ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ЗАСОБИ АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

УДК 536.24

В.І. Гавриш, Д.В. Федасюк
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра програмного забезпечення

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ В ТЕРМОЧУТЛИВІЙ КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ СМУЗІ З ВНУТРІШНІМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА

Розглянуто стаціонарну задачу теплопровідності для термочутливої ізотропної в сенсі теплофізичних властивостей кусково-однорідної смуги, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла з тепловіддачею. Припускається, що на границях спряження відбувається ідеальний тепловий контакт. Запропонована методика розв'язування цієї задачі та її застосування для трьохелементної смуги з конкретною залежністю коефіцієнтів теплопровідності від температури.

Ключові слова – теплопровідність, кусково-однорідна смуга, моделювання

The fixed problem of thermal conduction for the thermosensitive isotropic, in the sense of thermophysical properties, piecewise homogeneous band (strip) which heats at internal thermal source with heat dissipation has been considered. It is supposed that on the contact surface the ideal thermal contact takes place. The methodology of this problem solution and its application for the three-element band (strip) with the specific dependence of the thermal-conductivity coefficients on temperature has been offered.

Keywords – thermal conduction, three-element band, modeling

Вступ

Розроблення методики розв'язування нелінійних крайових задач математичної фізики є актуальною, оскільки в результаті отримується точніший розв'язок якогось реального фізичного явища. Процеси теплопровідності відбуваються у багатьох технологічних процесах, зокрема як при виготовленні, так і в результаті експлуатації елементів та окремих вузлів конструкцій мікроелектронних пристроїв. Оскільки температурні градієнти, що виникають при цьому, здатні викликати достатні температурні напруження, внаслідок чого можуть виникнути дефекти в конструкціях, або відбутися їхнє повне руйнування, важливим є врахування залежності теплофізичних параметрів матеріалів від температури. Загальні рівняння теплопровідності для термочутливих кусково-однорідних тіл отримано в працях [1, 2]. У [3] досліджено температурне поле для термочутливого багатошарового півпростору, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла.

Постановка задачі

Розглянемо ізотропну в сенсі теплофізичних характеристик кусково-однорідну термочутливу смугу, яка складається з n однорідних елементів, що відрізняються геометричними та теплофізичними параметрами. Ця система належить до прямокутної декартової системи координат Oxy із початком на одному з його країв (рис. 1). У j-му $(j=\overline{2,n-1})$ елементі смуги діють як рівномірно розподілені в прямокутнику з площею $2h\cdot(y_k - y_{k-1})$ внутрішні джерела тепла потужністю q_0. На прямих спряженнях $y = y_i \quad (i = \overline{1, n-1})$ виконуються умови ідеального теплового контакту, а на краях смуги $K_0 = \{(x,0): |x| < \infty\}$, $K_n = \{(x, y_n): |x| < \infty\}$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c.

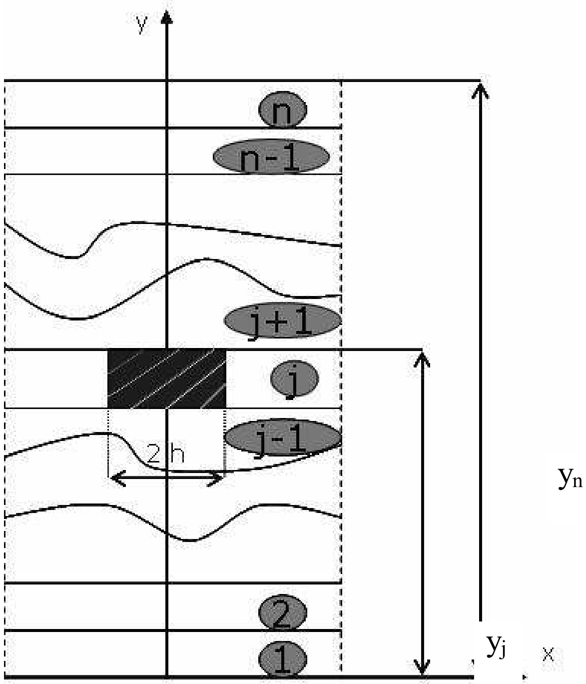

Рис. 1. Термочутлива кусково-однорідна смуга

Частково лінеаризована гранична задача

Розподіл стаціонарного температурного поля $t(x, y)$ в кусково-однорідній термочутливій смузі можна отримати, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x, y, t)\frac{\partial t}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x, y, t)\frac{\partial t}{\partial y}\right] = -q_0 \cdot N(x, h) \cdot N(y, y_{j-1}) \tag{1}$$

із такими граничними умовами:

$$\lambda_1(t) \cdot \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_0 \cdot \left(t|_{y=0} - t_c\right), \lambda_n(t) \cdot \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=y_n} = \alpha_n \cdot \left(t_c - t|_{y=y_n}\right), t|_{|x|\to\infty} = 0, \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty} = 0, \tag{2}$$

де $\lambda(x, y, t) = \lambda_1(t) + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[\lambda_{k+1}(t) - \lambda_k(t)\right] \cdot S_-(y - y_k)$ – коефіцієнт теплопровідності кусково-однорідної смуги; $\lambda_k(t)$ – коефіцієнт теплопровідності k-го елемента смуги; α_0, α_n – коефіцієнти тепловіддачі з країв K_0 та K_n смуги відповідно; $N(x, h) = S_-(x + h) - S_+(x - h)$; $N(y, y_{j-1}) = S_-(y - y_{j-1}) - S_-(y - y_j); S_\pm(\zeta)$ – асиметричні одиничні функції.

Введемо функцію

$$\vartheta = \int\limits_0^{t(x,y)} \lambda_1(\zeta)d\zeta + \sum_{k=1}^{n-1} S_-(y - y_k) \cdot \int\limits_{t(x,y_k)}^{t(x,y)} [\lambda_{k+1}(\zeta) - \lambda_k(\zeta)]d\zeta\ , \tag{3}$$

продиференціювавши яку по x та y, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \lambda(t,y)\cdot\frac{\partial t}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left[\lambda_{k+1}(t)-\lambda_k(t)\right]\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right\}\Bigg|_{y=y_k}\cdot S_-(y-y_k),\\
&\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \lambda(t,y)\frac{\partial t}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Із врахуванням виразів (4) рівняння (1) запишеться так:

$$\Delta\vartheta = -\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\lambda_{k+1}(t)-\lambda_k(t)\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right]\Bigg|_{y=y_k}\cdot S_-(y-y_k)\right\} - q_0\cdot N(x,h)\cdot N(y,y_{j-1}). \tag{5}$$

Використавши співвідношення (3), граничні умови (2) запишемо у вигляді

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_0\cdot\left(t\big|_{y=0}-t_c\right), \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=y_n} = \alpha_n\cdot(t_c - t\big|_{y=y_n}), \vartheta\big|_{|x|\to\infty}=0, \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{|x|\to\infty}=0. \tag{6}$$

Отже, нелінійна гранична задача (1), (2) із використанням введеної функції (3) зведена до частково лінеаризованої граничної задачі (5), (6).

Цілком лінеаризована гранична задача

Апроксимуємо функції $t(x,0), t(x,y_k)$ виразами

$$\begin{aligned}
t(x,0) &= t_1^{(0)} + \sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)})\cdot S_-(x-x_l),\\
t(x,y_k) &= t_1^{(k)} + \sum_{l=1}^{m-1}(t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)})\cdot S_-(x-x_l),
\end{aligned} \tag{7}$$

де $x_l \in \left]0;x_*\right[; x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1}; m$ – кількість розбиттів інтервалу $\left]0;x_*\right[; x_*$ – значення абсциси, для якої температура практично дорівнює нулеві (знаходиться з відповідної лінійної задачі); $t_l^{(k)}$ – невідомі апроксимаційні значення температури.

Підставивши вирази (7) у рівняння (5) та граничні умови (6) на краях K_0, K_n смуги, одержимо лінійну граничну задачу для знаходження функції ϑ

$$\begin{aligned}
\Delta\vartheta = &-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)}\right)\cdot\left[\lambda_{k+1}(t_l^{(k)}) - \lambda_k(t_l^{(k)})\right]\cdot\delta'_-(x-x_l)\cdot S_-(y-y_k) -\\
&- q_0\cdot S_-(h-x)\cdot N(y,y_{j-1}),
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha_0\cdot\left[t_1^{(0)} + \sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)}\right)\cdot S_-(x-x_l) - t_c\right],\\
&\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=y_n} = -\alpha_n\cdot\left[t_1^{(n)} + \sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(n)} - t_l^{(n)}\right)\cdot S_-(x-x_l) - t_c\right],\\
&\vartheta\big|_{x\to\infty} = 0; \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x\to\infty} = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

де $\delta(\zeta)$ – асиметрична дельта-функція Дірака.

Наближений аналітичний розв'язок задачі (8), (9)

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до граничної задачі (8), (9), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2\overline{\vartheta}}{dy^2}-\xi^2\overline{\vartheta}=i\cdot\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\left\{\xi\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}\cdot\left(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{(k)}\right)\cdot\left[\lambda_{k+1}(t_l^{(k)})-\lambda_k(t_l^{(k)})\right]\cdot S_-(y-y_k)+\right.$$
$$\left.+q_0\cdot\frac{e^{i\xi h}}{\xi}\cdot N(y,y_{j-1})\right\} \tag{10}$$

і таких граничних умов:

$$\left.\frac{d\overline{\vartheta}}{dy}\right|_{y=0}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{i\alpha_0}{\xi}\cdot\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(0)}-t_l^{(0)}\right)\cdot e^{i\xi x_l},$$
$$\left.\frac{d\overline{\vartheta}}{dy}\right|_{y=y_n}=-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{i\alpha_n}{\xi}\cdot\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(n)}-t_l^{(n)}\right)\cdot e^{i\xi x_l}, \tag{11}$$

де $\overline{\vartheta}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}\vartheta dx$ – трансформанта функції ϑ ; $i=\sqrt{-1}$.

Загальний розв'язок рівняння (10) має вигляд

$$\overline{\vartheta}=C_1e^{\xi y}+C_2e^{-\xi y}-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\frac{i}{\xi}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}\cdot\left(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{(k)}\right)\cdot\left[\lambda_{k+1}(t_l^{(k)})-\lambda_k(t_l^{(k)})\right]\cdot\left(1-ch\xi\left(y-y_k\right)\right)\cdot S_-(y-y_k)+\right.$$
$$\left.+\frac{q_0\cdot e^{i\xi h}}{\xi^2}\cdot\left[N(y,y_{j-1})-ch\xi(y-y_{j-1})\cdot S_-(y-y_{j-1})+ch\xi(y-y_j)\cdot S_-(y-y_j)\right]\right\}.$$

Тут C_1,C_2- сталі інтегрування.

Використавши граничні умови (11), отримаємо такий частковий розв'язок задачі (10), (11):

$$\overline{\vartheta}=-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\frac{i}{\xi}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}\cdot\left(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{k)}\right)\cdot\left[\lambda_{k+1}(t_l^{k)})-\lambda_k(t_l^{(k)})\right]\cdot\left[\left(1-ch\xi\left(y-y_k\right)\right)\cdot S_-(y-y_k)+ch\xi y\cdot\frac{sh\xi(y_n-y_k)}{sh\xi y_n}\right]+\right.$$
$$+\frac{q_0\cdot e^{i\xi h}}{\xi^2}\cdot\left[N(y,y_{j-1})-ch\xi(y-y_{j-1})\cdot S_-(y-y_{j-1})+ch\xi(y-y_j)\cdot S_-(y-y_j)+ch\xi y\cdot\frac{sh\xi(y_n-y_{j-1})-sh\xi(y_n-y_j)}{sh\xi y_n}\right]+$$
$$\left.+\frac{1}{\xi sh\xi y_n}\cdot\left[\alpha_n\cdot\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}\cdot\left(t_{l+1}^{(n)}-t_l^{(n)}\right)\cdot ch\xi y+\alpha_0\cdot\sum_{l=1}^{m-1}e^{i\xi x_l}\cdot\left(t_{l+1}^{(0)}-t_l^{(0)}\right)\cdot ch\xi(y-y_n)\right]\right\}. \tag{12}$$

Застосувавши обернене перетворення Фур'є до співвідношення (12), знаходимо вираз для функції ϑ

$$\vartheta=-\frac{1}{\pi}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(k)}-t_l^{(k)}\right)\cdot\left[\lambda_{k+1}(t_l^{(k)})-\lambda_k(t_l^{(k)})\right]\cdot\int_0^{\infty}\frac{\sin\xi(x-x_l)}{\xi}\cdot\left[\left(1-\right.\right.\right.$$
$$\left.-ch\xi(y-y_k)\right)\cdot S_-(y-y_k)+\frac{sh\xi(y_n-y_k)}{sh\xi y_n}\cdot ch\xi y\Big]d\xi+$$
$$+q_0\cdot\int_0^{\infty}\frac{\sin\xi(x-h)}{\xi^3}\cdot\left(N(y,y_{j-1})-ch\xi(y-y_{j-1})\cdot S_-(y-y_{j-1})+ch\xi(y-y_j)\cdot S_-(y-y_j)+ch\xi y\cdot\frac{sh\xi(y_n-y_{j-1})-sh\xi(y_n-y_j)}{sh\xi y_n}\right)d\xi+$$
$$\left.+\alpha_n\cdot\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(n)}-t_l^{(n)}\right)\cdot\int_0^{\infty}\frac{\sin\xi(x-x_l)}{\xi^2\cdot sh\xi y_n}\cdot ch\xi y\cdot d\xi+\alpha_0\cdot\sum_{l=1}^{m-1}\left(t_{l+1}^{(0)}-t_l^{(0)}\right)\cdot\int_0^{\infty}\frac{\sin\xi(x-x_l)}{\xi^2\cdot sh\xi y_n}\cdot ch\xi\left(y-y_n\right)\cdot d\xi\right\}. \tag{13}$$

Часткові приклади та аналіз отриманих результатів.

Як приклад, розглянемо смугу, яка складається з трьох елементів із внутрішніми джерелами тепла, що діють у другому елементі. У цьому випадку n=3, j=2. У багатьох практичних випадках [4,5] існує така залежність коефіцієнтів теплопровідності від температури:

$$\lambda = \lambda^0 t^3 \quad (\lambda^0 - const).$$

Тоді із використанням (3), (13), отримаємо формули для визначення температури t

в області $0 \le y < y_1$

$$t = \sqrt[4]{\frac{4\vartheta}{\lambda_1^0}},$$

в області $y_1 \le y < y_2$

$$t = \sqrt[4]{\frac{4}{\lambda_2^0}\vartheta + t^4\Big|_{y=y_1} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_2^0}\right)},$$

в області $y_2 \le y < y_3$

$$t = \sqrt[4]{\frac{4}{\lambda_3^0}\vartheta + t^4\Big|_{y=y_2} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_2^0}{\lambda_3^0}\right) + t^4\Big|_{y=y_1} \cdot \frac{\lambda_2^0 - \lambda_1^0}{\lambda_3^0}},$$

де $t^4\Big|_{y=y_1} = \dfrac{4}{\lambda_1^0} \cdot \vartheta\Big|_{y=y_1}$; $t^4\Big|_{y=y_2} = \dfrac{4}{\lambda_2^0} \cdot \vartheta\Big|_{y=y_2} + \left(1 - \dfrac{\lambda_1^0}{\lambda_2^0}\right) \cdot t^4\Big|_{y=y_1}$.

На основі числового аналізу встановлено, що достатньо вибрати кількість розбиттів m інтервалу $]0; x_*[$, такою, що дорівнює дев'яти. Числові розрахунки виконано для таких матеріалів: 1-й шар – вольфрам, 2-й – молібден, 3-й – кераміка ВК-94-1, які показують, що врахування наведеної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури приводить до зменшення температурного поля порівняно з нетермочутливою системою (теплофізичні параметри не залежать від температури) на 5% для вибраних матеріалів.

У подальшому автори запропонують методику лінеаризації задачі теплопровідності для кусково-однорідної смуги, в одному із елементів якої знаходиться чужорідне тепловиділяюче включення прямокутної форми.

1. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 386 с. 2. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с. 3. Коляно Ю.М. Температурное поле в термочувствительном многослойном полупространстве / Ю.М. Коляно, В.А. Волос, Е.Г. Иваник, В.И. Гаврыш // Инж.-физ. журн. – 1994. – 66, №2. – С. 226 – 234. 4. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 376 с. 5. Берман Р. Теплопроводность твердых тел. – М.: Мир, 1979 . – 288 с.