ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 898, 2018, с. 51–55

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 898, 2018, p. 51–55

ЛОКАЛЬНО-ЗВ'ЯЗНІ КОНТИНУУМИ ЯК ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ВКЛАДЕНЬ ВІДРІЗКА В ПРОСТІР

І. Я. Олексів

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 20 березня 2018 р.)

Доведено, що для довільного локально-зв'язного обмеженого континуума в евклідовому просторі E^n, $n \geq 2$ існує послідовність вкладень відрізка $[0;1]$ у простір, яка рівномірно збігається до неперервного відображення відрізка $[0;1]$ на континуум.

Ключові слова: континуум, локально-зв'язний континуум, дендрит, вкладення відрізка в простір.

2000 MSC: 57N12

УДК: 515.125

Теорема Хана–Мазуркевича–Серпінського [1, с. 261] стверджує, що довільний локально-зв'язний метричний континуум є образом відрізка $I = [0;1]$ за деякого неперервного відображення. Тепер відомі різні характеризації локально-зв'язних континуумів (бібліографію див. у [2]). Нижче наведено одну з форм теореми Хана–Мазуркевича–Серпінського для локально-зв'язних континуумів у евклідовому просторі.

Означення 1. Неперервне відображення h множини A в евклідів простір E^n називається майже простим (м.п.), якщо існує послідовність вкладень $h_k : A \to E^n$, яка рівномірно збігається до відображення h.

Теорема 1. *Для довільного локально-зв'язного континуума в евклідовому просторі E^n, $n \geq 2$ існує майже просте відображення відрізка I на континуум.*

Теорема очевидна, якщо $M \subset E^n$, $n > 2$, а тому потребує доведення лише для $M \subset E^2$. Для доведення використовують дендрити [1, § 51]. Дендрит – це локально-зв'язний континуум, що не містить простих замкнених кривих. Скінченний дендрит – це дендрит зі скінченною множиною кінцевих точок.

Означення 2. [2, с. 372]. Вважатимемо, що континуум M можна наблизити послідовністю скінченних дендритів. якщо існує послідовність скінченних дендритів $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$ таких, що:

1) множина $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} D_n$ щільна в M;

2) якщо C – компонента множини $D_{n+1} \backslash D_n$, то $\operatorname{diam} C < 2^{-n}$.

Уорд довів [2, теорема 2], що локально-зв'язний метризований континуум можна наблизити послідовністю скінченних дендритів.

Теорему спочатку доведемо для випадку, коли M – скінченний дендрит на площині (лема 1), потім континуум M наближаємо послідовністю скінченних дендритів D_n, $n{=}1,2,\ldots$ і будуємо рівномірно збіжну послідовність м.п. відображень $H_n{:}I{\to}D_n$. Границя $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(t){=}H(t)$ буде шуканим м.п. відображенням $H{:}I{\to}M$. Відображення H_n і H, а також інші відображення у підмножини площини, розглянуті нижче, вважають сюр'єктивними.

Сформулюємо допоміжні твердження. Якщо D – дендрит, то множину всіх його точок, які не є кінцевими точками, позначимо D^*.

Лема 1. *Для кожного скінченного дедрита D на площині можна побудувати монотонно спадну послідовність жорданових околів $U_n(D^*)$, $n = 1, 2, \ldots$ множини D^*, послідовність м.п. відображень $H(t;n) : I \to \partial U_n(D^*)$ і м.п. відображення $H : I \to D$, $H(0) = H(1)$, які задовольняють умови:*

1) послідовність околів $U_n(D^*)$ стягується монотонно до множини D^*, а тому $D^* = \bigcap\limits_n U_n(D^*)$;

2) кожна границя $\partial U_n(D^*)$ містить всі кінцеві точки дендрита D;

3) якщо Δ – інтервал на I і кінцеві точки дендрита D не належать множині $H(\Delta)$, то відображення $H : \Delta \to E^2$ є вкладенням;

4) для довільного інтервалу $\Delta \subset I$ всі відображення $H(t;n) : \Delta \to E^2$ і є вкладеннями;

5) якщо e – довільна кінцева точка дендрита D, то множина $H^{-1}(e)$ складається з однієї точки і $H_k^{-1}(e;n){=}H^{-1}(e)$ для всіх $n = 1, 2, \ldots$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} H(t;n) = H(t)$ рівномірно на I.

Означення 3. Якщо D – скінченний дендрит, то A-послідовністю дендрита D назвемо четвірку: дендрит D, послідовність жорданових околів $U_n(D^*)$, послідовність м.п. відображень $H(t;n) : I \to \partial U_n(D^*)$ і м.п. відображення $H(t) : I \to D$, які задовольняють твердження леми 1. A-послідовність дендрита D позначатимемо $A(D, U_n(D^*), H(t;n), H(t))$, або коротко $A(D, H(t))$.

Зауважимо, що з леми 1 випливає теорема для випадку, коли M – скінченний дендрит.

Лема 2. *Нехай D і E – скінченні дендрити, єдиною спільною точкою яких є кінцева точка d_1 дендри-*

та E, $G = D \cup E$ і $A(D, H_D(t))$ – A-послідовність дендрита D. Тоді у множині $H_D^{-1}(d_1)$ існує така точка t_1, що для кожного числа $\alpha_1 > 0$, такого, що $I_1 = [t_1 - \alpha_1; t_1 + \alpha_1] \subset I$, можна побудувати таку A-послідовність $A(G, H_G(t))$ дендрита G, що

$$\begin{aligned} &H_G(t) \in H_D(I_1) \bigcup E, \text{ якщо } t \in I_1; \\ &H_G(t) = H_D(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Доведення леми 1. Нехай D – скінченний дендрит; $d_1, e_1, ..., e_m$, $m \geq 1$ – його кінцеві точки. Подамо дендрит D у вигляді $D = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$, де $B_1 = \smile d_1 e_1$ – дуга з кінцями d_1, e_1; $\smile d_j e_j$ – незвідна дуга між дендритом $B_1 \bigcup ... \bigcup B_{j-1}$ і точкою e_j, $j = 2, ..., m$. Позначимо $D_k = B_1 \bigcup ... \bigcup B_k$, $k = 1, ..., m$, і доведемо лему 1 індукцією за числом k.

Для випадку $k = 1$, коли дендрит $D_1 = B_1$ є дугою, доведення леми легко одержати, скориставшись класичними результатами з топології площини (наприклад, теоремою Антуана [3, с. 69]), і ми його не наводимо.

Припустимо, що лема справджується для кожного дендрита D_r, $r \leq k-1$ і доведемо її для дендрита $D_k = D_{k-1} \bigcup B_k$. Дендрит D_{k-1} і дуга $B_k = \smile d_k e_k$ мають єдину спільну точку d_k, кінець дуги B_k.

Будуємо A-послідовність $A(D_{k-1}, H_{k-1}(t))$ згідно з припущенням індукції та A-послідовність $A(B_k, h_k(t))$ дуги B_k. Для зручності припускатимемо, що $h_k(0) = h_k(1) = h_k(0; n) = h_k(1; n) = d_k$, а точка $H_{k-1}(0) = H_{k-1}(1)$ не є кінцевою точкою жодної дуги B_j, j=$1, ..., m$.

Для доведення леми опишемо A-послідовність $A(D_k, H_k(t))$. Кроки у доведенні перенумеруємо.

1. *Побудова м.п. відображення* $H_k : I \to D_k$. Дуга $B_k = \smile d_k e_k$ перетинає границі $\partial U_n(D^*_{k-1})$ для усіх доволі великих номерів n. Якщо у кожній множині $B_k \bigcap \partial U_n(D^*_{k-1})$ вибрати по одній довільній точці f_n, то $\lim f_n = d_k$. Очевидно, що послідовність $t_n = H^{-1}_{k-1}(f_n; n)$ також збіжна і нехай $t_0 = \lim t_n$. Тоді $t_0 \in H^{-1}_{k-1}(d_k)$, $t_0 \neq 0, 1$. Виберемо відрізок $I_\alpha = [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha] \subset I$ так, щоб множина $H_{k-1}(I_\alpha)$ не містила точки $H_{k-1}(0) = H_{k-1}(1)$, а також кінцевих точок дендрита D_{k-1}, крім, можливо, точки $d_k = H_{k-1}(t_0)$, якщо вона є кінцевою.

Розділимо відрізок I на шість відрізків $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$, що не мають попарно спільних внутрішніх точок, точками t_0, $t_0 \pm \alpha/2, t_0 \pm \alpha$, нумеруючи ці відрізки в послідовності їх розміщення на I. Для кожного $i = 1, \ldots, 6$, будуємо лінійні сюр'єктивні відображення l_i, що визначаються умовами:

l_1: $\Delta_1 = [0; t_0 - \alpha) \to [0; t_0 - \alpha)$ – тотожне відображення,
l_2: $\Delta_2 = [t_0 - \alpha; t_0 - \alpha/2) \to [t_0 - \alpha; t_0)$, $l_2(t_0 - \alpha) = t_0 - \alpha$,
l_3: $\Delta_3 = [t_0 - \alpha/2; t_0) \to [0; 1/2)$, $l_3(t_0 - \alpha/2) = 0$,
l_4: $\Delta_4 = [t_0; t_0 + \alpha/2) \to [1/2; 1)$, $l_4(t_0) = 1/2$,
l_5: $\Delta_5 = [t_0 + \alpha/2; t_0 + \alpha) \to [t_0; t_0 + \alpha)$, $l_5(t_0 + \alpha/2) = t_0$,
l_6: $\Delta_6 = [t_0 + \alpha; 1] \to [t_0 + \alpha; 1]$ – тотожне відображення.

Відображення $l : I \to I$, визначене умовою $l(t) = l_i(t)$, якщо $t \in \Delta_i$, лінійне на кожному відрізку Δ_i, а точки $t_0 \pm \alpha/2$ є його точками розриву.

Побудуємо відображення

$$H_k(t) = \begin{cases} H_{k-1}(l(t)), & \text{якщо } t \in I \setminus (\Delta_3 \cup \Delta_4); \\ h_k(l(t)), & \text{якщо } t \in \Delta_3 \cup \Delta_4 . \end{cases}$$

Очевидно, що $H_k(0) = H_k(1)$, $H_k(I) = D_k$ і $H_k(I_\alpha) = B_k \bigcup H_{k-1}(I_\alpha)$. Відображення $H_k(t)$ неперервне на кожному відрізку $\Delta \subset I$ такому, що множині $H_k(\Delta)$ не належать кінцеві точки дендрита D_k, воно є вкладенням, а тому виконується умова 3 леми 1. Нижче покажемо, що $H_k(t)$ – м.п. відображення.

Зауваження 1. Розглянуті дендрит D_{k-1} і дуга B_k задовольняють умови леми 2, а відображення $H_{k-1}(t)$ і $H_k(t)$ – умови, подібні до (1), а саме

$$H_k(t) \in H_{k-1}(I_\alpha) \cup B_k, \text{ якщо } t \in I_\alpha;$$

$$H_k(t) = H_{k-1}(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_\alpha.$$

2. *Побудова монотонно спадної послідовності околів* $U_n(D^*_k)$. Припускатимемо, що границі $\partial U_n(D^*_{k-1})$ і $\partial U_n(B^*_k)$ околів $U_n(D^*_{k-1})$ і $U_n(B^*_k)$ є локально поліедральними множинами (крім, можливо, кінцевих точок дендрита D_{k-1} і дуги B_k), які розміщені в загальному положенні в околах спільних точок цих множин (крім, можливо, точки d_k, якщо вона є кінцевою точкою дендрита D_{k-1}).

Розглянемо спочатку випадок, коли точка d_k не є кінцевою точкою дендрита D_{k-1}.

Окіл $U_n(D^*_k)$ визначаємо як внутрішність замикання об'єднання всіх обмежених компонент множини $E^2 \setminus (\partial U_n(D^*_{k-1}) \bigcup \partial U_n(B^*_k))$. З визначення випливає, що окіл $U_n(D^*_k)$ є диском, його границя $\partial U_n(D^*_k)$ є локальним поліедром у кожній точці, за винятком, можливо, кінцевих точок дендрита D_k, а також що $U_{n+1}(D^*_k) \subset U_n(D^*_k)$.

Будуючи м.п. відображення $H_k(t; n) : I \to \partial U_n(D^*_k)$, множину $U_n(D^*_k)$ зручно розглядати як результат приєднання до околу $U_n(D^*_{k-1})$ деякої скінченної кількості дисків $F_1, \ldots, F_s$, що відтинаються компонентами множини $\partial U_n(B^*_k) \setminus U_n(D^*_{k-1})$ від множини $E^2 \setminus U_n(D^*_{k-1})$:

$$U_n(D^*_k) = \mathrm{Int}(\overline{U_n(D^*_{k-1})} \bigcup \overline{(F_1 \cup \ldots \cup F_s)}). \tag{2}$$

Оскільки будь-які два диски цього об'єднання або не мають спільних точок, або один з них міститься в іншому, то залишимо в (2) тільки максимальні диски (тобто такі, що не містяться в інших дисках об'єднання). Для них збережемо позначення $F_1, \ldots, F_s$ і запис (2). З побудови видно, що кожна границя $\partial U_n(D^*_k)$ містить всі кінцеві точки дендрита D_k, а тому виконується умова 2 леми 1.

3. *Побудова послідовності відображень* $H_k(t; n)$. Нехай $A(D_{k-1}, U_n(D^*_{k-1}), H_{k-1}(t; n), H_{k-1}(t))$ і $A(B_k, U_n(B^*_k), h_k(t; n), h_k(t))$ – визначені вище A-послідовності.

Припускатимемо, що окіл $U_n(B^*_k)$ перетинає ті й тільки ті компоненти множини $\partial U_n(D^*_{k-1}) \setminus D_{k-1}$, які перетинаються дугою B_k (цього можна досягти за рахунок невеликої зміни околів $U_n(B^*_k)$). Тому існує такий номер N, що для всіх $n > N$ обидві множини $E_{nk} \overset{df}{=} U_n(B^*_k) \bigcap \partial U_n(D^*_{k-1})$ і $B^*_k \bigcap \partial U_n(D^*_{k-1})$ належать тим дугам-компонентам множини $\partial U_n(D^*_{k-1}) \setminus D_{k-1}$ (позначимо їх Γ_n), що мають однакові спільні кінцеві точки (які є кінцями дендрита D_{k-1}). Позначимо через $\smile a_n^{k-1} b_n^{k-1}$ найменшу дугу на Γ_n, що містить множину E_{nk} і має кінці у точках a_n^{k-1} і b_n^{k-1}. Очевидно, що a_n^{k-1}, $b_n^{k-1} \in E_{nk}$. Подібно на кривій $\partial U_n(B^*_k)$ вибираємо найменшу дугу, що містить множину E_{nk} і точку d_k і позначаємо її $\smile a_n^k b_n^k$ (a_n^k, b_n^k – її кінці). Позначення виберемо так, щоб $a_n^{k-1} \preceq a_n^k \prec b_n^k \preceq b_n^{k-1}$ на дузі Γ_n.

З побудови випливає, що для $i = k-1, k$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^i = \lim\limits_{n\to\infty} b_n^i = d_k = D_{k-1} \bigcap B_k = H_{k-1}(t_0) = = h_k(0;n) = h_k(1;n)$, а тому

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(\smile a_n^i b_n^i) = 0, \quad i = k-1, k. \tag{3}$$

Позначимо також $\widetilde{\smile a_n^{k-1} b_n^{k-1}} = \partial U_n(D^*_{k-1}) \setminus (\smile a_n^{k-1} b_n^{k-1})$ і $\widetilde{\smile a_n^k b_n^k} = \partial U_n(B^*_k) \setminus (\smile a_n^k b_n^k)$. Для $i, j = k-1, k$ визначимо

$$\alpha^i_{jn} = \begin{cases} H^{-1}_{k-1}(a_n^i;n), & j = k-1; \\ h_k^{-1}(a_n^i;n), & j = k, \end{cases}$$
$$\beta^i_{jn} = \begin{cases} H^{-1}_{k-1}(b_n^i;n), & j = k-1; \\ h_k^{-1}(b_n^i;n), & j = k. \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, що $\alpha^{k-1}_{k-1\ n} \le \alpha^k_{k-1\ n} < \beta^k_{k-1\ n} \le \beta^{k-1}_{k-1\ n}$ (в усякому разі, цього можна досягти за рахунок збільшення номера n. Крім того, не зменшуючи загальності, припускаємо, що $0 < \alpha^i_{k\ n} < \frac{1}{2} < \beta^i_{k\ n} < 1$. Оскільки дуга B_k має єдину спільну точку d_k з дендритом D_{k-1}, а дуга $\smile a_n^{k-1} b_n^{k-1} \subset \Gamma_n$ не містить кінцевих точок дендрита D_{k-1}, то на основі припущення індукції із тверджень 2–4, 6 леми 1 для $i = k-1, k$ одержуємо

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \alpha^i_{k-1\ n} = \lim_{n\to\infty} \beta^i_{k-1\ n} = t_0, \\ \lim_{n\to\infty} \alpha^i_{k\ n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \beta^i_{k\ n} = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Якщо тепер $I_\alpha \subset I$ – відрізок, вибраний у п. 1, і ε – доволі мале число, то на основі (3) існує такий номер $N_\varepsilon > N$, що для $i = k-1, k$ і для всіх $n > N_\varepsilon$ маємо

$$\mathrm{diam}(\smile a_n^i b_n^i) < \varepsilon, \quad \mathrm{diam}(\widetilde{\smile a_n^i b_n^i}) > \varepsilon,$$
$$\smile a_n^{k-1} b_n^{k-1} \subset \Gamma_n,$$
$$t_0 - \alpha < \alpha^{k-1}_{k-1\ n} < \beta^{k-1}_{k-1\ n} < t_0 + \alpha,$$
$$H_{k-1}(0;n) \notin H_{k-1}(I_\alpha;n).$$

Переходимо до опису відображення $H_k(t;n)$. Нехай $t \in I$. Тоді $H_{k-1}(t;n) \in \partial U_n(D^*_{k-1})$. Якщо до того ж $H_{k-1}(t;n) \in \partial U_n(D^*_k)$, то приймемо $H_k(t;n) = H_{k-1}(t;n)$. Якщо $H_{k-1}(t;n) \notin \partial U_n(D^*_k)$, то $H_{k-1}(t;n) \in U_n(D^*_k)$, і тоді окіл $U_n(D^*_k)$ розглядатимемо як об'єднання дисків (2). У цьому випадку точка $H_{k-1}(t;n)$ є спільною граничною точкою деякого максимального диска F_i, $i = 1, \dots, s$ і диска $U_n(D^*_{k-1})$, а тому існує дуга $\gamma_i = \overline{F_i} \bigcap \overline{U_n(D^*_{k-1})}$, якій належить точка $H_{k-1}(t;n)$. Оскільки $\gamma_i \subset (\smile a_n^{k-1} b_n^{k-1}) \subset \Gamma_n$, то $\mathrm{diam}\gamma_i < \varepsilon$. Дуги $\widetilde{\gamma}_i = \partial F_i \setminus \gamma_i$, $i = 1, \dots, s$, лежать на кривій $\partial U_n(B^*_k)$, причому серед цих дуг є одна, (нехай $\widetilde{\gamma}_s$), що збігається з дугою $\widetilde{\smile a_n^k b_n^k}$, а інші дуги $\widetilde{\gamma}_1, \dots, \widetilde{\gamma}_{s-1}$ лежать на дузі $\smile a_n^k b_n^k$. Тому $\mathrm{diam}\widetilde{\gamma}_s > \varepsilon$ (назвемо цю дугу "великою"), а $\mathrm{diam}\widetilde{\gamma}_j < \varepsilon$, $j = 1, \dots, s-1$ (назвемо ці дуги "малими"). Зауважимо, що оскільки $\widetilde{\gamma}_s = \widetilde{\smile a_n^k b_n^k}$, то $h_k^{-1}(\widetilde{\gamma}_s;n) = [\alpha^k_{k\ n}; \beta^k_{k\ n}]$, $H^{-1}_{k-1}(\gamma_s;n) = [\alpha^k_{k-1\ n}; \beta^k_{k-1\ n}]$.

Для кожної дуги γ_i, $i = 1, \dots, s$, визначимо відрізок $\delta_i = H^{-1}_{k-1}(\gamma_i;n)$. Очевидно, що $\delta_i \cap \delta'_i = \varnothing$, якщо $i \neq i'$, $i' = 1, \dots, s$, і кожне відображення $H_{k-1}(t;n){:}\delta_i \to \gamma_i$ є гомеоморфізмом. Щоб одержати відображення $H_k(t;n)$, змінимо відображення $H_{k-1}(t;n)$ на кожному з відрізків $\delta_1, \dots, \delta_s$, тобто для кожної "малої"дуги $\widetilde{\gamma}_j$, $j = 1, \dots, s-1$, побудуємо довільний гомеоморфізм $q_j : \delta_j \to \widetilde{\gamma}_j$ так, щоб відображення $\widetilde{H}_{k-1}(t;n)$, визначене умовою

$$\widetilde{H}_{k-1}(t;n) = \begin{cases} H_{k-1}(t;n), & t \in I \setminus (\bigcup_{j=1}^{s-1} \delta_j); \\ q_j(t), & t \in \delta_j, \ j = 1, \dots, s-1, \end{cases}$$

було неперервним на I. Оскільки $\mathrm{diam}F_j < 2\varepsilon$, $j = 1, \dots, s-1$, то $|\widetilde{H}_{k-1}(t;n) - H_{k-1}(t;n)| < 2\varepsilon$, $t \in I$, $n > N_\varepsilon$.

Залишилось побудувати відображення відрізка $\delta_s = [\alpha^k_{k-1\ n}; \beta^k_{k-1\ n}]$ на "велику"дугу $\widetilde{\gamma}_s$, що зробимо за допомогою міркувань, подібних до наведених в п.1. Розділимо відрізок I на шість відрізків $\Delta_1, \dots, \Delta_6$, що не мають попарно спільних внутрішніх точок, точками t_0, $t_0 \pm \alpha/2$, $t_0 \pm \alpha$, нумеруючи ці відрізки в послідовності їх розміщення на I. Для кожного $i = 1, \dots, 6$ будуємо лінійні сюр'єктивні відображення $l_{i\ n}$, що визначаються умовами:

$l_{1\ n}$: $\Delta_1 = [0; t_0 - \alpha) \to [0; t_0 - \alpha)$ – тотожне відображення,

$l_{2\ n}$: $\Delta_2 = [t_0 - \alpha; t_0 - \alpha/2) \to [t_0 - \alpha; \alpha^k_{k-1\ n})$, $l_{2\ n}(t_0 - \alpha) = t_0 - \alpha$,

$l_{3\ n}$: $\Delta_3 = [t_0 - \alpha/2; t_0) \to [\alpha^k_{k\ n}; 1/2)$, $l_{3\ n}(t_0 - \alpha/2) = \alpha^k_{k\ n}$,

$l_{4\ n}$: $\Delta_4 = [t_0; t_0 + \alpha/2) \to [1/2; \beta^k_{k\ n})$, $l_{4\ n}(t_0) = 1/2$,

$l_{5\ n}$: $\Delta_5 = [t_0 + \alpha/2; t_0 + \alpha) \to [\beta^k_{k-1\ n}; t_0 + \alpha)$, $l_{5\ n}(t_0 + \alpha/2) = \beta^k_{k-1\ n}$,

$l_{6\ n}$: $\Delta_6 = [t_0 + \alpha; 1] \to [t_0 + \alpha; 1]$ – тотожне відображення.

Відображення $l_n : I \to I$, визначене умовою $l_n(t) = l_{i\ n}(t)$, якщо $t \in \Delta_i$, є лінійним на кожному відрізку Δ_i, а точки $t_0 \pm \alpha/2$ є його точками розриву.

Відображення

$$H_k(t;n) = \begin{cases} \widetilde{H}_{k-1}(l_n(t);n), & t \in I \setminus (\Delta_3 \cup \Delta_4); \\ h_k((l_n(t);n), & t \in (\Delta_3 \cup \Delta_4) \end{cases}$$

є неперервним на I внаслідок (4). З побудови випливає, що для довільного інтервалу $\Delta \subset I$ всі відображення $H_k(t;n) : \Delta \to E^2$ є вкладеннями, а тому виконується умова 4 леми 1. Якщо e – довільна кінцева точка дендрита D_k, то очевидно, що множина $H_k^{-1}(e)$ складається з єдиної точки і $H_k^{-1}(e;n) = H_k^{-1}(e)$ для всіх $n = 1, 2, \dots$ (зокрема, $H_k^{-1}(e_k;n) = H_k^{-1}(e_k) = h_k^{-1}(e_k;n) = h_k^{-1}(e_k)$, якщо e_k – кінець дуги B_k, $e_k \neq d_k$), а тому виконується також умова 5 леми 1.

Переконаємося, що $\lim_{n\to\infty} H_k(t;n) = H_k(t)$ рівномірно на I. З визначення відображень $l_n(t)$ і з (5) випливає, що $\lim_{n\to\infty} l_n(t) = l(t)$ рівномірно на I. Використовуючи далі визначення відображень $H_k(t;n)$ і $\widetilde{H}_{k-1}(t;n)$, для усіх доволі великих номерів n одержимо нерівності

$$|H_k(t;n) - H_k(t)| \leq |\widetilde{H}_{k-1}(l_{i\ n}(t);n) - H_{k-1}(l_{i\ n}(t);n)| +$$

$$+ |H_{k-1}(l_{i\ n}(t);n) - H_{k-1}(l(t))|,$$

якщо $t \in \Delta_i$, $i = 1,2,5,6$, або

$$|H_k(t;n) - H_k(t)| \leq |h_k(l_{i\ n}(t);n) - h_k(l(t))|,$$

якщо $t \in \Delta_i$, $i = 3,4$.

З цих нерівностей на основі властивості одностайної неперервності рівномірно збіжної послідовності відображень випливає, що $\lim_{n\to\infty} H_k(t;n) = H_k(t)$ рівномірно на I. Отже, $H_k(t)$ – м.п. відображення і для нього виконується умова 6 леми 1. Оскільки $H_k(I) = D_k$, то околи $U_n(D_k^*)$ стягуються до множини D_k^*, і виконується також умова 1 леми. Лему 1 доведено для випадку, коли точка d_k, кінець дуги B_k, не є кінцевою точкою денрита D_{k-1}.

Коли точка d_k є кінцевою точкою дендрита D_{k-1}, то її зручно розглядати як внутрішню точку об'єднання околів $U_n(D_{k-1}^*)$ і $U_n(B_k^*)$ (чого можна досягти за рахунок невеликого розширення цих околів). Довести лему вдається за тією самою схемою, що і вище. Лему 1 доведено.

Зауваження 2. Побудована у пп. 2, 3 A-послідовність $A(D_k, H_k(t))$, а також зауваження 1 свідчать про те, що для дендрита D_{k-1} і дуги B_k справджується лема 2. Тобто лему 2 доведено для випадку, коли дедрит і дуга мають єдину спільну точку, що є кінцевою точкою дуги.

Доведення леми 2. Позначимо через $e_1,\dots,e_n$ кінцеві точки дендрита E, відмінні від точки d_1, і подамо дендрит $G{=}D\bigcup E$ у вигляді об'єднання $G{=}D\bigcup E_1\bigcup\dots\bigcup E_n$, де $E_i{=}\smile d_ie_i$, $i=1,\dots,n$, – незвідна дуга між дендритом $D_{i-1} = D\bigcup E_1\bigcup\dots\bigcup E_{i-1}$ і точкою e_i (дедрит D позначається D_0). Згідно із зауваженням 2 лема 2 справджується для дендрита D і дуги E_1, тому існують такі точка $t_1 \in H_D^{-1}(d_1)$, число $\alpha_1 > 0$, відрізок $I_1 = [t_1 - \alpha_1; t_1 + \alpha_1] \subset I$ і A-послідовність $A(D_1, H_1(t))$ дендрита $D_1 = D\bigcup E_1$, що справджується твердження леми:

$$\begin{gathered} H_1(t) \in H_D(I_1) \cup E_1, \text{ якщо } t \in I_1; \\ H_1(t) = H_D(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_1. \end{gathered} \tag{6}$$

Очевидно також, що $H_1^{-1}(E_1) \subset I_1$, $d_2 \in E_1$.

Далі, знову застосовуючи лему 2 до дендрита D_1 і E_2, виберемо такі точку $t_2 \in H_1^{-1}(d_2) \subset H_1^{-1}(E_1) \subset I_1$, число α_2, відрізок $I_2 = [t_2 - \alpha_2; t_2 + \alpha_2] \subset I_1 \subset I$ і A-послідовність $A(D_2, H_2(t))$ дендрита $D_2 = D_1 \cup E_2$, що

$$\begin{gathered} H_2(t) \in H_1(I_2) \cup E_2, \text{ якщо } t \in I_2 \subset I_1 \subset I; \\ H_2(t) = H_1(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_2. \end{gathered} \tag{7}$$

З умов (6) і (7) одержуємо

$$H_2(t) \in H_D(I_1) \cup E_1 \cup E_2, \text{ якщо } t \in I_1;$$

$$H_2(t) = H_D(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_1,$$

тобто лему 2 доведено для дендритів D і $E_1 \cup E_2$.

Аналогічним способом, послідовно застосовуючи лему 2 до дендритів D_{j-1} і дуг E_j, $j = 3,\dots n$, будуємо A-послідовності $A(D_j, H_j(t))$ такі, що

$$H_j(t) \in H_D(I_1) \cup E_1 \cup \ldots \cup E_j, \text{ якщо } t \in I_1;$$

$$H_j(t) = H_D(t), \text{ якщо } t \in I \setminus I_1.$$

Якщо $j = n$, одержимо A-послідовність $A(D_n, H_n(t))$. Оскільки $D_n = G$, то лему 2 доведено.

Доведення теореми. Наблизимо локально зв'язний континуум M послідовністю скінченних денритів $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$ [2, теорема 2]. Для доведення теореми побудуємо рівномірно збіжну послідовність м.п. відображень $H_n : I \to D_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Нехай $n = 1$. За лемою 1 для скінченного дендрита D_1 існує A-послідовність $A(D_1, H_1(t))$, де $H_1 : I \to D_1$ – м.п. відображення.

Для $n = 2$ розглянемо дендрит D_2. Замикання кожної компоненти множини $D_2 \setminus D_1$ є скінченним дендритом, що має тільки одну спільну точку з дендритом D_1, і нехай a_j, $j = 1,\dots,m$, – всі такі спільні точки. Для кожної множини $H_1^{-1}(a_j)$ виберемо окіл $V(a_j)$ цієї множини на відрізку I так, щоб околи різних множин взаємно не перетиналися і щоб diam $H_1(V(a_j)) < 2^{-n} = 2^{-2}$, $j = 1,\dots,m$.

Виберемо точку a_1. Позначимо через $\bar{C}_1,\dots,\bar{C}_k$ замикання компонент множини $D_2 \setminus D_1$, для кожної з яких точка a_1 є кінцевою точкою, diam $C_i < 2^{-n} = 2^{-2}$. Позначимо $D_{1,0} = D_1$, $D_{1,i} = D_{1,i-1} \cup \bar{C}_i$, $i = 1,\dots,k$, $D_1(a_1) = D_{1,k}$, $H_{1,0}(t) = H_1(t)$ й опишемо побудову A-послідовності $A(D_1(a_1), H_1(t;a_1))$.

Застосовуючи лему 2 до дендритів $D_{1,0}$ і $\bar{C}_1$, виберемо такі точку $t_1 \in H_{1,0}^{-1}(a_1)$, число $\alpha_1 > 0$, відрізок $I_1 = [t_1 - \alpha_1; t_1 + \alpha_1] \subset V(a_1)$ (вибір числа α_1, а також інших чисел $\alpha_2,\dots,\alpha_k$, що вводяться нижче, уточнимо) і побудуємо таку A-послідовність $A(D_{1,1}, H_{1,1}(t))$ дендрита $D_{1,1}$, що

$$\begin{gathered} H_{1,1}(t) \in H_{1,0}(I_1) \cup \bar{C}_1 \subset H_{1,0}(V(a_1)) \cup \bar{C}_1, \ t \in I_1; \\ H_{1,1}(t) = H_{1,0}(t), \ t \in I \setminus I_1. \end{gathered} \tag{8}$$

Далі знову застосуємо лему 2 до дендритів $D_{1,1}$ і $\bar{C}_2$ і виберемо такі точку $t_2 \in H_{1,1}^{-1}(a_1)$, число $\alpha_2 > 0$, відрізок $I_2 = [t_2 - \alpha_2; t_2 + \alpha_2] \subset V(a_1)$ і A-послідовність $A(D_{1,2}, H_{1,2}(t))$ дендрита $D_{1,2}$, що

$$\begin{gathered} H_{1,2}(t) \in H_{1,1}(I_2) \cup \bar{C}_2, \ t \in I_2; \\ H_{1,2}(t) = H_{1,1}(t), \ t \in I \setminus I_2. \end{gathered} \tag{9}$$

Зменшуємо, якщо потрібно, число α_2 так, щоб або $I_2 \subset I_1$, якщо $t_2 \in I_1$, або $I_2 \cap I_1 = \emptyset$, якщо $t_2 \notin I_1$. Тоді з (8) і (9) маємо

$$\begin{gathered} H_{1,2}(t) \in H_{1,0}(V(a_1)) \cup \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2, \ t \in I_1 \cup I_2; \\ H_{1,2}(t) = H_{1,0}(t), \ t \in I \setminus (I_1 \cup I_2). \end{gathered}$$

Продовжуючи описану побудову за індукцією, одержимо A-послідовності $A(D_{1,i}, H_{1,i}(t))$, $t = 1, \ldots, k$, причому відображення $H_{1,k}$ задовольняє умови

$$H_{1,k}(t) \in H_{1,0}(V(a_1)) \cup \bar{C}_1 \cup \ldots \cup \bar{C}_k,\ t \in \bigcup_{j=1}^{k} I_j \subset V(a_1);$$

$$H_{1,k}(t) = H_{1,0}(t),\ t \in I \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} I_j \right). \qquad (10)$$

Оскільки всі множини $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_k$ і $H_{1,0}(V(a_1))$ мають спільну точку і діаметр кожної з них не більший за $2^{-n} = 2^{-2}$, то з (10) одержуємо, що для $t \in I$ $|H_{1,k}(t) - H_{1,0}(t)| < 2^{-1}$, причому $H_{1,k}(t) = H_{1,0}(t)$, якщо $t \in I \setminus V(a_1)$. Шуканою A-послідовністю дендрита $D_1(a_1) = D_{1,k}$, $D_1 \subset D_1(a_1) \subset D_2$ є A-послідовність $A(D_{1,k}, H_{1,k}(t))$.

Продовжимо побудову м.п. відображення $H_2{:}I \to D_2$ подібним способом для всіх інших точок $a_2, \ldots, a_m$, що є спільними для замикання компонент множини $D_2 \setminus D_1$ і дедрита D_1. Враховуючи, що кожна така компонента має діаметр, менший за $2^{-n} = 2^{-2}$ і сама побудова змінює м.п. відображення лише в околах $V(a_j)$, $j = 2, \ldots, m$, одержимо в результаті побудови таку A-послідовність $A(D_2, H_2(t))$ дендрита D_2, що

$$|H_1(t) - H_2(t)| < 2^{-1} \text{ для усіх } t \in I$$

причому

$$H_1(t) = H_2(t),\ \text{якщо } t \in I \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} V(a_j) \right).$$

Далі для кожного дендрита D_n будуємо A-послідовність $A(D_n, H_n(t))$. Оскільки діаметри компонентів множини $D_n \setminus D_{n-1}$ менші за 2^{-n}, то

$$|H_{n-1}(t) - H_n(t)| < 2^{-n+1} \text{ для всіх } t \in I.$$

Отже, послідовність $H_n(t)$ рівномірно збігається на I. Нехай $H(t) = \lim_{n \to \infty} H_n(t)$. Оскільки послідовність дендритів наближає локально зв'язний континуум M, а відображення $H_n(t)$ майже прості, то $H(t)$ – м.п. відображення відрізка I на континуум M. Теорему доведено.

Література

[1] *Куратовский К.* Топология: в 2-х т. – М.: Мир. 1969. – Т. 2. – 624 с.

[2] *Ward L. E.* A generalization of the Hahn-Mazurkiewicz theorem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 58. – P. 369–374.

[3] *Келдыш Л. В.* Топологические вложения в евклидово пространство // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1966. – Т. 81. – С. 184.

LOCALLY CONNECTED CONTINUA AS THE CONSEQUENCES OF THE EMBEDDINGS OF A SEGMENT INTO THE SPACE

I. Ya. Oleksiv

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

The theorem has been proved that for any locally connected bounded continuum in Euclidean space E^n, $n \geq 2$ there is a sequence of embeddings of the segment $[0;1]$ into E^n that converges uniformly to a continuous map of $[0;1]$ onto the continuum.

Key words: continuum, locally connected continuum, dendrite, embeddings the segment into the space.

2000 MSC: 57N12

UDK: 515.125