. Він ніколи не був байдужим до долі рідного народу, а його ставлення до державного режиму було однозначне. „Наш час тяжкий, ми – не що інше, як жертви жакливого режиму. Тепер не можна говорити прямо навіть невинних речей, відразу потрапиш у руки серцевидців“, – писав він про ті часи у своєму щоденнику² 29 березня 1887 р.

У 1894 р. Г. Вороний захистив магістерську дисертацію „Про цілі алгебричні числа, що залежать від кореня рівняння третього степеня“ і був призначений професором Варшавського університету при кафедрі чистої математики. З осені 1898 р. Г. Вороний працював також професором Варшавського політехнічного інституту, був деканом механічного факультету. У 1896 р. він подав до захисту докторську дисертацію „Про одне узагальнення алгоритму неперервних дробів“ і блискуче захистив її 6 квітня 1897 р. Дослідження, виконані в обох дисертаціях, були відзначені премією ім. акад. Буняковського Петербурзької академії наук.

Ім'я Г. Вороного стає відомим у наукових колах. Його творчу і педагогічну діяльність високо оцінювали математики. У 1898 р. Московське математичне товариство обрало його своїм членом. Він встановлює наукові контакти з багатьма математиками світу. В 1904 р. брав участь у Міжнародному конгресі математиків у Гайдельберзі, де виступив із двома науковими доповідями, а також зустрівся з близьким за тематикою Г. Мінковським, котрий шанобливо і з великим зацікавленням поставився до українського вченого. Діяльність Г. Вороного як науковця і педагога продовжувалась у стінах Варшав-

ського університету з невеличкими перервами аж до останніх днів його життя.

У 1907 р. Г. Вороного обрали членом-кореспондентом Петербурзької академії наук фізико-математичного відділення. Ця звістка застала його в Новочеркаську. У зв'язку з революційними подіями 1905–1907 рр. університет і політехнічний інститут у Варшаві було закрито. Групу професорів цих вищих шкіл (серед них Вороного) направили до Новочеркаська для створення там Донського політехнічного інституту. Г. Вороний виконував обов'язки декана механічного факультету. Несприятливі умови життя в Новочеркаську спричинили тяжке загострення його недуги (жовчнокам'яної хвороби).

Восени 1908 р. заняття у Варшавському університеті поновилися і Г. Вороний повернувся до Варшави. Наприкінці жовтня хвороба різко загострилася і 7 (20) листопада 1908 р. Георгія Вороного не стало. Згідно із заповітом його поховали в рідній Журавці.

Передчасна смерть Г. Вороного була великою втраченою для математичної науки. Короткий некролог у газеті „Правительственный весник“ сповістив від Академії наук, що „помер Георгій Феодосійович Вороний, людина колосальних математичних обдарувань і вельми видатна величина серед не лише вітчизняних, але й іноземних учених-математиків ... Глибокі математичні знання поєднувались в особі покійного з визначним лекторським талантом“. Невдовзі стриманий на похвали Д. Граве у відомому курсі алгебри сказав стосовно досліджень Г. Вороного, що „передчасна смерть обірвала наукову діяльність, що носила печать геніальності“.

СПИСОК НАУКОВИХ ПРАЦЬ ГЕОРГІЯ ВОРОНОГО

1890

1. *О числах Бернулли*. Сообщения Харьковского математического общества. – Т. II. – С. 129–148. Собр. соч.³, т. I (1952), С. 7–23.

1894

2. *О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения 3-й степени*: магистерская дис. – С.-Петербург. Собр. соч., т. I (1952), С. 25–195.

1896

3. *Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей*: докторская дис. – Варшава. Собр. соч., т. I (1952), С. 197–391.

1898

4. *О числе корней сравнения 3-й степени при простом модуле*: дневник X съезда русских естествоиспытателей и врачей. – Киев. – С. 329. Собр. соч., т. III (1953), С. 8.

²Щоденник Г. Вороного зберігається в Інституті рукопису Національної бібліотеки України ім. В. Вернадського.

³Див. [2].

1899

5. *Об определении суммы квадратичных вычетов простого числа p вида $4m + 3$ при помощи чисел Бернулли: протоколы С.-Петербургского математического общества.* – С.-Петербург.⁴
Собр. соч., т. III (1953), С. 7.

1902

6. *Расширение понятия о пределе суммы членов бесконечного ряда: дневник XI съезда русских естествоиспытателей и врачей.* – С.-Петербург. – С. 60–61.
Собр. соч., т. III (1953), С. 9–10.

1903

7. *Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques.* J. reine angew. Math.⁵ – В. CXXVI, Heft 4. – P. 241–282.
Об одной задаче из теории асимптотических функций. Собр. соч., т. II (1952), С. 5–49.

1904

8. *Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries.* Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. – (3), XXI. – P. 203–267, 459–533.
Об одной трансцендентной функции и ее приложениях к суммированию некоторых рядов. Собр. соч., т. II (1952), С. 51–165.

1905

9. *Sur une propriété du discriminant des fonctions entières.* Verh. III Intern. Math. Kongr. in Heidelberg.⁶ – Leipzig, 1905. – P. 186–189.
Об одном свойстве дискриминанта целых функций. Собр. соч., т. III (1953), С. 12–15.
10. *Sur le développement à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles $f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$, où $pm^2 + 2qmn + rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers.* Verh. III Intern. Math. Kongr. in Heidelberg. – Leipzig, 1905. – P. 241–245.
О разложении посредством цилиндрических функций двойных сумм $f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$, где $pm^2 + 2qmn + rn^2$ положительная форма с целыми коэффициентами. Собр. соч., т. II (1952), С. 166–170.

1907–1908

11. *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premier Mémoire.*

Sur quelques propriétés des formes quadratiques positive parfaites. J. reine angew. Math. – 133, Heft 2 (1907). – P. 97–156, Heft 3 (1908). – P. 157–178.
Новые приложения непрерывных параметров к теории квадратичных форм. Первый мемуар. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм. Собр. соч., т. II (1952), С. 171–238.

1908–1909

12. *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs.* J. reine angew. Math. – 134, Heft 3 (1908). – P. 198–246, Heft 4 (1908). – P. 247–287.

Introduction (198–211); Première partie. Partition uniforme de l'espace analytique à n dimensions à l'aide des translations d'un même polyèdre convexe (212–287).

136, Heft 2 (1909). – P. 67–178.

Seconde partie. Domaines de formes quadratiques correspondant aux différents types de paralléloèdres primitifs.

Новые приложения непрерывных параметров к теории квадратичных форм. Второй мемуар. Исследование о примитивных параллелоэдрах. Собр. соч., т. II (1952), С. 239–368.

Часть I. Правильное разбиение аналитического пространства n измерений с помощью переносов одного и того же выпуклого многогранника (250–300).

Часть II. Области квадратичных форм, соответствующие различным типам примитивных параллелоэдров (301–368).

13. *Заметки о неопределенных квадратичных формах.* Укр. матем. журн. – 1951. – Т. III, № 3. – С. 240–271.
Собр. соч., т. III (1953), с. 84–113.
14. *О неопределенных квадратичных формах.* Укр. матем. журн. – 1951. – Т. III, № 3. – С. 272–278.
Собр. соч., т. III (1953), с. 114–120.⁷

Наукова спадщина Г. Вороного складається із шести великих за обсягом мемуарів, трьох статей з теорії чисел, опублікованих ще за життя, семи повідомлень на з'їздах і конгресах та неопублікованих архівних матеріалів. Завдяки старанням працівників Інституту математики АН УРСР на чолі з Б. Гнеденком та Й. Погребиським,

⁴Цю доповідь Г. Вороний зробив 15 грудня 1890 року.

⁵Journal für reine und angewandte Mathematik – журнал, який заснував у 1826 р. німецький математик А. Крель (A. L. Crelle).

⁶Vorlesungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg.

⁷Дві останні статті списку виявлено серед матеріалів архівного відділу Наукової бібліотеки ім. В. Вернадського під час підготовки до друку повного зібрання творів Г. Вороного.

майже всі праці Г. Вороного стали доступними, оскільки зібрані в тритомному виданні [2]. Їх прокоментували відомі математики Венков, Делоне, Лінник, Чудаков та Шафаревич. Глибокий аналіз його творів та їх подальший розвиток подано в [6, 10, 4, 5] та статті А. Шінцеля в [3, с. 43–47].

За ініціативи дирекції Інституту математики НАН України та його співробітниці Г. Ситої⁸ в Києві проведено чотири міжнародні наукові конференції (1993, 1998, 2003, 2008), присвячені Г. Вороному, на які з'їхалось чимало видатних математиків з усього світу, котрі активно продовжують розвивати напрями, започатковані в його роботах, та застосовують їх до різноманітних конкретних задач техніки й природознавства⁹.

Перший результат Г. Вороного (1890), отриманий ще в студентські роки, стосувався чисел Бернуллі – послідовності раціональних чисел B_k , знайденої Я. Бернуллі в зв'язку з обчисленням суми степенів натуральних чисел:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^n C_{n+1}^s B_s m^{n+1-s}.$$

Г. Вороному вдалося виявити фундаментальну властивість чисел Бернуллі, яка згодом отримала назву *конгруенції Вороного*, а саме: він довів, що якщо $B_{2m} = P_{2m}/Q_{2m} - 2m$ -е число Бернуллі та P_{2m} , Q_{2m} – взаємно прості, то для довільних взаємно простих чисел N та b справедливе порівняння (конгруенція)

$$(b^{2m}-1)P_{2m} \equiv 2mb^{2m-1}Q_{2m} \sum_{s=1}^{N-1} s^{2m-1} \left[\frac{sb}{N} \right] \pmod{N},$$

де $[a]$ – ціла частина числа a .

Конгруенція Вороного має численні модифікації та узагальнення, вивчення яких триває і в наш час. Чеський математик Ш. Порубскі в оглядовій статті, поміщеній у [3, с. 48–77], дав огляд різних форм, яких набувало доведення конгруенції Г. Вороного, окресливши деякі напрями її застосувань. Зокрема, у 1978 р. Метсанкіла [16] запропонував оригінальний метод побудови узагальнень конгруенції Вороного (за модулем довільного натурального степеня числа N).

Головним результатом дисертаційних робіт Г. Вороного був опис загального кубічного поля цілих алгебричних чисел та побудова алгоритму для обчислення основних його одиниць як від'ємного, так і додатного дискримінанта, який згодом отримав назву *алгоритм Вороного*. Для квадратичного поля питання вирішив ще в кінці XVIII ст. Лагранж; істотну роль відіграло розвинення ірраціональностей другого степеня у неперервний періодичний дріб. Узагальнення алгоритму неперервних дробів марно шукали впродовж усього XIX ст. найкращі математики Європи.

Лише через 42 роки алгоритм Вороного заново відкрив німецький математик Булліг [14]; узагальнення цього алгоритму запропонував у 1985 р. німецький математик Бухман [13].

⁸Нині Галина Сита – доцент Національного педагогічного університету імені Михайла Драгоманова.

⁹П'яту і шосту міжнародні наукові конференції проведено у Києві (2013, 2018).

На подальший розвиток аналітичної теорії чисел істотно вплинув мемуар Г. Вороного „Про одну задачу теорії асимптотичних функцій“ (1903), в якому запропоновано принципово новий метод для знаходження членів асимптотичного розкладу арифметичних функцій. У 1849 р. Діріхле розглянув задачу про наближене (за великих n) обчислення суми $S(n) = \tau(1) + \dots + \tau(n)$, де $\tau(k)$ – кількість дільників числа k . Геометрично сума $S(n)$ означає кількість точок (x, y) з цілими координатами, для яких $x > 0$, $y > 0$, $xy \leq n$, тобто число цілих точок у криволінійному трикутнику, обмеженому координатними півосями $x > 0$, $y > 0$ та гіперболою $xy = n$ (за винятком точок на координатних осях). Асимптотична формула Діріхле для $S(n)$ має вигляд

$$S(n) = n(\log n + 2C - 1) + K_n \sqrt{n},$$

де величина K_n обмежена за $n \rightarrow \infty$, $C = 0.57721\dots$ – стала Ейлера.

Уточнення цього результату виявилось доволі нетривіальним. Саме Г. Вороному вдалося замінити у формулі Діріхле $O(\sqrt{n})$ на $O(\sqrt[3]{n} \log n)$, застосувавши оригінальний метод підрахунку, з використанням формули підсумовування Соніна, дробів Фарея та унімодулярних інтегральних перетворень. *Формула підсумовування Вороного, тотожність Вороного*, що ґрунтуються на цьому методі, стали визначальними для подальших досліджень в аналітичній теорії чисел протягом усього століття.

Зокрема, учень Г. Вороного В. Серпінський [21] використав метод свого вчителя для підрахунку цілих точок у крузі. Результат Г. Вороного на випадок цілих точок під графіком довільної достатньо регулярної функції поширив російський математик І. Виноградов [1]. Однак у випадку гіперболи оцінка Виноградова слабша, ніж у Вороного. Першим покращив оцінку Г. Вороного Ван дер Корпут [23].

Метод узагальненого підсумовування розбіжних рядів (матричний метод), який запропонував Вороний у 1901 р., через 18 років заново відкрив датський математик Ньорлунд [17]. Оскільки в літературі посилалися переважно на роботу Ньорлунда, метод отримав подвійну назву – *метод підсумовування Вороного–Ньорлунда*.

Найвизначнішими за глибиною одержаних результатів, а також за численними узагальненнями та застосуваннями стали два обширні останні мемуари вченого „Про деякі властивості додатних досконалих квадратичних форм“ (1907) та „Дослідження примітивних паралелодрів“ (1908–1909), які, поряд із роботами Г. Мінковського 1896 та 1907 років, стали основоположними в новій галузі математики – геометрії чисел. Інтерес до цих двох мемуарів особливо зріс з 70-х років XX ст.

Якщо досконалі квадратичні форми використовують в найабстрактніших математичних дослідженнях (симетричні простори, арифметичні групи, досконалі ґратки, найщільніше пакування тощо), то розвинений у другому мемуарі математичний апарат став відправною точкою для багатьох практичних застосувань, пов'язаних із розбиттям простору на певні області („зони впливу“).

Вперше на практиці така задача виникла у кристалографії. Її сформулював й розв'язав Є. Федоров [9] для $n = 3$ (щоправда, доведення було недостатньо строгим).

Г. Вороний розглянув узагальнену на n -вимірний випадок проблему Діріхле про розташування точок з цілими координатами у n -вимірному просторі, на яких певна додатно визначена квадратична форма досягає мінімуму. Він увів поняття *точкових граток* та розглянув покриття n -вимірного простору паралельно розташованими n -вимірними опуклими многогранниками (*паралелоєдрами*), виділивши серед них деякий клас, — *примітивних*, — для яких у кожній вершині сходиться найменше цих просторових тіл, тобто $(n + 1)$. Це була додаткова умова на паралелоєдри. Г. Вороний побудував узагальнені (на n -вимірний випадок) області Діріхле, які визначаються так: для певної точки P із деякої гратки розглядається сукупність точок простору, віддалених від P не далі, ніж від усіх інших точок гратки, і встановив такий важливий факт: *загальне розбиття n -вимірного простору на примітивні паралелоєдри є афінним образом узагальненої області Діріхле*. Отже, він звів вивчення паралелоєдрів до теорії квадратичних форм.

Писати мемуар із теорії паралелоєдрів Г. Вороний почав 25 березня 1907 р. Тільки після третьої редакції він надіслав свою роботу до журналу „Journal für Reine und Angewandte Mathematik“, одного із тогочасних провідних математичних журналів. У супровідному листі до роботи він писав: „Протягом 12 років я вивчав властивості паралелоєдрів. Я можу сказати, що це тернисте поле для досліджень і що одержані мною результати, викладені в цьому мемуарі, коштували мені дорого . . .“

Тривимірні паралелоєдри відіграють тепер важливу роль у теорії кристалічних тіл і кристалографії вже звернули увагу на властивості цих дивних многогранників, але до цього часу кристалографії вдовольнялися описом паралелоєдрів із суто геометричної точки зору. Я вже давно помітив, що задача розбиття n -вимірного аналітичного простору на опуклі конгруентні многогранники тісно пов'язана з арифметичною теорією додатних квадратичних форм.“

Ця робота Г. Вороного, яка, напевно, була найвищим виявом його геніальних осяянь, стала його лебединою піснею.

Ось як оцінив цю працю Б. Делоне: „Мемуар Вороного про паралелоєдри — одне із найглибших досліджень у галузі геометрії чисел в усій світовій літературі, а своєрідність методів чисто геометричної першої частини накладає на мемуар відбиток геніальності“.

Ідея роздібнення простору використовується в сучасних дослідженнях у багатьох галузях знань: мікробіології, фізичній хімії, астрономії, астрофізиці, кристалографії, медицині, археології, антропології, картографії тощо. Так виникли поняття „многокутника Тіссена“ („Thiessen polygon“) у метеорології, „клітини Мейєрінга“ („Meijering cell“) у металургії, „S-мозаїк“ („S-mosaics“) в екології, „клітини Вігнера–Зейтса“ („Wigner-Seitz cell“) у кристалографії.

Вперше результати Г. Вороного було використано у теоретичній комп'ютерній науці [20], отримавши необхідний математичний апарат для досліджень, пов'язаних із роздібненням простору. Відтоді його почали застосовувати повсюдно у конструкціях, пов'язаних із геометричними алгоритмами. *Діаграми Вороного* — так назву отримав новий об'єкт, — почали широко вживати в багатьох актуальних напрямках науки, зокрема, в комп'ютерній графіці, геометричному моделюванні, конструюванні роботів, розпізнаванні образів, створенні штучного інтелекту, побудові географічних інформаційних систем тощо [7, 11, 12, 15, 18, 19, 20, 22].

Діаграми (клітини, мозаїки, розбиття, многогранники) Г. Вороного використовують у багатьох наукових центрах світу. Вони стали об'єктом досліджень та узагальнень величезної кількості наукових статей та окремих видань¹⁰. Георгій Вороний належить до найцитованіших математиків світу.

На жаль, науковий доробок вченого довго був мало відомим в Україні, тому й небагато тут досліджень з використанням діаграм Г. Вороного. Популяризацією цієї важливої тематики стало видання Інститутом математики НАН України двох збірників наукових праць [3, 24], в яких відображено сучасний стан розвитку ідей і наукових здобутків Г. Вороного та їх застосувань. Збірники охоплюють усі напрями його наукових зацікавлень і містять у собі оглядові та оригінальні статті фахівців із різних галузей знань багатьох країн світу (Австрія, Німеччина, Данія, Франція, Швейцарія, Фінляндія, США, Канада, Україна, Росія, Польща, Литва, Чехія, Японія, Нова Зеландія)¹¹.

Родина Вороних дала нашому народові декілька видатних постатей.

Батько Георгія — Феодосій Вороний — ще в роки навчання в Київському університеті був ініціатором створення безкоштовних недільних шкіл для робітничої молоді, викладав історію у такій школі на Подолі (1859–1861). Уже за цей вчинок Олена Пчілка назвала Феодосія Вороного Громадянином з великої літери. Його квартира була місцем студентських зустрічей і літературних вечорів. На одному з таких вечорів він познайомився з Тарасом Шевченком, а в 1861 р. підписав колективного листа до поета з подякою за 50 примірників його „Букваря“, надісланих до київських недільних шкіл. Син Георгія Вороного Юрій — відомий хірург, котрий першим у світі (1934) здійснив операцію з пересадки людського органу (нирки). В роки Першої світової війни він працював у санітарному загоні, в громадянську війну був учасником битви під Крутами, потім воював у війську Симона Петлюри. Дружина Юрія Віра Нечаївська була членом Центральної ради від Жіночої спілки. Декілька родичів Г. Вороного розділили трагічну долю національно свідомої української інтелігенції, заплативши за це своїм життям. У 30-ті роки над могилою Г. Вороного було вчинено наругу. І тільки в 1983 р. за ініціативи Г. Ситої на цьому священному місці спорудили пам'ятник. Під час зустрічі 1984 р. з Галиною Ситою дочка Г. Во-

¹⁰У 2004–2014 рр. відбулися щорічні міжнародні симпозиуми (ISVD 2004–ISVD 2014), присвячені вивченню та застосуванню діаграм Вороного.

¹¹До 150-річчя Георгія Вороного опубліковано цікаву популяризаторську роботу [8].

роного Марія незадовго перед смертю сказала: „Мій дід, батько, його брати і діти — вони були справжні, бо нас у родині вчили ніколи не думати про багатство — та багатими ми ніколи й не були — і, навіть, не про славу, а тільки про славу України“ (див. статтю Г. Ситої „Життєвий шлях Георгія Вороного“ в [3]).

Сьогодні¹², відзначаючи 150-річчя від дня народження Георгія Вороного, можемо пишатися грандіозним внеском українського математика в одне з найоригінальніших творінь людського духу — математику. Його основоположні роботи з теорії чисел увійшли в світову математичну скарбницю як символ честі й доблесті людського розуму.

Література

- [1] *Виноградов И. М.* Новый способ для получения асимптотических выражений арифметических функций // Изв. Акад. наук. — 1917. — **11**, № 6. — С. 1347–1378.
- [2] *Вороной Г. Ф.* Собрание сочинений: в 3-х т. — К.: Изд-во Акад. наук УССР, 1952–1953.
- [3] Вплив наукового доробку Г. Вороного на сучасну науку / ред. *Г. Сита, А. Юрачківський* — К.: Ін-т математики НАН України, 2003. — 238 с.
- [4] *Горбачук М. Л.* На вершині цариці наук // Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці. — Львів: Меморіал, 1992. — С. 169–182.
- [5] *Горбачук М. Л.* Георгій Вороний // Видатні постаті України: біогр. довідник / *Г. В. Щокін, М. Ф. Головатий, В. А. Гайченко та ін.* — К.: МАУП, Книжкова палата України, 2004. — С. 186–190.
- [6] *Делоне Б.* Петербургская школа теории чисел. — М — Л.: Изд-во Акад. наук СССР, 1947. — 422 с.
- [7] *Медведев Н. Н.* Метод Вороного–Дирихле в исследовании структуры некристаллических упаковок. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1994. — 112 с.
- [8] *Працьовитий М. В., Сита Г. М.* Геометричні мозаїки великого українця // Вісн. НАН України. — 2018. — № 4. — С. 92–101.
- [9] *Федоров Е. С.* Начала учения о фигурах. — С.-Петербург: Императорская Академия наук, 1885. — 279 с.
- [10] *Штокало И. З., Погребыский И. Б.* Жизнь и научная деятельность Г. Ф. Вороного // Г. Ф. Вороной. Собрание сочинений. Т. 3. — К.: Изд-во Акад. наук УССР, 1953. — С. 263–302.
- [11] *Agrell E.* Voronoi-Based coding. — Göteborg: Chalmers Univ. of Technology, 1997. — 204 p.
- [12] Algorithmic foundations of geographic information system / Ed. *M. van Kreveld, J. Nievergelt, T. Roots, P. Widmayer.* Lecture Notes in Computer Science, vol. 1340. — Springer, 1997.
- [13] *Buchmann J.* A generalization of Voronoi's unit algorithm // J. Number Theory. — 1985. — **20**. — I. — P. 177–191, II. — P. 192–209.
- [14] *Bullig G.* Tin periodisches Verfahren zur Berechnung eines System von Grundeinheiten in den total reellen kubischen Körpern // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1938. — **12**. — P. 369–414. 1978. — P. 112–119.
- [15] *Klein R.* Concrete and abstract Voronoi diagrams. — Springer LNCS 400, 1989.
- [16] *Metsänkylä T.* The Voronoi congruence for Bernoulli numbers // The Very Knowledge of Coding. Studies in honour Aimo Tietäväinen. — Turku: Turun yliopiston offsetpaino, 1978. — P. 112–119.
- [17] *Nörlund N. E.* Sur une application des fonctions permutables // Luds Univ. Arsskr. Avd. 2. — 1919. — **16**, No 3.
- [18] *Okabe A., Boots B., Sugihara K.* Spatial tessellations. Concepts and applications. — John Wiley & Sons, 1995. — 534 p.
- [19] *Preparata F. P., Shamos M. I.* Computation geometry. — New York: Springer-Verlag, 1985.
- [20] *Shamos M. I., Hoey D.* Closest point problems // Proc. 16th Ann. IEEE Symp. on FOCS. — 1975. — P. 151–162.
- [21] *Sierpiński W.* O pewnym zagadnieniu z rachunku funkcji asymptotycznych // Prace mat.-fizycz. — 1906. — **17**. — S. 77–118.
- [22] *Stoyan D., Kendall W. S., Mecke J.* Stochastic geometry and its applications. — John Wiley & Sons, 1995.
- [23] *Van der Corput J. G.* Verschärfung der Abschätzungen beim Teilerproblem // Math. Ann. — 1922. — **87**. — S. 39–65.
- [24] Voronoi's impact on modern science / Ed. *P. Engel, H. Syta.* Proc. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine. Vol. 21, books 1–2. — Kyiv: Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine, 1998. — 504 p.

¹²Публікація готувалася до 100-річчя від дня смерті Георгія Вороного.



Рис. 1. Портрет Г. Вороного



Рис. 2. Фото Г. Вороного



Рис. 3. Монета Г. Вороного

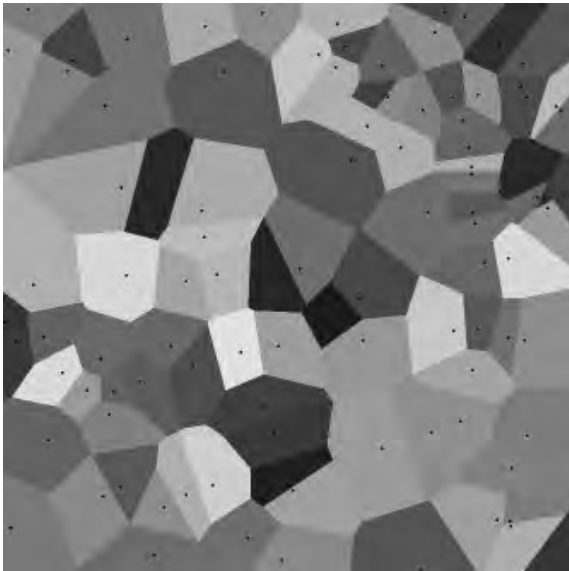


Рис. 4. Мозаїка Г. Вороного

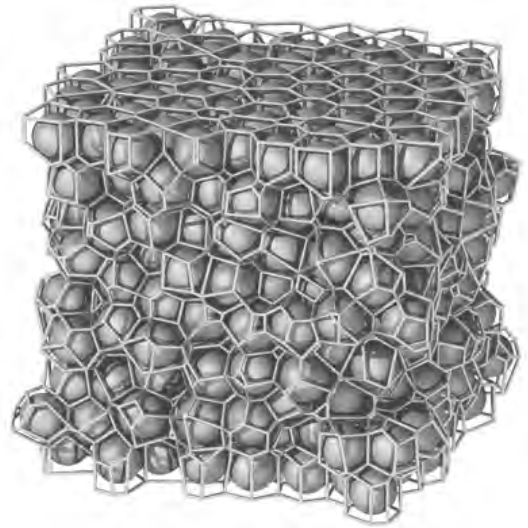


Рис. 5. Пакування Г. Вороного

A COURSE OF LIFE AND A CREATIVE SEARCH OF THE FAMOUS UKRAINIAN MATHEMATICIAN GEORGY VORONOI

M. L. Horbachuk^a, B. I. Ptashnyk^b, V. S. Il'kiv^c

^a*Pidstryhach Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine
3, Tereschenkivska Str., 01004, Kyiv, Ukraine*

^b*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine
3-b, Naukova Str., 79060, Lviv, Ukraine*

^c*Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine*

The paper describes a course of life and a creative search of the great Ukrainian scientist, the world fame mathematician Georgy Voronoi.

Key words: analytical theory of numbers, parallelohedron, Voronoi diagram.

2000 MSC: 01A70

UDK: 51(09)