ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 898, 2018, с. 56–68

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 898, 2018, p. 56–68

БІОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

М. А. Сухорольський, В. В. Достойна, О. В. Веселовська

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 15 грудня 2017 р.)

Побудовано систему розв'язків рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій.

Ключові слова: рівняння Гельмгольца, однорідні поліноми, біортогональні системи функцій.

2000 MSC: 33E30

УДК: 517.53.57

Вступ

У роботі [4] отримано методом контурних інтегралів [1, 2, 6] систему розв'язків бігармонійного рівняння та рівняння Гельмгольца у площині у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій. Досліджено властивості цих систем функцій та встановлено достатні умови розвинення функцій в ряди за ними. Розв'язки рівняння Гельмгольца у площині, півплощині та смузі одержано у вигляді сум рядів за системами однорідних поліномів.

У цій роботі методом контурних інтегралів побудовано систему розв'язків рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат та отримано розв'язки деяких крайових задач.

I. Системи розв'язків рівняння Гельмгольца

Розглянемо диференціальне рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+\chi^2 U=0, \qquad (1)$$

де $(z,r)\in R^2$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $\chi=const$. Розв'язки цього рівняння будемо шукати у вигляді ряду

$$U(z,r,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}U^m(z,r)e^{im\varphi}.$$

Підставивши останнє співвідношення в (1), отримаємо рівняння для знаходження функцій $U^m=U^m(z,r)$

$$\frac{\partial^2 U^m}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U^m}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U^m}{\partial r}+\left(\chi^2-\frac{m^2}{r^2}\right)U^m=0, m\in Z. \qquad (2)$$

Заміною $x=\chi z$, $\rho=\chi r$ рівняння (2) можна звести до вигляду

$$\frac{\partial^2 U^m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U^m}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U^m}{\partial \rho}+\left(1-\frac{m^2}{\rho^2}\right)U^m=0. \qquad (3)$$

Знайдемо розв'язки рівняння (3) для значень $m=0$ та $m=1$ параметра m.

1. Випадок $m=0$. У цьому випадку рівняння (3) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U^0}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U^0}{\partial \rho}+U^0=0, \qquad (4)$$

де $(x,\rho)\in R^2$. Його розв'язки шукатимемо у вигляді сум рядів за однорідними поліномами $u_n^0(x,\rho)$, зображеними в інтегральній формі

$$u_n^0(x,\rho)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(x+\xi\rho)^k\,\gamma_k(\xi)d\xi \qquad (5)$$

або

$$u_n^0(x,\rho)=-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\rho}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(x+\xi\rho)^{k+1}\,\gamma_k'(\xi)d\xi, \qquad (6)$$

де Γ – замкнена крива, що охоплює хоча б одну особливу точку функції γ_k.

Підставляючи інтегральне зображення (5) поліномів $u_n^0(x,\rho)$ у рівняння (4), отримаємо функціональне рівняння

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=n}^{\infty}\int_{\Gamma}\Bigg[k(k-1)\,(x+\xi\rho)^{k-2}\left(1+\xi^2\right)+ +\frac{k}{\rho}\,(x+\xi\rho)^{k-1}\,\xi+(x+\xi\rho)^k\Bigg]\gamma_k(\xi)d\xi=0. \qquad (7)$$

Інтегруючи частинами та згрупувавши відповідні доданки, знайдемо

$$\frac{1}{2\pi i}\Bigg\{\int_{\Gamma}n\,(x+\xi\rho)^{n-1}\left[\left(1+\xi^2\right)\gamma_n'(\xi)+\xi\gamma_n(\xi)\right]d\xi+ +\int_{\Gamma}(n+1)(x+\xi\rho)^n\left[\left(1+\xi^2\right)\gamma_{n+1}'(\xi)+\xi\gamma_{n+1}(\xi)\right]d\xi\Bigg\}+ +\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=n}^{\infty}\int_{\Gamma}(x+\xi\rho)^{j+1}\Bigg\{(j+2)\Big[\left(1+\xi^2\right)\gamma_{j+2}'(\xi)+ +\xi\gamma_{j+2}(\xi)\Big]+\frac{1}{j+1}\gamma_j'(\xi)\Bigg\}d\xi=0.$$

Враховуючи незалежність систем степенів змінних x та ρ, одержимо звичайні диференціальні рівняння для визначення невідомих функцій $\gamma_j(\xi)$:

$$\left(1+\xi^2\right)\gamma_n'(\xi)+\xi\gamma_n(\xi)=0,$$
$$\left(1+\xi^2\right)\gamma_{n+1}'(\xi)+\xi\gamma_{n+1}(\xi)=0, \tag{8}$$
$$\left(1+\xi^2\right)\gamma_{j+2}'(\xi)+\xi\gamma_{j+2}(\xi)=-\frac{1}{(j+1)(j+2)}\gamma_j'(\xi), \tag{9}$$

де $j=n,n+1,\ldots$.

Розв'язками рівнянь (8) є функція $\gamma_n(\xi)= =\gamma_{n+1}(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$, а розв'язки рекурентних рівнянь (9) мають вигляд

$$\gamma_{n+2l}(\xi)=\frac{(-1)^l 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2l-1)}{2^l(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+2l)\cdot l!}\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{2l+1}{2}}},$$

де $l=1,2,\ldots$.

Перетворимо функцію $\gamma_{n+2l}(\xi)$:

$$\gamma_{n+2l}(\xi)=\frac{(-1)^l n!\,(2l-1)!!}{2^l\,(n+2l)!l!}\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{2l+1}{2}}}=$$
$$=\frac{(-1)^l(2l)!n!}{2^{2l}\,(n+2l)!l!l!}\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{2l+1}{2}}}=$$
$$=\frac{(-1)^l C_{2l}^l}{2^{2l}(2l)!C_{n+2l}^n}\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{2l+1}{2}}}. \tag{10}$$

Ураховуючи розклад

$$\frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{2l+1}{2}}}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j C_{2l+2j}^{l+j}C_{l+j}^l}{2^{2j}C_{2l}^l}\frac{1}{\xi^{2(l+j)+1}}$$

зі співвідношення (10), одержимо

$$\gamma_{n+2l}(\xi)=\frac{(-1)^l C_{2l}^l}{2^{2l}(2l)!C_{n+2l}^n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j C_{2l+2j}^{l+j}C_{l+j}^l}{2^{2j}C_{2l}^l\,\xi^{2(l+j)+1}}=$$
$$=\frac{1}{(2l)!C_{n+2l}^n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+l}C_{2(l+j)}^{l+j}C_{l+j}^l}{2^{2(j+l)}\,\xi^{2(l+j)+1}}=$$
$$=\frac{1}{(2l)!C_{n+2l}^n}\sum_{r=l}^{\infty}\frac{(-1)^r C_{2r}^r C_r^l}{2^{2r}}\frac{1}{\xi^{2r+1}}.$$

Підставляючи отриманий вираз для функцій $\gamma_{n+2l}(\xi)$ у формулу (5), матимемо

$$u_n^0(x,\rho)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(x+\xi\rho)^{n+j}\,\gamma_{n+j}(\xi)d\xi=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(x+\rho\xi)^{n+2l}}{(2l)!C_{n+2l}^n}\sum_{r=l}^{\infty}\frac{(-1)^r C_{2r}^r C_r^l}{2^{2r}}\frac{d\xi}{\xi^{2r+1}}=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n+2l}\sum_{r=l}^{\infty}\frac{(-1)^r C_{n+2l}^m C_{2r}^r C_r^l}{2^{2r}(2l)!C_{n+2l}^n}x^{n+2l-m}\rho^m\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\xi}{\xi^{2r-m+1}}.$$

Відомо [8, с. 81–82], що

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dz}{z^n}=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases} \tag{11}$$

Тому

$$u_n^0(x,\rho)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=l}^{\left[\frac{n}{2}+l\right]}\frac{(-1)^r C_{2r}^r C_r^l C_{n+2l}^{2r}}{2^{2r}(2l)!C_{n+2l}^n}x^{n+2(l-r)}\rho^{2r}=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+l}C_{2(k+l)}^{k+l}C_{k+l}^l C_{n+2l}^{2(k+l)}}{2^{2(k+l)}(2l)!C_{n+2l}^n}x^{n-2k}\rho^{2(k+l)}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!}{2^{2k}(k!)^2\,(n-2k)!}x^{n-2k}k!\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2^{2l}l!\,(k+l)!}\rho^{2(k+l)}.$$

Ввівши функції

$$b_{2k}^*(z)=k!\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2^{2l}l!\,(k+l)!}z^{2(k+l)}, \tag{12}$$

одержимо

$$u_n^0(x,\rho)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!}{2^{2k}(k!)^2\,(n-2k)!}x^{n-2k}b_{2k}^*(\rho). \tag{13}$$

Зауважимо, що аналогічний до (13) вигляд має система розв'язків

$$\widetilde{u}_n^0(x,\rho)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!}{2^{2k}(k!)^2\,(n-2k)!}x^{n-2k}\rho^{2k} \tag{14}$$

гармонійного у циліндричній системі координат рівняння для нульової гармоніки

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U^0}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U^0}{\partial\rho}=0. \tag{15}$$

На підставі (13) розв'язок $U^0(x,\rho)$ рівняння (4) можна записати у вигляді

$$U^0(x,\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n u_n^0(x,\rho). \tag{16}$$

2. Випадок $\mathbf{m=1}$. У цьому випадку рівняння (3) матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 U^1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U^1}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U^1}{\partial\rho}+\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)U^1=0, \tag{17}$$

де $(x,\rho)\in R^2$. Його систему $\left\{u_n^1(x,\rho)\right\}_{n=0}^{\infty}$ розв'язків шукатимемо в інтегральній формі, аналогічній до (5). Підставляючи їх у рівняння (17), прийдемо до функціонального рівняння

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=n}^{\infty}\int_{\Gamma}\Big[k(k-1)\,(x+\xi\rho)^{k-2}\left(1+\xi^2\right)+$$
$$+\frac{k}{\rho}\,(x+\xi\rho)^{k-1}\xi+\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)(x+\xi\rho)^k\Big]\gamma_k(\xi)d\xi=0. \tag{18}$$

Інтегруючи частинами та згрупувавши відповідні доданки, знайдемо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left\{(x+\xi\rho)^{n}\left[\frac{d^2}{d\xi^2}\left[(1+\xi^2)\gamma_n(\xi)\right]-\frac{d}{d\xi}\left[\xi\gamma_n(\xi)\right]-\gamma_n(\xi)\right]+\right.$$
$$\left.+(x+\xi\rho)^{n+1}\left[\frac{d^2}{d\xi^2}\left[(1+\xi^2)\gamma_{n+1}(\xi)\right]-\frac{d}{d\xi}\left[\xi\gamma_{n+1}(\xi)\right]-\gamma_{n+1}(\xi)\right]\right\}d\xi+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=n}^{\infty}\int\limits_{\Gamma}(x+\xi\rho)^{j+2}\left[\frac{d^2}{d\xi^2}\left[\left(1+\xi^2\right)\gamma_{j+2}(\xi)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{d}{d\xi}\left[\xi\gamma_{j+2}(\xi)\right]-\gamma_{j+2}(\xi)+\frac{1}{(j+1)(j+2)}\frac{d^2\gamma_j(\xi)}{d\xi^2}\right]d\xi=0.$$

Звідси, аналогічно до попереднього випадку, отримаємо звичайні диференціальні рівняння для невідомих функцій $\gamma_j(\xi)$:

$$\left(1+\xi^2\right)\gamma_n''(\xi)+3\xi_n\gamma_n'(\xi)=0,$$
$$\left(1+\xi^2\right)\gamma_{n+1}''(\xi)+3\xi\gamma_{n+1}'(\xi)=0, \qquad (19)$$
$$\left(1+\xi^2\right)\gamma_{j+2}''(\xi)+3\xi\gamma_{j+2}'(\xi)=-\frac{\gamma_j''(\xi)}{(j+1)(j+2)}, \qquad (20)$$

де $j=n,n+1,\ldots$.

Розв'язками рівнянь (19) є $\gamma_n'(\xi)=\gamma_{n+1}'(\xi)=$ $=-\dfrac{2}{(\xi^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, а рекурентних рівнянь (20) –

$$\gamma_{n+2l}'(\xi)=\frac{(-1)^{l+1}(2l+1)!!n!}{2^{l-1}(n+2l)!l!}\frac{1}{(\xi^2+1)^{\frac{2l+3}{2}}},$$

де $l=1,2,\ldots$.

Перетворимо вираз для похідної $\gamma_{n+2l}'(\xi)$:

$$\gamma_{n+2l}'(\xi)=\frac{(-1)^{l+1}(2l+1)(2l)!n!}{2^{2l-1}(n+2l)!l!l!}\frac{1}{(\xi^2+1)^{\frac{2l+3}{2}}}=$$
$$=\frac{(-1)^{l+1}(2l+1)n!C_{2l}^{l}}{2^{2l-1}(n+2l)!}\frac{1}{(\xi^2+1)^{\frac{2l+3}{2}}}.$$

Ураховуючи розвинення

$$\frac{1}{(1+\xi^2)^{\frac{2l+3}{2}}}=\frac{1}{C_{2(l+1)}^{l+1}}\sum_{r=l}^{\infty}\frac{(-1)^{r-l}C_{2(r+1)}^{r+1}C_{r+1}^{l+1}}{2^{2(r-l)}}\frac{1}{\xi^{2r+3}},$$

отримаємо

$$\gamma_{n+2l}'(\xi)=\frac{(2l+1)n!C_{2l}^{l}}{(n+2l)!C_{2(l+1)}^{l+1}}\sum_{r=l}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}C_{2(r+1)}^{r+1}C_{r+1}^{l+1}}{2^{2r-1}\xi^{2r+3}}=$$
$$=\frac{n!}{(n+2l)!}\sum_{r=l}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}(2r+1)C_{2r}^{r}C_{r}^{l}}{2^{2r-1}}\frac{1}{\xi^{2r+3}}.$$

Підставляючи вираз для похідних $\gamma_{n+2l}'(\xi)$ у (6) та враховуючи рівність (11), знайдемо

$$u_n^1(x,\rho)=-\frac{1}{\rho}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(x+\xi\rho)^{n+2l+1}\frac{n!}{(n+2l+1)!}\sum_{r=l}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}(2r+1)C_{2r}^{r}C_{r}^{l}}{2^{2r-1}}\frac{d\xi}{\xi^{2r+3}}=$$
$$=\frac{1}{\rho}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2l+1)!}\sum_{m=0}^{n+2l+1}\sum_{r=l}^{\infty}\frac{(-1)^{r}(2r+1)C_{n+2l+1}^{m}C_{2r}^{r}C_{r}^{l}}{2^{2r-1}}x^{n+2l+1-m}\rho^{m}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\xi}{\xi^{2r-m+3}}=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2l+1)!}\sum_{r=l}^{\left[\frac{n-1}{2}+l\right]}\frac{(-1)^{r}(2r+1)C_{n+2l+1}^{2r+2}C_{2r}^{r}C_{r}^{l}}{2^{2r-1}}x^{n+2(l-r)-1}\rho^{2r+1}=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2l+1)!}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{j+l}\left(2j+2l+1\right)C_{n+2l+1}^{2j+2l+2}C_{2j+2l}^{j+l}C_{j+l}^{l}}{2^{2r+2l-1}}x^{n-2j-1}\rho^{2j+2l+1}=$$
$$=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{j}}{2^{2j}}x^{n+2j-1}\rho^{2j+1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2l+1)!}\frac{(-1)^{l}\left(2j+2l+1\right)C_{n+2l+1}^{2j+2l+2}C_{2j+2l}^{j+l}C_{j+l}^{l}}{2^{2l-1}}\rho^{2l}=$$
$$=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{j}n!}{2^{2j}j!(j+1)!\,(n-2j-1)!}x^{n-2j-1}(j+1)!\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l}}{2^{2l}l!\,(l+j+1)!}\rho^{2l+2j+1}.$$

Введемо функції

$$b_{2j+1}^{*}(z)=(j+1)!\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l}}{2^{2l}l!\,(j+l+1)!}z^{2(j+l)+1}. \qquad (21)$$

Тоді

$$u_n^1(x,\rho)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{j}n!\,x^{n-2j-1}}{2^{2j}j!(j+1)!\,(n-2j-1)!}b_{2j+1}^{*}(\rho). \qquad (22)$$

Зауважимо, що аналогічний з (22) вигляд має система розв'язків

$$\widetilde{u}_n^1(x,\rho) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^j n!\, x^{n-2j-1}}{2^{2j} j!(j+1)!\,(n-2j-1)!}\rho^{2j+1} \quad (23)$$

гармонійного у циліндричній системі координат рівняння для першої гармоніки

$$\frac{\partial^2 U^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U^1}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}U^1 = 0. \quad (24)$$

Розв'язок $U^1(x,\rho)$ рівняння (17) з урахуванням (22) запишемо у вигляді

$$U^1(x,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n^1(x,\rho). \quad (25)$$

Розглянемо систему $\{b_n^*(z)\}_{n=0}^{\infty}$ функції комплексної змінної

$$b_n^*(z) = \left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)! \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j} j! \left(j + \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)!} z^{2j+n}, \quad (26)$$

де $[x]$ — ціла частина x.

Теорема 1. *Функції $b_n^*(z)$ утворюють базис Шаудера [3, с. 128–129, 161] у просторі однозначних аналітичних у крузі $|z| \le r$, $0 < r < \infty$, функцій.*

□ *Доведення.* Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1.4 з [5]. ■

Теорема 2. *Існує інтегральний оператор, який переводить гармонійну функцію у функцію, яка задовольняє рівняння Гельмгольца.*

□ *Доведення.* Нехай $\Phi^*(z,t)$ — твірна функцій $b_n^*(z)$, визначених співвідношенням (26), тобто $\Phi^*(z,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n^*(z)t^n$.

Розглянемо функцію $F(z,t) = \frac{1}{t}\Phi^*\left(z, \frac{1}{t}\right)$. Тоді $F(z,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n^*(z)\frac{1}{t^{n+1}}$. Помножимо цю рівність на функції t^p $(p = 0, 1, \ldots)$, біортогональні до системи степенів $t^{-(n+1)}$, і проінтегруємо вздовж замкненого контуру Г, що охоплює нульову точку. Враховуючи умови біортогональності систем $\{t^p\}$ і $\left\{t^{-(n+1)}\right\}$, одержимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} t^p F(z,t)dt = b_p^*(z). \quad (27)$$

Рівність (27) визначає інтегральний оператор

$$L(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(x,\xi)F(z,\xi)d\xi. \quad (28)$$

Покажемо, що цей оператор переводить гармонійну функцію у функцію, яка задовольняє рівняння Гельмгольца.

Нехай

$$f(x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widetilde{u}_n^0(x,\xi), \quad (29)$$

де $\widetilde{u}_n^0(x,\xi)$ визначені співвідношенням (14). Якщо коефіцієнти a_n обмежені (тобто $|a_n| \le M$ для всіх n, $M = const$), то ряд в (29) збіжний.

Справді, на підставі нерівності

$$(2k)! < 2^{2k}\,(k!)^2 \quad (30)$$

маємо

$$\left|\widetilde{u}_n^0(x,\xi)\right| < \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}\,|x|^{n-2k}\,|\xi|^{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k}\,|x|^{n-2k}\,|\xi|^{2k} \le (|x| + |\xi|)^n,$$

звідки

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widetilde{u}_n^0(x,\xi)\right| < M\sum_{n=0}^{\infty}(|x|+|\xi|)^n = \frac{M}{1-|x|-|\xi|}$$

і ряд в (29) збіжний в області $G = \left\{(x,\xi) \in R^2 \colon |x| + |\xi| < 1)\right\}$.

Розглянемо образ функції $f(x,\xi)$. На підставі (27) запишемо

$$L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!\, x^{n-2k}}{2^{2k}\,(k!)^2\,(n-2k)!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\xi^{2k}F(\rho,\xi)d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n! x^{n-2k}}{2^{2k}\,(k!)^2\,(n-2k)!} b_{2k}^*(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n^0(\rho).$$

Покажемо, що отриманий ряд також збігається у випадку, коли коефіцієнти a_n обмежені.

Використовуючи оцінку $|b_{2k}(\rho)| \le \frac{e^{|\rho|}}{(k!)^2}\left(\frac{|\rho|}{2}\right)^{2k}$ із [5] та співвідношення

$$b_{2k}(\rho) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2} b_{2k}^*(\rho), \quad (31)$$

знайдемо

$$|b_{2k}^*(\rho)| \le e^{|\rho|}|\rho|^{2k}. \quad (32)$$

Оцінимо розв'язки $u_n^0(x,\rho)$ з урахуванням нерівностей (30) та (32):

$$\left|u_n^0(x,\rho)\right| \le \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{2^{2k}(k!)^2(n-2k)!}\,|x|^{n-2k}\,|b_{2k}^*(\rho)| <$$

$$< e^{|\rho|}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{(2k)!\,(n-2k)!}\,|x|^{n-2k}\,|\rho|^{2k} =$$

$$= e^{|\rho|}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k}\,|x|^{n-2k}\,|\rho|^{2k} \le e^{|\rho|}\,(|x| + |\rho|)^n. \quad (33)$$

Звідси

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n^0(x,\rho)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left|u_n^0(x,\rho)\right| <$$

$$< Me^{|\rho|}\sum_{n=0}^{\infty} (|x|+|\rho|)^n = \frac{Me^{|\rho|}}{1-|x|-|\rho|}.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n^0(x,\rho)$ також збіжний в області G.

Аналогічно можна показати, що образом функції $q(x,\xi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \widetilde{u}_n^1(x,\xi)$, де $\widetilde{u}_n^1(x,\xi)$ визначені співвідношенням (23), а d_n — обмежені, є збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n u_n^1(x,\rho)$.

Отже, існує інтегральний оператор, визначений рівністю (28), який переводить гармонійну функцію у розв'язок рівняння Гельмгольца. ■

II. Побудова розв'язків крайових задач

Якщо $x=0$ і $\rho=0$, функції $u_n^0(x,y)$ мають відповідно вирази:

$$u_{2n}^0(0,\rho) = \frac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} b_{2n}^*(\rho), \quad u_{2n+1}^0(0,\rho)=0,$$

$$u_{2n}^0(x,0) = x^{2n}, \quad u_{2n+1}^0(x,0) = x^{2n+1},$$

а функції $u_n^1(x,y)$ —

$$u_{2n}^1(0,\rho)=0, \quad u_{2n+1}^1(0,\rho) = \frac{(-1)^n\,(2n+1)!}{2^{2n} n!(n+1)!} b_{2n+1}^*(\rho),$$

$$u_{2n}^1(x,0) = u_{2n+1}^1(x,0) = 0.$$

Задача A. Знайти розв'язок рівняння (4) у півпросторі $x>0$, який задовольняє у площині $x=0$ умову

$$U^0(x,\rho)\big|_{x=0} = f_1(\rho), \tag{34}$$

де функцію $f_1(\rho)$ задано збіжним рядом $f_1(\rho) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{2n} b_{2n}^*(\rho)$.

Розв'язок рівняння (4) шукаємо у вигляді $U^0(x,\rho) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} u_{2n}^0(x,\rho)$. Підставляючи його в умову (34), отримаємо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} u_{2n}^0(0,\rho) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} \dfrac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} b_{2n}^*(\rho) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{2n} b_{2n}^*(\rho)$. Звідси $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n 2^{2n}\,(n!)^2\,A_{2n}}{(2n)!}$. Тому

$$U^0(x,\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}\,(n!)^2\,A_{2n}}{(2n)!} u_{2n}^0(x,\rho). \tag{35}$$

Приклад 1. Нехай $f_1(\rho)=1$. Використовуючи розклад [5] $1 = \sum\limits_{r=0}^{\infty} (-1)^r b_{2r}(\rho)$ та враховуючи співвідношення (31), отримаємо

$$1 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2r}(r!)^2} b_{2r}^*(\rho), \tag{36}$$

звідки $A_{2r} = \dfrac{1}{2^{2r}(r!)^2}$, $A_{2r+1}=0$. Тоді, враховуючи співвідношення (35), (13) та змінюючи порядки підсумовування, запишемо

$$U^0(x,\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}\,(n!)^2\,A_{2n}}{(2n)!} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,(2n)!}{2^{2k}(k!)^2\,(2n-2k)!} x^{2(n-k)} b_{2k}^*(\rho) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2\,(2n-2k)!} x^{2(n-k)} b_{2k}^*(\rho) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} b_{2k}^*(\rho) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-2k)!} x^{2(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} b_{2k}^*(\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{(2n)!} x^{2n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}(k!)^2} b_{2k}^*(\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} = \cos x.$$

Отже, справджується умова $U^0(x,\rho)\big|_{x=0} = 1$.

Задача B. Знайти розв'язок рівняння (17) у півпросторі $x>0$, такий, що у площині $x=0$ має вигляд

$$U^1(x,\rho)\big|_{x=0} = f_2(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} b_{2n+1}^*(\rho). \tag{37}$$

Розв'язок рівняння (17) шукаємо у вигляді $U^1(x,\rho) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} u_{2n+1}^1(x,\rho)$. Підставляючи його в умову (37), отримаємо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} u_{2n+1}^1(0,\rho) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} b_{2n+1}^*(\rho)$ або $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(2n+1)!}{2^{2n} n!(n+1)!} d_{2n+1} b_{2n+1}^*(\rho) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} b_{2n+1}^*(\rho)$. Звідси $d_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n 2^{2n} n!(n+1)!}{(2n+1)!} D_{2n+1}$.

Отже,

$$U^1(x,\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!(n+1)!}{(2n+1)!} D_{2n+1} u_{2n+1}^1(\rho). \tag{38}$$

Приклад 2. Нехай $f_2(\rho)=\rho$. Використовуючи розклад $\rho = 2\sum\limits_{r=0}^{\infty} (-1)^r b_{2r+1}(\rho)$ (див. [5]) та співвідношення

$$b_{2r+1}(\rho) = \frac{(-1)^r}{2^{2r+1} r!(r+1)!} b_{2r+1}^*(\rho), \tag{39}$$

отримаємо

$$\rho = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2r} r!(r+1)!} b_{2r+1}^*(\rho), \tag{40}$$

звідки $D_{2r}=0$, $D_{2r+1}=\dfrac{1}{2^{2r}r!(r+1)!}$. Тоді на підставі співвідношення (38) з урахуванням (22) маємо

$$U^1(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}n!(n+1)!}{(2n+1)!}D_{2n+1}u^1_{2n+1}(x,\rho)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(k+1)!\,(2n-2k)!}x^{2(n-k)}b^*_{2k+1}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(k+1)!}b^*_{2k+1}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-2k)!}x^{2(n-k)}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(k+1)!}b^*_{2k+1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k}}{(2j)!}x^{2j}=\rho\cos x.$$

Отже, справджується умова $U^1(x,\rho)\big|_{x=0}=\rho$.

Задача C. Знайти розв'язок рівняння (4) у просторі, що задовольняє умову

$$U^0(x,\rho)\big|_{\rho=0}=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nx^n. \tag{41}$$

Розв'язок рівняння (4) шукаємо у вигляді $U^0(x,\rho)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nu^0_n(x,\rho)$. Підставляючи його в умову (41), отримаємо $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nu^0_n(x,0)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}B_n\,x^n$. Звідси $a_n=B_n$.

Отже,

$$U^0(x,\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nu^0_n(x,\rho).$$

Задача D. Знайти розв'язок рівняння (4), який у площині $x=x_0$ набуває заданого значення

$$U^0(x,\rho)\big|_{x=x_0}=f_3(\rho), \tag{42}$$

де функція $f_3(\rho)$ розвивається у збіжний ряд за системою функцій (12)

$$f_3(\rho)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{A_{2r}}{(2r)!}b^*_{2r}(\rho). \tag{43}$$

Перетворимо ряд (16) з урахуванням формули (13)

$$U^0(x,\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}u^0_{2n}(x,\rho)+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}u^0_{2n+1}(x,\rho)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\left[a_{2n}\frac{(2n)!}{(2n-2k)!}x^{2(n-k)}+\right.$$
$$\left.+a_{2n+1}\frac{(2n+1)!}{(2n-2k+1)!}x^{2(n-k)+1}\right]b^*_{2k}(\rho)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kb^*_{2k}(\rho)}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{n=k}^{\infty}\left[a_{2n}\frac{(2n)!}{(2n-2k)!}x^{2(n-k)}+\right.$$
$$\left.+a_{2n+1}\frac{(2n+1)!}{(2n-2k+1)!}x^{2(n-k)+1}\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kb^*_{2k}(\rho)}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+2k}\frac{(m+2k)!}{m!}x^m.$$

Введемо функцію

$$\Phi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \tag{44}$$

Враховуючи, що $\Phi_1^{(s)}(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{m+s}\dfrac{(m+s)!}{m!}x^m$, одержимо

$$U^0(x,\rho)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\Phi_1^{(2k)}(x)b^*_{2k}(\rho).$$

Підставимо отриманий вираз для $U^0(x,\rho)$ в умову (42). Тоді

$$f_3\left(\rho\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\Phi_1^{(2k)}\left(x_0\right)b^*_{2k}(\rho).$$

Враховуючи розвинення (43) і прирівнюючи коефіцієнти біля окремих функцій системи (12), одержимо

$$\Phi_1^{(2k)}\left(x_0\right)=\frac{(-1)^k2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}A_{2k}.$$

Співвідношення для похідних $\Phi_1^{(2k)}\left(x_0\right)$ можна звести з урахуванням формули (44) до системи рівнянь відносно коефіцієнтів a_k $(k=0,1,\ldots)$. Знайдемо ці коефіцієнти, використовуючи розвинення

$$\Phi_1(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Phi_1^{(2j)}\left(x_0\right)}{(2j)!}\left(x-x_0\right)^{2j}=$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j2^{2j}(j!)^2A_{2k}}{\left[(2j)!\right]^2}\left(x-x_0\right)^{2j}.$$

Враховуючи вирази для похідних функції $\Phi_1(x)$

$$\Phi_1^{(2k)}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+k}2^{2(l+k)}\left[(l+k)!\right]^2A_{2(l+k)}}{(2l)!\,(2l+2k)!}\left(x-x_0\right)^{2l},$$
$$\Phi_1^{(2k+1)}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+k+1}2^{2(l+k+1)}\left[(l+k+1)!\right]^2}{(2l+1)!\,(2l+2k+2)!}\times$$
$$\times A_{2(l+k+1)}\left(x-x_0\right)^{2l+1}$$

і підставляючи в них $x=0$, одержимо формули для обчислення коефіцієнтів a_k

$$a_{2k}=\frac{\Phi_1^{(2k)}(0)}{(2k)!}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+k}2^{2(l+k)}\left[(l+k)!\right]^2A_{2(l+k)}}{(2k)!(2l)!\,(2l+2k)!}x_0^{2l},$$
$$a_{2k+1}=\frac{\Phi_1^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+k}2^{2(l+k+1)}\left[(l+k+1)!\right]^2A_{2(l+k+1)}}{(2k+1)!(2l+1)!\,(2l+2k+2)!}x_0^{2l+1}. \tag{45}$$

Тепер за знайденими коефіцієнтами a_k можна записати розв'язок рівняння (4), який задовольняє умову (42).

Справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай функція* $f_3(\rho)$ *розвивається у ряд* (43)*, коефіцієнти* A_{2j} *якого задовольняють умову*

$$\varlimsup_{j\to\infty}\sqrt[2j]{|A_{2j}|}=\sigma<\infty. \qquad (46)$$

Тоді розв'язок рівняння (4)*, що задовольняє умову* (42)*, задають у вигляді суми ряду* (16)*, який рівномірно збігається в області* $|x|\le R_1<\infty$*,* $|\rho|\le R_2<\infty$*, причому його коефіцієнти* a_n *знаходять за формулами* (45)*.*

☐ *Доведення.* За умовою (46) послідовність коефіцієнтів A_{2n} обмежена і, відповідно, існує число M таке, що для всіх n виконується нерівність $|A_{2n}|\le M^{2n}$. Тоді для коефіцієнтів a_{2k} маємо оцінку

$$|a_{2k}|\le\frac{2^{2k}}{(2k)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2^{2l}\left[(l+k)!\right]^2\left|A_{2(l+k)}\right|}{(2l)!\,(2l+2k)!}\left|x_0\right|^{2l}.$$

Використовуючи нерівність $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$, знайдемо

$$\frac{\left[(l+k)!\right]^2}{(2l+2k)!}<\frac{\left[e\left(\dfrac{l+k}{2}\right)^{l+k}\right]^2}{\left(\dfrac{2l+2k}{e}\right)^{2l+2k}}=$$

$$=\frac{e^{2l+2k+2}\,(l+k)^{2(l+k)}}{2^{4(l+k)}\,(l+k)^{2(l+k)}}=\frac{e^{2l+2k+2}}{2^{4(l+k)}}.$$

Звідси

$$|a_{2k}|<\frac{e^{2k+2}}{2^{2k}(2k)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{2l}\left|A_{2(l+k)}\right|}{2^{2l}(2l)!}\left|x_0\right|^{2l}\le$$

$$\le\frac{e^{2k+2}}{2^{2k}(2k)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{e^{2l}M^{2l+2k}}{2^{2l}(2l)!}\left|x_0\right|^{2l}=\frac{e^{2k+2}M^{2k}}{2^{2k}(2k)!}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{Me\left|x_0\right|}{2}\right)^{2l}}{(2l)!}=\frac{e^2(M_1)^{2k}}{(2k)!}ch\left(M_1\left|x_0\right|\right),$$

де $M_1=\dfrac{Me}{2}$.

Аналогічно $|a_{2k+1}|<\dfrac{e^2(M_1)^{2k+1}}{(2k+1)!}sh\left(M_1|x_0|\right)$.

Враховуючи оцінки для коефіцієнтів a_{2k}, a_{2k+1} та оцінку (33), одержимо

$$\left|U^0(x,\rho)\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{2n}\right|\left|u_{2n}^0(x,\rho)\right|$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{2n+1}\right|\left|u_{2n+1}^0(x,\rho)\right|<$$

$$<e^{|\rho|+2}ch\left(M_1\left|x_0\right|\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[M_1\left(|x|+|\rho|\right)\right]^{2n}}{(2n)!}+$$

$$+e^{|\rho|+2}sh\left(M_1\left|x_0\right|\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[M_1\left(|x|+|\rho|\right)\right]^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

$$=e^{|\rho|+2}\Big(ch\left(M_1\left|x_0\right|\right)ch\big(M_1\left(|x|+|\rho|\right)\big)+$$

$$+sh\left(M_1\left|x_0\right|\right)sh\big(M_1\left(|x|+|\rho|\right)\big)\Big)=$$

$$=e^{|\rho|+2}ch\big(M_1\left(|x_0|+|x|+|\rho|\right)\big)\le$$

$$\le e^{R_2+2}ch\big(M_1\left(|x_0|+R_1+R_2\right)\big).$$

Звідси випливає рівномірна збіжність ряду (16) в області $|x|\le R_1<\infty$, $|\rho|\le R_2<\infty$. ■

Наслідок 1. Якщо розв'язок (16) рівняння (4) задовольняє умови $U^0\left(\pm x_0,\rho\right)=f_3(\rho)$, $x_0>0$, то він набуде вигляду $\overline{U^0}(x,\rho)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}u_{2n}^0(x,\rho)$.

Для випадку умов $U^0\left(\pm x_0,\rho\right)=\pm f_3(\rho)$ матимемо $\overline{\overline{U^0}}(x,\rho)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}u_{2n+1}^0(x,\rho)$.

Півсума і піврізниця цих розв'язків задовольняють, відповідно, такі умови:

$$\frac{1}{2}\left[\overline{U^0}\left(x_0,\rho\right)+\overline{\overline{U^0}}\left(x_0,\rho\right)\right]=f_3(\rho),$$

$$\frac{1}{2}\left[\overline{U^0}\left(x_0,\rho\right)-\overline{\overline{U^0}}\left(x_0,\rho\right)\right]=0;$$

$$\frac{1}{2}\left[\overline{U^0}\left(-x_0,\rho\right)+\overline{\overline{U^0}}\left(-x_0,\rho\right)\right]=0,$$

$$\frac{1}{2}\left[\overline{U^0}\left(-x_0,\rho\right)-\overline{\overline{U^0}}\left(-x_0,\rho\right)\right]=f_3(\rho).$$

Одержані вирази можна використати для побудови розв'язків рівняння (4) у смузі $|x|<x_0$.

Приклад 3. Нехай $U^0(x,\rho)\big|_{x=x_0}=f_3(\rho)$, де $f_3(\rho)=1$. Зі співвідношення (36) знайдемо $A_{2n}=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}$, $A_{2n+1}=0$. Підставляючи їх у формули (45), отримаємо

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}x_0^{2j}=\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cos x_0,$$

$$a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}x_0^{2j+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sin x_0.$$

Знайдемо явний вираз функції $U^0(x,\rho)$:

$$U^0(x,\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}u_{2n}^0(x,\rho)+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}u_{2n+1}^0(x,\rho)=$$

$$=\cos x_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+n}\,(2n)!x^{2(n-k)}}{2^{2k}\,(2n)!(k!)^2\,(2n-2k)!}b_{2k}^*(\rho)+$$

$$+\sin x_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+n}\,(2n+1)!x^{2(n-k)+1}}{2^{2k}\,(2n+1)!(k!)^2\,(2n-2k+1)!}b_{2k}^*(\rho)=$$

$$=\cos x_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kb_{2k}^*(\rho)}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-2k)!}x^{2n-2k}+$$

$$+\sin x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_{2k}^*(\rho)}{2^{2k}(k!)^2} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-2k+1)!} x^{2n-2k+1} =$$

$$= \cos x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_{2k}^*(\rho)}{2^{2k}(k!)^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l} +$$

$$+\sin x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_{2k}^*(\rho)}{2^{2k}(k!)^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} =$$

$$= \cos x_0 \cos x + \sin x_0 \sin x = \cos (x - x_0).$$

Справді, цей розв'язок задовольняє умову $U^0(x_0, \rho) = f_3(\rho) = 1$.

Задача Е. Знайти розв'язок рівняння (17), що задовольняє умову

$$U^1(x,\rho)\big|_{x=x_0} = f_4(\rho), \tag{47}$$

де функція $f_4(\rho)$ розвивається у збіжний ряд за системою функцій (21)

$$f_4(\rho) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{D_{2r+1}}{(2r+1)!} b_{2r+1}^*(\rho). \tag{48}$$

Перетворимо вираз розв'язку (25) з урахуванням формули (22):

$$U^1(x,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{2n} u_{2n}^1(x,\rho) + \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} u_{2n+1}^1(x,\rho) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+2} u_{2n+2}^1(x,\rho) + \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} u_{2n+1}^1(x,\rho) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \Bigg[d_{2n+2} \frac{(2n+2)!}{(2n-2k+1)!} x^{2(n-k)+1} +$$

$$+ d_{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(2n-2k)!} x^{2(n-k)} \Bigg] \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+1)!} b_{2k+1}^*(\rho) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+1)!} b_{2k+1}^*(\rho) \sum_{n=k}^{\infty} \Bigg[d_{2n+2} \frac{(2n+2)!}{(2n-2k+1)!} \times$$

$$\times x^{2(n-k)+1} + d_{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(2n-2k)!} x^{2(n-k)} \Bigg] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+1)!} b_{2k+1}^*(\rho) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+2k+1)!}{l!} d_{l+2k+1} x^l.$$

Введемо функцію

$$\Phi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n.$$

Враховуючи, що $\Phi_2^{(s)}(x) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} d_{l+s} \dfrac{(l+s)!}{l!} x^l$, одержимо

$$U^1(x,\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+1)!} \Phi_2^{(2k+1)}(x) b_{2k+1}^*(\rho).$$

Підставимо отриманий вираз для $U^1(x,\rho)$ в умову (47). Враховуючи розвинення (48), знайдемо

$$\frac{D_{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+1)!} \Phi_2^{(2k+1)}(x_0),$$

звідки

$$\Phi_2^{(2k+1)}(x_0) = \frac{(-1)^k 2^{2k} k!(k+1)!}{(2k+1)!} D_{2k+1}.$$

Нехай функція $\Phi_2(x)$ має розвинення

$$\Phi_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_2^{(2k+1)}(x_0)}{(2k+1)!} (x - x_0)^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} k!(k+1)!}{[(2k+1)!]^2} D_{2k+1} (x - x_0)^{2k+1}.$$

Враховуючи вирази для похідних функції $\Phi_2(x)$

$$\Phi_2^{(2s)}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+s} 2^{2(l+s)} (l+s)! (l+s+1)!}{(2l+1)! (2l+2s+1)!} \times$$
$$\times D_{2l+2s+1} (x - x_0)^{2l+1},$$

$$\Phi_2^{(2s+1)}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+s} 2^{2(l+s)} (l+s)! (l+s+1)!}{(2l)! (2l+2s+1)!} \times$$
$$\times D_{2l+2s+1} (x - x_0)^{2l}$$

і підставляючи в них $x = 0$, одержимо формули для обчислення коефіцієнтів d_k

$$d_{2n+2} = \frac{\Phi_2^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!} = \frac{(-1)^n 2^{2(n+1)}}{(2n+2)!} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l 2^{2l} (l+n+1)! (l+n+2)!}{(2l+1)! (2l+2n+3)!} D_{2l+2n+3} x_0^{2l+1},$$

$$d_{2n+1} = \frac{\Phi_2^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l 2^{2l} (l+n)! (l+n+1)!}{(2l)! (2l+2n+1)!} D_{2l+2n+1} x_0^{2l}. \tag{49}$$

Тепер за знайденими коефіцієнтами d_k запишемо розв'язок рівняння (17), який задовольняє умову (47).

Справедлива така теорема.

Теорема 4. *Нехай функція* $f_4(\rho)$ *розвивається в ряд* (48), *коефіцієнти* D_{2j+1} *якого задовольняють умову* $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \sqrt[2j+1]{|D_{2j+1}|} = \nu < \infty$. *Тоді розв'язок рівняння* (17), *що задовольняє умову* (47), *задають у вигляді суми ряду* (25), *який рівномірно збігається в області* $|x| \le R_1 < \infty$, $|\rho| \le R_2 < \infty$, *причому його коефіцієнти* d_n *знаходять за формулами* (49).

$\square$ *Доведення.* Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1. $\blacksquare$

Наслідок 2. Якщо розв'язок (25) рівняння (17) задовольняє умови $U^1(\pm x_0, \rho) = f_4(\rho)$, $x_0 > 0$, то він набуде вигляду $\overline{U^1}(x,\rho) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} u_{2n+1}^1(x,\rho)$.

Для випадку умов $U^1(\pm x_0,\rho)=\pm f_4(\rho)$ матимемо $\overline{\overline{U^1}}(x,\rho)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_{2n}u^1_{2n}(x,\rho)$.

Півсума і піврізниця цих розв'язків задовольняє, відповідно, такі умови:

$$\frac{1}{2}\left[\overline{U^1}(x_0,\rho)+\overline{\overline{U^1}}(x_0,\rho)\right]=f_4(\rho),$$
$$\frac{1}{2}\left[\overline{U^1}(x_0,\rho)-\overline{\overline{U^1}}(x_0,\rho)\right]=0;$$
$$\frac{1}{2}\left[\overline{U^1}(-x_0,\rho)+\overline{\overline{U^1}}(-x_0,\rho)\right]=0,$$
$$\frac{1}{2}\left[\overline{U^1}(-x_0,\rho)-\overline{\overline{U^1}}(-x_0,\rho)\right]=f_4(\rho).$$

Одержані вирази можна використати для побудови розв'язків рівняння (17) у смузі $|x|<x_0$.

Приклад 4. Нехай $U^1(x,\rho)\big|_{x=x_0}=\rho$. Зі співвідношення (40) маємо $D_{2r}=0$, $D_{2r+1}=\dfrac{(2r+1)!}{2^{2r}r!(r+1)!}$. Підставляючи їх у формули (49), отримаємо

$$d_{2n+2}=\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}x_0^{2j+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\sin x_0,$$
$$d_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}x_0^{2j}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cos x_0.$$

Знайдемо явний вираз функції $U^1(x,\rho)$:

$$U^1(x,\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}d_{2n+2}u^1_{2n+2}(x,\rho)+\sum_{n=0}^{\infty}d_{2n+1}u^1_{2n+1}(x,\rho)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sin x_0\sum_{r=0}^{n}\frac{x^{2(n-r)+1}}{(2n-2r+1)!}+\right.$$
$$\left.+(-1)^n\cos x_0\sum_{r=0}^{n}\frac{x^{2(n-r)}}{(2n-2r)!}\right)\frac{(-1)^r b^*_{2r+1}(\rho)}{2^{2r}r!(r+1)!}=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r b^*_{2r+1}(\rho)}{2^{2r}r!(r+1)!}\left(\sin x_0\sum_{n=r}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-2r+1)!}x^{2(n-r)+1}+\right.$$
$$\left.+\cos x_0\sum_{n=r}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-2r)!}x^{2(n-r)}\right)=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{b^*_{2r+1}(\rho)}{2^{2r}r!(r+1)!}\left(\sin x_0\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}x^{2j+1}+\right.$$
$$\left.+\cos x_0\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}x^{2j}\right)=(\sin x_0\sin x+\cos x_0\cos x)\times$$
$$\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2r}r!(r+1)!}b^*_{2r+1}(\rho)=\rho\cos(x-x_0).$$

Справді, цей розв'язок задовольняє умову $U^1(x_0,\rho)=\rho$.

Задача F. Нехай A_r — простір однозначних і аналітичних у крузі $|z|<r$, $0<r\le\infty$, функцій, а $g(z_1,z_2)$ — функція двох комплексних змінних, аналітична за кожною змінною відповідно в кругах $|z_1|<R_1$ і $|z_2|<R_2$, $0<R_i\le\infty$ $(i=1,2)$. Тоді [7, с. 253] функція $g(z_1,z_2)$ розвивається у степеневий ряд

$$g(z_1,z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}g_{n,k}z_1^n z_2^k, \tag{50}$$

де

$$g_{n,k}=\frac{1}{n!k!}\frac{\partial^{n+k}g(0,0)}{\partial z_1^n\partial z_2^k}=\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{g(z_1,z_2)\,dz_1dz_2}{z_1^{n+1}z_2^{k+2}}. \tag{51}$$

Функція $g(z_1,z_2)$ для кожного фіксованого z_2, $|z_2|<R_2$, є елементом простору A_{R_1} (як функція від z_1), а для кожного фіксованого z_1, $|z_1|<R_1$, є елементом простору A_{R_2}(як функція від z_2).

Нехай функція $g(z_1,z_2)$ задовольняє рівняння (4) за змінними z_1, z_2. Побудуємо для неї ряд за системою (13)

$$g(z_1,z_2)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n u_n^0(z_1,z_2)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}u_{2n}^0(z_1,z_2)+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}u_{2n+1}^0(z_1,z_2)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[a_{2n}\frac{(2n)!}{(2n-2k)!}z_1^{2(n-k)}+\right.$$
$$\left.+a_{2n+1}\frac{(2n+1)!}{(2n-2k+1)!}z_1^{2(n-k)+1}\right]\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}b^*_{2k}(z_2)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\left[a_{2n}\frac{(2n)!}{(2n-2k)!}z_1^{2(n-k)}+\right.$$
$$\left.+a_{2n+1}\frac{(2n+1)!}{(2n-2k+1)!}z_1^{2(n-k)+1}\right]\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}b^*_{2k}(z_2)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[a_{2j+2k}\frac{(2j+2k)!}{(2j)!}z_1^{2j}+\right.$$
$$\left.+a_{2j+2k+1}\frac{(2j+2k+1)!}{(2j+1)!}z_1^{2j+1}\right]\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}b^*_{2k}(z_2)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}a_{r+2k}\frac{(r+2k)!}{r!}z_1^r\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}b^*_{2k}(z_2). \tag{52}$$

Помножимо співвідношення (52) на функції $z_1^{-(l+1)}$ і $\omega^*_{2p}(z_2)$, $p,=0,1,\ldots$, біортогональні відповідно до системи степенів $\left\{z_1^l\right\}$ і системи (12), і проінтегруємо вздовж замкнених контурів L_1 і L_2, що лежать відповідно у комплексних площинах z_1 і z_2 та охоплюють нульові точки. Враховуючи умови біортогональності систем $\left\{z_1^l\right\}$, $\left\{z_1^{-(l+1)}\right\}$ і $\left\{b^*_{2p}(z_2)\right\}$, $\left\{\omega^*_{2p}(z_2)\right\}$ (див. [5]), одержимо

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{g(z_1,z_2)\,\omega^*_{2p}(z_2)}{z_1^{l+1}}dz_1dz_2=$$
$$=\frac{(-1)^p(l+2p)!}{2^{2p}(p!)^2\,l!}a_{l+2p}. \tag{53}$$

З іншого боку, з урахуванням виразу для асоційованих функцій

$$\omega^*_{2p}(z_2) = \frac{1}{2^{2p}(p!)^2}\sum_{j=0}^{p} 2^{2j}(j!)^2 C_p^j \frac{1}{z_2^{2j+1}},$$

отриманих за аналогією до [5], та формули Коші для похідних функції $g(z_1, z_2)$ знайдемо

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2} \frac{g(z_1,z_2)\,\omega^*_{2p}(z_2)}{z_1^{l+1}}dz_1 dz_2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{p} \frac{2^{2(j-p)}(j!)^2 C_p^j}{(p!)^2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{g(z_1,z_2)\,dz_2}{z_2^{2j+1}}\right)\frac{dz_1}{z_1^{l+1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{2p}(p!)^2}\sum_{j=0}^{p} 2^{2j}(j!)^2 C_p^j \frac{1}{(2j)!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\partial^{2j}g(z_1,0)}{\partial z_2^2 j^{2j}}\frac{dz_1}{z_1^{l+1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{2p}(p!)^2\, l!}\sum_{j=0}^{p}\frac{2^{2j}(j!)^2 C_p^j}{(2j)!}\frac{\partial^{l+2j}g(0,0)}{\partial z_1^l \partial z_2^{2j}}.$$

Прирівнюючи праві частини останнього співвідношення та співвідношення (53), отримаємо

$$a_{l+2p} = \frac{(-1)^p}{(l+2p)!}\sum_{j=0}^{p}\frac{2^{2j}(j!)^2 C_p^j}{(2j)!}\frac{\partial^{l+2j}g(0,0)}{\partial z_1^l \partial z_2^{2j}}.$$

Зробивши заміну $l + 2p = s$, одержимо формули для коефіцієнтів розвинення (52)

$$a_s = \frac{(-1)^p}{s!}\sum_{j=0}^{p}\frac{2^{2j}(j!)^2 C_p^j}{(2j)!}\frac{\partial^{s-2p+2j}g(0,0)}{\partial z_1^{s-2p}\partial z_2^{2j}}. \quad (54)$$

Підставляючи у співвідношення (54) вирази (51) для коефіцієнтів Тейлора степеневого ряду функції $g(z_1, z_2)$, одержимо

$$a_s = \frac{(-1)^p (s-2p)!}{s!}\sum_{j=0}^{p} 2^{2j}(j!)^2 C_p^j g_{s-2p,2j}. \quad (55)$$

Якщо тут прийняти $p = 0$, знайдемо

$$a_s = \frac{1}{s!}\frac{\partial^s g(0,0)}{\partial {z_1}^s} = g_{s,0}. \quad (56)$$

Прирівнюючи коефіцієнти, визначені останньою формулою і формулою (54), одержимо умови, за яких сума ряду (50) є розв'язком рівняння (4)

$$(-1)^p\sum_{j=0}^{p}\frac{2^{2j}(j!)^2 C_p^j}{(2j)!}\frac{\partial^{s-2p+2j}g(0,0)}{\partial z_1^{s-2p}\partial z_2^{2j}} = \frac{\partial^s g(0,0)}{\partial {z_1}^s} \quad (57)$$

або на підставі співвідношень (55) та (56)

$$\frac{(-1)^p (s-2p)!}{s!}\sum_{j=0}^{p} 2^{2j}(j!)^2 C_p^j g_{s-2p,2j} = g_{s,0}. \quad (58)$$

Задача G. Для випадку $m = 1$ розглянемо також функцію $g(z_1, z_2)$, яка задовольняє рівняння (17), і побудуємо для неї ряд за системою (22). Маємо

$$g(z_1,z_2) \sim \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n^1(z_1,z_2) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+2}u^1_{2n+2}(z_1,z_2) + \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1}u^1_{2n+1}(z_1,z_2) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[d_{2n+2}\sum_{r=0}^{n}\frac{(2n+2)!}{(2n-2r+1)!}z_1^{2(n-r)+1} + \right.$$

$$\left. + d_{2n+1}\sum_{r=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(2n-2r)!}z_1^{2(n-r)}\right]\frac{(-1)^r b^*_{2r+1}(z_2)}{2^{2r}r!(r+1)!} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=r}^{\infty}\left[d_{2n+2}\frac{(2n+2)!}{(2n-2r+1)!}z_1^{2(n-r)+1} + \right.$$

$$\left. + d_{2n+1}\sum_{r=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(2n-2r)!}z_1^{2(n-r)}\right]\frac{(-1)^r b^*_{2r+1}(z_2)}{2^{2r}r!(r+1)!} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[d_{2j+2r+2}\frac{(2j+2r+2)!}{(2j+1)!}z_1^{2j+1} + \right.$$

$$\left. + d_{2j+2r+1}\sum_{r=0}^{n}\frac{(2j+2r+1)!}{(2j)!}z_1^{2j}\right]\frac{(-1)^r b^*_{2r+1}(z_2)}{2^{2r}r!(r+1)!} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} d_{l+2r+1}\frac{(k+2r+1)!}{k!}z_1^l\cdot\frac{(-1)^r b^*_{2r+1}(z_2)}{2^{2r}r!(r+1)!}.$$

Помножимо отримане співвідношення на функції $z_1^{-(l+1)}$ і $\omega^*_{2p+1}(z_2)$, $(p, l = 0, 1, \ldots)$, біортогональні відповідно до системи степенів $\{z_1^l\}$ і системи (21), і проінтегруємо вздовж замкнених контурів L_1 і L_2, що лежать відповідно у комплексних площинах z_1 і z_2 та охоплюють нульові точки. Враховуючи умови біортогональності систем $\{z_1^l\}$, $\left\{z_1^{-(l+1)}\right\}$ і $\{b^*_{2p+1}(z_2)\}$, $\{\omega^*_{2p+1}(z_2)\}$ (див. [5]), одержимо

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{g(z_1,z_2)\,\omega^*_{2p+1}(z_2)}{z_1^{l+1}}dz_1 dz_2 =$$

$$= \frac{(-1)^p(l+2p+1)!}{2^{2p}p!\,(p+1)!l!}d_{l+2p+1}. \quad (59)$$

Аналогічно, як у випадку $m = 0$ та враховуючи, що

$$\omega^*_{2p+1}(z_2) = \frac{1}{2^{2p}p!\,(p+1)!}\sum_{j=0}^{p}2^{2j}j!(j+1)!\,C_p^j\frac{1}{z_2^{2j+2}},$$

знаходимо

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{g(z_1,z_2)\,\omega^*_{2p+1}(z_2)}{z_1^{l+1}}dz_1 dz_2 =$$

$$= \frac{1}{2^{2p}p!(p+1)!l!}\sum_{j=0}^{p}\frac{2^{2j}j!(j+1)!C_p^j}{(2j+1)!}\frac{\partial^{l+2j+1}g(0,0)}{\partial z_1^l\partial z_2^{2j+1}}.$$

Із останнього співвідношення та співвідношення (59) одержимо

$$d_{l+2p+1}=\frac{(-1)^p}{(l+2p+1)!}\sum_{j=0}^{p}\frac{2^{2j}j!(j+1)!C_p^j}{(2j+1)!}\frac{\partial^{l+2j+1}g(0,0)}{\partial z_1^l\partial z_2^{2j+1}}.$$

Нехай $l+2p=s$. Тоді

$$d_{s+1}=\frac{(-1)^p}{(s+1)!}\sum_{j=0}^{p}\frac{2^{2j}j!(j+1)!C_p^j}{(2j+1)!}\frac{\partial^{s-2p+2j+1}g(0,0)}{\partial z_1^{s-2p}\partial z_2^{2j+1}}.$$

Підставляючи в отримане співвідношення для коефіцієнтів d_{s+1} вирази (51), маємо

$$d_{s+1}=\frac{(-1)^p\,(s-2p)!}{(s+1)!}\sum_{j=0}^{p}2^{2j}j!(j+1)!C_p^j g_{s-2p,2j+1}. \tag{60}$$

Якщо тут прийняти $p=0$, то

$$d_{s+1}=\frac{1}{s+1}g_{s,1}. \tag{61}$$

Прирівнюючи коефіцієнти, визначені формулами (60) і (61), одержимо умови, за яких сума ряду (50) є розв'язком рівняння (17)

$$\frac{(-1)^p\,(s-2p)!}{s!}\sum_{j=0}^{p}2^{2j}j!(j+1)!C_p^j g_{s-2p,2j+1}=g_{s,1}. \tag{62}$$

або

$$\frac{\partial^{s+1}g(0,0)}{\partial z_1^s\partial z_2}=\sum_{j=0}^{p}\frac{(-1)^p2^{2j}j!(j+1)!C_p^j}{(2j+1)!}\frac{\partial^{s-2(p+j)+1}g(0,0)}{\partial z_1^{s-2p}\partial z_2^{2j+1}}.$$

Теорема 5. *Нехай $g(z_1,z_2)$ – функція двох комплексних змінних, аналітична за кожною змінною відповідно в кругах $|z_1|<R_1$ і $|z_2|<R_2$, $0<R_i\le\infty$ $(i=1,2)$. Якщо коефіцієнти ряду* (50) *задовольняють умови* (58)*, то функція $g(z_1,z_2)$ задовольняє рівняння* (4) *і розвивається у рівномірно збіжний у кругах $|z_1|\le r_1<R_1$, $|z_2|\le r_2<R_2$ ряд за системою* (13)

$$g(z_1,z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}g_{n,0}u_n^0(z_1,z_2). \tag{63}$$

Якщо ж коефіцієнти ряду (50) *задовольняють умови* (62)*, то функція $g(z_1,z_2)$ задовольняє рівняння* (17) *і розвивається у рівномірно збіжний у кругах $|z_1|\le r_1<R_1$, $|z_2|\le r_2<R_2$ ряд за системою* (22)

$$g(z_1,z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}g_{n,1}u_n^1(z_1,z_2). \tag{64}$$

□ *Доведення.* Перетворимо ряд (50), рівномірно збіжний у кругах $|z_1|\le r_1$ і $|z_2|\le r_2$, з урахуванням формул (13), (22) та виразів

$$z^{2k}=2^{2k}(k!)^2\sum_{r=k}^{\infty}\frac{C_r^k}{2^{2r}(r!)^2}b_{2r}^*(z),\qquad z^{2k+1}=2^{2k}k!(k+1)!\sum_{r=k}^{\infty}\frac{C_r^k}{2^{2r}r!(r+1)!}b_{2r+1}^*(z),$$

які отримують з відповідних виразів з [5] з урахуванням співвідношень (31) та (39). Маємо

$$g(z_1,z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(g_{2n,2k}z_1^{2n}+g_{2n+1,2k}z_1^{2n+1}\right)z_2^{2k}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(g_{2n,2k+1}z_1^{2n}+g_{2n+1,2k+1}z_1^{2n+1}\right)z_2^{2k+1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(g_{2n,2k}z_1^{2n}+g_{2n+1,2k}z_1^{2n+1}\right)2^{2k}(k!)^2\sum_{r=k}^{\infty}\frac{C_r^k}{2^{2r}(r!)^2}b_{2r}^*(z_2)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(g_{2n,2k+1}z_1^{2n}+g_{2n+1,2k+1}z_1^{2n+1}\right)2^{2k}k!(k+1)!\sum_{r=k}^{\infty}\frac{C_r^k}{2^{2r}r!(r+1)!}b_{2r+1}^*(z_2)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{b_{2r}^*(z_2)}{2^{2r}(r!)^2}\sum_{k=0}^{r}2^{2k}(k!)^2C_r^k\left(g_{2n,2k}z_1^{2n}+g_{2n+1,2k}z_1^{2n+1}\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{b_{2r+1}^*(z_2)}{2^{2r}r!(r+1)!}\sum_{k=0}^{r}2^{2k}k!(k+1)!C_r^k\left(g_{2n,2k+1}z_1^{2n}+g_{2n+1,2k+1}z_1^{2n+1}\right)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=r}^{\infty}\frac{b_{2r}^*(z_2)}{2^{2r}(r!)^2}\sum_{k=0}^{r}2^{2k}(k!)^2C_r^k\left(g_{2(j-r),2k}z_1^{2(j-r)}+g_{2(j-r)+1,2k}z_1^{2(j-r)+1}\right)+$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=r}^{\infty}\frac{b_{2r+1}^*(z_2)}{2^{2r}r!(r+1)!}\sum_{k=0}^{r}2^{2k}k!(k+1)!C_r^k\left(g_{2(j-r),2k+1}z_1^{2(j-r)}+g_{2(j-r)+1,2k+1}z_1^{2(j-r)+1}\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}\frac{b_{2r}^*(z_2)}{2^{2r}(r!)^2}\sum_{k=0}^{r}2^{2k}(k!)^2C_r^k\left(g_{2(j-r),2k}z_1^{2(j-r)}+g_{2(j-r)+1,2k}z_1^{2(j-r)+1}\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}\frac{b^{*}_{2r+1}(z_2)}{2^{2r}r!(r+1)!}\sum_{k=0}^{r}2^{2k}k!(k+1)!C_r^k\left(g_{2(j-r),2k+1}z_1^{2(j-r)}+g_{2(j-r)+1,2k+1}z_1^{2(j-r)+1}\right).$$

Враховуючи умови (58) і (62) та співвідношення (56), (61), знайдемо

$$g\left(z_1,z_2\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}\frac{(-1)^r b^{*}_{2r}\left(z_2\right)}{2^{2r}(r!)^2}\left(\frac{(2j)!}{(2j-2r)!}g_{2j,0}\cdot z_1^{2(j-r)}+\frac{(2j+1)!}{(2j-2r+1)!}g_{2j+1,0}\cdot z_1^{2(j-r)+1}\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}\frac{(-1)^r b^{*}_{2r+1}\left(z_2\right)}{2^{2r}r!(r+1)!}\left(\frac{(2j)!}{(2j-2r)!}g_{2j,1}\cdot z_1^{2(j-r)}+\frac{(2j+1)!}{(2j-2r+1)!}g_{2j+1,1}\cdot z_1^{2(j-r)+1}\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}\frac{(-1)^r b^{*}_{2r}\left(z_2\right)}{2^{2r}(r!)^2}\left(\frac{(2j)!}{(2j-2r)!}a_{2j}\cdot z_1^{2(j-r)}+\frac{(2j+1)!}{(2j-2r+1)!}a_{2j+1}\cdot z_1^{2(j-r)+1}\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}\frac{(-1)^r b^{*}_{2r+1}\left(z_2\right)}{2^{2r}r!(r+1)!}\left(\frac{(2j+1)!}{(2j-2r)!}d_{2j+1}\cdot z_1^{2(j-r)}+\frac{(2j+2)!}{(2j-2r+1)!}d_{2j+2}\cdot z_1^{2(j-r)+1}\right).$$

Звідси, на підставі співвідношень (13) та (22), отримаємо

$$g\left(z_1,z_2\right)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{2j}u^0_{2j}\left(z_1,z_2\right)+\sum_{j=0}^{\infty}a_{2j+1}u^0_{2j+1}\left(z_1,z_2\right)+\sum_{j=0}^{\infty}d_{2j+1}u^1_{2j+1}\left(z_1,z_2\right)+\sum_{j=0}^{\infty}d_{2j+2}u^1_{2j+2}\left(z_1,z_2\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n u^0_n\left(z_1,z_2\right)+\sum_{n=1}^{\infty}d_n u^1_n\left(z_1,z_2\right).$$

Отже, якщо $d_n=0$ і виконуються умови (58), то ряд (63) збігається рівномірно в кругах $|z_1|\le r_1<R_1$, $|z_2|\le r_2<R_2$, і, оскільки кожен з членів ряду (63) задовольняє рівняння (4), то сума цього ряду також задовольняє це рівняння. Якщо ж $a_n=0$ і виконуються умови (62), то ряд (64) збігається рівномірно в кругах $|z_1|\le r_1<R_1$, $|z_2|\le r_2<R_2$, і, оскільки кожен з членів ряду задовольняє рівняння (17), то сума цього ряду також задовольняє це рівняння. ■

Приклад 5. Розглянемо функцію $g(x,\rho)=$ $=e^x J_0\left(\sqrt{2}\rho\right)$, аналітичну за кожною змінною у кругах $|x|<R_1$ і $|\rho|<R_2$. Перевіримо виконання умови (57). Для цього знайдемо

$$\frac{\partial^{s-2p+2j}g(x,\rho)}{\partial x^{s-2p}\partial\rho^{2j}}=e^x\sum_{k=j}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^k(k!)^2(2k-2j)!}\rho^{2k-2j},$$

$$\frac{\partial^{s}g(x,\rho)}{\partial x^{s}}=e^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\rho^{2k},$$

звідки

$$\frac{\partial^{s-2p+2j}g(0,0)}{\partial x^{s-2p}\partial\rho^{2j}}=\frac{(-1)^j(2j)!}{2^j(j!)^2},\quad \frac{\partial^{s}g(0,0)}{\partial x^{s}}=1.$$

Тоді

$$(-1)^p\sum_{j=0}^{p}\frac{2^{2j}(j!)^2C_p^j}{(2j)!}\frac{\partial^{s-2p+2j}g(0,0)}{\partial x^{s-2p}\partial\rho^{2j}}=$$

$$=(-1)^p\sum_{j=0}^{p}\frac{2^{2j}(j!)^2C_p^j}{(2j)!}\cdot\frac{(-1)^j(2j)!}{2^j(j!)^2}=$$

$$=(-1)^p\sum_{j=0}^{p}(-1)^j2^jC_p^j=1=\frac{\partial^2 g(0,0)}{\partial x\partial s}$$

й умови (57) справджуються.

Коефіцієнти ряду (50) знайдемо за формулами (51)

$$g_{n,0}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n g(0,0)}{\partial x^n}=\frac{1}{n!}.$$

Отже, отримаємо розвинення, яке збігається для будь-яких скінченних значень аргументів

$$e^x J_0\left(\sqrt{2}\rho\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}u^0_n(x,\rho).$$

Висновки

У роботі одержано системи розв'язків для нульового і першого коефіцієнтів розкладу розв'язку рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат за тригонометричною системою функцій. Аналогічні системи розв'язків можна побудувати для решти коефіцієнтів цього розкладу.

У роботі лише частково викладено застосування функцій $u^0_n(x,\rho)$, $u^1_n(x,\rho)$ для побудови розв'язків рівняння Гельмгольца. Значно ширше коло питань потребує подальших досліджень, наприклад, формулювання та розв'язування крайових задач для неоднорідного рівняння Гельмгольца в довільних областях.

Література

[1] *Ince E. L.* Ordinary Differential Equations. London, 1927.

[2] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

[3] *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 192 с.

[4] *Сухорольський М. А.* Системи розв'язків рівняння Гельмгольца // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія Фіз.-мат. науки. – 2011. – № 718. – С. 19–34.

[5] *Сухорольський М. А., Достойна В. В.* Один клас біортогональних систем функцій, які виникають при розв'язанні рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 2. – С. 52–62.

[6] *Сухорольський М. А, Костенко І. С., Достойна В. В.* Побудова розв'язків рівнянь з частинними похідними у вигляді контурних інтегралів // Вестник ХНТУ. – 2013. – № 2 (47). – С. 323–326.

[7] *Воробьев Н. Н.* Теория рядов. – М.: Наука, 1979. – 408 с.

[8] *Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А.* Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1970. – 416 с.

BIORTHOGONAL SYSTEMS SOLUTIONS OF THE HELMHOLTZ EQUATION IN A CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEM

M. A. Sukhorolsky, V. V. Dostoina, O. V. Veselovska

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

We construct the system of solutions of the Helmholtz equation in cylindrical coordinates in the form of homogeneous polynomials by two biorthogonal systems of functions.

Key words: Helmholtz equation, homogeneous polynomials, biorthogonal system of functions.

2000 MSC: 33E30

UDK: 517.53.57