інститут”. 2000 р. – № 3(11), 10. Караєва Н.В. Економічне регулювання екополітики України в умовах хронічного дефіциту бюджету // Вісн. Сумського державного університету. Серія Економіка. 2001. – № 6(27)-7(28). 11. Прибуткова І.М. Демографічна ситуація в Україні в 1990-х роках //Українське суспільство на порозі третього тисячоліття/ За ред. М. Шульги. – К., 1999. 12. Охорона здоров‘я України: результати діяльності (щорічна доповідь, 1999 р.) – К., 2000. 13. Економічний аналіз діяльності промислових підприємств та об'єднань: Навч. посібник / За ред.С.І. Шкарабана, М.І. Сапачова. – Тернопіль: ТАНГ, 1995. – 296с. 14. Карлин Т.Р., Макмин А.Р. Анализ финансовых отчетов (на основе GAAP): Учебник–М.: ИНФРА-М, 2000. 15. Рыжов В.В., Частоколенко И.П. Банкротство субъектов энергорынка как экономическая угроза энергетической безопасности //Енергетика: економіка, технології, екологія. – 2001. – №4. 16. Ревич Б.А., Быков А.А.. Оценка риска смертности населения России от техногенного загрязнения воздушного бассейна //Проблемы прогнозирования. – № 3. – 1998.

УДК 338.9

М.К.Колісник, О.В.Коруд*
Національний університет “Львівська політехніка”,
*Львівський національний університет ім. Івана Франка

ЗАСТОСУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ВАРТОСТІ ОПЦІОНІВ

Відображено методичні положення щодо аналізу та оцінки похідних цінних паперів для ефективного управління портфелем активів. Показано можливості застосування моделей розрахунку вартості опціонів.

In this article methodical principles of derivatives analysis and estimation are presented for effective operation of portfollio. Possible application of options valuation model are shown.

Оскільки при фінансових операціях із цінними паперами існує досить велика позитивна ймовірність, що зміняться ціни на цінні папери, то підприємці “страхують” свої операції, використовуючи похідні цінні папери. Найпоширенішими з них є опціони. Згідно з чинним законодавством, опціон на цінні папери – це контракт або домовленість, оформлена певним видом документа (опціонним свідоцтвом), що дає одній особі право придбати в іншої особи або продати іншій особі цінні папери чи їх групу в будь-який момент протягом визначеного терміну з фіксацією ціни реалізації на дату складання опціону. Продавець опціону має зобов’язання щодо безумовної і безвідмовної пропозиції про реалізацію прав покупця опціону на придбання (продаж) цінних паперів або їх групи протягом терміну дії опціону. Покупець опціону має право відмовитись від придбання (продажу) цінних паперів або їх групи [1, с. 65].

Для оцінки раціональної вартості опціону відомі різноманітні моделі: (модель Блека-Шоулза [2, с. 640], модель Кокса-Росса-Рубінштейна [3, с.40], що більшій чи меншою мірою оперують ймовірнісними характеристиками зміни цін на активи. А зміна ціни є обов’язковою, бо підставою для укладення контракту є протилежна думка майбутніх учасників угоди щодо можливої зміни ціни курсу акцій (чи інших активів).

Для визначення ціни опціону ми розглянемо модель Блека-Шоулза, яка накладає такі обмеження на ринок:

1) короткотермінова відсоткова ставка є відомою та постійною;
2) ціна акції є неперервною випадковою величиною часу із дисперсією, що пропорційна до квадрата ціни акції. Ставка дисперсії за прибутковістю акції є сталою;
3) за акцією не виплачуються дивіденди та ніякі інші платежі;
4) опціон є "європейським", тому він може бути виконаний тільки у час виконання;
5) відсутні трансакційні платежі;
6) існує можливість боргової позички для частини ціни цінного паперу під короткотермінові відсоткові ставки;

За цих умов вартість опціону залежатиме тільки від ціни акції, часу та змінних, що ми прийняли за сталі.

Позначимо $w(x,t)$ – ціну опціону як функцію ціни акції x та часу t. Тоді кількість опціонів, що мають бути у короткому продажу проти однієї акції у довгому продажу (довга позиція за опціоном – позиція покупця опціону, коротка позиція – позиція продавця опціону [1, с.66]:

$$\frac{1}{w_1(x,t)} \tag{1}$$

У виразі (1) так позначається часткова похідна $w(x,t)$ за першим аргументом.

Щоб побачити, що вартість у такій хеджованій позиції не залежить від ціни акції, зауважимо, що відношення зміни ціни опціону до зміни ціни акції (при малій зміні ціни акції) є $w_1(x,t)$. При першому наближенні, коли ціна акції зміниться на Δx, ціна опціону зміниться на $w_1(x,t)\Delta x$, і кількість опціонів, що подана виразом (1), зміниться на Δx. Отже, зміна вартості довгої позиції акції буде приблизно компенсована зміною вартості у короткій позиції $1/w_1(x,t)$ опціонів.

В загальному, оскільки хеджована позиція складається із однієї акції у довгій позиції і $\frac{1}{w_1(x,t)}$ опціонів у короткій, то ціна залишку у позиції дорівнює:

$$x-\frac{w}{w_1} \tag{2}$$

Зміна вартості залишку під час короткого інтервалу Δt:

$$\Delta x-\frac{\Delta w}{w_1} \tag{3}$$

Припускаючи, що позиція змінюється неперервно, ми можемо використати стохастичне числення [2, с.642], щоб розписати

$$\Delta w(x,t)=w(x+\Delta x,t+\Delta t)-w(x,t)$$

так:

$$\Delta w(x,t)=w_1\Delta x+\frac{1}{2}w_{11}v^2x^2\Delta t+w_2\Delta t \tag{4}$$

У рівнянні (4) індекси w відповідають частковим похідним, а v^2 – ставка дисперсії за прибутковістю акції. Підставляючи рівняння (4) у вираз (3), ми знаходимо, що зміна вартості у хеджованій позиції:

$$-\left(\frac{1}{2}w_{11}v^2x^2+w_2\right)\frac{\Delta t}{w_1}. \tag{5}$$

Оскільки прибутковість у хеджованій позиції є у певний спосіб визначеною, то прибутковість повинна дорівнювати $r\Delta t$.

Отже, зміна вартості залишку (5) повинна дорівнювати зміні вартості залишку (2) за час Δt.

$$-\left(\frac{1}{2}w_{11}v^2x^2+w_2\right)\frac{\Delta t}{w_1}=\left(x-\frac{w}{w_1}\right)r\Delta t. \tag{6}$$

Скорочуючи на Δt у обох частинах рівняння і перегруповуючи доданки, ми отримаємо диференційне рівняння для визначення вартості опціону:

$$w_2=rw-rxw_1-\frac{1}{2}v^2x^2w_{11}. \tag{7}$$

Позначимо t^* – дату виконання опціону, а c – ціну виконання опціону. Тоді ми знаємо, що:

$$w(x,t)=\begin{cases}x-c, x\geq 0\\ 0, x<c\end{cases}. \tag{8}$$

Існує тільки один розв'язок, що задовольняє диференційне рівняння (7) із граничною умовою (8). Цей розв'язок є формулою для знаходження ціни опціону.

Щоб розв'язати це диференційне рівняння, зробимо заміну:

$$w(x,t)=e^{r(t-t^*)y}\left[\frac{2}{v^2}\left(r-\frac{1}{2}v^2\right)\left[\ln\frac{x}{c}-\left(r-\frac{1}{2}v^2\right)\left(t-t^*\right)\right]-\frac{2}{v^2}\left(r-\frac{1}{2}v^2\right)^2\left(t-t^*\right)\right] \tag{9}$$

Із цією підстановкою рівняння виглядатиме:

$$y_2=y_{11} \tag{10}$$

І гранична умова перетвориться так:

$$y(u,0)=\begin{cases}0, u<0\\ c\left[e^{\frac{uv^2}{2(r-v^2/2)}}-1\right], u\geq 0\end{cases} \tag{11}$$

Диференційне ріняння (10) є рівнянням передачі теплоти у фізиці та його розв'язок поданий Черчелем. У наших позначеннях розв'язком є:

$$y(u,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{2s}}^{\infty}c\left[e^{\frac{(u+q\sqrt{2s})(v^2/2)}{(r-v^2/2)}-1}\right]e^{-\frac{q^2}{2}}\partial q \tag{12}$$

Підставляючи (12) у рівняння (9) і спрощуючи, ми отримуємо:

$$w(x,t) = xN(d_1) + ce^{r(t-t^*)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{x}{c} + (r + \frac{1}{2}v^2)(t^* - t)}{v\sqrt{t^* - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{x}{c} + (r - \frac{1}{2}v^2)(t^* - t)}{v\sqrt{t^* - t}} \qquad (13)$$

У рівнянні (13) $N(d)$ є функцією нормального розподілу. Зауважимо, що очікувана прибутковість акції не з'являється в рівнянні (13). Вартість опціону як функції від ціни акції є незалежною від очікуваної прибутковості акції. Очікувана прибутковість опціону, тим не менше, залежатиме від прибутковості акції. Чим швидше зростає ціна акції, тим швидше зростає ціна опціону через функціональну залежність (13). Зауважимо, що дата виконання $(t^* - t)$ у формулі з'являється тільки помноженою на ставку відсотка r і ставку дисперсії v^2. Отже, збільшення терміну виконання матиме такий самий вплив на вартість опціону, як таке саме відсоткове збільшення r та v^2.

Формула обчислення вартості (13) була виведена із припущень, що опціон може бути виконаний тільки в час t^*. Вартість американського кол-опціону така сама, як і вартість європейського кол-опціону.

Проста модифікація формули зробить її можливою для європейського пут-опціону (опціон на продаж) так само, як і для кол-опціонів (опціонів для купівлі). Враховуючи $u(x,t)$ для вартості пут-опціону, ми бачимо, що диференційне рівняння не зміниться:

$$u_2 = ru - rxu_1 - \frac{1}{2}v^2x^2u_{11} \qquad (14)$$

Проте граничні умови зміняться:

$$u(x,t^*) = \begin{cases} 0, & x \ge c \\ c - x, & x < c \end{cases} \qquad (15)$$

Щоб отримати розв'язок цього рівняння із новими граничними умовами, зауважимо, що різниця між вартістю кол- і вартістю пут-опціону за тією самою акцією, якщо обидві виконуються тільки в термін виконання, повинна задовольняти те саме диференційне рівняння, але з такою граничною умовою:

$$w(x,t^*) - u(x,t^*) = x - c \qquad (16)$$

Розв'язок диференційного рівняння із цією граничною умовою такий:

$$w(x,t) - u(x,t) = x - ce^{r\cdot(t-t^*)} \qquad (17)$$

Тоді вартість європейського пут-опціону така:

$$u(x,t) = w(x,t) - x + ce^{r(t-t^*)}$$

Підставляючи вартість $w(x,t)$ із (13) і зауважуючи, що $1-N(d)$ дорівнює $N(-d)$, отримаємо:

$$u(x,t) = -xN(-d_1) + ce^{r(t-t^*)}N(-d_2) \tag{18}$$

Для підтвердження результатів цієї формули були виконані тести для великої кількості кол-опціонів. Ці тести показали, що актуальна ціна, за якою купуються і продаються опціони, відхиляється в певний систематичний спосіб від вартості, що передбачається за формулою. Покупці опціонів платять ціну, що вища за передбачену формулою. Автори опціонів отримують ціну, що приблизно на рівні передбаченої. Витрачають великі кошти на операції на опціонному ринку, і майже всі платяться покупцем опціонів. Також виявилося, що різниця між ціною, що платять покупці опціонів і вартістю, що отримана за формулою, є більшою для опціонів за акціями із великим ризиком [2, с. 653].

Після виведення формули для обчислення раціональної вартості опціону може постати питання: як побудувати стратегію поведінки на ринку, щоб знизити ризик банкрутства? Загалом на це питання відповісти складно, бо різноманіття комбінацій цінних паперів значно ускладнює математичний апарат розрахунків.

Відтак обмежимось розглядом лише комбінацій опціонів. Загалом такі позиції називаються спред-позиціями. Ці стратегії визначаються портфелем кол-опціонів (кол-спред) або портфелем пут-опціонів (пут-спред). Існує велике різноманіття таких спред-стратегій, проте надалі розглядатимемо лише вертикальний спред – купівля-продаж опціонів, що відрізняються лише ціною виконання. Наведемо найпоширеніші різновиди таких стратегій:

1) кол-спред “бик” (купити кол із нижчою ціною виконання і продати кол із вищою ціною виконання);
2) кол-спред “ведмідь” (купити кол із вищою ціною виконання і продати кол із нижчою ціною виконання);
3) пропорційний спред (купити кол із нижчою ціною виконання і продати два коли із вищою ціною виконання);
4) спред “метелик” (купити кол із найнижчою ціною виконання, продати два коли із вищою ціною виконання, купити кол із найвищою ціною виконання).

Ми розглядали лише чисті опціонні стратегії (тобто операції або із кол-опціонами, або із пут-опціонами). Розглянемо тепер приклад комбінованої позиції (операції як із кол-, так із пут-опціонами), а саме стредл. Ця стратегія полягає у комбінації кол-опціону і пут-опціону із однаковими цінами виконання. Прибуток портфеля можливий або при дуже стрімкому зростанні цін, або при їх стрімкому падінні, а при стабільності цін покупець такого портфеля не виграє. Дешевшою альтернативою є інша стратегія – стренгл, коли пут-опціон купується із меншою ціною виконання, ніж кол-опціон. Тобто список стратегій, що розглядаються, поповниться ще двома пунктами:

5) стредл (купити кол-опціон і пут-опціон із однаковими цінами виконання);
6) стренлг (купити кол-опціон із вищою ціною виконання, купити пут-опціон із нижчою ціною виконання);

Проаналізуємо ці стратегії з погляду оптимальності прибутку (відповідно буде і мінімізація збитків). Надалі будемо аналізувати лише сторону покупця. Природно, що його бажанням буде отримання максимального прибутку із мінімальним ризиком. Проте поняття мінімального ризику буде різним для різних людей залежно від індивідуальної схильності до ризику. Ті люди, які є ризикованішими (наприклад, ті, що грають в казино), виберуть стратегію, яка буде забезпечувати достатньо великий прибуток, навіть якщо він пов’язаний із великим ризиком. Інші люди, що не є схильними до ризику, нададуть перевагу стратегії, що буде забезпечувати досить-таки стабільний прибуток, навіть якщо він не буде дуже великим. Тобто покупці спершу намагатимуться вирішити для себе співвідношення “прибуток-ризик”, а тоді вибиратимуть певну стратегію. Взагалі кажучи (якщо грамотно створити хеджовану позицію, то портфель покупця буде практично безризиковим), різними комбінаціями стратегій можна понизити ризик, але розрахунок прибутку у такому разі буде вимагати складного математичного результату. Ми обмежимося лише аналізом стратегій, викладених вище.

Використавши формулу Блека-Шоулза, визначимо раціональні вартості. Початкові дані вважаємо такими:

1) ціна акції $x = 20$;
2) ціни виконання опціонів відповідно задаються далі;
3) дата виконання опціону $t^* = 1$;
4) ставка дисконту $r = 0{,}1$;
5) ставка дисперсії за прибутковістю акції $v^2 = 1$

(для розрахунку використана програма, написана на Maple V Release 5). Проте тут не будемо виписувати всі результатів, зазначимо лише “найкращий” та “найгірший” результати (з погляду прибутковості).

Відкрита позиція:

+20.05

-0.05

Спред (продати два кол-опціони):

+39.46

-20.05

Спред-“ведмідь”:

+40.65

-19.34

Пропорційний спред:

+38.75

-61.25

Спред-“метелик”:

+95.89

-64.12

(числа показують прибуток у гривнях)

Класифікуємо вибір позиції залежно від того, наскільки людина схильна до ризику. Результати запишемо в таблицю.

Схильність до ризику	Мала	Середня	Велика	Дуже велика
Вибір стратегії	Відкрита позиція	Спред-“ведмідь”	Спред-“метелик”	Стренгл або стредл

Лише при великій схильності до ризику індивіди вибиратимуть стредл-або стренгл-стратегії, оскільки прибуток у цих стратегіях можливий лише при стрімкому зростанні (падінні) ціни на акції.

Оскільки опціонний ринок України є порівняно новим і недостатньо вивченим, то вважаємо за доцільне враховувати вищенаведені результати як наближену рекомендацію щодо поведінки індивіда на ринку цінних паперів. Наближеність результатів пояснюється накладанням “ідеальних” умов на ринок та досить строгими початковими умовами для практичного розрахунку.

1. Мозговий О.М. Фондовий ринок України. – К., 1999. 2. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – №3. – P. 637 – 659. 3. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и американского типов. I. Дискретное время // Теория вероятностей и ее применение. – Том 3. – Выпуск 1. – 1994. – С.23 – 79. 4.Бондарев Б.В.,Шурко И.Л. Финансовая математика. – Донецк, 1998.

УДК 658.012.122

О.В. Коломієць
Національний університет "Львівська політехніка"

ПОБУДОВА ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ОБ’ЄДНАННЯ ПІДПРИЄМСТВ ІЗ СИНЕРГІЧНИМИ ВЗАЄМОЗВ’ЯЗКАМИ

Розглянуто основні етапи побудови динамічної моделі системи підприємств однієї галузі, що пов’язані між собою синергічними взаємозв’язками. На основі аналізу зовнішнього та внутрішнього середовищ вибрано основні змінні та параметри моделі. Розглянуто основні можливості застосування моделі під час вироблення стратегії та вибору оптимального режиму діяльності підприємств.

In this paper main stages of developing of a dynamic model of system of enterprises with synergetic interrelations are shown. On the basis of analysis of the external and internal environments selection of the main variables and parameters is performed. Main possibilities of the model application in the process of strategy development and optimum functioning regime definition of the enterprises are analysed.

Складний характер взаємодії структурних елементів економічної системи приводить до появи особливостей її динаміки, що істотно відрізняються від властивостей стійкого стаціонарного стану: регулярних (циклічних) та нерегулярних (хаотичних) коливань основних економічних показників, існування областей значень параметрів системи, для яких характер її динаміки є якісно відмінним. Сучасна теорія економічної динаміки [4, 5] виходить із того, що основою для вивчення закономірностей еволюції (часової динаміки) економічної системи є дослідження джерел її нестаціонарності. В цьому полягає відмінність сучасних синергетичних теорій еволюції від класичних теорій економічної динаміки. Класичні теорії динаміки базовими властивостями економічних систем вважають лінійність і стійкість, явно чи неявно розглядаючи процес еволюції системи як оборотний.

Математичне моделювання економічних систем є ефективним інструментом їх дослідження. Розглянуто економіко-математичну модель системи підприємств, яка включає