ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 871, 2017, с. 33–39

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 871, 2017, p. 33–39

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

В. А. Власов

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, 79001, Львів, Україна

(Отримано 3 травня 2017 р.)

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для двовимірного параболічного рівняння зі слабким степеневим виродженням. Невідомий залежний від часу старший коефіцієнт рівняння.

Ключові слова: обернена задача, функція Гріна, слабке степеневе виродження, параболічне рівняння.

2000 MSC: 35R30

УДК: 517.95

Вступ

У цій роботі вивчено обернену задачу для параболічного рівняння з виродженням у прямокутній області. Прямі задачі такого типу виникають як математичні моделі процесів опріснення морських вод, руху рідини у пористому середовищі, поведінки фінансових ринків тощо [1–3]. Такі задачі вже вивчені достатньо повно (див., наприклад, [4]).

Обернені задачі виникають у тих випадках, коли деякі параметри цих процесів невідомі. Дослідження обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь з виродженням започатковано в працях М. І. Іванчова та Н. В. Салдіної [5–8]. Пізніше окремі результати було перенесено на області з вільними межами [10], [11]. Частинний випадок оберненої задачі для двовимірного рівняння теплопровідності з виродженням розглянуто в [12].

У цій роботі встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для двовимірного параболічного рівняння з виродженням. Невідомий залежний від часу старший коефіцієнт, а рівняння слабко вироджується, якщо $t \to 0$, за степеневим законом. Локальне існування класичного розв'язку вказаної задачі доведено за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Єдиність розв'язку встановлено з використанням властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

I. Існування розв'язку

В області $Q_T = (0,h) \times (0,l) \times (0,T)$ розглянемо обернену задачу знаходження невідомого коефіцієнта $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$ у параболічному рівнянні

$$u_t = t^{\beta} a(t)\Delta u + b_1(x,y,t)u_x + b_2(x,y,t)u_y + \\ + c(x,y,t)u + f(x,y,t) \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D} := [0,h] \times [0,l], \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\begin{aligned} & u(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u(h,y,t) = \mu_2(y,t), \\ & (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \\ & u_y(x,0,t) = \nu_1(x,t), \quad u_y(x,l,t) = \nu_2(x,t), \\ & (x,t) \in [0,h] \times [0,T] \end{aligned} \qquad (3)$$

та умовою перевизначення

$$a(t)u_x(0,y_0,t) = \varkappa(t), \quad t \in [0,T], \qquad (4)$$

де $0 < \beta < 1$ і $0 < y_0 < l$ – деяка фіксована точка.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

(A1) $\varphi \in C^1(\overline{D})$, $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times [0,T])$, $\nu_i \in C^{1,0}([0,h] \times [0,T])$, $b_i, c, f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $i = 1,2$, $\varkappa \in C[0,T]$;

(A2) $\varphi_x(x,y) > 0$, $(x,y) \in \overline{D}$, $\varkappa(t) > 0$, $t \in [0,T]$;

(A3) $\mu_1(y,0) = \varphi(0,y)$, $\mu_2(y,0) = \varphi(h,y)$, $y \in [0,l]$, $\nu_1(x,0) = \varphi_y(x,0)$, $\nu_2(x,0) = \varphi_y(x,l)$, $x \in [0,h]$, $\mu_{1y}(0,t) = \nu_1(0,t)$, $\mu_{1y}(l,t) = \nu_2(0,t)$, $\mu_{2y}(0,t) = \nu_1(h,t)$, $\mu_{2y}(l,t) = \nu_2(h,t)$, $t \in [0,T]$.

Тоді для $t \in [0,T_0]$, *де* $T_0 \in (0,T]$ *визначається вихідними даними, існує розв'язок* (a,u) *задачі* (1)–(4) *із класу* $C[0,T_0] \times (C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0}))$, *де* $a(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$.

□ *Доведення.* Тимчасово припустимо, що функція $a(t) > 0, t \in [0,T]$ відома. Зведемо задачу (1)–(3) до інтегро-диференціального рівняння

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) + \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) \times \\ \times (b_1(\xi,\eta,\tau)v_1(\xi,\eta,\tau) + b_2(\xi,\eta,\tau)v_2(\xi,\eta,\tau) + \\ + +c(\xi,\eta,\tau)u(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta d\tau, \qquad (5)$$

де похідні $u_x(x,y,t)$ та $u_y(x,y,t)$ позначено через v_1 та v_2, відповідно, і

$$u_0(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\times\tau^\beta a(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau.$$

Через $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$, $i=1,2$ позначено функції Ґріна для рівняння теплопровідності

$$u_t=t^\beta a(t)\Delta u+f(x,y,t)$$

з крайовими умовами i-го роду за змінною x і j-го роду за змінною y. Вони визначаються рівністю

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}$$
$$\times\times\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\Big(\exp\big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)+$$
$$+(-1)^i\exp\big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)\Big)\times$$
$$\times\Big(\exp\big(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)+$$
$$+(-1)^j\exp\big(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\big)\Big)\Bigg),\ i,j=1,2,$$
$$\text{де }\theta(t)=\int\limits_0^t\tau^\beta a(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Зауважимо, що функцію Ґріна G_{ij} можна подати у вигляді добутку двох одновимірних функцій Ґріна, тобто $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=G_i(x,t,\xi,\tau)G_j(y,t,\eta,\tau)$.

Використовуючи властивості функцій Ґріна та інтегруючи частинами, з (5) обчислимо v_1 та v_2:

$$v_1(x,y,t)=u_{0x}(x,y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times(b_1(\xi,\eta,\tau)v_1(\xi,\eta,\tau)+b_2(\xi,\eta,\tau)v_2(\xi,\eta,\tau)+$$
$$+c(\xi,\eta,\tau)u(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta d\tau, \tag{7}$$

$$v_2(x,y,t)=u_{0y}(x,y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times(b_1(\xi,\eta,\tau)v_1(\xi,\eta,\tau)+b_2(\xi,\eta,\tau)v_2(\xi,\eta,\tau)+$$
$$+c(\xi,\eta,\tau)u(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta d\tau, \tag{8}$$

де

$$u_{0x}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-$$
$$-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)\times$$
$$\times(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \tag{9}$$

$$u_{0y}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\eta(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{11\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\eta(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{10}$$

Отримали систему інтегральних рівнянь (5), (7), (8), еквівалентну прямій задачі (1)–(3). Для приєднання до цієї системи рівняння, що отримується з умови перевизначення (4), оцінимо знизу $v_1(0,y_0,t)$. Розглянемо перший інтеграл з рівності для u_{0x}. Безпосереднім обчисленням встановлюємо рівність

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi=1. \tag{11}$$

Застосовуючи її та умови **(A2)**, отримаємо

$$\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta \geq$$
$$\geq \min_{\overline{D}}\varphi_x(x,y) := M_1 > 0.$$

Беручи до уваги, що всі інші інтеграли в (7) прямують до нуля, якщо $t\to+0$, встановлюємо існування такого числа $T_1\in(0,T]$, що на проміжку $[0,T_1]$ виконуватиметься нерівність

$$\Big|\int_0^t\int_0^l G_{22}(0,y_0,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-$$
$$-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau - \int_0^t\int_0^l G_{22}(0,y_0,t,0,\eta,\tau)(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-$$
$$-\tau^\beta a(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^h G_{22}(0,y_0,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_{22}(0,y_0,t,\xi,l,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{22}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(b_1(\xi,\eta,\tau)v_1(\xi,\eta,\tau)+$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(b_1(\xi,\eta,\tau)v_1(\xi,\eta,\tau)+$$
$$+b_2(\xi,\eta,\tau)v_2(\xi,\eta,\tau)+$$
$$+c(\xi,\eta,\tau)u(\xi,\eta,\tau))d\xi d\eta d\tau\Big| \leq \frac{M_1}{2}. \qquad (12)$$

Тоді

$$v_1(0,y_0,t)\geq\frac{M_1}{2}>0,\quad t\in[0,T_1], \qquad (13)$$

і умову (4) можна подати у вигляді

$$a(t)=\frac{\varkappa(t)}{v_1(0,y_0,t)},\quad t\in[0,T_1]. \qquad (14)$$

Отже, задачу (1)–(4) зведено до системи рівнянь (5), (7), (8), (14), у якій час належить звуженому проміжку $[0,T_1]$. Легко переконатись, що у певному сенсі ця система еквівалентна оберненій задачі (1)–(4). Справді, якщо $(a(t),u(x,y,t))$ – розв'язок задачі (1)–(4) з класу $C[0,T_1]\times(C^{2,1}(Q_{T_1})\cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_1}))$, то зі способу отримання системи (5), (7), (8), (14) функції $(a(t),u(x,y,t),v_1{=}u_x(x,y,t),v_2{=}u_y(x,y,t))$ будуть неперервним розв'язком цієї системи. З іншого боку, якщо $(a(t),u(x,y,t),v_1(x,y,t),v_2(x,y,t))$ – неперервний розв'язок системи рівнянь (5), (7), (8), (14), то, диференціюючи послідовно рівняння (5) за змінними x та y, переконуємось у тому, що $v_1(x,y,t)\equiv u_x(x,y,t)$, $v_2(x,y,t)\equiv u_y(x,y,t)$. Тоді з рівняння (5) випливатиме, що $u(x,y,t)$ належить до класу $C^{2,1}(Q_{T_1})\cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_1})$ і задовольняє умови (1)–(3) для будь-якої функції $a(t)>0$ з класу $C[0,T_1]$. Виконання умови (4) очевидне внаслідок рівняння (14).

Доведемо існування неперервного розв'язку системи рівнянь (5), (7), (8), (14), використовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Знайдемо апріорні оцінки розв'язків цієї системи. Для оцінки $a(t)$ зверху використаємо рівняння (14) та нерівність (13):

$$a(t)\leq\frac{2\max\limits_{[0,T]}\varkappa(t)}{M_1}:=A_1<\infty,\quad t\in[0,T_1]. \qquad (15)$$

Перейдемо до оцінки $a(t)$ знизу. Введемо позначення: $U(t):=\max\limits_{(x,y)\in\overline{D}}|u(x,y,t)|$, $V_k(t):=\max\limits_{(x,y)\in\overline{D}}|v_k(x,y,t)|$, $k\in\{1,2\}$. Використовуючи (11) та оцінки функцій Гріна [13]

$$G_k(x,t,\xi,\tau)\leq C_1+\frac{C_2}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},\quad k\in\{1,2\},$$
$$\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi\leq 1,$$

наведемо приклади оцінювання інтегралів, які входять до u_0:

$$\Big|\int_0^t\int_0^l G_{12\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^\beta a(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau\Big|\leq$$
$$\leq\max_{[0,l]\times[0,T]}|\mu_1(y,t)|\int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau\times$$
$$\times\int_0^l G_2(y,t,\eta,\tau)d\eta\leq C_3,$$
$$\Big|\int_0^t\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau\Big|\leq$$
$$\leq\max_{[0,h]\times[0,T]}|\nu_1(x,t)|\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\tau^\beta a(\tau)d\tau\times$$
$$\times\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi\leq$$
$$\leq C_4+C_5\int_0^t\frac{\tau^\beta a(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\leq C_4+C_6\sqrt{\theta(t)}\leq C_7.$$

Зауважимо, що тут використано (15). Отже,

$$|u_0(x,y,t)|\leq M_0<\infty,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_{T_1},$$

де стала M_1 визначається вихідними даними. З аналогічних міркувань знаходимо

$$|u_{0y}(x,y,t)| \le M_1 < \infty, \quad |u_{0x}(x,y,t)| \le C_8 + \\ + C_9 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_{T_1}.$$

Використовуючи знайдені оцінки, з рівнянь (5), (7), (8) отримаємо

$$U(t) \le C_{10} + C_{11} \int_0^t (V_1(\tau)+V_2(\tau)+U(\tau))\,d\tau, \\ t \in [0,T_1], \tag{16}$$

$$V_1(t) \le C_{12} + C_{13} \int_0^t \frac{(V_1(\tau)+V_2(\tau)+U(\tau)+1)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \\ t \in [0,T_1], \tag{17}$$

$$V_2(t) \le C_{14} + C_{15} \int_0^t \frac{(V_1(\tau)+V_2(\tau)+U(\tau))d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \\ t \in [0,T_1]. \tag{18}$$

Домножимо і поділимо підінтегральний вираз у (16) на $\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}$. Використавши (15), матимемо

$$U(t) \le C_{10} + C_{16} \int_0^t \frac{V_1(\tau)+V_2(\tau)+U(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau, t \in [0,T_1]. \tag{19}$$

Додамо нерівності (17)–(19). Ввівши позначення $W(t) := U(t)+V_1(t)+V_2(t)+1$, прийдемо до нерівності

$$W(t) \le C_{17} + C_{18} \int_0^t \frac{W(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau, \quad t \in [0,T_1]. \tag{20}$$

Із умови перевизначення (4) маємо

$$a(t)W(t) \ge \varkappa(t)$$

або

$$1 \le \frac{a(t)W(t)}{\varkappa(t)}$$

Підставимо отриману нерівність у (20) :

$$W(t) \le C_{19} + C_{20} \int_0^t \frac{a(\tau)W^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau. \tag{21}$$

Піднесемо обидві частини (21) до квадрата і застосуємо нерівність Коші–Буняковського та оцінку (15):

$$W^2(t) \le 2C_{19}^2 + 2C_{20}^2 \int_0^t \frac{A_1 W^4(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau \times \\ \times \int_0^t \frac{a(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau. \tag{22}$$

Оцінимо останній інтеграл в цій нерівності. Беручи до уваги нерівність

$$\theta(t) \le \frac{t^{\beta+1}}{\beta+1} A_1, \quad \text{тобто} \quad \left(\frac{\theta(t)(\beta+1)}{A_1}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \le t^\beta,$$

матимемо

$$\int_0^t \frac{a(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau \le C_{21} \int_0^t \frac{a(\tau)\tau^\beta d\tau}{(\theta(\tau))^{\frac{\beta}{\beta+1}} \sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Після заміни $z = \dfrac{\theta(\tau)}{\theta(t)}$ одержимо

$$\int_0^t \frac{a(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau \le C_{22} (\theta(t))^{\frac{1-\beta}{2(\beta+1)}} \int_0^1 \frac{dz}{z^{\frac{\beta}{\beta+1}} \sqrt{1-z}}.$$

Оскільки $\dfrac{\beta}{\beta+1} < \dfrac{1}{2}$ для $0 < \beta < 1$, то

$$\int_0^t \frac{a(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau \le C_{23} (\theta(t))^{\frac{1-\beta}{2(\beta+1)}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} \le C_{24}.$$

Тоді нерівність (22) зведеться до вигляду:

$$W^2(t) \le C_{25} + C_{26} \int_0^t \frac{W^4(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} d\tau.$$

Звідси знаходимо

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)W^2(\sigma)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} d\sigma \le C_{27} \int_0^t \frac{a(\sigma)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} d\sigma + \\ + C_{28} \int_0^t \frac{a(\sigma)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} d\sigma \int_0^\sigma \frac{W^4(\tau)}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}} d\tau.$$

В останньому доданку цієї нерівності змінимо порядок інтегрування та виконаємо заміну $z = \dfrac{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}{\theta(t)-\theta(\tau)}$. Використовуючи рівність

$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma)\sigma^\beta d\sigma}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi,$$

матимемо

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)W^2(\sigma)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} d\sigma \le C_{29} + C_{30} \int_0^t \frac{W^4(\tau)d\tau}{\tau^\beta}.$$

Підставивши цю оцінку в (21), одержимо:

$$W(t) \le C_{31} + C_{32} \int_0^t \frac{W^4(\tau)d\tau}{\tau^\beta}. \tag{23}$$

Позначимо праву частину нерівності через $W_1(t)$. Диференціюючи її, знаходимо

$$W_1'(t) = C_{32}\frac{W^4(t)}{t^\beta} \le C_{32}\frac{W_1^4(t)}{t^\beta}.$$

Розв'язавши цю нерівність, прийдемо до оцінки

$$W(t) \le \frac{C_{32}(1-\beta)^{\frac{1}{3}}}{(1-\beta-3C_{31}^3C_{32}t^{1-\beta})^{\frac{1}{3}}}, \quad t\in[0,T_0],$$

де $T_0 \in (0,T_1]$ задовольняє нерівність $1-\beta-3C_{31}^3C_{32}T_0^{1-\beta}>0$. Отже,

$$W(t)\le M_3, \quad t\in[0,T_0].$$

Звідси випливають оцінки

$$|v_1(x,y,t)|\le M_3,\ |v_2(x,y,t)|\le M_3,$$
$$|u(x,y,t)|\le M_3, \quad (x,y,t)\in\overline{Q}_{T_0}. \tag{24}$$

Застосовуючи їх до (14), отримаємо оцінку знизу для $a(t)$:

$$a(t)\ge A_0>0, \quad t\in[0,T_0], \tag{25}$$

де A_0 визначається вихідними даними.

Систему рівнянь (5), (7), (8), (14) подамо у вигляді

$$(a,u,v_1,v_2)=P(a,u,v_1,v_2), \tag{26}$$

де оператор P визначається правими частинами рівнянь (5), (7), (8), (14). З оцінок (15), (24), (25) випливає, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}=\Big\{(a,u,v_1,v_2)\in C[0,T_0]\times\big(C(\overline{Q}_{T_0})\big)^3:\ A_0\le a(t)\le A_1,\ |u(x,y,t)|\le M_3,\ \frac{M_1}{2}\le v_1(x,y,t)\le M_3,\ |v_2(x,y,t)|\le M_3\Big\}$ в себе. Те, що цей оператор цілком неперервний, показано в [8]. Тому за теоремою Шаудера існує нерухома точка оператора P, а, отже, і неперервний розв'язок системи рівнянь (5), (7), (8), (14). Теорему 1 доведено. ■

II. Єдиність розв'язку

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

(A4) $\varphi\in C^2(\overline{D})$, $b_i,c,f\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\mu_i\in C^{2,1}([0,l]\times(0,T])\cap C^{1,0}([0,l]\times[0,T])$, $\nu_i\in C^{2,1}([0,h]\times(0,T])\cap C^{1,0}([0,h]\times[0,T])$, *існують скінченні границі* $\lim\limits_{t\to+0}t^\beta\mu_{iyy}(y,t)$, $\lim\limits_{t\to+0}t^\beta\nu_{ixx}(x,t)$, $i\in\{1,2\}$;

(A5) $\varkappa(t)\ne0, \quad t\in[0,T]$.

Тоді розв'язок $(a(t),u(x,y,t))$ *задачі* (1)–(4) *єдиний в класі* $C([0,T])\times C^{2,1}(\overline{D}\times(0,T])\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t)>0$, $t\in[0,T]$.

□ *Доведення.* Нехай (a_k,u_k), $k\in\{1,2\}$ – два розв'язки задачі (1)–(4). Для їх різниці $a:=a_1-a_2$, $u:=u_2-u_2$ матимемо задачу

$$u_t=t^\beta a_1(t)\Delta u+t^\beta a(t)\Delta u_2+b_1(x,y,t)u_x+$$
$$+b_2(x,y,t)u_y+c(x,y,t)u, \quad (x,y,t)\in Q_T, \tag{27}$$

$$u(x,y,0)=0, \quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{28}$$

$$u(0,y,t)=u(h,y,t)=0, \quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T],$$
$$u_y(x,0,t)=u_y(x,l,t)=0, \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T], \tag{29}$$

$$a_1(t)u_x(0,y_0,t)=-a(t)u_{2x}(0,y_0,t), \quad t\in[0,T]. \tag{30}$$

Із використанням функції Ґріна $\tilde G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ для параболічного рівняння (27) задача (27)–(30) зведеться до інтегрального рівняння

$$a(t)=-\frac{a_1(t)}{u_{2x}(0,y_0,t)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h\tilde G_{12x}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times\tau^\beta a(\tau)\Delta u_2(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \quad t\in[0,T]. \tag{31}$$

Зауважимо, що з умови **(A5)** випливає, що $u_{2x}(0,y_0,t)\ne0$. Оцінимо ядро цього рівняння. Позначимо через $G_{12}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ функцію Ґріна задачі (2), (3) для рівняння теплопровідності

$$u_t=t^\beta a_2(t)\Delta u.$$

Використовуючи для зображення u_2 формулу, аналогічну (5), та диференціюючи її, знаходимо

$$u_{2xx}(x,y,t)=u_{02xx}(x,y,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12\xi}^*(x,y,t,h,\eta,\tau)\times$$
$$\times\Big(b_1(h,\eta,\tau)u_{2\xi}(h,\eta,\tau)+b_2(h,\eta,\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)+$$
$$+c(h,\eta,\tau)\mu_2(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12\xi}^*(x,y,t,0,\eta,\tau)\times$$
$$\times\Big(b_1(0,\eta,\tau)u_{2\xi}(0,\eta,\tau)+b_2(0,\eta,\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)+$$
$$+c(0,\eta,\tau)\mu_1(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12\xi}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times(b_1(\xi,\eta,\tau)u_{2\xi\xi}+b_2(\xi,\eta,\tau)u_{2\eta\xi}+(b_{1_\xi}(\xi,\eta,\tau)+$$
$$+c(\xi,\eta,\tau))u_{2\xi}+b_{2_\xi}(\xi,\eta,\tau)u_{2\eta}+c_\xi(\xi,\eta,\tau)u_2)d\xi d\eta d\tau, \tag{32}$$

$$u_{2yy}(x,y,t)=u_{02yy}(x,y,t)-\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12\eta}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times(b_1(\xi,\eta,\tau)u_{2\xi\eta}+b_2(\xi,\eta,\tau)u_{2\eta\eta}+(b_{2_\eta}(\xi,\eta,\tau)+$$
$$+c(\xi,\eta,\tau))u_{2\eta}+b_{1_\eta}(\xi,\eta,\tau)u_{2\xi}+c_\eta(\xi,\eta,\tau)u_2)d\xi d\eta d\tau, \tag{33}$$

де

$$u_{02xx}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}^*(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12\xi}^*(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2\tau}(\eta,\tau)-$$
$$-\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)-f(h,\eta,\tau))d\eta d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12\xi}^*(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{1\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\times$$
$$\times\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)-f(0,\eta,\tau))d\eta d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}^*(x,y,t,\xi,l,\tau)\times$$
$$\times\tau^\beta a_2(\tau)\nu_{2\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}^*(x,y,t,\xi,0,\tau)\tau^\beta a_2(\tau)\nu_{1\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12\xi}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,$$

$$u_{02yy}(x,y,t)=\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}^*(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12\xi}^*(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12\xi}^*(x,y,t,0,\eta,\tau)\tau^\beta a_2(\tau)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}^*(x,y,t,\xi,l,\tau)(\nu_{2\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\times$$
$$\times\nu_{2\xi\xi}(\xi,\tau)-f(\xi,l,\tau))d\xi d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}^*(x,y,t,\xi,0,\tau)\times$$
$$\times(\nu_{1\tau}(\eta,\tau)-\tau^\beta a_2(\tau)\nu_{1\xi\xi}(\xi,\tau)-f(\xi,0,\tau))d\xi d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12\eta}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\eta(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau,$$

Якщо в (31) підставити вираз Δu_2, знайдений з (32), (33), то утвориться інтегральне рівняння Вольтерра вигляду

$$a(t)=\int\limits_0^t K(t,\tau)a(\tau)d\tau,\quad t\in[0,T] \tag{34}$$

стосовно невідомої $a(t)$. Дослідимо порядок особливості ядра $K(t,\tau)$. Для цього виділимо з ядра доданок K_0 з найвищою особливістю

$$K_0(t,\tau):=\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h \tilde G_{12x}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\tau^\beta d\xi d\eta d\tau\times$$
$$\times\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l G_{12\xi_1}^*(\xi,\eta,\tau,0,\eta_1,\tau_1)d\eta_1 d\tau_1.$$

Беручи до уваги (11), матимемо

$$|K_0(t,\tau)|\le C_1\int\limits_0^t\tau^\beta d\tau\int\limits_0^h\tilde G_{1x}(0,t,\xi,\tau)d\xi\int\limits_0^\tau\times$$
$$\times G_{1\xi_1}^*(\xi,\tau,0,\tau_1)d\tau_1.$$

За властивостями функцій Гріна для встановлення порядку особливості K_0 достатньо оцінити аналогічний вираз, складений із параметриксів [14]:

$$K_1(t,\tau):=\int\limits_0^t\tau^\beta d\tau\int\limits_0^\tau d\tau_1\int\limits_0^h\frac{\xi^2\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}}\times$$
$$\times\frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}\right)}{(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{3/2}}d\xi.$$

Застосовуючи нерівність Коші–Буняковського, оцінимо внутрішній інтеграл з $K_1(t,\tau)$:

$$\int\limits_0^h\frac{\xi^2\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}}\frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}\right)}{(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{3/2}}d\xi\le$$
$$\le\left(\int\limits_0^h\frac{\xi^2e^{-\frac{\xi^2}{2(\theta(t)-\theta(\tau))}}}{(\theta(t)-\theta(\tau))^3}d\xi\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^h\frac{\xi^2e^{-\frac{\xi^2}{2(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}}}{(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^3}d\xi\right)^{1/2}.$$

У кожному з інтегралів замінимо змінні, відповідно $z=\frac{\xi}{\sqrt{2(\theta(t)-\theta(\tau))}}$ та $\zeta=\frac{\xi}{\sqrt{2(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}}$:

$$\int\limits_0^h\frac{\xi^2\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}}\frac{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}\right)}{(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{3/2}}d\xi\le$$
$$\le\frac{C_1}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/4}(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{3/4}}\left(\int\limits_0^\infty z^2e^{-z^2}dz\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^\infty\zeta^2e^{-\zeta^2}d\zeta\right)^{1/2}\le\frac{C_2}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/4}(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{3/4}}\le$$
$$\le\frac{C_3}{(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1})^{3/4}(\tau^{\beta+1}-\tau_1^{\beta+1})^{3/4}}.$$

Тоді

$$K_1(t,\tau)\le C_3\int\limits_0^t\tau^\beta d\tau\int\limits_0^\tau\frac{d\tau_1}{(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1})^{3/4}(\tau^{\beta+1}-\tau_1^{\beta+1})^{3/4}}.$$

Змінимо порядок інтегрування і виконаємо заміну змінної $z = \dfrac{\tau^{\beta+1} - \tau_1^{\beta+1}}{t^{\beta+1} - \tau_1^{\beta+1}}$:

$$K_1(t,\tau) \le C_4 \int_0^t \frac{d\tau_1}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau_1^{\beta+1}}} \int_0^1 \frac{dz}{z^{3/4}(1-z)^{3/4}} \le$$

$$\le C_5 \int_0^t \frac{d\tau_1}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau_1^{\beta+1}}}.$$

Після заміни $\sigma = \dfrac{\tau}{t}$ отримуємо оцінку

$$K_1(t,\tau) \le C_6 t^{\frac{1-\beta}{2}},$$

і, отже, особливість ядра $K(t,\tau)$ інтегровна. Це означає, що рівняння (34) має тільки тривіальний розв'язок $a(t) \equiv 0, t \in [0,T]$. Тоді і $u(x,y,t) \equiv 0, (x,y,t) \in \overline{Q}_T$ як розв'язок однорідної задачі, що відповідає (27)–(29). Теорему доведено. ■

Література

[1] *Caffarelli L.* Continuity of the density of a gas flow in a porous medium / Caffarelli L., Friedman A. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1979. – **252**. – P. 99—113.

[2] *Grebenev V.* On a system of degenerate parabolic equations that arises in fluid dynamics / Grebenev V. // Sib. Mat. J. – 1994. – **35**. – P. 753—767.

[3] *Berestycki H.* An inverse parabolic problem arising in finance / Berestycki H., Busca J., Florent I. // C. R. Acad. Sci. Paris. – 2000. – **331**. – P. 965—969.

[4] *DiBenedetto E.* Degenerate parabolic equations / DiBenedetto E. – Springer, New York, 1993.

[5] *Іванчов М., Салдіна Н.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням // Укр. мат. журнал. – 2005. – **57**, №11. – С. 1563–1570.

[6] *Іванчов М., Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням // Укр. мат. журнал. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1487–1500.

[7] *Ivanchov M., Saldina N.* An inverse problem for strongly degenerate heat equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2006. – **14**, № 5. – P. 465–480.

[8] *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння із слабким виродженням // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, №. 3. – С. 7–17.

[9] *Ivanchov M., Lorenzi A., Saldina N.* Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in Banach space // J. Inv. Ill-posed Problems – 2008. – **16**, No. 4. – P. 397–415.

[10] *Гринців Н.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 4. – С. 28–40.

[11] *Гринців Н.* Обернена задача для сильно виродженого параболічного рівняння в області з вільними межами // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2007. – **67**. – С. 84–97.

[12] *Іванчов М., Власов В.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – **70**. – С. 91–102.

[13] *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – VNTL Publishers, 2003.

[14] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968.

INVERSE PROBLEM FOR A WEAKLY DEGENERATE TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

V. A. Vlasov

Ivan Franko National University of Lviv
1, Universytetska Str., 79001, Lviv, Ukraine

The paper establishes existence and uniqueness conditions for an inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation in a rectangular domain. Major time-dependent coefficient of the equation is unknown.

Key words: inverse problem, Green function, weak degeneration, parabolic equation.

2000 MSC: 35R30

UDK: 517.95