

КОНФОРМНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Є. М. Федюк^a, О. І. Думанський^b, Б. О. Бекас^b, Ю. С. Процик^b, І. Д. Капран^b, П. Л. Сохан^a

^aНаціональний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

^bНаціональний лісотехнічний університет України
вул. ген. Чупринки, 103, 79057, Львів, Україна

(Отримано 15 лютого 2018 р.)

Звпропоновано побудовану функцію комплексної змінної, згідно з якою можна здійснити конформне відображення зовнішності складного криволінійного контуру на зовнішність одиничного круга. Зміна відповідних параметрів у функції дає змогу отримати різні типи важливих відображень.

Ключові слова: конформне перетворення, криволінійний отвір, пружно-деформівний стан, силові фактори.

2000 MSC: 30A

УДК: 517.2

Актуальність досліджень

Конформні перетворення – одне із основних понять теорії функції комплексної змінної. Вони відіграють важливу роль, як теоретичну, так і у дослідженні задач стосовно аеро- і гідромеханіки, теорії пружності, електро- і радіотехніки, теплотехніки та багатьох інших інженерно-технічних досліджень. Застосовність конформних перетворень дає можливість просто й ефективно одержати розв’язки задач, зокрема, в дослідженнях напружено-деформівного стану пластинчастих елементів конструкцій з різноманітними порушеннями їхньої однорідності (криволінійними отворами, поверхневими надрізами, виточками, потовщеннями деякої частини області тощо).

I. Аналіз відомих досліджень і публікацій

Оскільки апарат конформних перетворень широкозастосовний, то відповідно є великий науковий доробок щодо них і розроблено методик у їх побудови. Розроблено достатньо прості та ефективні числові наближені методи, згідно з якими вдається з певною точністю побудувати конформні перетворення відповідних наперед заданих областей [1, 3]. У багатьох випадках конформне перетворення подається у вигляді нескінченного полінома, в якому вибираємо його скінченність із певним ступенем, наскільки ця скінченність відповідає перетворенню заданої області. Все ж цього не завжди достатньо, оскільки можемо одержати невідповідний розв’язок сформульованої задачі. Застосовнішими є перетворення скінченного і порівняно простого аналітичного вигляду. У поданій роботі наведено приклади побудованих конформних перетворень, згідно з якими одержуємо перетворення заданих дископодібних пластинчастих елементів конструкцій з їх криволінійною

межею на внутрішність одиничного круга або пластинчастих елементів із криволінійними отворами, вершини яких можуть бути гострокінцевими або заокругленими на область зовнішності кругових отворів.

II. Основний матеріал дослідження з обґрунтуванням отриманих наукових результатів

Досліджуючи будь-який інженерно-технічний об’єкт, зокрема стосовно пружного чи гранично-рівноважного стану пластинчастого елемента конструкції, ослаблених криволінійними отворами, можна отримати ефективний аналітичний розв’язок із використанням теорії аналітичних функцій та апарату конформного відображення. Такий шлях розв’язування поданої математичної моделі задачі доступний і перспективний, оскільки маємо чудово розроблений апарат комплексних потенціалів, запропонований у роботах М. І. Мухелішвілі [2], суть якого полягає у тому, що потрібно мати або побудувати конформно відображаючу функцію, що здійснює перетворення області досліджуваного об’єкта на область одиничного круга або на його зовнішність.

A. Функція конформного відображення

Потрібно дослідити пружно-деформівний стан вздовж криволінійного отвору в пластинчастому елементі конструкції, на який діють певні силові фактори або температурне поле. Для одержання розв’язку поставленої задачі згідно з методикою, поданою у роботах М. І. Мухелішвілі [2], запропоновано побудову функції комплексної змінної, що здійснює конформне відображення зовнішності криволінійного отвору (фізичної області z) на зовнішність одиничного круга (параметри-

чної області ζ):

$$z = \omega(\zeta) = -iRe^{i\omega/2} \frac{iA\zeta^3 - \zeta^2 + iAB\zeta + t}{iA\zeta^3 + \zeta^2 + iAB\zeta - t}, \quad (1)$$

де $z = x + iy = 2e^{i\theta}$ і $\zeta = \mu + i\eta = \rho e^{i\theta}$ – комплексні змінні відповідно у фізичній площині z , тобто у площині досліджуваного пластинчастого елемента, і параме-

тричній площині ζ , на яку перетворюється площина z внаслідок відображення (1), тобто на зовнішність кругового отвору одиничного радіуса.

Побудована функція (1) здійснює перетворення на зовнішність одиничного круга, зовнішність криволінійного отвору, який описується такою системою параметричних рівнянь:

$$\begin{cases} x(\theta) = R \frac{[A^2(1 - B^2) - (1 + t^2) + 2(A^2B + t) \cos 2\theta] \sin \omega/2 + 2A[(1 + B - Bt) \cos \theta - t \cos 3\theta] \cos \omega/2}{A^2(1 + B^2) + (1 + t^2) + 2A(B + Bt - 1) \sin \theta + 2(A^2B + t) \cos 2\theta + 2At \sin 3\theta}, \\ y(\theta) = R \frac{2A[(1 + B - Bt) \cos \theta - t \cos 3\theta] \sin \omega/2 - [A^2(1 + B^2) - (1 + t^2) + 2(A^2B + t) \cos 2\theta] \cos \omega/2}{A^2(1 + B^2) + (1 + t^2) + 2A(B + Bt - 1) \sin \theta + 2(A^2B + t) \cos 2\theta + 2At \sin 3\theta}. \end{cases} \quad (2)$$

Криволінійний отвір, описаний системою рівнянь (2), розміщений вздовж дуги кола радіусом R .

В. Характерні величини функції конформного відображення

Величини (коефіцієнти), які входять у функцію (1), мають вигляд:

$$A = \frac{1}{2} [(1 - t) + \varepsilon(1 + t)] \frac{1 - \sin \omega/2}{\cos \omega/2},$$

$$B = \frac{1 - t - \varepsilon(1 + t)}{1 - t + \varepsilon(1 + t)},$$

$0 \leq \varepsilon < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\pi \leq \omega < \pi$, t – параметр, який набуває значення в інтервалі $|t| < 1$ й обчислюється за формулою

$$t = -1 + \frac{2(1 - r_0/R)}{(1 - r_0/R)(2 + \varepsilon) + \sqrt{r_0/R(1 - r_0/R)(1 - \varepsilon^2)}},$$

де r_0 – радіус заокруглення вершини криволінійного отвору, який можемо обчислити згідно з формулою кривизни у вершинах отвору:

$$r_0/R = \frac{[\varepsilon - t(2 + \varepsilon)]^2}{(1 + t)^2 - 4t[\varepsilon(1 + t) - t]}.$$

У разі зміни кута ω змінюється довжина криволінійного отвору вздовж дуги кола, що відображено на рис. 1, а для $\omega = 0$ та рис. 1, б для $\omega = -\pi/2$.

$r_0/R = 0, \varepsilon = 0.2, \omega = 0$

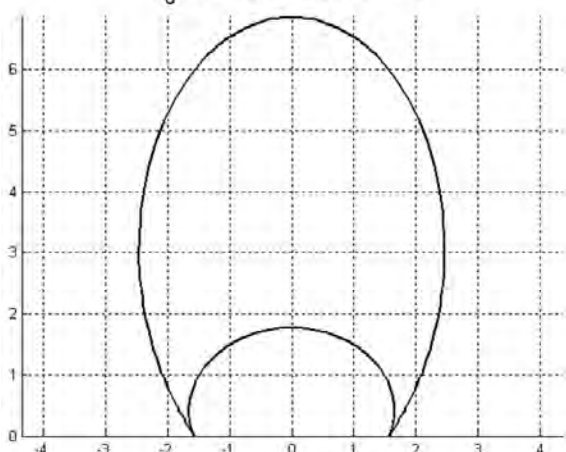


Рис. 1а

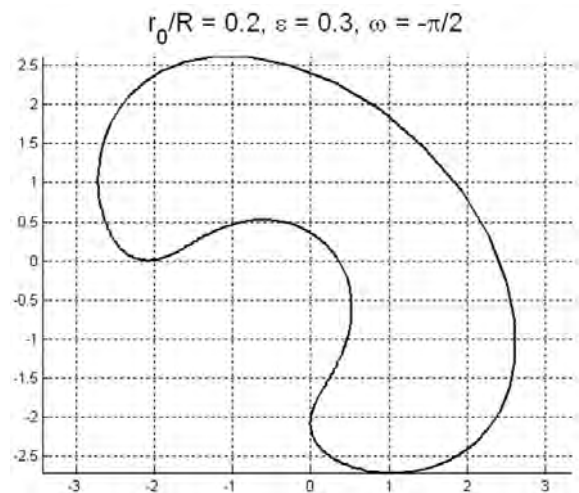


Рис. 1б

Відстань між берегами контуру отвору знаходимо через параметр ε і кут ω за співвідношенням

$$d = \frac{4R\varepsilon \cos \omega/2}{(1 - \varepsilon^2) + (1 + \varepsilon^2) \sin \omega/2}.$$

Якщо $\varepsilon = 0$, у певних точках береги отвору дотикаються.

С. Доведення конформності побудованої функції

Покажемо, що запропонована функція (1) дає можливість відобразити зовнішність одиничного круга в області ξ на зовнішність фізичного розрізу із контуру, параметричне рівняння якого подано формулою (2), тобто відповідає конформному перетворенню.

Подавши змінні z і ζ у показниковій формі $z = re^{i\theta_1}$, $\zeta = \rho e^{i\theta}$ і відокремивши дійсну та уявну частини у формулі (1), одержимо залежність між полярними координатами r, θ_1 і ρ, θ :

$$r = R \frac{\sqrt{[A^2\rho^6 - \rho^4 + A^2B^2\rho^2 - t^2 + 2\rho^2(A^2B + t) \cos 2\theta]^2 + 4A^2[\rho^3 \cos \theta(\rho^2 + B - 4t \cos 2\theta + 3t)]^2}}{A^2\rho^6 + \rho^4 + A^2B^2\rho^2 + t^2 + 2A\rho \sin \theta(\rho^2 + 8t - \rho^4) + 2\rho^2 \cos 2\theta(A^2B\rho^2 + t) + 2At\rho^3 \sin 3\theta}$$

$$\theta_1 = \arctg \frac{2A\rho^3 \cos \theta(\rho^3 + B - 4t \cos^2 \theta + 3t) \sin \omega/2 - [A^2\rho^6 + A^2B^2\rho^2 - t^2 + 2\rho^2(A^2B + t) \cos 2\theta] \cos \omega/2}{2A\rho^3 \cos \theta(\rho^3 + B - 4t \cos^2 \theta + 3t) \cos \omega/2 - [A^2\rho^6 + A^2B^2\rho^2 - t^2 + 2\rho^2(A^2B + t) \cos 2\theta] \sin \omega/2}$$

Полярний кут θ_1 за постійних ρ і ω є періодичною функцією кута θ з періодом 2π , таким, як і радіус-вектор r , отже, криві $\rho = const$ є замкнутими, а криві $\theta = const$ розімкнутими, причому криві $\rho = const$ описують концентричні кола, а криві $\theta = const$ – радіуси-вектори. Отже, маємо двопараметричну сім'ю кривих. Покажемо, що вони ортогональні між собою.

Рівняння дотичної у точці до плоскої кривої лінії на площині xOy , якщо ця крива задана параметричними рівняннями $x = x(\rho, \theta)$ і $y = y(\rho, \theta)$, має вигляд:

$$y_1 = \frac{y'}{x'}x_1 + y - \frac{y'}{x'}x,$$

де x_1, y_1 – поточні координати дотичної; x, y – поточні координати кривої; $\frac{y'}{x'}$ – кутовий коефіцієнт дотичної.

Виокремивши дійсну та уявну частини у запропонованій функції відображення (1), одержимо параметричні рівняння для змінних $x = x(\rho, \theta)$ та $y = y(\rho, \theta)$:

$$\begin{cases} x(\rho, \theta) = R \frac{A_1 \sin \omega/2 + B_1}{C} \\ y(\rho, \theta) = R \frac{B_1 \sin \omega/2 - A_1 \cos \omega/2}{C}, \end{cases}$$

$$A_1 = A^2\rho^6 - \rho^4 + A^2B^2\rho^2 - t^2 + 2\rho^2(A^2B^2 - y) \cos 2\theta,$$

$$B_1 = 2A\rho^3(\rho^2 + B - 4t \cos^2 \theta + 3t) \cos \theta,$$

$$C = A^2\rho^6 + \rho^4 + A^2B^2\rho^2 + t^2 + 2A\rho(\rho^2 + Bt - \rho^4) \sin \theta + 2A\rho^2 \sin 3\theta + 2\rho^2(A^2B^2\rho^2 - t) \cos 2\theta + 2At\rho^3 \sin 3\theta.$$

Запишемо часткові похідні по ρ і θ функції (1):

$$\frac{\partial \omega(\rho, \theta)}{\partial \theta} = -i\rho Re^{i\omega/2}(A_0 + iB_0) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \omega(\rho, \theta)}{\partial \rho} = Re^{i\omega/2}(A_0 + iB_0) \quad (4)$$

де $A_0 = \text{Re}(D)$, $B_0 = \text{Im}(D)$,

$$D = 2A \frac{\rho^4 e^{5i\theta} - (3t + B)\rho^2 e^{3i\theta} - tBe^{i\theta}}{(iA\rho^3 e^{3i\theta} + \rho^2 e^{2i\theta} + iAB\rho e^{i\theta} - t)^2}.$$

Якщо виокремити дійсну та уявну частини у співвідношеннях (3) і (4) та встановити відношення $\frac{\partial y}{\partial \theta} / \frac{\partial x}{\partial \theta}$ і $\frac{\partial y}{\partial \rho} / \frac{\partial x}{\partial \rho}$, одержимо відповідно кутові коефіцієнти дотичних у точках (x, y) до кривих $\rho = const$ та $\theta = const$ на площині z :

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} / \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\frac{A_0}{B_0},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} / \frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{B_0}{A_0}.$$

Зіставляючи значення кутових коефіцієнтів дотичних до ліній $\rho = const$ і $\theta = const$, встановлюємо, що вони задовольняють умову перпендикулярності, тобто

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} / \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho} / \frac{\partial x}{\partial \rho} = -1,$$

що свідчить про ортогональність двопараметричної сім'ї ліній на площині xOy .

Отже, сім'ям концентричних кіл і радіус-векторів на площині ξ відповідають сім'ї взаємно ортогональних кривих на фізичній площині, які утворюють криволінійну прямокутну сітку координат на цій площині.

Оскільки є такі умови, то функція (1) здійснює конформне відображення криволінійного отвору, що описується параметричними рівняннями (2) на зовнішню область одиничного круга.

Встановимо, що функція, подана формулою (1), встановлює однозначну відповідність між точками області на параметричній площині ξ і точками області пластинчастого елемента із криволінійним отвором, контур якого описується рівняннями (2). Для цього необхідно і достатньою умовою є те, щоб похідна відображувальної функції поза кругом і на його межі не дорівнювала нулю $\omega(\zeta) \neq 0$, якщо $|\zeta| \geq 1$.

Продиференціювавши функцію $\omega(\zeta)$, одержимо:

$$\omega'(\zeta) = 2ARe^{i\omega/2} \frac{\zeta^4 - (3t + B)\zeta^2 - tB}{(iA\zeta^3 + \zeta^2 + iAB\zeta - t)^2}$$

Оскільки $\omega'(\zeta) \neq 0$, то, очевидно, рівняння

$$\zeta^4 - (3t + B)\zeta^2 - t = 0$$

не повинно мати коренів, модулі яких дорівнюють або більші за одиницю.

Оскільки маємо бікватратне рівняння відносно ζ , то його корені ζ_i ($i = \overline{1, 4}$) мають вигляд:

$$\zeta_i = \pm \sqrt{\frac{3t + B \pm \sqrt{(3t + B)^2 + 4tB}}{2}}$$

Враховуючи умову $|\zeta| \geq 1$, в яку підставимо значення коренів ζ_i , після нескладних перетворень одержимо, що

$$\varepsilon \geq 2t/(1 + t).$$

Отже, якщо виконується одержане співвідношення між параметрами, то лінія, що описує контур отвору, не самоперетинається й відповідно функція конформного відображення (1) здійснює взаємнооднозначне відображення зовнішності криволінійного отвору на зовнішність одиничного круга.

Отже, згідно з результатами дослідження функції (1) можемо стверджувати, що побудована раціональна функція здійснює конформне відображення фізичної області z , що відповідає пластинчастому елементу конструкції з криволінійним отвором, розміщеним вздовж дуги кола радіуса R , на зовнішність круга у параметричній області ξ .

Д. Типи інших функцій, одержаних на основі побудованої функції

Згідно з побудованою функцією у разі зміни її відповідних параметрів можемо отримати ряд функцій, які перетворюють область з іншою геометричною конфігурацією криволінійних отворів на зовнішність одиничного круга.

Розглянемо часткові випадки зміни параметрів функції (1):

Якщо $t = 0$, функція (1) матиме вигляд:

$$z = \omega(\zeta) = -iRe^{i\omega/2} \frac{\zeta^2 + ia_0\zeta + m}{\zeta^2 - ia_0\zeta + m},$$

де $a_0 = (1+m) \frac{\cos(\omega/2)}{1 - \sin(\omega/2)}$, $0 \leq m \leq 1$ і здійснює відображення еліптичного отвору, розміщеного вздовж дуги кола радіуса R , на зовнішність одиничного круга.

Якщо $m = 1$ – розріз (тріщиноподібні дефекти), розміщений вздовж дуги кола; якщо $t = 0$, $\omega = 0$ і $0 \leq m \leq 1$, функція матиме такий вигляд:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{2(1+m)\zeta^2}{\zeta^2 - i(1+m)_0\zeta + m},$$

У цьому випадку здійснюється перетворення області криволінійного отвору, симетричного відносно осі у вигляді криволінійного трикутника із заокругленими або гострокінцевими вершинами, які зображені на рис. 2. Можливі такого типу інші криволінійні багатокутники у разі поданої зміни параметра n .

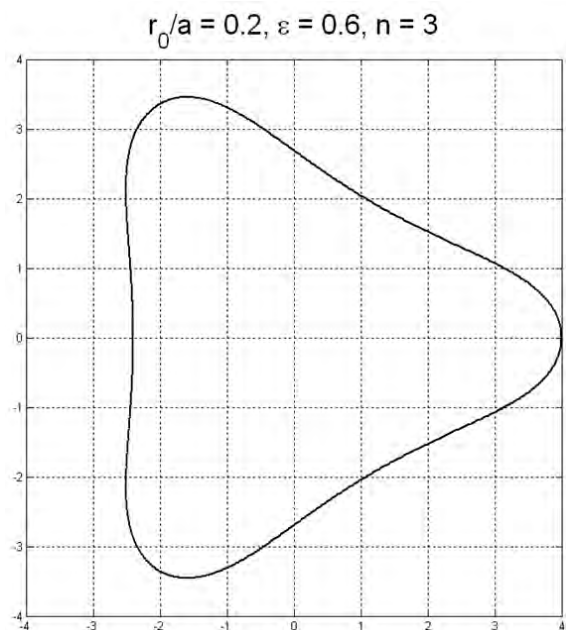


Рис. 2а

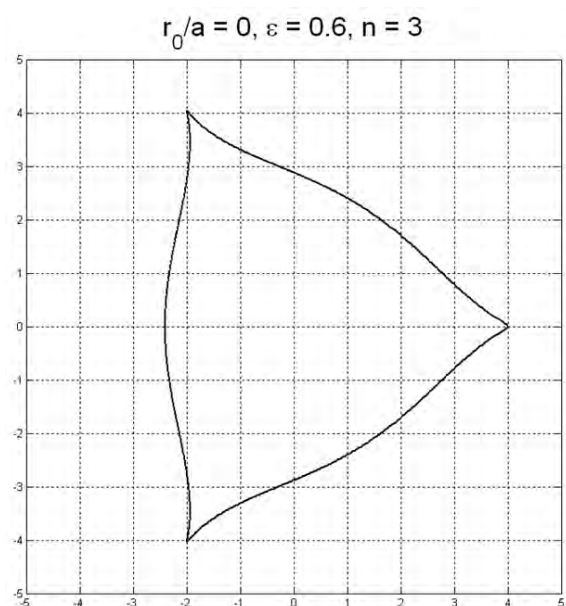


Рис. 2б

Висновки

Побудовані функції конформного відображення дають змогу реалізувати дослідження пружно-деформівного та гранично-рівноважного стану пластинчастих елементів конструкцій, послаблених розглянутими вище криволінійними отворами зі складною геометричною конфігурацією, зокрема, дослідити розподіл концентрації напружень вздовж контурів отворів у разі їх заокруглених вершин та інтенсивність розподілу напружень у випадку гострокінцевих вершин, тобто тріщиноподібних дефектів за дії різноманітних силових факторів.

Література

- [1] *Божедарнік В. В., Максимович О. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 240 с.
- [2] *Мухомелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
- [3] *Фильчаков П. Ф.* Приближенные методы конформных отображений. – К.: Наук. думка, 1964. – 536 с.

CONFORMAL TRANSFORMATIONS AND THEIR APPLICATION IN ENGINEERING-TECHNICAL RESEARCHES

Ye. M. Fedyuk^a, O. I. Dumanskyi^b, B. O. Bekas^b, Yu. S. Protsyk^b, I. D. Kapran^b, P. L. Sokhan^a

^a*Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine*

^b*Ukrainian National Forestry University
103, Gen. Chuprynka Str., Lviv, 79057, Ukraine*

A constructed function of a complex variable, according to which it is possible to implement the conformal mapping of the exterior of complex curvilinear contour onto the exterior of unit circle, is proposed. Changing the corresponding parameters in the function allows to get different types of important mappings.

Key words: conformal mapping, curved hole, elastic-deformed state, power factors.

2000 MSC: 30A

UDK: 517.2