ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
**"Фізико-математичні науки"**
№ 871, 2017, с. 27–29

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
**"Physical and mathematical sciences"**
№ 871, 2017, p. 27–29

# ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ СІМ'Ї СУБГАРМОНІЙНИХ У ПРОСТОРІ $\mathbb{R}^m$ ФУНКЦІЙ

О. В. Веселовська

*Національний університет "Львівська політехніка"*
*вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна*

*(Отримано 15 березня 2017 р.)*

Встановлюються умови, за яких сім'я субгармонійних функцій $\{g_R\colon R\in\Re\}$, $g_R(0)=0$, де $\Re$ – необмежена множина додатних чисел, прямує до нуля рівномірно на компактах з $\mathbb{R}^m$, коли $\Re\ni R\to\infty$.

**Ключові слова:** субгармонійна функція, розподіл мас, асоційований за Ріссом із субгармонійною функцією, сферичні гармоніки, асоційовані із субгармонійною функцією.

**2000 MSC:** 31B05

**УДК:** 517.57

## Вступ

Нехай $\Re$ – необмежена множина додатних чисел. У роботі [1] показано, що за виконання певних умов сім'я $\{h_R\colon R\in\Re\}$ цілих функцій комплексної змінної таких, що $h_R(0)=1$, прямує до одиниці рівномірно на компактах з $\mathbb{C}$, коли $\Re\ni R\to\infty$. У статті цей результат узагальнюється на сім'ю субгармонійних у просторі $\mathbb{R}^m$ функцій.

Нехай $\mathbb{R}^m$ – $m$-вимірний евклідів простір, $m\geq 2$, $S^m=\{x\in\mathbb{R}^m\colon |x|=1\}$ – одинична сфера в $\mathbb{R}^m$ з центром у початку координат, а $\omega_m$ – площа її поверхні.

Позначимо

$$d_m=\begin{cases}1, & m=2,\\ m-2, & m>2.\end{cases}$$

Нехай $u$ – субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ функція, а $\Delta$ – оператор Лапласа. Оскільки $\Delta u\geq 0$ у розумінні узагальнених функцій [2, с. 56–57], то кожній функції $u$ відповідає єдиний розподіл мас $\mu=\mu_u=\frac{1}{d_m\omega_m}\Delta u$, який називається розподілом мас, асоційованих за Ріссом із субгармонійною функцією $u$ [3].

Сферичною гармонікою, або сферичною функцією Лапласа степеня $k$, $k\in Z_+=\{0,1,2,\ldots\}$, яку позначатимемо через $Y^{(k)}$, називається звуження на одиничну сферу $S^m$ однорідного гармонійного многочлена степеня $k$ [4, с. 157–174], [5].

Множину сферичних гармонік степеня $k$ можна розглядати як підпростір простору $L^2(S^m)$ дійснозначних функцій зі скалярним добутком

$$(f,g)=\frac{1}{\omega_m}\int\limits_{S^m} f(x)g(x)dS,$$

де $dS$ – елемент площі сфери $S^m$. Якщо $\left\{Y_1^{(k)},\ldots,Y_{\gamma_k}^{(k)}\right\}$ – ортонормований базис у цьому просторі, то $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\left\{Y_1^{(k)},\ldots,Y_{\gamma_k}^{(k)}\right\}$ буде ортонормованим базисом у просторі $L^2(S^m)$ [4, с. 161]. Тут $\gamma_k=\dfrac{(2k+m-2)(k+m-3)!}{k!(m-2)!}$ – кількість лінійно-незалежних сферичних гармонік степеня $k$.

Рядом Фур'є–Лапласа функції $f\in L^1(S^m)$ називається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}Y^{(k)}(x;f),\ x\in S^m,$$

де

$$Y^{(k)}(x;f)=a_1^{(k)}Y_1^{(k)}(x)+\ldots+a_{\gamma_k}^{(k)}Y_{\gamma_k}^{(k)}(x),$$
$$a_j^{(k)}=\left(f,Y_j^{(k)}\right),\ j=\overline{1,\gamma_k},$$

$(f,Y_j^{(k)})$ – скалярний добуток в $L^2(S^m)$. Якщо $m=2$, маємо звичайний тригонометричний ряд Фур'є.

Справедлива теорема додавання [5, с. 206]

$$C_k^{\nu}[(x,y)]=\frac{d_m\omega_m}{2(k+\nu)}\sum_{j=1}^{\gamma_k}Y_j^{(k)}(x)Y_j^{(k)}(y),$$

де $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$, а $C_k^{\nu}$ – многочлени Гегенбауера степеня $k$ і порядку $\nu$, які визначаються із співвідношення

$$\frac{1-\tau^2}{(1-2\tau t+\tau^2)^{\nu+1}}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+\nu}{d_m}C_k^{\nu}(t)\tau^k,$$

де $|t|\leq 1$, $0\leq\tau<1$.

Із цієї теореми випливає, що сферичні гармоніки $Y^{(k)}(x;f)$ можуть бути виражені через многочлени Гегенбауера:

$$Y^{(k)}(x;f)=\frac{2(k+\nu)}{d_m\omega_m}\int\limits_{S^m}C_k^{\nu}[(x,\xi)]f(\xi)dS(\xi).$$

Позначимо $u_r=u(rx)$, $r>0$, $x\in S^m$. Функції

$$c_k(x,r;u)=Y^{(k)}(x;u_r),\ k\in Z_+,$$

називаються сферичними гармоніками, асоційованими із субгармонійною функцією $u$ [6].

Відомо, що [6, 7]

$$c_k(x,r;u)=r^kY_u^{(k)}(x;u_r)+r^k\int\limits_{|\varsigma|\le r}C_k^\nu\left[\left(x,\frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right]\frac{d\mu_u(\varsigma)}{|\varsigma|^{k+2\nu}}-$$

$$-\frac{1}{r^{k+2\nu}}\int\limits_{|\varsigma|\le r}|\varsigma|^kC_k^\nu\left[\left(x,\frac{\varsigma}{|\varsigma|}\right)\right]d\mu_u(\varsigma)\ \ (k\in Z_+),$$

де $Y_u^{(k)}(x)$ визначаються із розкладу

$$u(rx)=\sum_{k=0}^{\infty}r^kY_u^{(k)}(x)$$

для достатньо малих $r>0$.

## I. Рівномірна збіжність до нуля сім'ї субгармонійних функцій на компактах з $\mathbb{R}^m$

Нехай $\lambda$ – додатна, неперервна, неспадна на $(0,\infty)$ функція, яка називається функцією росту, $\Re$ – необмежена множина додатних чисел.

**Теорема 1.** *Нехай* $\{g_R\colon R\in\Re\}$, $g_R(0)=0$, *– сім'я субгармонійних у просторі* $\mathbb{R}^m$ *функцій таких, що*

*а) розподіл мас, асоційованих за Ріссом із функцією* $g_R$, *дорівнює нулю в замкненій кулі*

$$\overline{V}_R^m=\{y\in\mathbb{R}^m\colon |y|\le R\};$$

*б)* $|c_k(x,r;g_R)|\le A(k+1)^l\lambda(Br)$ *за деяких сталих* $A>0$, $B>0$, $l\in R_+$ *і всіх* $r>0$, $x\in S^m$, $k\in Z_+$, $R\in\Re$;

*в)* $\lim\limits_{\Re\ni R\to\infty}c_k(x,r;g_R)=0$ *для всіх* $k\in Z_+$, $r>0$ *і* $x\in S^m$.

*Тоді* $\lim\limits_{\Re\ni R\to\infty}g_R(y)=0$ *рівномірно на компактах з* $\mathbb{R}^m$.

☐ *Доведення.* Згідно з умовою а, функція $g_R$ гармонійна в кулі $\overline{V}_R^m$. Тому за формулою Пуассона–Йенсена [8, с. 139–140] маємо, якщо $r<r^*<R$ і $x\in S^m$

$$g_R(rx)=\frac{(r^*)^2}{\omega_m}\int\limits_{S^m}\frac{\left[(r^*)^2-r^2\right]g_R(r^*\xi)dS(\xi)}{\left[(r^*)^2-2r^*r(x,\xi)+r^2\right]^{\nu+1}},$$

де $\nu=\frac{m-2}{2}$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток у $\mathbb{R}^m$.

Розкладаючи інтеграл Пуассона в ряд за сферичними гармоніками (див. [7]), знаходимо

$$g_R(rx)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r^*}\right)^kY^{(k)}(x;(g_R)_{r^*}).$$

Виберемо $r^*=2r$. Тоді

$$|g_R(rx)|\le\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\left|c_k\left(x,2r;g_R\right)\right|.$$

Для фіксованого $r>0$ і $x\in S^m$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^{-k}\left|c_k\left(x,2r;g_R\right)\right|$ є функціональним і визначеним на $\Re$. Згідно з умовою б і ознакою Вейєрштрасса, цей ряд збігається рівномірно на $\Re$. Нехай $S(R)$ – його сума. Тоді

$$\lim_{R\to\infty}S(R)=\lim_{R\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\left|c_k\left(x,2r;g_R\right)\right|=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\lim_{R\to\infty}\left|c_k\left(x,2r;g_R\right)\right|=0.$$

Звідси отримаємо, що

$$\lim_{\Re\ni R\to\infty}g_R(rx)=0$$

рівномірно по $r\le r_0<r^*$. Теорема доведена. ■

## Висновки

Показано, що за виконання певних умов сім'я субгармонійних функцій $\{g_R\colon R\in\Re\}$, $g_R(0)=0$, де $\Re$ – необмежена множина додатних чисел, прямує до нуля рівномірно на компактах з $R^m$, коли $\Re\ni R\to\infty$.

## Література


[1] *Miles J. B.* Quotient representations of meromorphic functions // J. dAnalyse Math. – 1972. – 25. – P. 371–388.

[2] *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. – М: Наука, 1971. – 432 с.

[3] *Arsove M. G.* Functions representable as differences of subharmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – 75, No 2. – P. 327–365.

[4] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 336 с.

[5] *Berens H., Butzer P. L., Pawelke S.* Limitierungs verfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten // Publs. Res. Inst. Math. Sci. – 1968. – 4, No 2. – P. 201–268.

[6] *Кондратюк А. А.* О методе сферических гармоник для субгармонических функций // Мат. сб. – 1981. – 116 (168), № 2. – С. 147–165.

[7] *Кондратюк А. А.* Сферические гармоники и субгармонические функции // Мат. сб. – 1984. – 125 (167), № 2. – С. 147–166.

[8] *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.

# ON THE ONE PROPERTY OF THE FAMILY OF SUBHARMONIC FUNCTIONS IN $\mathbb{R}^m$

O. V. Veselovska

*Lviv Polytechnic National University*
*12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine*

The conditions under which family of subharmonic functions $\{g_R \colon R \in \Re\}$, $g_R(0) = 0$, where $\Re$ is unbounded set of positive numbers, tends to zero uniformly on compacts of $\mathbb{R}^m$, when $\Re \ni R \to \infty$.

**Key words:** subharmonic fuction, Riesz mass distribution associated with a subharmonic fuction, spherical harmonics associated with a subharmonic fuction.

**2000 MSC:** 31B05

**UDK:** 517.57