ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 898, 2018, с. 22–25

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 898, 2018, p. 22–25

ОРТОПТИЧНІ КРИВІ КУБІКИ ЧИРНГАУЗЕНА

І. Й. Врублевський

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
вул. Героїв Майдану, 32, 79012, Львів, Україна

(Отримано 5 травня 2018 р.)

Виведено параметричні рівняння, які описують ортоптичні криві кубіки Чирнгаузена. Побудовано їх графіки за допомогою комп'ютерної математичної системи MathCAD, досліджено властивості. Показано, що ортоптичні криві кубіки Чирнгаузена не описуються алгебраїчними рівняннями другого порядку, як вказано в довідковій літературі. Виведено наближені рівняння, що описують ортоптичні криві кубіки Чирнгаузена у декартовій системі координат з достатньою для практичного використання точністю.

Ключові слова: ортоптична крива, кубіка Чирнгаузена.

2000 MSC: 53A04

УДК: 514.74

Вступ

Серед кривих ліній, які утворюються за допомогою перетворення кривих, що вже існують, цікавими, але такими, що залишаються ще недостатньо вивченими, є ізоптичні та ортоптичні криві. Ізоптична заданої плоскої кривої – це така траєкторія переміщення в площині вершини кута $\alpha \subset (0,\pi)$, коли в будь-якому положенні сторони кута дотикаються до заданої кривої [1, 2]. Якщо кут прямий ($\alpha = \pi/2$), ізоптична називається ортоптичною. Хоча ізоптичні криві вперше описано ще на початку XXVIII ст., їм приділено недостатньо уваги в довідковій літературі та в інтернет-ресурсах. Для багатьох кривих тип їхніх ізоптичних та ортоптичних не виявлено, для ще меншої кількості наведено математичні формули. Зокрема, в довіднику [1] наведено рівняння ізоптичних конік (кривих 2-го порядку), ортоптичних епі- та гіпоциклоїд, синусоїдальних спіралей, у довіднику [2] – формули ортоптичних конік та логарифмічних спіралей, в [3] – тільки названо типи ізоптичних та ортоптичних деяких кривих. В інтернет-ресурсах, що стосуються кривих ліній [4–6], переважно перераховують типи ізоптичних та ортоптичних без наведення формул, якими їх описано, лише в [5] подано формули ізоптичних конік з посиланням на довідник [1]. В роботах автора детально досліджено властивості ізоптичних кривих 2-го порядку [7, 8], а також розглянуто ізоптичні деяких плоских кривих 3-го і 4-го порядку [9, 10].

Як правило, ізоптичні та ортоптичні криві описують достатньо складними формулами і відображають доволі складними графіками. Прикладом кривої, яку можна описати порівняно простими формулами, графік якої достатньо простий і наочний, є ортоптична кубіки Чирнгаузена. Кубіка Чирнгаузена визначається як крива, для якої парабола слугує подерою відносно власного фокуса. Крім того, вона є катакаустикою параболи. Цікаво, що поверхню обертання цієї кривої можна спостерігати у склянці з рідиною, яку швидко помішують ложкою [2]. В довіднику [1] наведено формули, якими описуються ортоптичні синусоїдальних спіралей. Оскільки кубіку Чирнгаузена можна вважати частковим випадком синусоїдальних спіралей, наведена в [1] формула дає змогу описати її ортоптичну як криву 2-го порядку, а саме параболу. Автор такий висновок ставить під сумнів.

Метою поданої роботи є дослідження ортоптичних кривих кубіки Чирнгаузена.

I. Параметричні рівняння ортоптичних кривих кубіки Чирнгаузена

Для плоскої кривої, заданої в декартовій системі координат параметричними рівняннями

$$x = v(\varphi), \quad y = u(\varphi),$$

ізоптичні криві можна описати параметричними рівняннями, отриманими в [9],

$$x = \frac{q_1 - q_2}{k_1 - k_2}, \quad y = \frac{k_1 q_2 - k_2 q_1}{k_1 - k_2}, \tag{1}$$

причому кут між дотичними – постійна величина $\alpha = \beta_1 - \beta_2$, де β_1 і β_2 – кути між віссю абсцис і відповідно першою та другою дотичними; $k_i = \mathrm{tg}(\beta_i) = u_i'/v_i'$, де v_i, u_i – значення функцій, якщо $\varphi = \varphi_i$; $i = 1, 2$ – індекси, що відповідають першій та другій дотичній,

$$q_i = \left(\frac{u_i}{v_i}\right)' \cdot \frac{v_i^2}{v_i'}. \tag{2}$$

Зокрема, для кубіки Чирнгаузена, параметричні рівняння якої [2]

$$v = \frac{a\sin(3\varphi/2)}{2\sin^3(\varphi/2)}, \quad u = \frac{a\cos(3\varphi/2)}{2\sin^3(\varphi/2)}, \tag{3}$$

у формулах (1) згідно з [9] величини $k_i = \mathrm{tg}\,\varphi_i$ причому $\varphi_2 = \varphi_1 - \alpha + \pi$, a – стала величина, яка чисельно дорівнює фокальному параметру параболи, що є подерою кубіки Чирнгаузена. Підставивши значення k_i та q_i, якщо $\alpha = \pi/2$ в систему (1), після перетворень отримаємо параметричні рівняння ортоптичних кривих кубіки Чирнгаузена

$$x = a\frac{\cos\varphi - \sin\varphi + \sin 2\varphi}{(1+\sin\varphi)(1-\cos\varphi)},$$

$$y = a\frac{\cos\varphi + \sin\varphi - \cos 2\varphi}{(1+\sin\varphi)(1-\cos\varphi)}. \quad (4)$$

II. Властивості ортоптичних кривих кубіки Чирнгаузена

За результатами обчислень за формулами (1)–(3), виконаних у середовищі комп'ютерної математичної системи MathCAD, побудовано графіки ізоптичних кривих кубіки Чирнгаузена (рис. 1).

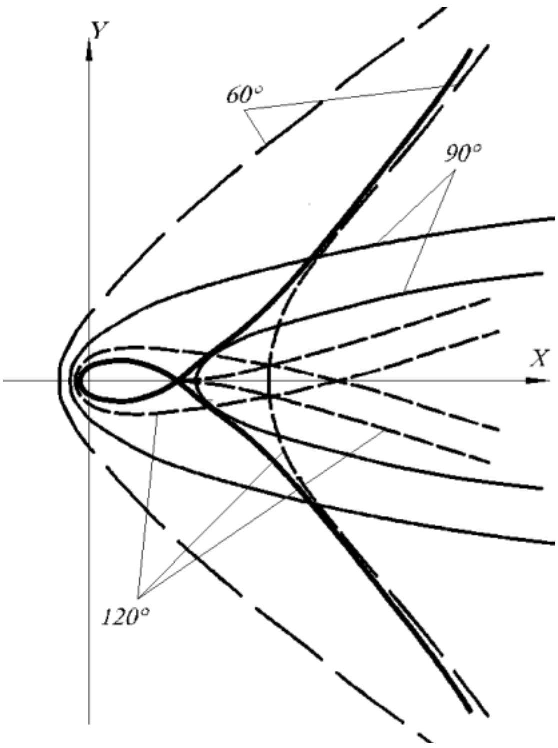

Рис. 1. Ізоптичні криві кубіки Чирнгаузена

На рис. 1 товстою суцільною лінією показано графік кубіки Чирнгаузена, тонкими суцільними – гілки ортоптичної кривої, штриховими лініями – ізоптичні криві за різних значень кута α. Кубіка Чирнгаузена перетинає вісь абсцис у двох точках – вершині $A(-0,5a;0)$ і вузловій точці $B(4a;0)$ (рис. 2). Ортоптична кубіки Чирнгаузена складається із двох гілок, симетричних відносно осі x, вершини яких (точки C і D) розташовані по різні сторони відносно вершини і вузлової точки кубіки, одна з гілок дотикається до кубіки в двох точках $E(5,5a;-a)$ і $G(5,5a;a)$ (рис. 2), координати яких можна визначити, прирівнявши $x = v$; $y = \pm x$.

Координати точок перетину ортоптичної кривої з віссю абсцис x – вершин двох її гілок C і D можна визначити, записавши рівняння дотичної до кубіки прямої:

$$Y - u = \frac{u'}{v'}(X - v). \quad (5)$$

де X, Y – прямокутні координати точок прямої, дотичної до кубіки Чирнгаузена. Для прямої, нахиленої до осі абсцис під кутом 45°,

$$\frac{u'}{v'} = 1. \quad (6)$$

Продиференціювавши рівняння (4) і підставивши в (6), отримаємо $\mathrm{ctg}\,\varphi = 1$, чому відповідають два значення кута $\varphi_1 = \pi/4$, $\varphi_2 = -3\pi/4$. Підставивши ці значення у рівняння (5) для $Y = 0$, після перетворень отримаємо $X_1 = -2a(\sqrt{2}-1)$, $X_2 = 2a(\sqrt{2}+1)$. Отже, вершини гілок ортоптичної – точки $C(-ac;0)$ і $D(a(4+c);0)$, де $c = 2(\sqrt{2}-1)$ (рис. 2).

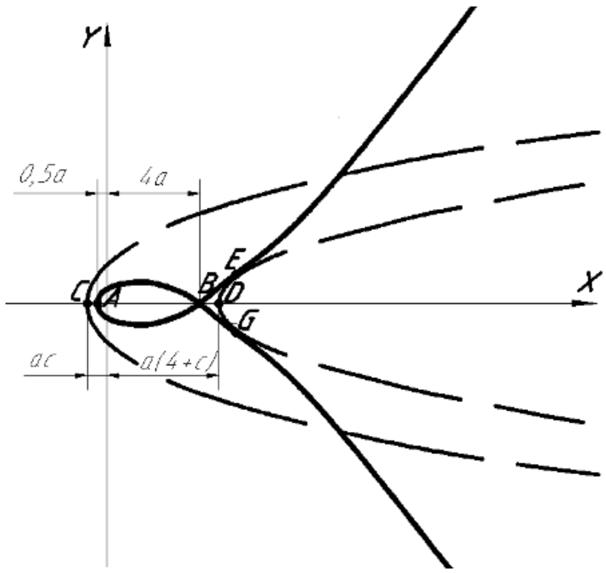

Рис. 2. Графік кубіки Чирнгаузена та її ортоптичних кривих

У середовищі комп'ютерної математичної системи MathCAD складено програму, яка з використанням формул (3) і (4) будує графіки кубіки Чирнгаузена та відповідних їй ортоптичних кривих та обчислює координати їх точок. Отримані за результатами обчислень графіки експортовано в комп'ютерну графічну систему AutoCAD, в якій криві для більшої наочності наведено сплайнами. Графіки кубіки Чирнгаузена зображено на рис. 2 суцільними лініями, а відповідних їй ортоптичних кривих – штриховими.

III. Наближені рівняння ортоптичних кривих кубіки Чирнгаузена у декартовій системі координат

Кубіку Чирнгаузена можна вважати частковим випадком синусоїдальних спіралей, які описують полярним рівнянням $r^n = a^n\cos(n\varphi)$, якщо $n = -1/3$. Згідно з довідником [1] ортоптична синусоїдальної спіралі – також синусоїдальна спіраль, що описується рівнянням

$\rho = a\cos^k(\varphi/k)$, де $k = (n+1)/n$. Щоби засумніватися у правильності цієї формули, достатньо розглянути найпростіший частковий випадок – коло, коли $n = 1$. Тоді $k = 2$, а рівняння його ортоптичної згідно з [1] $\rho = a\cos^2(\varphi/2)$. Але це рівняння описує кардіоїду, тоді як ортоптична кола радіуса a – концентричне коло, радіус якого дорівнює $\sqrt{2}a$. Для ортоптичної кривої кубіки Чирнгаузена $k = -2$ і вона згідно з [1] описується полярним рівнянням $\rho = a/[\cos^2(\varphi/2)]$, тобто це парабола, якій у декартовій системі координат відповідає рівняння $y^2 = 4ax$. Як видно з рис. 2, гілки ортоптичної кубіки Чирнгаузена справді схожі на параболи, але їх вершини розташовані не в початку координат, а в точках C і D, тобто їм можуть відповідати рівняння $y^2 = -b_1(x + ac)$ та $y^2 = b_2[x - a(c+4)]$. Крім того, в [9] висловлено припущення, що ортоптичні криві кубіки Чирнгаузена – гілки гіпербол з паралельними асимптотами.

Проте дослідження графіків засобами параболічної інтерполяції у середовищі системи MathCAD показало, що гілки ортоптичної кубіки Чирнгаузена не описуються рівняннями другого порядку, а навіть рівняннями 3–6 порядків. Крім того, виявлено, що їх можна кусково апроксимувати параболами зі змінними величинами $b_1 = b_1(x)$ та $b_2 = b_2(x)$, графіки яких представлено на рис. 3.

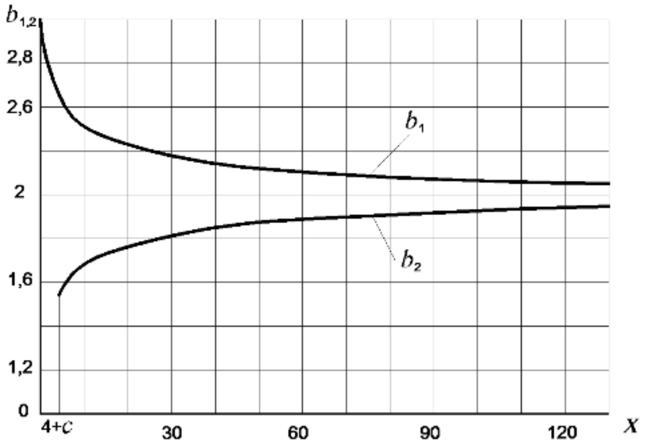

Рис. 3. Залежність величин b_1 та b_2 від x

Як бачимо, наведені на рис. 3 графіки можна апроксимувати за допомогою степеневої функції $b_{1,2} = 2 \pm m_1/m_2^{m_3 x}$, а невідомі коефіцієнти визначити засобами інтерполяції $m_1 = 0,5$; $m_2 = 2$; $m_3 = 0,01$. Отже, наближені рівняння, що описують ортоптичні криві кубіки Чирнгаузена в декартовій системі координат, можна записати так

$$y_1^2 = (2 + \frac{1}{2 \cdot 2^{0,01x}})a(x + c),$$

$$y_2^2 = (2 - \frac{1}{2 \cdot 2^{0,01x}})a(x - c - 4). \qquad (7)$$

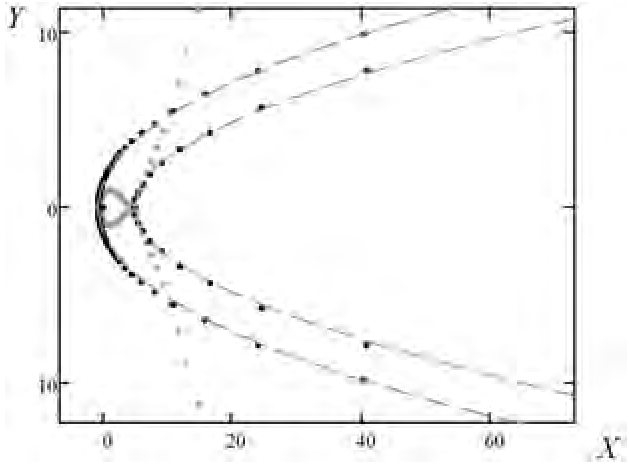

Рис. 4. Порівняння графіків ортоптичних кубіки Чирнгаузена, побудованих за допомогою точних і наближених формул

На рис. 4 світлими штриховими лініями показано графіки ортоптичних кривих, побудовані в системі MathCAD за наближеними формулами (7), а чорними пунктирними лініями – графіки ортоптичних, побудовані за точними формулами (4), світлим пунктиром показано саму кубіку Чирнгаузена. Порівняння графіків, побудованих за точними і наближеними формулами, показує достатню для практичного використання точність наближених формул, максимальне відхилення на невеликій ділянці не перевищує 5%, а для переважної більшості точок воно менше за 1%.

Висновки

Виведено параметричні рівняння ортоптичної кривої кубіки Чирнгаузена, побудовано її графіки. Ортоптична крива кубіки Чирнгаузена складається з двох гілок, симетричних відносно осі абсцис, вершини яких розташовані по обидві сторони від вершин кубіки, одна з гілок дотикається до кубіки у двох точках. Показано, що ортоптичні криві кубіки Чирнгаузена не описуються рівняннями другого порядку, як зазначено у довідковій літературі. Виведено прості наближені рівняння у декартовій системі координат, які дають змогу з достатньою для практики точністю будувати графіки ортоптичних кривих Чирнгаузена та досліджувати їхні властивості.

Література

[1] *Yates R. C.* A Handbook on Curves and Their Properties. – Ann Arbor, MI: J.W. Edwards, 1952. – 245 p.

[2] *Савелов А. А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применения: справ. руководство. -– М.: Физматгиз, 1960. – 296 с.

[3] *Lawrence J. D.* A Catalogue of Special Plane Curves – New York: Dover Publications, Inc., 1972. – 218 p.

[4] *Xah Lee.* Orthoptic and Isoptic. Visual Dictionary

of Special Plane Curves. – http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/Orthoptic_dir/orthoptic.html.

[5] Courbe Isoptique. – http://mathcurve.com/courbes2d.gb/isoptic/isoptic.shtml.

[6] Isoptic. – http://2dcurves.com/derived/isoptic.html.

[7] *Врублевський І. Й.* Побудова ізооптичних кривих еліпса // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 518. – С. 15–18.

[8] *Врублевський І. Й.* Побудова ізоптичних кривих гіперболи і параболи // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Вип. 75. – К.: КНУБА, 2005. – С. 183–188.

[9] *Врублевський І. Й.* Ізоптичні криві деяких кубік // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 566. – С. 76–80.

[10] *Врублевський І. Й.* Ізоптичні криві замкнених квартік // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4, т. 39. – Мелітополь, 2008. – С. 107–112.

ORTHOPTIC CURVES OF TSHIRNHAUSEN'S CUBIC

I. Y. Vrublevskyi

Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy
32, Heroes of Maidan Str., Lviv, 79012, Ukraine

The parametric equations describing the orthoptic curves of Tschirnhausen's cubic are obtained. Their graphs are constructed with aid of the computer system MathCAD. The properties of the orthoptic curves of Tschirnhausen's cubic are investigated. It is shown that they are not described by the equations of 2nd order as it was proved in existing reference manuals. The approximate equations that describe the orthoptic curves of Tschirnhausen's cubic in Cartesian coordinate system are obtained with the sufficient accuracy for practical use.

Key words: orthoptic curve, Tschirnhausen's cubic.

2000 MSC: 53A04

UDK: 514.74