

**ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАПІРНИХ ТЕЧІЙ  
У ТРУБАХ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ**

© Гнатів Р. М., Босак М. П., Гнатів І. Р., 2017

У статті розглянуто математичне моделювання нестационарних неперіодичних процесів за напірного руху рідини в циліндричних трубах. На основі рівнянь Нав'є-Стокса для стисливої рідини виведено спрощені рівняння для випадку довгих труб. Показано, що для моделювання одноразових процесів ці рівняння містять тільки один безрозмірний параметр. Вказано умови, при яких можливе подальше спрощення цих рівнянь до форми, яка не містить жодного безрозмірного параметра. Загальне дослідження прискорених неперіодичних процесів проводиться на основі розгляду модельної задачі, для якої обраний такий процес у трубі за миттєвої зміни тиску. Вказано умови, за яких можна перейти до моделей руху нестисливої рідини і до рухів з великим загасанням. Отримано критерій переходу від ламінарного режиму руху до турбулентного, що дозволяє визначити межі застосування розглянутих моделей руху. До теперішнього часу відсутня теорія розрахунку моменту втрати стійкості ламінарного режиму течії і переходу до турбулентного в нестационарних потоках, а отже, відсутні межі застосовності розглянутих вище моделей ламінарного руху, що призводить до необхідності користуватися результатами фізичного моделювання, отриманими з експериментальних даних.

**Ключові слова:** математична модель, неусталений, нестационарний, одноразовий, рух рідини.

R. Hnativ, M. Bosak, I. Hnativ  
Lviv Polytechnic National University,  
Department of hydraulics and plumbing**RESEARCH UNSTEADY A PRESSURE HEAD PIPE  
FLOW BASED ON MATHEMATICAL MODELS**

© Hnativ R., Bosak M., Hnativ I., 2017

The article deals with mathematical modeling of non-stationary processes non-periodic pressure of the fluid in cylindrical tubes. Based on the Navier-Stokes equations for compressible fluid withdrawn simplified equation for the case of long pipes. It is shown that modeling of single processes, these equations contain only one dimensionless parameter. Identifies conditions which may further simplify these equations to a form that does not contain a dimensionless parameter. Total non-periodic accelerated research process is based on the review model problem for which elected a process in tube for instant pressure changes. Specified the conditions under which you can go to traffic patterns and incompressible fluid movements with high attenuation. The criterion of the transition from laminar to turbulent motion mode that allows you to determine the scope of application of these models movement. To date, no theory calculation since buckling laminar flow regime and transition to a turbulent unsteady flows and therefore no limits applicability of the above models laminar motion, making it necessary to use physical simulation results obtained from experimental data.

**Key words:** mathematical model, unstable, transient, disposable, fluid motion.

**Вступ.** Залежно від зміни фізичних величин із часом нестационарні гідродинамічні процеси в трубах поділяються на періодичні та одноразові (неперіодичні). Крім того, режим руху середовища за нестационарного процесу може бути ламінарним або турбулентним. При цьому перехід від

ламінарного до турбулентного режиму руху середовища відбувається за критичних чисел, що залежать від параметрів розглянутого процесу. Велика різноманітність нестационарних гідродинамічних процесів ускладнює їхнє математичне та експериментальне моделювання.

**Огляд наукових джерел і публікацій.** Найґрунтовніші дослідження в галузі неусталених рухів середовища проведено з періодичними процесами. Число робіт для неперіодичних нестационарних процесів у трубах менш чисельне. Детальніше досліджений випадок стисливої рідини. Розгінний рух нестисливої рідини в трубці за раптової зміни тиску розглянуто в класичних роботах [1, 2]. Дослідженню гідравлічного тертя в трубах при одноразових процесах за ламінарного режиму течії нестисливої рідини присвячені роботи [3–5]. Математичні моделі та деякі задачі для неперіодичних нестационарних процесів у трубах з урахуванням стисливості рідини наведено в роботах [6–8]. Процес переходу ламінарної форми руху в турбулентну розглянуто в дослідженнях [4, 9–12].

**Мета та завдання дослідження** полягає в удосконаленні методики розрахунку структур неусталених потоків рідини в круглих трубопроводах та отримання їхніх гідродинамічних характеристик.

**Результати досліджень.** Рівняння осесиметричного руху в круглих трубах для стисливої в'язкої рідини можна записати в наступному безрозмірному вигляді

$$Sh \frac{\partial u}{\partial \tau} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \varepsilon v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -Eu \varepsilon \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{Re} \left[ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] + \frac{\varepsilon^2}{3Re} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right], \quad (1)$$

$$Sh \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon u \frac{\partial v}{\partial \xi} + \varepsilon v \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{Eu}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{Re} \left[ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{v}{\eta} \right] + \frac{1}{3Re} \left[ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{v}{\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right], \quad (2)$$

$$Sh \frac{\partial p}{\partial \tau} + \chi \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{\eta} \right) + \varepsilon u \frac{\partial p}{\partial \xi} + \varepsilon v \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0. \quad (3)$$

де

$$u = U_0 u, \quad v = \frac{R}{L} U_0 v, \quad p = p_0 p, \quad z = L \xi, \quad r = R \xi, \quad t = T \tau, \quad (4)$$

тут  $U_0, p_0, T, L$  – характерні масштабні значення для відповідних змінних;  $R$  – радіус труби;  $\eta$  – безрозмірна координата в радіальному напрямку;  $\tau$  – безрозмірний час;  $\xi$  – безрозмірна поздовжня координата.

Безрозмірні величини позначені так

$$Sh = \frac{R}{U_0 T}, \quad Eu = \frac{p_0}{r U_0^2}, \quad Re = \frac{U_0 R}{\nu}, \quad \varepsilon = \frac{R}{L}, \quad c = \frac{r c^2}{p_0}, \quad \xi = \varepsilon \frac{z}{R}. \quad (5)$$

де  $Sh$  – число Струхала;  $Eu$  – число Ейлера;  $Re$  – число Рейнольдса.

У випадку довгих труб  $\varepsilon \ll 1$ . Якщо припускати, що

$$Sh > e, \quad Eu > 1, \quad 1/Re > e, \quad c > 1, \quad (6)$$

то рівняння (1) – (3) для довгих труб спрощуються до вигляду

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \alpha_2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad (8)$$

$$\alpha_3 \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{\eta} = 0. \quad (9)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{Sh}{Eu\varepsilon} = \frac{\rho LU_0}{p_0 T}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\varepsilon Re Eu} = \frac{v \rho LU_0}{p_0 R^2}, \quad \alpha_3 = \frac{Sh}{\chi\varepsilon} = \frac{p_0 L}{\rho c^2 U_0 T}. \quad (10)$$

Рівняння (7) – (9) є рівняннями відомої дисипативної моделі [6–8]. За заданого масштабу тиску  $p_0$  є три варіанти вибору  $T$  і  $U_0$  (часу і швидкості). При цьому для цих варіантів:

$$1) \quad \alpha_1 = \alpha_3 = 1 \text{ або } \varepsilon Eu = Sh; \quad \varepsilon c = Sh. \quad (11)$$

$$2) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \text{ або } \varepsilon Eu = Sh; \quad ReSh = 1. \quad (12)$$

$$3) \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \text{ або } \varepsilon Re Eu = 1; \quad \varepsilon c = Sh. \quad (13)$$

Масштаби  $T$  і  $U_0$ , що отримані з умов (11) – (13), наведені в табл. 1. Якщо ввести позначення

$$T_1 = \frac{L}{c}, \quad T_2 = \frac{R^2}{v}, \quad T_3 = \frac{vL^2}{c^2 R^2}, \quad a = \frac{vL}{cR^2}, \quad b = \frac{p_0}{r_c}, \quad (14)$$

то цю таблицю можна представити у вигляді табл. 2.

Таблиця 1

**Залежність безрозмірних коефіцієнтів від  $T$  і  $U_0$  для різних варіантів**

Варіанти	$T$	$U_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
1	$\frac{L}{c}$	$\frac{p_0}{r_c}$	1	$\frac{nL}{cR^2}$	1
2	$\frac{R^2}{n}$	$\frac{p_0 R^2}{rnL}$	1	1	$\frac{n^2 L^2}{c^2 R^4}$
3	$\frac{nL^2}{c^2 R}$	$\frac{p_0 R^2}{nrL}$	$\frac{c^2 R^4}{n^2 L^2}$	1	1

Таблиця 2

**Залежність безрозмірних величин від  $T$  і  $U_0$  для різних варіантів**

Варіанти	$T$	$U_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
1	$T_1$	$\beta$	1	$\alpha$	1
2	$T_2$	$b \frac{T_2}{T_1}$	1	1	$\alpha_2$
3	$T_3$	$b \frac{T_1}{T_3}$	$\alpha^{-2}$	1	1

З наведеної таблиці видно, що єдиним безрозмірним параметром для нестационарних процесів у цих трубах є  $\alpha$ . На таку інформацію вказано в роботі [5].

Для зазначених варіантів масштабів умови застосовності моделі для довгих труб (6) приймають відповідно такий вигляд:

$$1) \quad Sh \gg \varepsilon, \quad 1/Re \gg \varepsilon \text{ або } \alpha\chi \gg 1, \quad \chi \gg 1, \quad (15)$$

$$2) \quad Sh \gg \varepsilon, \quad \chi \gg 1 \text{ або } \alpha^2 \chi \gg 1, \quad \chi \gg 1, \quad (16)$$

$$3) \quad Sh \gg \varepsilon, \quad Eu \gg 1 \text{ або } \alpha^2 \chi \gg 1, \quad \chi \gg 1. \quad (17)$$

Розглянемо задачу про раптове прикладення постійного тиску в кінці труби за допомогою дисипативної моделі за першого варіанту вибору масштабів. Відповідна математична модель задачі впливає зі співвідношень (7)–(9) при,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha$ ,  $\alpha_3 = 1$ .

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{\eta} = 0. \quad (20)$$

Початкові і граничні умови цієї задачі мають вигляд

$$u = 0; p = 1 \text{ при } \tau = 0;$$

$$p = 1 \text{ при } \xi = 0;$$

$$p = 0 \text{ при } \xi = 1;$$

$$u = 0, v = 1 \text{ при } \eta = 1.$$

Чисельне значення параметра  $\alpha$  визначає вплив сил в'язкого тертя на неперіодичний процес. Подальше спрощення дисипативної моделі і виключення єдиного безрозмірного параметра  $\alpha$  із задачі можливе, якщо, крім умов (15) – (17), ввести додаткові умови щодо порядку параметра  $\alpha$ .

Якщо в такому випадку першого варіанта вибору масштабів вважати, що

$$Sh \ll 1/Re \text{ або } \alpha \ll 1 \quad (21)$$

і нехтувати відповідною складовою в рівнянні (18), отримаємо модель для питомої рідини з рівняннями

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{\eta} = 0. \quad (24)$$

Розглядаємо модель нестисливої рідини. Якщо у випадку другого варіанта вибору масштабів прийняти, що

$$Sh \ll \varepsilon \chi \text{ або } \alpha^2 \ll 1, \quad (25)$$

і знехтувати відповідним членом у рівнянні (9), маємо

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta}. \quad (26)$$

Зі співвідношень (16) і (25) випливає, що цю модель можна застосувати, якщо

$$\varepsilon \ll Sh \ll \varepsilon \chi \text{ або } 1 \ll \alpha^2 \chi \ll \chi, \quad (27)$$

причому

$$Eu = \frac{Sh}{\varepsilon}, \quad Re = \frac{1}{Sh}. \quad (28)$$

За миттєвої зміни градієнта тиску

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -1. \quad (29)$$

Якщо у випадку третього варіанта вибору масштабів (13) вважати, що

$$Sh \ll \varepsilon Eu \text{ або } \alpha^2 \gg 1 \quad (30)$$

і знехтувати складовою з коефіцієнтом  $\alpha_1$  в рівнянні (7), маємо систему

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{\eta} = 0. \quad (33)$$

Ця модель описує рухи рідини з великим загасанням, оскільки в першому рівнянні не враховується інерційна складова. Зі співвідношень (17) і (30) маємо, що ця модель може бути застосована, якщо

$$\varepsilon \ll \text{Sh} \ll \varepsilon \text{Eu} \text{ або } 1 \ll \chi \ll \alpha^2 \chi, \quad (34)$$

причому

$$\text{Re} = \frac{1}{\varepsilon \text{Eu}}, \varepsilon \chi = \text{Sh}. \quad (35)$$

Досі відсутня теорія розрахунку моменту втрати стійкості ламінарного режиму течії і переходу до турбулентного в нестационарних потоках, а отже, відсутні також межі застосовності розглянутих вище моделей ламінарного руху. Тому необхідно користуватися результатами фізичного моделювання, отриманими з експериментальних даних.

**Висновки.** Розглянуто математичне моделювання нестационарних неперіодичних процесів за напірного руху рідини в циліндричних трубах. На основі рівнянь Нав'є-Стокса для стисливої рідини виведено спрощені рівняння для випадку довгих труб. Показано, що для моделювання одноразових процесів ці рівняння містять тільки один безрозмірний параметр. Вказуються умови, за яких можливе подальше спрощення цих рівнянь до форми, яка не містить жодного безрозмірного параметра. Загальне дослідження прискорених неперіодичних процесів проводиться на основі розгляду модельної задачі, для якої обраний такий процес у трубі за миттєвої зміни тиску. Вказано умови, за яких можна перейти до моделей руху нестисливої рідини і до рухів з великим загасанням. Отримано критерій переходу від ламінарного режиму руху до турбулентного, що дає змогу визначити межі застосування розглянутих моделей руху.

1. Adamkowski A. *Experimental examination of unsteady friction models for transient pipe flow simulation* / Adam Adamkowski, Mariusz Lewandowski // *Trans. ASME. J. Fluids Eng.* – 2006. – 128. – No. 6. – С. 1351–1363.
2. Reinhold I. *Velocity profile influence on electromagnetic flowmeter accuracy* / I. Reinhold // *Proc. FLOMEKO.* – 1978. – Netherland. – P. 181–185.
3. Letelier S. M. F. *Unified approach to the solution of problems of unsteady flow in long pipes* / S.M. F. Letelier, H. J. Leutheusser // *J. Appl. Mech.* – 1983. – Vol. 50, N 1. – P. 8–12.
4. Байбаков Б. С. *Сопротивление трения при ускоренном течении в трубе* / Б. С. Байбаков, О. Ф. Орешкин, А. М. Прудовский // *Изв. АН СССР. Механ. жидк. и газа.* – 1981. – No. 5. – С. 137–139.
5. Логов И. Л. *К вопросу о сопротивлении трения при ускоренном течении в трубе* / И. Л. Логов // *Изв. АН СССР, Механ. жидк. и газа.* – 1983. – № 6. – С. 169–174.
6. Jayasinghe D. A. P. *Pulsatile Waterhammer Subject to Laminar Friction* / D. A. P. Jayasinghe, H. J. Leutheusser // *J. Fluids Eng.* – 1972. – No. 94(2). – С. 467–472.
7. Чарный И. А. *Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах* / И. А. Чарный. – М.: Недра, 1975. – 296 с.
8. Попов Д. Н. *Нестационарные гидромеханические процессы* / Д. Н. Попов. – М.: Машиностроение, 1982. – 239 с.
9. Masliyah J. H. *Laminar Transient flow in pipes* / J. H. Masliyah, C. A. Shook // *Can. J. Chem. Eng.* – 1975. – Vol. 53. – No. 10. – P. 469–475.
10. Leutheusser H. J. *Problems of accelerated fluid motion* / H. J. Leutheusser // *Proc. XVII Cong. IAHR, Baden-Baden, Germany.* – 1977. – Vol. 6. – P. 247–252.
11. Бондаренко Ю. А. *Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики* / Ю. А. Бондаренко. *Обзор зарубежной литературы* / Ю. А. Бондаренко, В. В. Башуров, Ю. В. Янилкин. – М. 2003. – (Препринт / РФЯЦ ВНИИЭФ; – No. 88-2003).
12. Jachno O. M. *Równania niestacjonarnego przepływu laminarnego cieczy ściśliwej w rurze cylindrycznej* / O. M. Jachno, R. M. Hnatiw, I. R. Hnatiw // *Nauka i studia.* – 2017. – No. 2 (163). – ISSN 1561–6894. – С. 97–102.