ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
№ 898, 2018, с. 5–12

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
“Physical and mathematical sciences”
№ 898, 2018, p. 5–12

НЕСАМОСПРЯЖЕНА НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

Я. О. Баранецький, П. І. Каленюк, П. Л. Сохан

Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 1 лютого 2018 р.)

Досліджено спектральні властивості несамоспряженої задачі, породженої нелокальними крайовими умовами для оператора диференціювання порядку $2n$. Вивчено випадки регулярних та нерегулярних за Біркгофом двоточкових крайових умов. Побудовано систему кореневих функцій задачі та елементи біортогональної системи. Встановлено достатні умови, за яких ці системи є повними та за деяких додаткових припущень утворюють базис Рісса.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, нелокальні задачі, регулярність за Біркгофом, несамоспряжений оператор, базис Рісса.

2000 MSC: 34B10, 34L10

УДК: 517.927.6+517.984.52

Вступ

Під час побудови розв’язків багатьох нестаціонарних задач методом Фур’є або його аналогами важливі властивості повноти та базисності (умовної, безумовної, за Ріссом) системи кореневих функцій відповідної крайової задачі.

Для звичайних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі базисність за Ріссом для крайових задач, породжених регулярними за Біркгофом крайовими умовами, встановлено в [1, 2]. Для випадку, коли крайові умови регулярні, але не посилено регулярні, в роботі [3] доведено, що система кореневих підпросторів, які відповідають близьким або кратним власним значенням крайової задачі, утворює базис Рісса в просторі $L_2(0,1)$, із підпросторів. Задачі з нерегулярними за Біркгофом умовами вивчено в працях [4–6].

У роботах [7, 8] вивчено властивості підсумованих методом Абеля розкладів у ряд Фур’є. В публікаціях [9, 10] розглянуто спектральні властивості задач з умовами періодичності. Задачі з інтегральними та інтегро-диференціальними крайовими умовами розглянуто в працях [11–13]. Узагальнення та уточнення поняття регулярних за Біркгофом крайових умов досліджено в роботах [14, 15]. Властивості несамоспряжених операторів, визначених в абстрактному сепарабельному гільбертовому просторі, вивчено в роботі [16]. Спектральні властивості операторів, породжених сильно регулярними за Біркгофом умовами та несамоспряжених збурень цих умов досліджено в праці [17].

I. Основні позначення та постановка задачі

Нехай $I : L_2(0,1)\to L_2(0,1)$ – оператор інволюції, $Iy(x) \equiv y(1-x)$, $H_j \equiv \{y \in L_2(0,1) : Iy = (-1)^j y\}$, $[L_2(0,1)]$ – множина лінійних неперервних операторів $L_2(0,1)\to L_2(0,1)$, $W_2^{2n}(0,1) \equiv \{y \in L_2(0,1) : y^{(m)} \in AC[0,1], y^{(2n)} \in L_2(0,1),\ m = 1,2,...,2n-1\}$, $(y,u;W_2^{2n}(0,1)) \equiv \sum_{k=0}^{2n} (y^{(k)},u^{(k)};L_2(0,1))$, $\|y;W_2^{2n}(0,1)\|^2 \equiv (y,y;W_2^{2n}(0,1))$, $W^*(0,1)$ – простір лінійних неперервних функціоналів над $W_2^{2n}(0,1)$, $W_j^*(0,1) = \{l \in W^*(0,1) : ly = 0, y \in H_{1-j} \cap W_2^{2n}(0,1)\}$, $j = 0,1$.

У роботі вивчено крайову задачу

$$(-1)^{2n}y^{(2n)}(x) = f(x),\ x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y^{(2p-2)}(0) + y^{(2p-2)}(1) = 0,\ p = 1,...,n, \tag{2}$$

$$y^{(2p-1)}(0) + y^{(2p-1)}(1) + l_p^1 y = 0,$$

$$l_p^1 y \equiv \sum_{s=0}^{1}\sum_{q=0}^{k_p} b_{p,q}(y^{(q)}(0) + (-1)^q y^{(q)}(1), \tag{3}$$

$b_{p,q} \in \mathbb{R},\ q = 0,1,...,k_p,\ k_p < 2n,\ p = 1,2,...,n.$

II. Допоміжна самоспряжена задача з антиперіодичними умовами

Розглянемо частковий випадок задачі (1)–(3), коли $b_{p,q} = 0$:

$$(-1)^{2n}y^{(2n)} = f(x), x \in (0,1), \tag{4}$$

$$l_{0,p}y \equiv y^{(2p-2)}(0) + y^{(2p-2)}(1) = 0, \ p = 1, 2, ...n, \quad (5)$$

$$l_{0,n+p}y \equiv y^{(2p-1)}(0) + y^{(2p-1)} = 0, \ p = 1, 2, ...n. \quad (6)$$

Зауваження 1. Крайові умови (5), (6) пронумеровані так, що справджуються включення:

$$l_{0,p} \in W_0^*(0,1), \ l_{0,n+p} \in W_1^*(0,1), \ p = 1, 2, ...n.$$

Нехай A_0 – оператор задачі (4)–(6).

$$A_0 y \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x), \ y \in D(A_0) \subset W_2^{2n}(0,1),$$

$$D(A_0) \equiv \left\{ y \in W_2^{2n}(0,1) : l_{0,p}y = 0, \ p = 1, ..., 2n \right\}.$$

Самоспряжений оператор A_0 має власні значення та власні функції

$$\lambda_m \equiv (\pi)^{2n}(2m-1)^{2n},$$

$$v_{2m-1}(x) \equiv \sqrt{2} \cos \pi(2m-1)x, \ m = 1, 2, ...,$$

$$v_{2m}(x) \equiv \sqrt{2} \sin \pi(2m-1)x, \ m = 1, 2, ...$$

Зауваження 2. Системи функцій

$$V_0(A_0) \equiv \left\{ v_{2m}(x) : m = 1, 2, ... \right\} \subset H_0,$$

$$V_1(A_0) \equiv \left\{ v_{2m-1}(x) : m = 1, 2, ... \right\} \subset H_1$$

утворюють ортонормований базис просторів $L_{2,0}(0,1)$ та $L_{2,1}(0,1)$ відповідно.

Нехай ω_s – розв'язки рівняння $\omega^{2n} = (-1)^n$, нумеровані так, що $\omega_1 = i$, $\omega_j = \omega_1 e^{i\frac{1}{n}\pi(j-1)}$, $j = 1, ..., n$.

Розглянемо функції

$$y_q(x, \rho_m) \equiv \exp \omega_q \rho_m x + \exp \omega_q \rho_m (1-x), \quad (7)$$

$$y_{n+q}(x, \rho_m) \equiv \exp \omega_q \rho_m x - \exp \omega_q \rho_m (1-x), \quad (8)$$

$$y_{1,1}(x, \rho_m) \equiv \frac{1}{2}(1-2x) \cos \rho_m x, \quad (9)$$

$$y_{1,q}(x, \rho_m) \equiv \frac{1}{2}\left(1 - e^{w_q \rho_m}\right)^{-1} y_q(x, \rho_m), \quad (10)$$

$$\rho_m = \pi(2m-1), \ m = 1, 2, ...,$$

та визначимо рядки квадратної матриці

$$\mathrm{B}_0(x, \rho_m) \equiv (\beta^0_{p,q}(x, \rho_m))^n_{p,q=1}$$

порядку n співвідношеннями: p-й рядок визначається елементами системи (9), (10): $\beta^0_{p,q}(x, \rho_m) \equiv y_{1,q}(x, \rho_m)$, інші рядки – рівностями $\beta^0_{j,q}(x, \rho_m) \equiv (\omega_q)^{2j-2}$ за $j = 1, 2, ..., n, \ j \neq p, \ q = 1, 2, ..., n$.

Нехай $\Delta_p(x, \rho_m) \equiv \det \mathrm{B}_0(x, \rho_m), \ m = 1, 2, \dots$.

Підстановкою в умови (5), (6) можна переконатися, що

$$l_{0,r}\Delta_p = 0, r \neq n + p,$$

$$l_{0,n+p}\Delta_p = h_n W_n(\rho_m)^{2p-1}, \ r = \overline{1, 2n}, \ p = \overline{1, n}, \quad (11)$$

де W_n – визначник Вандермонда, побудований за числами $-1, (\omega_2)^2, ..., (\omega_n)^2$, $h_n = \prod\limits_{j=2}^{n} \omega_j$.

Визначимо функції

$$y_{2,p}(x, \rho_m) \equiv h_n^{-1} W_n^{-1} \Delta_p(x, \rho_m), \quad (12)$$

$$p = 1, 2, ..., n, \ m = 1, 2, \dots .$$

Враховуючи співвідношення (12), отримаємо

$$l_{0,r}y_{2,p} = 0, \ r \neq n + p, \quad l^0_{n+p}y_{2,p} = (\rho_m)^{2p-2}, \quad (13)$$

$$r = 1, 2, ..., 2n, \ p = 1, 2, ..., n, \ m = 1, 2, \dots .$$

Аналогічно розглянемо функції

$$y_{1,n+1}(x, \rho_m) \equiv \frac{1}{2}(1-2x) \sin \rho_m x, \quad (14)$$

$$y_{1,n+q}(x, \rho_m) \equiv \frac{1}{2}\left(1 + e^{w_q \rho_m}\right)^{-1} y_{n+q}(x, \rho_m), \quad (15)$$

та визначимо квадратну матрицю

$$\mathrm{B}_1(x, \rho_m) \equiv (\beta^1_{p,q}(x, \rho_m))^n_{p,q=1}$$

порядку n, рядки якої задано співвідношеннями: k-й рядок визначається елементами системи (14)–(15): $\beta^1_{k,q}(x, \rho_m) \equiv y_{1,n+q}(x, \rho_m)$, інші рядки – якщо $j = 1, 2, ..., n, \ j \neq k$ рівностями

$$\beta^1_{j,q}(x, \rho_m) \equiv (\omega_q)^{2j-2}, \ q = 1, 2, ..., n.$$

Визначник матриці $\mathrm{B}_1(x, \rho_m)$ позначимо через $\Delta_{n+k}(x, \rho_m)$.

Підставивши в умови (5), (6), можна переконатися, що

$$\begin{gathered} l_{0,r}\Delta_{n+k} = 0, r \neq n + k, \\ l_{0,k}\Delta_{n+k} = W_n(\rho_m)^{2k-2}, \\ r = 1, 2, ..., 2n, \ k = 1, 2, ..., n. \end{gathered} \quad (16)$$

Визначимо функції

$$y_{2,n+k}(x, \rho_m) \equiv W_n^{-1}(\rho_m)\Delta_{n+k}(x, \rho_m). \quad (17)$$

Враховуючи співвідношення (16), отримаємо

$$l_{0,r}y_{2,n+p} = 0, r \neq k, \ l_{0,p}y_{2,n+k} = (\rho_m)^{2k-2}, \quad (18)$$

$$r = 1, 2, ..., 2n, \ k = 1, 2, ..., n, \ m = 1, 2, \dots .$$

Зауваження 3. Із формул (11)–(14), (16)–(18) та означення функцій $\Delta_p(x, \rho_m)$ одержимо нерівності $\|y_{2,p}(x, \rho_m); L_2(0,1)\| \leq K_1 < \infty$, $p = 1, 2, ..., 2n$, $m = 1, 2, \dots$.

Нехай W_{n-1} – визначник Вандермонда, побудований за числами $(\omega_2)^2, ..., (\omega_n)^2$.

Враховуючи, що

$$\|y_{2,k}(x, \rho_m) - W_{n-1}y_{1,n+1}(x, \rho_m); L_2(0,1)\| \to 0,$$

для $m \to \infty$ одержимо $\|y_{2,k}(x, \rho_m); L_2(0,1)\| \geq K_2$ при $k = 1, 2, ..., n$.

Аналогічну оцінку знизу отримуємо для функцій $y_{2,n+k}(x, \rho_m)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Отже,

$$K_2 \leq \|y_{2,p}(x, \rho_m); L_2(0,1)\| \leq K_1 < \infty, \quad (19)$$

$$p = 1, 2, ..., 2n, \ m = 1, 2, \dots .$$

III. Несамоспряжені крайові задачі

Розглянемо за будь-яких $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $b \in \mathbb{R}$ для рівняння (1) задачу із крайовими умовами

$$l_{1,j}y \equiv y^{(2j-1)}(0) + y^{(2j-1)}(1) = 0, \tag{20}$$

$$j = 1, 2, ..., n,$$

$$l_{1,n+j,}y \equiv y^{(2j-2)}(0) + y^{(2j-2)}(1) = 0, \tag{21}$$

$$j = 1, 2, ..., n,\ j \neq p,$$

$$l_{1,n+p}y \equiv y^{(2p-2)}(0) + y^{(2p-2)}(1) +\ l^1_{p,b}y = 0, \tag{22}$$

$$l^1_{p,b}y \equiv b\big(y^{(2p-2)}(0) - y^{(2p-2)}(1)\big). \tag{23}$$

Нехай $A_1 \equiv A_{p,b}$ – оператор задачі (1), (20)–(23),

$$A_1 y(x) \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x),\ y \in D(A_1),$$

$$D(A_1) \equiv \big\{y \in W_2^{2n}(0,1) : l_{1,j}y = 0,\ j = 1, 2, \ldots, 2n\big\};$$

$V(A_1)$ – система кореневих функцій оператора A_1.

Теорема 1. *Для будь-яких $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $b \in \mathbb{R}$, спектри операторів A_0, A_1 збігаються, а система функцій $V(A_1)$ утворює базис Рісса простору $L_2(0,1)$.*

☐ *Доведення.* Покажемо, що власні значення операторів A_0 та A_1 збігаються.

Визначимо фундаментальну систему розв'язків рівняння (5) за допомогою співвідношень

$$y_j(x,\rho) \equiv e^{\omega_j \rho x} + e^{\omega_j \rho (1-x)} \in H_0,$$

$$y_{n+j}(x,\rho) \equiv e^{\omega_j \rho x} - e^{\omega_j \rho (1-x)} \in H_1,$$

$$|\arg \rho| \leq \frac{\pi}{2n},\ \ \lambda = (-1)^n \rho^{2n}.$$

Враховуючи, що

$$l_{0,p}y_{n+j}(x,\rho) = 0,\ j,\ p = 1, 2, ..., n,$$

отримаємо рівняння для визначення власних значень

$$\det \begin{pmatrix} l_{1,q}y_1(x,\rho) & \ldots & l_{1,q}y_{2n}(x,\rho) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1,2n}y_1(x,\rho) & \ldots & l_{1,2n}y_{2n}(x,\rho) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} l_{0,1}y_1(x,\rho) & \ldots & l_{0,1}y_{2n}(x,\rho) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{0,2n}y_1(x,\rho) & \ldots & l_{0,2n}y_{2n}(x,\rho) \end{pmatrix} = 0.$$

Отже, власні значення операторів A_0, A_1 збігаються.

Визначимо елементи системи $V(A_1)$. Можна переконатися, що

$$v_{2m-1}(x) \equiv \sqrt{2}\cos \pi(2m-1)mx \in D(A_1),$$

$$A_1 v_{2m-1}(x) = \lambda_m v_{2m-1}(x),\ m = 1, 2, \ldots.$$

Тому оператор A_1 має власні функції

$$v_{2m-1}(x, A_1) \equiv \sqrt{2}\cos \pi(2m-1)mx,\ m = 1, 2, ..., \tag{24}$$

де $p = 1, 2, ..., n,\ b \in \mathbb{R}$.

Оператор A_1 має кореневі функції

$$v_{2m}(x, A_1) \equiv v_{2m}(x) +\ b\sqrt{2}y_{2,p}(x, \rho_m), \tag{25}$$

$$m = 1, \ldots,\ p = 1, 2, ..., n.$$

Власні та кореневі функції оператора A_1 пов'язані співвідношеннями:

$$A_1 v_{2m}(x, A_1) =$$

$$= \lambda_m v_{2m}(x, A_1) + \xi^0_m v_{2m-1}(x, A_1), \tag{26}$$

$$\xi^0_m = -4bn\rho_m^{2n-1}$$

$$A_1 v_{2m-1}(x, A_1) = \lambda_m v_{2m-1}(x, A_1), \tag{27}$$

$$m = 1, 2, \ldots.$$

Розглянемо задачу, яка є спряженою до крайової задачі (1), (20)–(23),

$$L_0 z \equiv (-1)^{2n} z^{(2n)}(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{28}$$

$$l^1_j z \equiv z^{(2j-1)}(0) + z^{(2j-1)}(1) = 0, \tag{29}$$

$$j \neq n-p+1,\ j = 1, 2, ..., n,$$

$$l^1_j z \equiv (z^{(j)}(0) +\ z^{(j)}(1)) +\ l^2_{p,b}z = 0, \tag{30}$$

$$j = n-p+1,$$

$$l^2_{p,b}z \equiv b(z^{(2n-2p+1)}(0) - z^{(2n-2p+1)}(1)) = 0, \tag{31}$$

$$l^1_{n+j}z \equiv z^{(2j-2}(0) +\ z^{(2j-2)}(1) = 0, \tag{32}$$

$$j = 1, 2, ..., n.$$

Нехай, A_1^* – спряжений оператор до A_1, породжений задачею (28)–(32)

$$A_1^* z(x) \equiv (-1)^n z^{(2n)}(x),\ y \in D(A_1^*),$$

$$D(A_1^*) \equiv \big\{z \in W_2^{2n}(0,1) : l^1_j z = 0,\ j = 1, 2, ..., 2n\big\},$$

$W(A_1^*)$ – система кореневих функцій оператора A_1^*.

Оператор A_1^* має кореневі функції:

$$w_{2m}(x, A_1^*) \equiv v_{2m}(x),$$

$$w_{2m-1}(x, A_1^*) \equiv$$

$$\equiv v_{2m-1}(x) + (-1)^{p+1}\sqrt{2}by_{2,n-p+1}(x, \rho_m),$$

$$m = 1, 2, ...,\ p = 1, 2, ..., n,$$

для яких виконуються рівності

$$A_1^* w_{2m-1}(x, A^*_{p,b}) = \lambda_m w_{2m-1}(x, A_1^*) +$$

$$+ \xi_{1,m} w_{2m}(x, A_1^*), \quad m = 1, 2, ...,$$

$$A_1^* w_{2m}(x, A_1^*) = \lambda_m w_{2m}(x, A_1^*), \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Крайові умови (20)–(23) є регулярними, але не сильно регулярними за Біркгофом [19].

За теоремою О. О. Шкалікова [3] система $V_1(A_1)$ кореневих підпросторів оператора A_1 є базисом Рісса із підпросторів [18] у просторі $L_2(0,1)$.

Покажемо, що $V(A_1)$ та $W(A_1^*)$ – системи Бесселя, тобто для будь-якої функції $h \in L_2(0,1)$ справджуються нерівності

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big(h, \nu_k(x, A_1); L_2(0,1)\big)^2 \leq K_3 \|h; L_2(0,1)\|^2, \tag{33}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(h, w_k(x, A_1^*); L_2(0,1)\right)^2 \leq K_3\|h; L_2(0,1)\|^2. \quad (34)$$

Розглянемо систему функцій $V^1(A_1)$

$$\nu^1_{2m-1}(x, A_1) \equiv \nu_{2m-1}(x, A_1),$$

$$\nu^1_{2m}(x, A_1) \equiv \nu_{2m}(x, A_1)-$$

$$-\left(\nu_{2m}(x, A_1), \nu^1_{2m-1}(x, A_1); L_2(0,1)\right)\nu^1_{2m-1}(x, A_1), \quad (35)$$

$$m = 1, 2, \dots .$$

Система функцій, утворена нормуванням системи $V^1(A_1)$, є об'єднанням усіх ортонормованих базисів кореневих підпросторів $V_m(A_1)$ оператора A_1, $m = 1, 2, \dots$. Тому вона є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$ [18, с. 414–415].

Аналогічне твердження отримаємо для системи функцій $W^1(A_1^*)$, елементи якої визначаються ортогоналізацією елементів системи $W(A_1^*)$.

Отже, для будь-якої функції $h \in L_2(0,1)$ справджується нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(h, \nu^1_k(x, A_1); L_2(0,1)\right) \leq K_4\|h; L_2(0,1)\|^2. \quad (36)$$

Нехай

$$K_5 \geq 1 + (\nu^1_{2m-1}(x, A_1); y_{2,p}(x, \rho_m); L_2(0,1))^2.$$

З формули (35) маємо оцінку

$$\left(h, \nu^1_{2m}(x, A_1); L_2(0,1)\right)^2 \leq$$

$$\leq 2b^2 K_5 \sum_{r=0}^{1}(h, \nu_{2m-r}(x, A_1); L_2(0,1))^2.$$

Підсумовуючи отриману нерівність для $m = 1, 2, \dots$ та враховуючи рівності (35), отримуємо оцінку (33), якщо $K_3 = 4b^2K_5$.

Аналогічно доводиться нерівність (34).

Тому з теореми Н. К. Барі [18] одержуємо твердження теореми. ■

Зауваження 4. Системи $V(A_1)$ та $W(A_1^*)$ є біортогональними в сенсі рівностей

$$\left(w_{2m-\alpha}(x, A_1^*), v_{2k-\beta}(x, A_1); L_2(0,1)\right) = \delta_{m,k}\delta_{\alpha,\beta}, \quad (37)$$

$$m,\ k = 0, 1, \dots, \quad \alpha, \beta = 0, 1.$$

IV. Оператори перетворення

Розглянемо оператори L_p, $p = 1, \dots, n$, власні значення яких збігаються з власними значеннями оператора A_0, а кореневі функції визначаються співвідношеннями

$$v_{2m-1}(x, L_p) = v_{2m-1}(x),\ m = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

$$v_{2m}(x, L_p) = v_{2m}(x) + y_{2,p}(x, \rho_m),\ m = 1, 2, \dots . \quad (39)$$

Зауваження 5. Оператор L_p є частковим випадком оператора A_1, якщо $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тому, згідно з теоремою 1, система $V(L_p)$ кореневих функцій цього оператора є базисом Рісса в просторі $L_2(0,1)$.

Виберемо будь-яку послідовність дійсних чисел $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$.

Розглянемо для довільного $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ оператор $B_p : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, власні значення якого збігаються з власними значеннями оператора A_0, а кореневі функції визначаються співвідношеннями

$$v_{2m-1}(x, B_p) \equiv v_{2m-1}(x),\ m = 1, 2, \dots, \quad (40)$$

$$v_{2m}(x, B_p) = v_{2m}(x) + \ c_m y_{2,p}(x, \rho_{2m}),\ m = 0, 1, \dots . \quad (41)$$

Сукупність операторів $R \equiv E + S$, $S : L_{2,0}(0,1) \to L_{2,1}(0,1) \to 0$ позначимо через $Q_0(A_0)$.

Оператор, який відображає систему функцій $V(A_0)$ у систему $V(B_p)$ кореневих функцій оператора B_p, позначимо через $R(B_p) \in Q_0(A_0)$.

Зауваження 6. Система функцій $V(B_p)$ є рівномірно мінімальною [18] та повною у просторі $L_2(0,1)$.

Тому оператор $R(B_p)$ має щільну в просторі $L_2(0,1)$ область визначення.

Нехай $G(B_p)$ – множина операторів $R(B_p) \in Q_0(A_0)$, для яких елементи системи $V(B_p)$ визначаються формулами (41), $G_c(B_p) \equiv G(B_p) \cap [(L_2(0,1))]$.

Аналогічно, за допомогою кореневих функцій оператора B_p^* визначається множина

$$G^*(B_p) \equiv \{R^*(B_p) = E - S^*(B_p),\ R(B_p) \in G(B_p)\}.$$

Теорема 2. *Для будь-якого $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ система функцій $V(B_p)$ є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$ тоді та лише тоді, коли послідовність $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$ є обмеженою: $|c_m| \leq K_6 < \infty$.*

□ *Доведення. Необхідність.*

Нехай $V(B_p)$ є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$, тобто $R(B_p) \in B(L_2(0,1))$, $S(B_p) = E - R(B_p) \in [(L_2(0,1))]$.

Із означення оператора B_p маємо:

$$S(x, B_p)v_{2m}(x) = c_{2m}y_{2,p}(x, \rho_{2m}).$$

Тому, враховуючи оцінку (19), отримаємо

$$|c_{2m}| \leq \|S_p(x, B_p); [(L_2(0,1))]\,\| \times$$

$$\times \|y_{2,n+p}(x, \rho_{2m}); L_2(0,1)\|^{-1} \leq K_6 < \infty.$$

Достатність. Повнота та мінімальність системи $V(B_p)$ в просторі $L_2(0,1)$ випливає із включення $R^*(B_p) \in G^*(B_p)$.

Виберемо будь-яку функцію

$$f \in L_2(0,1),\ f = f_0 + f_1,\ f_j \in L_{2,j}(0,1),\ j = 0, 1,$$

та розглянемо її ряд Фур'є

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k v_k(x) \in L_2(0,1),$$

$$\|f; L_2(0,1)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(f_k)^2 < \infty.$$

Нехай

$$h_p = R(B_p)f = \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{2m-1}v_{2m-1}(x)+$$

$$+f_{2m}c_k(B_p)(v_{2m}(x,A_p) - v_{2m}(x))\big) \in L_2(0,1),$$

$$\|R(B_p)f; L_2(0,1)\|^2 \le K_7 \sum_{k=1}^{\infty}(f_k)^2,$$

$$K_7 = 3\big(1 + K_6^2 + K_6^2\,\|R(A_p); B(L_2(0,1))\|^2\big).$$

Отже, $\|R(B_p; B(L_2(0,1)))\|^2 \le K_7$.

Враховуючи рівності

$$R(B_p) = E + S(B_p),\ R^{-1}(B_p) = E - S(B_p),$$

маємо: $R^{-1}(B_p){=}2E{-}R(B_p)$.

Тому $\left\|R^{-1}(B_p; B(L_2(0,1)))\right\|^2 \le K_8$, $K_8 = 8+4K_7$.

Застосовуючи теорему Н. К. Барі [18], отримуємо для системи $V(A_p)$ твердження теореми. ■

Наслідок 1.

$$G_c(B_p) = \big\{R \in G(B_p) : |c_{m(R)}| \le K_R < \infty,\ m = 0, ...\big\}.$$

V. Крайові задачі із нерегулярними за Біркгофом умовами

Розглянемо за будь-яких $p,\ q\ \in\ \{1,2,...,n\}$, $q{>}p$, $b \in \mathbb{R}$ крайову задачу

$$(-1)^{2n}y^{(2n)}(x) = f(x),\ x \in (0,1), \tag{42}$$

$$l_{2,j}y \equiv y^{(2j-1)}(0) + y^{(2j-1)}(1) = 0, \tag{43}$$

$$j = 1,2,...,n,$$

$$l_{2,n+j,}y \equiv y^{(2j-2)}(0) +\ y^{(2j-2)}(1) = 0, \tag{44}$$

$$j = 1,2,...,n, j \ne p,$$

$$l_{2,n+p}y \equiv y^{(2p-2)}(0) + y^{(2p-2)}(1) +\ l^1_{q,b}y = 0, \tag{45}$$

$$l^1_{q,b}y \equiv b\big(y^{(2q-2)}(0) - y^{(2q-2)}(1)\big). \tag{46}$$

Нехай $A_2 \equiv A_{2,p,q,b}$ – оператор задачі (42)–(46),

$$A_2y(x) \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x),\ y \in D(A_2),$$

$$D(A_2) \equiv \big\{y \in W_2^{2n}(0,1) : l_{2,j}y = 0,\ j = 1,2,...,2n\big\};$$

$V(A_2)$ – система кореневих функцій оператора A_2.

Теорема 3. *Для будь-яких фіксованих $p,q \in \{1,2,...,n\}$, $b\ \in\ \mathbb{R}$, спектри операторів A_0, A_2 збігаються, а система функцій $V(A_2)$ повна та мінімальна в просторі $L_2(0,1)$.*

☐ *Доведення.* Ізоспектральність операторів A_0 та A_2 доводиться міркуваннями попередньої теореми.

Визначимо елементи системи $V(A_2)$. Можна переконатися, що

$$v_{2m-1}(x) \equiv \sqrt{2}\cos\pi(2m-1)mx \in D(A_2),$$

$$A_2v_{2m-1}(x) = \lambda_m v_{2m-1}(x),\ m = 1,2,\dots.$$

Тому

$$v_{2m-1}(x,A_2) \equiv v_{2m-1}(x),\ m = 1,2,..., \tag{47}$$

Кореневі функції оператора A_2 визначимо у вигляді суми

$$v_{2m}(x,A_2) \equiv v_{2m}(x) + b\rho_m^{2q-2p}\sqrt{2}y_{2,p}(x,\rho_m), \tag{48}$$

$$m = 1,2,\dots.$$

Отже, оператор A_2 має систему $V(A_2)$ функцій (47)–(48), кореневих у сенсі рівностей:

$$A_2v_{2m}(x,A_2) =$$

$$= \lambda_m v_{2m}(x,A_2) + \xi_{2,p,m}v_{2m-1}(x,A_2), \tag{49}$$

$$\xi_{2,p,m} = (-1)^{q-1}4bnW(\omega_2^2,...,\omega_n^2)(\rho)_m^{2n-1+2q-2p},$$

$$A_2v_{2m-1}(x,A_2) = \lambda_m v_{2m-1}(x,A_2), \tag{50}$$

$$m = 1,2,\dots.$$

Визначимо оператор $R(A_2) : C^\infty[0,1] \to C^\infty[0,1]$, $R(A_2)v_m(x) \equiv v_m(x,L_2)$, $m = 1,2,\dots$.

Із означення оператора $R(A_2)$ маємо включення $R(A_2) \in Q_0(B_p)$

Враховуючи зауваження 6, отримуємо твердження теореми. ■

Розглянемо на елементах системи $V(A_1)$ дробові степені оператора A_1

$$(A_1^\theta v_{2m}(x,A_1) \equiv (\lambda_m)^\theta v_{2m}(x,A_1)+$$

$$+\theta(\lambda_m)^{\theta-1}\xi_{1,m}v_{2m-1}(x,A_1).$$

$$(A_1)^\theta v_{2m-1}(x,A_1) \equiv (\lambda_m)^\theta v_{2m-1}(x,A_1),$$

$$m = 1,2,...,\quad \theta > 0.$$

Нехай $H_p^\theta \equiv \big\{y \in L_2(0,1) : A_1^\theta y \in L_2(0,1)\big\}$ – гільбертовий простір функцій зі скалярним добутком та нормою відповідно

$$(u,y;H_p^\theta) \equiv (u,y;L_2(0,1)) + (A_1^\theta u, A_1^\theta y; L_2(0,1)),$$

$$\|u;H_p^\theta\|^2 \equiv (u,u;H_p^\theta) \equiv$$

$$\equiv (u,u;L_2(0,1)) + (A_1^\theta u, A_1^\theta u; L_2(0,1)).$$

Теорема 4. *Нехай $n \ge q > p \ge 0$, $\theta = \dfrac{q-p}{n}$, $f \in H_p^\theta$. Тоді справджується нерівність*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}\big|(f, v_{2m-j}(x,A_2), L_2(0,1))\big|^2 < \infty. \tag{51}$$

$\square$ *Доведення.* Для випадку $f{=}f_0{\in}H_p^\theta \bigcap L_{2,0}(0,1)$, враховуючи формули (47)–(48), отримуємо:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{1}\left|(f_0, v_{2m-j}(x, A_2); L_2(0,1))\right|^2 =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left|(f_0, v_{2m}(x); L_2(0,1))\right|^2 =$$

$$= \left\|f_0; L_2(0,1)\right\|^2 \le \left\|f_0; H_p^\theta\right\|^2. \tag{52}$$

Якщо $f = f_1 \in H_p^\theta \cap H_1$, вивчимо збіжність ряду

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|(f_1, v_{2m}(x, A_2); L_2(0,1))\right|^2 \equiv$$

$$\equiv \sum_{m=1}^{\infty}\left|(f_1, (1-(-1)^{q+1}(\rho_m)^{2q-2p}b)v_{2m}(x) +\right.$$

$$\left.+(-1)^{q+1}(\rho_m)^{2q-2p}bv_{2m}(x, A_1); L_2(0,1))\right|^2 =$$

$$\le 2b^2\sum_{m=1}^{\infty}\left|(f_1, (\rho_m)^{2q-2p}v_{2m}(x, A_0); L_2(0,1))\right|^2 +$$

$$+2b^2\sum_{m=1}^{\infty}\left|(f_1, (A_1)^\theta v_{2m}(x, A_1); L_2(0,1))\right|^2 \le$$

$$\le 4b^2\sum_{m=1}^{\infty}\left|(f_1, (A_1)^\theta v_{2m}(x, A_1); L_2(0,1))\right|^2 \le$$

$$\le 4b^2\sum_{m=1}^{\infty}\left|(f, v_{2m}(x, A_1); H_p^\theta)\right|^2 < \infty.$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|(f_1, v_{2m-1}(x, A_1); L_2(0,1))\right|^2 \equiv$$

$$\equiv \sum_{m=1}^{\infty}\left|(f_1, v_{2m-1}(x, A_1); L_2(0,1))\right|^2 \le$$

$$\le \left\|f_1; L_2(0,1)\right\|^2 \le \left\|f_1; H_p^\theta\right\|^2.$$

Враховуючи співвідношення $f = f_0 + f_1 \in H_p^\theta$, одержимо нерівність (51).

Теорему доведено. $\blacksquare$

VI. Крайова задача

Розглянемо для будь-яких $p \in \{1, 2, ..., n\}$, $b \in \mathbb{R}$ крайову задачу

$$(-1)^{2n}y^{(2n)}(x) = \lambda y(x),\ x \in (0,1),\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{53}$$

$$l_{3,j}y \equiv y^{(2j-2)}(0) + y^{(2j-2)}(1) = 0, \tag{54}$$

$$j = 1, 2, ..., n,$$

$$l_{3,n+j}y \equiv y^{(2j-1)}(0) + y^{(2j-1)}(1) = 0, \tag{55}$$

$$j = 1, 2, ..., n, \quad j \ne p,$$

$$l_{3,n+j}y \equiv y^{(2j-1)}(0) + y^{(2j-1)}(1) + l_p^3 y = 0, \tag{56}$$

$$l_p^3 y \equiv \sum_{q=1}^{k_p} b_{p,q}(y^{(q)}(0) + (-1)^q y^{(q)}(1)) = 0, \tag{57}$$

$$b_{p,q} \in \mathbb{R}, \quad k_p < 2n, \quad p = 1, 2, ..., n.$$

Нехай $A_3 \equiv A_{3,p}$ – оператор задачі (53)–(56),

$$A_3 y \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x), y \in D(A_3),$$

$$D(A_3) \equiv \left\{y \in W_2^{2n}(0,1) : l_{3,j}y = 0,\ j = 1, 2, ..., 2n\right\},$$

$V(A_3)$ – система кореневих функцій оператора A_3.

Теорема 5. *Нехай $b_{p,q} \in \mathbb{R}$, $0 \le q \le k_p \le n$, $1 \le p < 2n$. Тоді спектри операторів A_0, A_3 збігаються і система функцій $V(A_3)$ є повною та мінімальною у просторі $L_2(0,1)$.*

Нехай $k_p \le p$, $p = 1, ..., n$. Тоді система функцій $V(A_3)$ є базисом Рісса в просторі $L_2(0,1)$.

$\square$ *Доведення.* Безпосередніми обчисленнями можна переконатися, що

$$v_{2m-1}(x) \in D(A_3), A_3 v_{2m-1}(x) = \lambda_m v_{2m-1}(x).$$

Отже,

$$v_{2m-1}(x, A_3) \equiv v_{2m-1}(x),\ m = 1, 2, \ldots. \tag{58}$$

Кореневі функції оператора A_3 визначимо сумою

$$v_{2m}(x, A_3) \equiv v_{2m}(x) + c_{3,p,m}y_{2,p}(x, \rho_m), \tag{59}$$

$$m = 1, 2, \ldots.$$

Підставляючи вираз (59) в умови (55), (56), отримаємо

$$c_{3,p,m} = \sum_{q=1}^{k_p}(-1)^{q+1}2\sqrt{2}b_{q,p}(\rho_m)^{2k_p-2p}, \tag{60}$$

$$v_{2m}(x, A_3) = v_{2m}(x) +$$

$$+\sum_{q=1}^{k_p}(-1)^{q+1}b_{q,p}(\rho_m)^{2q-2p}y_{2,p}^1(x, \rho_m), \tag{61}$$

$$m = 1, 2, \ldots.$$

Отже, оператор A_3 має систему кореневих функцій (58)–(61) у сенсі рівностей

$$A_3 v_{2m}(x, A_3) = \lambda_m v_{2m}(x, v) + \xi_{p,m}^0 v_{2m-1}(x, A_3), \tag{62}$$

$$\xi_{p,m}^0 = 4(-1)^n n c_{3,p,m} W(\omega_2^2, ..., \omega_n^2)(\rho_m)^{2n-1+2q-2p},$$

$$A_3 v_{2m-1}(x, A_3) = \lambda_m v_{2m-1}(x, A_3), \tag{63}$$

$$m = 1, 2, \ldots.$$

Введемо в розгляд оператор $R(A_3)$: $C^\infty[0,1] \to C^\infty[0,1]$, який відображає систему власних функцій $V(A_0)$ у систему функцій $V(A_3)$: $R(A_3)v_m(x) \equiv v_m(x, A_3)$, $m = 1, 2, ...,$ $p = 1, 2, ..., n$.

Зі співвідношень (59)–(61), (57) маємо

$$R(A_3) = \prod_{q=1}^{k_{n+p}}(E + S(A_{2,p,q,b})) = E + \sum_{q=1}^{k_{n+p}} S(A_{2,p,q,b}). \tag{64}$$

Отже, $R(A_3) \in G(B_p)$.

Тому з теореми 2 отримуємо таке твердження: система кореневих функцій $V(A_3)$ оператора A_3 є базисом Рісса в просторі $L_2(0,1)$. ■

Розглянемо для будь-яких $p \in \{1,2,...,n\}$, $b \in \mathbb{R}$ крайову задачу

$$(-1)^{2n}y^{(2n)} = \lambda y, x \in (0,1),\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{65}$$

$$l_j^4 y \equiv l_j^0 y = 0, \tag{66}$$

$$l_{4,j}y \equiv y^{(2j-2)}(0) + y^{(2j-2)}(1) = 0, \tag{67}$$

$$l_{4,n+j}y \equiv y^{(2j-1)}(0) + y^{(2j-1)}(1) + l_j^4 y = 0, \tag{68}$$

$$l_j^4 y \equiv \sum_{q=0}^{k_p} b_{j,q}(y^{(q)}(0) + (-1)^q y^{(q)}(1)), \tag{69}$$

$$b_{j,q} \in \mathbb{R}, \quad k_j < 2n, \quad j = 1,2,...,n.$$

Нехай A_4 – оператор задачі (65)–(70), $A_4 y \equiv (-1)^n y^{(2n)}(x)$, $y \in D(A_4)$,

$$D(A_4) \equiv \left\{y \in W_2^{2n}(0,1) : l_{4,j}y = 0,\ j = 1,...,2n\right\},$$

$V(A_4)$ – система кореневих функцій оператора A_4.

Теорема 6. *Нехай $b_{j,q} \in \mathbb{R}$, $0 \le q \le k_j < 2n$, $j = 1,2,...,n$. Тоді множини власних значень операторів A_0 та A_4 збігаються і система $V(A_4)$ повна та мінімальна в просторі $L_2(0,1)$. Якщо $k_j \le j$, $j = 1,2,...,n$, то система функцій $V(A_4)$ є базисом Рісса в просторі $L_2(0,1)$.*

□ *Доведення.* Визначимо систему $V(A_4)$ за допомогою операторів $R(A_4) : V(A_0) \to V(A_4)$,

$$R(A_4) = E + S(A_4) = \prod_{j=1}^{n}(E + S(A_{3,j})).$$

Враховуючи рівність (64), для оператора $R(A_4)$ маємо розвинення

$$R(A_4) = \prod_{p=1}^{n}\prod_{q=1}^{k_p}(E + S(A_{2,p,q,b})) =$$

$$= E + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{k_p} S(A_{2,p,q,b}) =$$

$$= E + \sum_{p=1}^{n} S(A_{3,p}) = E + S(A_4). \tag{70}$$

Згідно з теоремою 3, оператори

$$R(A_{2,p,q}) = E + S(A_{2,p,q})$$

є елементами $G_c(B_p) \subset Q_0(A_0)$.

Отже, теорему доведено. ■

Зауваження 7. Аналогічні результати можна отримати для випадку багатоточкових умов

$$y^{(2j-2)}(0) - y^{(2j-2)}(1) +$$

$$+\sum_{s=0}^{r}\sum_{j=0}^{k_p} b_{p,j,s}\big(y^{(j)}(x_s) + (-1)^j y^{(r)}(1-x_s)\big) = 0.$$

Висновки

У роботі отримано такі результати:

1. Визначено нові класи суттєво несамоспряжених крайових задач, побудовано системи кореневих функцій та біортогональні системи, визначено спектр таких задач.
2. Сформульовано достатні умови повноти та базисності за Ріссом системи кореневих функцій досліджуваних задач.
3. Встановлено умови збіжності розкладу функції у ряд за системою кореневих функцій нерегулярних за Біркгофом крайових задач.
4. Досліджено властивості операторів перетворення, які породжені нелокальними задачами, ізоспектральними з оператором антиперіодичної задачі.

Література

[1] *Михайлов В. П.* О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // ДАН СССР – 1962. – **144**, № 5. – С. 981–984.

[2] *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Известия высших учебных заведений. Математика – 1964. – **39**, № 2. – С. 82–93.

[3] *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // УМН. – 1979. – **34**, № 5. – С. 235–236.

[4] *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Матем. сб. – 1966. – **70**, № 3. – С. 310–329.

[5] *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Функц. анализ и его прил. – 1976. – **10**, № 4. – С. 69-80.

[6] *Хромов А. П.* Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Матем. заметки – 1976. – **19**, № 5. – С. 763–772.

[7] *Костюченко А. Г., Шкаликов А. А.* О суммируемости разложений по собственным функциям дифферен-

циальных операторов и операторов свертки // Функц. анализ и его прил. – 1978. – **12**, № 4. – С. 24–40.

[8] *Трушин И. Ю.* О суммируемости разложений по собственным функциям дифференциальных и интегральных операторов // Матем. заметки – 1993. – **54**, № 3. – С. 114–122.

[9] *Veliev O. A.* On the non selfadjoint ordinary differential operators with periodic boundry conditons. // Israel Journal of Mathematics – 2010. – **176**. – С. 195–207.

[10] *Ткаченко В. А.* Разложения по собственным функциям, связанные с одномерными периодическими дифференциальными операторами порядка $2n$ // Функц. анализ и его прил. – 2007. – **41**, № 1. – С. 66–89.

[11] *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Математика и механика. – 1982. – № 6. – С. 12–21.

[12] *Кангужин Б. Е., Нурахметов Д. Б., Токмагамбетов Н. Е.* Аппроксимативные свойства систем корневых функций, порождаемые корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков // Уфимск. матем. журн. – 2011. – **3**, № 3. – С. 80–92.

[13] *Кангужин Б. Е., Токмагамбетов Н. Е.* Теорема единственности граничных обратных задач дифференциальных операторов на отрезке // Вестник КазНУ – 2014. – **80**, № 1. – С. 1–12.

[14] *Ширяев Е. А.* Диссипативные краевые условия для обыкновенных дифференциальных операторов // Матем. заметки – 2005. – **77**, № 6. – С. 950–954.

[15] *Ширяев Е. А., Шкаликов А. А.* Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы // Матем. заметки – 2007. – **81**, № 4. – С. 636–640.

[16] *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных – К.: Наук. думка, 1993. – 231 с.

[17] *Каленюк Петро, Баранецький Ярослав, Коляса Любов.* Нелокальні крайові задачі для оператора диференціювання парного порядку // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Богдана Йосиповича Пташника. 2017. – С. 91–110.

[18] *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов – М.: Наука, 1965. – 448 с.

[19] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 326 с.

NON-SELF-ADJOINT NON-LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE OPERATOR OF DIFFERENTIATION OF EVEN ORDER

Ya. O. Baranetskij, P. I. Kalenyuk, P. L. Sokhan

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

The spectral properties of an essentially non-self-adjoint problem generated by non-local boundary conditions for the differentiation operator of order $2n$ are investigated. The cases of regular and irregular Birkhoff boundary conditions are studied. A system of root functions of the problem and elements of biorthogonal systems are constructed. Sufficient conditions are obtained under which these systems are complete and under some additional assumptions form a Riesz basis.

Key words: ordinary differential equations, nonlocal problems, Birkhoff regularity, nonselfadjoint operator, Riesz basis.

2000 MSC: 34B10, 34L10

UDK: 517.927.6+517.984.52