ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 871, 2017, с. 30–32

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 871, 2017, p. 30–32

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПОХІДНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ЛЕЖАНДРА КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

О. В. Веселовська, В. В. Достойна

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 15 березня 2017 р.)

Отримано інтегральне зображення похідних многочленів Лежандра комплексної змінної.

Ключові слова: многочлени Лежандра, похідні многочленів Лежандра.

2000 MSC: 33C47

УДК: 517.538.3

Вступ

Властивості ортогональних систем многочленів дійсної змінної достатньо ґрунтовно вивчено в науковій літературі, зокрема, у роботах [1–3]. Значно менше досліджень властивостей цих систем у комплексній області. Так, у роботі [1] розглянуто розвинення аналітичних функцій у комплексній області за системою многочленів Чебишова. У статті [4] вивчено властивості многочленів комплексної змінної, споріднених з многочленами Чебишова. У роботах [5, 6] досліджуються властивості многочленів, що є перетвореннями Мелліна аналітичних функцій, та многочленів, побудованих за аналогічною з многочленами Бернуллі та Ейлера схемою. У роботах [7, 8] розглянуто аналогічні питання для многочленів Лежандра та їх похідних у комплексній області.

У роботі [7] отримано інтегральне зображення многочленів Лежандра комплексної змінної. У цій статті отримано інтегральне зображення похідних многочленів Лежандра комплексної змінної.

Позначимо через $P_n(z)$ многочлени Лежандра комплексної змінної (див., наприклад, [9, с. 154], а через $P_n^{(s)}(z)$ – їхню s-ту похідну. Зауважимо, що $P_n^{(s)}(z)$ – многочлени степеня $n-s$.

Для s-ї похідної многочленів Лежандра справедливі явні формули (див. [9, с. 178], [10, с. 181]):

$$P_n^{(s)}(z)=\frac{s!C_{n+s}^s}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}(-1)^kC_n^kC_{2(n-k)}^{n+s}z^{n-s-2k}, \quad (1)$$

де C_n^k – біноміальні коефіцієнти, $n=0,1,\ldots;\ n\geq s$.

I. Інтегральне зображення похідних многочленів Лежандра комплексної змінної

Теорема 1. *Для похідних многочленів Лежандра комплексної змінної справедливе інтегральне зображення*

$$P_n^{(s)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\left(z+t\sqrt{z^2-1}\right)^{n-s}\varphi(t)dt, \quad (2)$$

де $\varphi(t)=a_{ns}\left(t^2-1\right)^{s-\frac{1}{2}}$, $a_{ns}=(-1)^s2^ss!C_{n+s}^{n-s}$, γ *– додатно орієнтоване коло* $|t|=r$, $1<r<\infty$.

□ *Доведення.* Нехай $\Gamma(x)$ позначає гамма-функцію. Використовуючи біноміальний ряд, записаний у вигляді

$$(1+z)^\alpha=\sum_{j=0}^\infty\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}z^\alpha,\ |z|<1,$$

отримаємо розклад для функції $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)=a_{ns}t^{2s-1}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{s-\frac{1}{2}}=a_{ns}\Gamma\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\sum_{j=0}^\infty\frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(s-j+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{t^{2(j-s)+1}},\ |t|>1.$$

Підставимо його у співвідношення (2). Матимемо

$$P_n^{(s)}(z)=\frac{a_{ns}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{2\pi i}\int\limits_\gamma\left(z+t\sqrt{z^2-1}\right)^{n-s}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^\infty\frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(s-j+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{t^{2(j-s)+1}}dt.$$

Враховуючи формулу бінома Ньютона

$$\left(z+t\sqrt{z^2-1}\right)^{n-s}=\sum_{i=0}^{n-s}C_{n-s}^iz^{n-s-i}t^i\left(z^2-1\right)^{\frac{i}{2}},$$

знаходимо

$$P_n^{(s)}(z)=a_{ns}\Gamma\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{n-s}C_{n-s}^iz^{n-s-i}t^i\left(z^2-1\right)^{\frac{i}{2}}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^\infty\frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(s-j+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{dt}{t^{2(j-s)-i+1}}.$$

На підставі відомого інтеграла [11, с. 81–82]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n\neq 1,\end{cases}$$

де γ – довільний замкнений контур, що охоплює точку a і однократно пробігається в додатному напрямі, отримаємо

$$P_n^{(s)}(z) = a_{ns}\Gamma\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\sum_{j=s}^{\left[\frac{n+s}{2}\right]}\frac{(-1)^j C_{n-s}^{2(j-s)}}{\Gamma(j+1)\Gamma\left(s-j+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times z^{n+s-2j}\left(z^2-1\right)^{j-s} = \begin{vmatrix} k=j-s \\ j=k+s\end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^s a_{ns}\Gamma\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}\frac{(-1)^k C_{n-s}^{2k}}{\Gamma(k+s+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)}\times$$

$$\times z^{n-s-2k}\left(z^2-1\right)^k.$$

Застосуємо до $\left(z^2-1\right)^k$ формулу бінома Ньютона та змінимо порядок підсумовування. Матимемо

$$P_n^{(s)}(z) = (-1)^s a_{ns}\Gamma\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}\frac{(-1)^k C_{n-s}^{2k}}{\Gamma(k+s+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)}\times$$

$$\times z^{n-s-2k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j z^{2(k-j)} =$$

$$= (-1)^s a_{ns}\Gamma\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}(-1)^j z^{n-s-2j}\times$$

$$\times\sum_{k=j}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}\frac{(-1)^k C_{n-s}^{2k} C_k^j}{\Gamma(k+s+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)}.$$

Оскільки [12, с. 81–82]

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^k 2^k\sqrt{\pi}}{(2k-1)!!} =$$

$$= \frac{(-1)^k 2^k\sqrt{\pi}2^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!} = \frac{(-1)^k 2^{2k}k!\sqrt{\pi}}{(2k)!},$$

то

$$\sum_{k=j}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}\frac{(-1)^k C_{n-s}^{2k} C_k^j}{\Gamma(k+s+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=j}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}\frac{C_{n-s}^{2k}C_k^j(2k)!}{2^{2k}k!(k+s)!} =$$

$$= \frac{1}{s!\sqrt{\pi}}\sum_{k=j}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}\frac{C_{n-s}^{2k}C_k^jC_{2k}^k}{2^{2k}C_{k+s}^s}.$$

Враховуючи комбінаторну тотожність

$$\sum_{k=j}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}\frac{C_{n-s}^{2k}C_k^jC_{2k}^k}{2^{2k}C_{k+s}^s} = \frac{C_{2(n-j)}^{n+s}C_n^j}{2^{n-s}C_n^s},$$

знаходимо

$$P_n^{(s)}(z) = (-1)^s a_{ns}\Gamma\left(s+\tfrac{1}{2}\right)\frac{1}{s!\sqrt{\pi}}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}(-1)^j\frac{C_{2(n-j)}^{n+s}C_n^j z^{n-s-2j}}{2^{n-s}C_n^s}.$$

На підставі рівності [12, с. 81–82]

$$\Gamma\left(s+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2s-1)!!}{2^s} = \frac{\sqrt{\pi}(2s-1)!}{2^{2s-1}(s-1)!} = \frac{\sqrt{\pi}(2s)!}{2^{2s}s!}$$

та, врахувавши вираз для a_{ns}, знаходимо

$$P_n^{(s)}(z) = \frac{(2s)!C_{n+s}^{n-s}}{2^n s! C_n^s}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}(-1)^j C_{2(n-j)}^{n+s}C_n^j z^{n-s-2j} =$$

$$= \frac{s!C_{n+s}^s}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-s}{2}\right]}(-1)^k C_n^k C_{2(n-k)}^{n+s}z^{n-s-2k},$$

що збігається із виразом (1). ■

Висновки

Отримано інтегральне зображення похідних многочленів Лежандра комплексної змінної. Зауважимо, що якщо $s=0$, матимемо інтегральне зображення многочленів Лежандра. Крім того, отримано комбінаторну тотожність, яка становить самостійний інтерес.

Література

[1] *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

[2] *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч.1. – М.: Наука, 1978. – 392 с.

[3] *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 500 с.

[4] *Сухорольський М. А.* Система похідних від поліномів Чебишова у комплексній площині поліномів // Метода математики. – 2008. – № 6. – С. 8–15.

[5] *Сухорольський М. А.* Розвинення аналітичних функцій за системами поліномів типу Мелліна // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2005. – № 346. – С. 111–115.

[6] *Сухорольський М. А.* Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій // Укр. мат. журн. – 2010. – 62, № 2. – С. 238–254.

[7] *Сухорольський М. А.* Наближення функцій поліномами Лежандра в комплексній площині // Віс-

ник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2009. – № 643. – С. 3–14.

[8] *Сухорольський М. А., Достойна В. В.* Розклад аналітичних в крузі функцій в комплексній області за системою похідних многочленів Лежандра // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2010. – № 687. – С. 105–121.

[9] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

[10] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.2. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

[11] *Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А.* Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1970. – 416 с.

[12] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

AN INTEGRAL REPRESENTATION OF LEGANDRE POLYNOMIAL OF COMPLEX VARIABLE

O. V. Veselovska, V. V. Dostoina

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

An integral representation of derivatives of Legandre polynomials of complex variable are obtained.

Key words: Legandre polynomials, derivatives of Legandre polynomials.

2000 MSC: 33C47

UDK: 517.538.3