

## РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ ДРОБОВИХ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

© Марущак Я. Ю., Копчак Б.Л., Каша Л.В., 2018

Розроблено інженерну методика визначення робастної стійкості для електро-механічних систем (ЕМС), які описано моделями дробового порядку. Проаналізовано динамічні ЕМС, які описано передавальними функціями з дробовим характеристичним поліномом з трьома членами. Проаналізовано стійкість таких систем з використанням комплексної площини Рімана. Встановлено взаємозв'язок між секторами, в яких можуть перебувати полюси дробової ЕМС, та станом таких систем з погляду стійкості та можливості їх фізичної реалізації. Тим самим встановлено, що робастну стійкість до параметричних збурень можна оцінити кутом сектора на площині Рімана  $|f_{wi}|$ , тобто він може слугувати інформативним параметром робастності дробових ЕМС.

*Ключові слова:* дробовий порядок, електромеханічна система, робастна стійкість, поверхня Рімана, аналіз стійкості.

The engineering methodology for determining robust stability for electromechanical systems (EMS), described by fractional order models, has been developed in this paper. Dynamic EMS described by transfer functions with fractional characteristic polynomial with three terms, have been investigated. The stability of such systems has been analysed by means of applying Riemann complex plane. The correlation between the sectors in which there may be poles of fractional EMS, and the state of such systems in terms of stability and the possibility of their physical implementation has been established. Thus, it has been proved that robust stability to parametric perturbations can be estimated by the angle of the sector on the Riemann plane  $|f_{wi}|$ , which can serve as an informative parameter of the fractional EMS robustness.

*Keywords:* fractional order, electromechanical system, robust stability, Riemann plane, stability analysis.

### Постановка проблеми

Функціонування електромеханічних систем (ЕМС) в умовах реальної експлуатації може суттєво відрізнятися від очікуваного через відмінності реальних параметрів системи від закладених їх значень під час синтезу таких систем. Тому під час побудови ЕМС слід забезпечувати їх робастність. Якщо питання робастності детально розглянути під час синтезу систем цілого порядку з використанням відповідних регуляторів [1–3], то робастність з погляду забезпечення стійкості (робастна стійкість) таких систем досліджена не достатньо. Потреба досліджень робастної стійкості дробових систем ще й пов'язана з координатними збуреннями у системі. Саме ці питання і розглянути у цій статті.

### Аналіз останніх досліджень

Робастна стійкість систем, які описуються диференціальними рівняннями цілого порядку, у різних формах розглянуто в роботі [4]. Стійкість систем дробового порядку розглянуто в значній кількості публікацій, зокрема в [5, 6] без врахування невизначеності її параметрів, тобто питання

робастної стійкості ЕМС дробового порядку, а також розроблення інженерної методики побудови систем за умови забезпечення робастної стійкості є актуальним, зокрема для розроблення самоналаштувальних систем.

За умов параметричних збурень для ЕМС цілого порядку [7] аналіз робастної стійкості може бути здійснений кореневими методами. Для дробових систем ці методи є не прийнятними. Водночас, якщо розглядати комплексну площину Рімана, робастну стійкість дробової системи можна встановити на основі аналізу характеристичного полінома дробового порядку [4]. Характерною особливістю такого аналізу є те, що стійка ЕМС дробового порядку може мати полюси у правій півплощині комплексної поверхні Рімана.

### Формування цілей статті

**Метою статті** є розроблення інженерної методики розрахунку робастної стійкості ЕМС дробового порядку для встановлення «зони стійкості» на комплексній площині Рімана, виходячи з умови не тільки стійкості, але й якості динамічних характеристик синтезованої системи. Крім цього, розробити процедуру оперативного аналізу умови робастної стійкості ЕМС при реалізації режиму самоналагодження параметрів регулятора дробового порядку.

### Виклад основного матеріалу

Розроблення інженерної методики розрахунку робастного стійкості проаналізуємо за допомогою широко вживаної в ЕМС дробового порядку [7] такої передавальної функції (ПФ) другого порядку:

$$W(s) = \frac{1}{0,8s^{a_2} + 0,5s^{a_1} + 1}, \quad (1)$$

яка є частковим випадком дробової форми Баттерворта

$$W(s) = \frac{k}{a_2s^{a_2} + a_1s^{a_1} + 1} \quad (2)$$

Величини  $a_2$  і  $a_1$  не є цілими числами і можуть бути як меншими за одиницю, так значно більшими, наприклад:  $a_2=2,2$ ,  $a_1=0,9$  [7].

У працях [8–10] обґрунтовано використання дробової форм Баттерворта другого порядку (2) для ідентифікації динамічних характеристик дробових ЕМС. Так, ідентифікація є дуже важливим етапом у процесі створення самоналагоджувальних систем з відповідними регуляторами.

Пошук інформативного параметра для оцінювання робастної стійкості ЕМС ґрунтується на результатах досліджень, наведених в [4] за використання комплексної  $w_R$ -площини поверхні Рімана. За цим підходом характеристичне рівняння ЕМС записують у формі загальної ЛТІ системи дробового порядку:

$$a_n(q)s^{a_n} + \dots + a_1(q)s^{a_1} + a_0(q)s^{a_0} \equiv \sum_{i=0}^n a_i(q)s^{a_i} = 0, \quad (3)$$

де  $q$  – параметри системи, які можуть змінюватися внаслідок параметричних збурень.

Перейдемо до комплексної  $w_R$ -площини поверхні Рімана:

$$\sum_{i=0}^n a_i s^{u_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i w_R^{k_i} = 0, \quad (4)$$

де  $w_R = s^m$  ( $m$  – найменше спільне кратне  $u_i$ ),  $k_i = a_i$ ;  $n$  – порядок полінома.

Потім аналізують стійкість у такій послідовності.

1. Для заданих  $a_i$  розраховують корені рівняння (3) і визначають значення їхніх фаз  $|f_{wi}|$ .
2. Полюси, які розміщені на комплексній  $w_R$ -площині Ріманової поверхні, мають відповідати «стійким» кореням на звичайній комплексній площині. Вони отримуються як полюси, котрі

перебувають в секторі  $|f_{wi}| < \frac{P}{m}$  на площині Рімана з подальшим застосуванням зворотного перетворення  $s = w_R^m$ . Сектор, у якому  $|f_{wi}| > \frac{P}{m}$ , не має фізичного змісту.

3. Запишемо умову стійкості

$$\frac{P}{2m} < |f_{wi}| < \frac{P}{m}, \quad (5)$$

а також умову граничної стійкості  $|f_{wi}| = \frac{P}{2m}$ .

В іншому випадку система є нестійкою.

Згідно з (4) запишемо відповідне характеристичне рівняння системи (1):

$$P(s) : 0,8s^{10\alpha_2} + 0,5s^{10\alpha_1} + 1 = 0 \Rightarrow 0,8s^{\frac{10\alpha_2}{10}} + 0,5s^{\frac{10\alpha_1}{10}} + 1 = 0. \quad (6)$$

При  $m=10$ ,  $w_R = s^{\frac{1}{10}}$  і многочлен (6) має вигляд

$$P(\omega_R) : 0,8\omega_R^{10\alpha_2} + 0,5\omega_R^{10\alpha_1} + 1 = 0 \quad (7)$$

і умову стійкості для нього згідно з (5) записують у вигляді

$$0,157 < |\phi_{\omega_i}| < 0,314 \text{ рад.} \quad (8)$$

З можливих для (7)  $10\alpha_2 = n$  полюсів братимемо до уваги тільки полюси  $w_{Ri}$  із найменшими абсолютними значеннями фаз.

Високий порядок полінома (7) ускладнює процедуру дослідження робастної стійкості ЕМС, які описуються ПФ зразка (1), за використання комплексної  $w_R$ - площини Ріманової поверхні

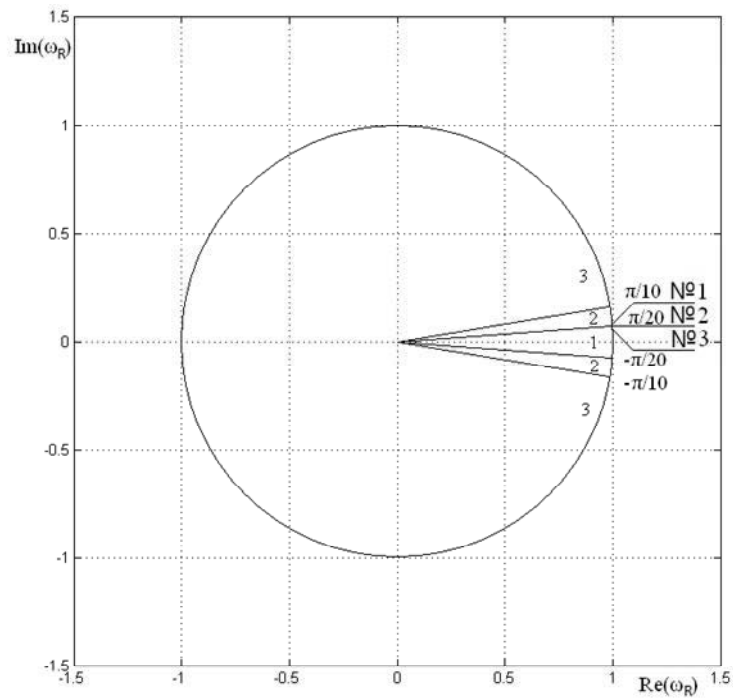
функції ( $w_R = s^{\frac{1}{10}}$ ).

На рисунку відображено сектори на комплексній площині Рімана, в яких можуть перебувати полюси дробової ПФ. Тут вказано три сектори, які відповідають нестійкому режиму роботи (сектор 1), стійкому режиму роботи (сектор 2) та стан системи, який не має фізичної реалізації. Побудову цього представлення комплексної  $w_R$ -площини ріманової поверхні здійснено за умови  $w_R = s^{\frac{1}{10}}$ .

Перевірку правомірності такого трактування стану системи за даними аналізу на комплексній  $w_R$ -площині поверхні Рімана було проведено за допомогою розрахунку та побудови перехідних функцій відповідних систем. У таблиці наведено частину результатів, отриманих [11] під час аналізу полінома (7), які показують взаємозв'язок між параметром  $|f_{w(n,n-1)}|$  та характером перехідних функцій відповідних систем. У ній наведено три найхарактерніші ПФ дробового порядку.

#### Взаємозв'язок між станом ЕМС та параметром $|f_{w(n,n-1)}|$

№	ПФ	$w_{Rn-1,n}$	$ f_{w(n,n-1)} $ , рад.	Стан системи (за перехідними функціями)
1	$W(s) = \frac{1}{0,8s^{2,2} + 0,5s^{0,9} + 1}$	$1,0045 \pm 0,1684i$	0,1661	стійка
2	$W(s) = \frac{1}{0,8s^{2,2} + 0,5s^{1,7} + 1}$	$0,9786 \pm 0,1546i$	0,157	на межі стійкості, коливна
3	$W(s) = \frac{1}{0,8s^{2,2} + 0,5s^{1,9} + 1}$	$0,9774 \pm 0,1486i$	0,151	нестійка



Відображення секторів розміщення полюсів дробової ПФ на комплексній

$$w_R \text{ площині Рімана за умови } \omega_R = s^{\frac{1}{10}} :$$

1 – нестійкий режим; 2 – стійкий режим; 3 – сектор не має фізичного змісту

Як видно з наведених результатів для ПФ 1 параметр  $|f_{wi}|$  знаходиться в першій зоні і система стійка, для ПФ 2 встановлено взаємозв'язок між цим параметром і межею стійкості і для ПФ 3 показано взаємозв'язок між  $|f_{wi}|$  та нестійкістю системи.

### Висновки

Позитивним результатом цієї статті є встановлення та підтвердження можливості використання параметра  $|f_{wi}|$  для знаходження ЕМС у зоні стійкої/нестійкої роботи при різноманітних її параметричних збуреннях. За його використання можна розробити інженерну методику побудови ЕМС, яка забезпечувала бажаний запас стійкості, тобто реалізовано робастне керування. Якщо параметр  $|f_{wi}|=0,314$  рад., за умови  $m=10$ , то ЕМС стійка і у перехідній функції її вихідної координати перегулювання немає. Із зменшенням  $|f_{wi}|$  система залишається стійкою з певним перегулюванням регульованої координати. Якщо набуває значення  $|f_{wi}|=0,157$  рад., то система знаходиться на межі стійкості. Для інших значень  $m$  ці параметри розраховують за виразом (5). Все це дає змогу стверджувати, що параметр  $|f_{wi}|$  на комплексній  $w_R$ -площині поверхні Рімана є інформативним для визначення роботи ЕМС у стійкій чи нестійкій зоні або на межі цих зон, а тому його можна використовувати для опосередкованого встановлення робастності систем без дослідження їх перехідних функцій. Тобто можна встановити діапазон зміни параметрів системи, за якого вона залишається стійкою. За наближенням параметра  $|f_{wi}|$  до відповідних зон, показаних на рисунку, можна прогнозувати характер динамічних процесів ЕМС, які описано дробовими ПФ.

1. Xue D. A comparative introduction of four fractional order controllers / D. Xue, Y. Chen // *Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*. – 2002. – № 4. – P. 3228–3235.
2. Machado J. A. T. A new method for approximating fractional derivatives: Application in non-linear

control [Електронний ресурс] / J. A. T. Machado, A. M. S. Galhano // Sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC-2008). – 2008. – Режим доступу до ресурсу: [https://www.researchgate.net/publication/241904348\\_A\\_NEW\\_METHOD\\_FOR\\_APPROXIMATING\\_FRACTIONAL\\_DERIVATIVES\\_APPLICATION\\_IN\\_NON-LINEAR\\_CONTROL](https://www.researchgate.net/publication/241904348_A_NEW_METHOD_FOR_APPROXIMATING_FRACTIONAL_DERIVATIVES_APPLICATION_IN_NON-LINEAR_CONTROL). 3. Chua L.O. Fractional order systems. Modeling and control application / L. O. Chua, R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, I. Petrás // World Scientific Publishing Co., Series A.– 2010. – Vol. 72. – 167 p. 4. Polyak B. T. Robust stability and control / B. T. Polyak, P. S. Scherbakov. – М.: Nauka, 2002. – 303 p. 5. Radwan A. G. On the stability of linear system with fractional order elements / A. G. Radwan, A. M. Soliman, A. S. Elwakil // Chaos Solitons & Fractals. – 2009. – № 40. – P. 2317–2328. 6. Tavazoei M. S. A note on the stability of fractional order systems / M. S. Tavazoei, M. Haeri // Mathematics and Computers in Simulation. – 2009. – № 79. – P. 1566–1576. 7. Maiti D. Design of a fractional order PID controller using particle swarm optimization technique [Електронний ресурс] / D. Maiti, S. Biswas, A. Konar // 2nd National Conference on Recent Trends in Information Systems (ReTIS-08). – 2008. – Режим доступу до ресурсу: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0810/0810.3776.pdf>. 8. Копчак Б. Л. Апроксимація перехідних функцій поліномами дробового порядку / Б. Л. Копчак // Одеський національний політехнічний університет. Наук.-техн. журнал «Електротехнічні та комп'ютерні системи». – 2014. – № 14. – С. 20–27. 9. Тверд М. Самоналагодження параметрів регулятора швидкості електромеханічної системи з мікропроцесорним керуванням методом рою частинок / М. Тверд, Б. Л. Копчак // Вісник Нац. тех. ун-ту «ХПІ». Серія: Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика. Силова електроніка і енергоефективність: зб. наук. пр. – 2015. – № 12. – С. 107–110. 10. Lozynskyy O. Synthesis and research of electromechanical systems described by fractional order transfer functions / O. Lozynskyy, A. Lozynskyy, Y. Marushchak, B. Korchak, P. Kalenyuk, Y. Paranchuk // Сучасні електротехнічні та енергетичні системи: матеріали наукової конференції MEES-2017, (Кременчук, 15–17 листопада 2017 р.). – 2017. – P. 16–19. 11. Копчак Б.Л. Аналіз і синтез електромеханічних систем, які описуються дробовими інтегрально-диференціальними ланками: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: спец. 05.09.03 “Електротехнічні комплекси та системи”. – Національний університет “Львівська політехніка” МОН України, Львів, 2017.