ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 871, 2017, с. 13–19

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 871, 2017, p. 13–19

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДВОКРАТНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. СИЛЬНО РЕГУЛЯРНІ ТА НЕРЕГУЛЯРНІ ЗА БІРКГОФОМ НЕЛОКАЛЬНІ УМОВИ

Я. О. Баранецький, П. І. Каленюк, П. Л. Сохан

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 1 грудня 2016 р.)

Досліджено самоспряжені задачі, оператори яких розщеплюються на інваріантних підпросторах, які індуковані оператором інволюції $Iy(x) = y(1-x)$. Побудовано несамоспряжені збурення таких задач, які є регулярними або нерегулярними за Біркгофом. Вивчено спектральні властивості операторів, які відповідають цим збуренням, зокрема, представлення власних значень, власних функцій ті досліджено повноту і базисність системи власних функцій.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, нелокальні задачі, регулярність за Біркгофом, несамоспряжений оператор, оператор інволюції, власні функції, базис Рісса.

2000 MSC: 34B10, 34L10

УДК: 517.927.6+517.984.52

Вступ

Нехай $W_2^2(0,1)\equiv\{y \in L_2(0,1) : y' \in AC[0,1],\, y'' \in L_2(0,1)\}$, $\quad \big(y,u;W_2^2(0,1)\big) \equiv \sum\limits_{k=0}^{2} \big(y^{(k)},u^{(k)};L_2(0,1)\big)$, $\|y;W_2^{2n}(0,1)\|^2\equiv \big(y,y;W_2^{2n}(0,1)\big)$, E – тотожне перетворення простору $L_2(0,1)$, $I : L_2(0,1)\to L_2(0,1)$, $Iy(x)\equiv y(1-x)$ – оператор інволюції в просторі $L_2(0,1)$, $p_0\equiv\frac{1}{2}(E+I)$, $p_1\equiv\frac{1}{2}(E-I)$, $H_j=\{y \in L_2(0,1) : y = p_j y\}$, $M_j\equiv\{e^{cx} + (-1)^j e^{c(1-x)}, c \in \mathbb{R}\}$, $j = 0,1$. Оператори p_0, p_1 є ортопроекторами в $L_2(0,1)$. Тому $L_2(0,1) = H_0 \oplus H_1$.

Функцію із простору H_0 (H_1) називатимемо симетричною (антисиметричною) відповідно. Крайову умову будемо називати симетричною, якщо до ядра відповідного функціонала належить кожна антисиметрична (симетрична) функція із простору $W_2^2(0,1)$. Наприклад, умова $y(0) + y(1) = 0$ є симетричною. Аналогічно визначається антисиметрична умова, наприклад: $y(0) - y(1) = 0$.

У роботі досліджено задачу на власні значення

$$-y''(x) = \lambda y(x), x \in (0,1), \lambda = \mu^2 \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

$$\alpha_{j,1}y'(0) + \alpha_{j,0}y(0) + \beta_{j,1}y'(1) + \beta_{j,0}y(1) = 0, \tag{2}$$

$$\alpha_{j,k}, \beta_{j,k} \in \mathbb{R}, j = 1,2, k = 0,1.$$

Умови (2) припускаються лінійно незалежними.

Основи спектральної теорії двоточкових диференціальних операторів закладено в роботах [1–6].

Для звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку на скінченному інтервалі базисність за Ріссом для крайових задач, породжених сильно регулярними за Біркгофом умовами, встановлена в [7–9]. Якщо крайові умови регулярні, але не сильно регулярні, в роботі [10] було доведено, що система кореневих підпросторів, які відповідають кратним власним значенням крайової задачі, утворює базис Рісса в просторі $L_2(0,1)$ із підпросторів. У роботах [11–12] запропоновано поняття приведеної системи кореневих функцій задачі, а також поняття суттєво несамоспряженого оператора (оператора, система кореневих функцій якого містить нескінченну кількість приєднаних) і вивчено властивості таких операторів.

Спектральну задачу (1), (2) вивчали багато авторів. Зазначимо, зокрема, в роботах [13–19]. В статті [20], за допомогою оператора інволюції $I : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Iy(x) \equiv y(1-x)$, виділено простори симетричних та антисиметричних функцій та досліджено проблему розщеплення оператора на інваріантних підпросторах H_0, H_0 та її аналоги для рівнянь з частинними похідними. В роботах [8, 21] вивчались випадки не спектральних за Данфордом операторів, які породжені регулярними за Біркгофом крайовими умовами. В роботі [22] введено та досліджено сімейство таких задач. У роботі [23] вивчено важливу для застосувань істотно несамоспряжену задачу. Властивості істотно несамоспряжених операторів, визначених в абстрактному сепарабельному гільбертовому просторі, досліджено в роботі [24].

I. Самоспряжені крайові задачі

Крайові умови (2) можна подати еквівалентними співвідношеннями

$$\sum_{r=0}^{1} \Big(a_{j,r} \left(y^{(r)}(0) + (-1)^r y^{(r)}(1) \right) + $$

$$+ b_{j,r} \left(y^{(r)}(0) - (-1)^r y^{(r)}(1) \right) \Big) = 0, j = 1,2, \tag{3}$$

де $a_{j,r}=\frac{1}{2}\left(\alpha_{j,r}-(-1)^r\beta_{j,r}\right)$, $b_{j,r}=\frac{1}{2}\left(\alpha_{j,r}+(-1)^r\beta_{j,r}\right)$, $j = 1,2$, $r = 0,1$.

Нехай λ – власне значення оператора задачі (1), (3), якому відповідає власна функція $y_0(x)$. Кореневою (приєднаною) функцією першого порядку називатимемо розв'язок задачі

$$-y''(x) = \lambda y(x) + c y_0(x),$$

$$l_1 y = 0, \quad l_2 y = 0, \quad x \in (0,1), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо для рівняння (1) задачу з крайовими умовами

$$\begin{cases} l_1 y \equiv a_{1,1}(y'(0) - y'(1)) + a_{1,0}(y(0) + y(1)) = 0, \\ l_2 y \equiv b_{2,1}(y'(0) + y'(1)) + b_{2,0}(y(0) - y(1)) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Введемо в розгляд оператор задачі (1), (4) $L : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Ly \equiv -y''$, $y \in D(L)$, $D(L) = \{y \in W_2^2(0,1) : l_j y = 0;\ j = 1,2\}$. Звуження оператора L на множину H_j позначимо відповідно через L_j, $j = 0,1$.

Зауваження 1. З формул (4) маємо $l_s y = 0$, $y \in M_{1-s}$, $s = 0,1$. Враховуючи щільність множини M_j в просторі H_j, отримуємо включення $l_j \in H_j$, $j = 0,1$.

Часткові випадки крайових умов (4), які породжують самоспряжені оператори:

1. Періодичні умови: $y'(0) - y'(1) = 0$, $y(0) - y(1) = 0$.
2. Антиперіодичні умови: $y(0)+y(1)=0$, $y'(0)+y'(1)=0$.
3. Умови Діріхле: $y(0) + y(1) = 0$, $y(0) - y(1) = 0$.
4. Умови Неймана: $y'(0) - y'(1) = 0$, $y'(0) + y'(1) = 0$.

Подане нижче твердження узагальнює ці випадки:

Теорема 1. *Оператор L задачі* (1), (4) *є самоспряженим.*

Для доведення теореми треба переконатися, що коефіцієнти крайових умов (4) задовольняють припущення теореми 5 роботи [25, с. 212].

Фундаментальну систему розв'язків рівняння (1) визначимо співвідношеннями

$$y_0(\rho, x) \equiv e^{i\rho x} + e^{i\rho(1-x)},$$

$$y_1(\rho, x) \equiv e^{i\rho x} - e^{i\rho(1-x)},\ \rho \in \mathbb{C},\ Re\rho \le 0,\ \lambda = -\rho^2.$$

Підставимо загальний розв'язок рівняння (1) $y(\rho, x) = C_0 y_0(\rho, x) + C_1 y_1(\rho, x,\ C_0, C_1 \in \mathbb{R}$ у крайові умови (4). Для обчислення параметрів $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$ маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця коефіцієнтів якої є діагональною

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0(\rho) & 0 \\ 0 & 2\omega_1(\rho) \end{pmatrix},$$

де $\omega_0(\rho) \equiv i\rho a_{1,1}\left(1 - e^{i\rho}\right) + a_{1,0}\left(1 + e^{i\rho}\right)$, $\omega_1(\rho) \equiv i\rho b_{2,1}\left(1 + e^{i\rho}\right) + b_{2,0}\left(1 - e^{i\rho}\right)$. Розв'язки рівнянь

$$\omega_0(\rho) = 0, \quad \omega_1(\rho) = 0 \qquad (5)$$

позначимо відповідно через $\rho_{s,k}$ та пронумеруємо за зростанням $|\rho_{s,k}| \le |\rho_{s,k+1}|$, $k = 1, 2, ...$, для кожного $s = 0, 1$.

Отже, самоспряжена задача (1), (4) має власні значення $\lambda_{s,k} = -\left(\rho_{s,k}\right)^2 > 0$, $s = 0,1$, $k = 1, 2, ...$ та відповідні власні функції, які є попарно ортогональними в просторі $L_2(0,1)$.

Нехай

$$V_s(L) \equiv \{v_{s,k}(x, L) =$$

$$= \mu_{s,k}\left(e^{i\rho_{s,k}x} + (-1)^s e^{i\rho_{s,k}(1-x)}\right),\ k = 1, 2, ...\}, \qquad (6)$$

нормовані підсистеми власних функцій оператора L, які є ортонормованими базисами просторів H_s та $\sigma_s(L)$ – сукупність власних значень оператора L, яким відповідають власні функції з $V_s(L)$, $s = 0,1$.

Отже, встановлена така

Теорема 2. *Самоспряжений оператор L задачі* (1), (4) *є прямою сумою операторів L_s, $s = 0,1$.*

II. Несамоспряжені крайові задачі. Крайові задачі з сильно регулярними за Біркгофом умовами

Нехай $M_{1,1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & b_{1,1} \\ a_{2,1} & b_{2,1} \end{pmatrix}$, $M_{0,0} = \begin{pmatrix} a_{1,0} & b_{1,0} \\ a_{2,0} & b_{2,0} \end{pmatrix}$, $rgM_{1,1}$ – ранг матриці $M_{1,1}$.

Розглянемо випадок, коли $rgM_{1,1} = 2$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що крайові умови (3) визначені співвідношеннями

$$\begin{cases} y'(0) - y'(1) + a(y(0) + y(1)) + b(y(0) - y(1)) = 0, \\ y'(0) + y'(1) + c(y(0) + y(1)) + d(y(0) - y(1)) = 0, \end{cases} \qquad (7)$$

де $a = a_{1,0}$, $b = b_{1,0}$, $c = a_{2,0}$, $d = b_{2,0}$, $a_{1,1} = 1$, $b_{2,2} = 1$.

Відповідна самоспряжена задача (1), (4) породжена крайовими умовами

$$\begin{cases} y'(0) - y'(1) + a(y(0) + y(1)) = 0, \\ y'(0) + y'(1) + d(y(0) - y(1)) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Позначимо через $L_{a,b,c,d}$ оператор задачі (1), (7), $L_{a,d} = L_{a,0,0,d}$ – оператор задачі (1), (8), $V\left(L_{a,b,c,d}\right)$, $V\left(L_{a,d}\right)$ – системи власних функцій цих операторів.

Теорема 3. *Нехай $rgM_{1,1} = 2$, $bc = 0$. Тоді за довільних фіксованих значень $a, d \in \mathbb{R}$ для кожного набору $b, c \in \mathbb{R}$ власні числа оператора $L_{a,b,c,d}$ і оператора $L_{a,d}$ співпадають і система $V\left(L_{a,b,c,d}\right)$ є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$.*

□ *Доведення.* Розглянемо спочатку випадок $c=0$. Крайові умови (7) подамо співвідношеннями

$$\begin{cases} y'(0) - y'(1) + a(y(0) + y(1)) + b(y(0) - y(1)) = 0, \\ y'(0) + y'(1) + d(y(0) - y(1)) = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Спряжені крайові умови мають вигляд

$$\begin{cases} z'(0) - z'(1) + a(z(0) + z(1)) = 0, \\ z'(0) + z'(1) + b(z(0) + z(1)) + d(z(0) - z(1)) = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Підставляючи загальний розв'язок $y(\rho, x) = C_0 y_0(\rho, x) + C_1 y_1(\rho, x)$ рівняння (1) у крайові умови (8) для обчислення параметрів $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$, ми отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця коефіцієнтів якої є діагональною

$$\Omega_0(\rho) = \begin{pmatrix} 2\omega_0(\rho) & 0 \\ 0 & 2\omega_1(\rho) \end{pmatrix},$$

де $\omega_0(\rho) = i\rho\left(1 - e^{i\rho}\right) + a\left(1 + e^{i\rho}\right)$, $\omega_1(\rho) = i\rho\left(1 + e^{i\rho}\right) + d\left(1 - e^{i\rho}\right)$.

Підставляючи загальний розв'язок $y(\rho, x) = C_0 y_0(\rho, x) + C_1 y_1(\rho, x)$ рівняння (1) у крайові умови (9) для обчислення параметрів $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$, одержимо трикутну матрицю коефіцієнтів

$$\Omega(\rho) = \begin{pmatrix} 2\omega_0(\rho) & 2\omega_{1,2}(\rho) \\ 0 & 2\omega_1(\rho) \end{pmatrix},$$

де $\omega_{1,2}(\rho) = b\left(1 - e^{i\rho}\right)$.

Отже, $\det \Omega(\rho) \equiv \det \Omega_0(\rho)$, $\rho \in \mathbb{C}$. Тому власні значення операторів $L_{a,d}$ та $L_{a,b,0,d}$ співпадають.

Побудуємо власні функції оператора $L_{a,b,0,d}$ задачі (1), (9).

Виберемо довільне $\lambda_{0,k} \in \sigma_0(A_{a,d})$, $k \in \mathbb{N}$. Відповідна нормована в просторі $L_2(0,1)$ власна функція $v_{0,k}(x, L_{a,d}) = \mu_{2,k}\left(e^{i\rho_{0,k}x} + e^{i\rho_{0,k}(1-x)}\right)$ оператора $L_{a,d}$ є розв'язком задачі (1), (9), якщо $\lambda = \lambda_{0,k}$. Тобто

$$v_{0,k}(x, L_{a,b,0,d}) = v_{0,k}(x, L_{a,d}) =$$
$$= \mu_{0,k}\left(e^{i\rho_{0,k}x} + e^{i\rho_{0,k}(1-x)}\right), k = 1, 2, ... \tag{11}$$

Нехай $\lambda_{1,k} \in \sigma_1(L_{a,d})$ – будь-яке власне значення оператора $L_{a,d}$, $k \in \mathbb{N}$. Власну функцію оператора $L_{a,b,0,d}$ визначимо співвідношенням

$$v_{1,k}(x, L_{a,b,0,d}) =$$
$$= v_{1,k}(x, L_{a,d}) + C_{1,k}\left(e^{i\rho_{1,k}x} + e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\right). \tag{12}$$

Підставляючи вираз (12) в першу умову (9), обчислимо значення параметра $C_{1,k}$:

$$C_{1,k} = b\left(i\rho_{1,k}\left(1 - e^{i\rho_{1,k}}\right) + a\left(1 + e^{i\rho_{1,k}}\right)\right)^{-1} \times$$
$$\times\left(1 - e^{i\rho_{1,k}}\right), k = 1, 2, ... \tag{13}$$

Отже, елементи системи $V(L_{a,b,0,d})$ задані формулами (11)–(13).

Визначимо елементи системи власних функцій $W(L_{a,b,0,d})$ задачі із спряженими крайовими умовами (10):

$$w_{0,k}(x, L_{a,b,0,d}) = v_{0,k}(x, L_{a,d}), k = 1, 2, ... \tag{14}$$

$$w_{1,k}(x, L_{a,b,0,d}) = v_{1,k}(x, L_{a,d}) + C_{2,k}\left(e^{i\rho_{1,k}x} + \right.$$
$$\left. + e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\right), C_{1,k} \in \mathbb{R}, k = 1, 2, ... \tag{15}$$

Підставляючи вираз (15) в другу умову (10), обчислимо

$$C_{2,k} = -b\left(i\rho_{1,k}\left(1 - e^{i\rho_{1,k}}\right) + d\left(1 + e^{i\rho_{1,k}}\right)\right)^{-1} \times$$
$$\times\mu_{1,k}\left(1 - e^{i\rho_{1,k}}\right), k = 1, 2, ... \tag{16}$$

Системи $V(L_{a,b,0,d})$ та $W(L_{a,b,0,d})$ є біортогональними [26, 9]. Крайові умови (9) є сильно регулярними за Біркгофом [25].

Тому за теоремою Кесельмана–Михайлова [25] системи функцій $V(L_{a,b,0,d})$ та $W(L_{a,b,0,d})$ є базисами Рісса простору $L_2(0,1)$.

Теорема 3 доведена для випадку $c = 0$.

Нехай $b = 0$. Крайові умови (7) визначимо співвідношеннями

$$\begin{cases} y'(0) - y'(1) + a(y(0) + y(1)) = 0, \\ y'(0) + y'(1) + c(y(0) + y(1)) + d(y(0) - y(1)) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Зауваження 2. Якщо $y = z$, $c = b$, то крайові умови (10) збігаються з умовами (17).

Враховуючи зауваження 2, задамо крайові умови, спряжені до крайових умов (17):

$$\begin{cases} z'(0) - z'(1) + a(z(0) + z(1)) + c(z(0) - z(1)) = 0, \\ z'(0) + z'(1) + d(z(0) - z(1)) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Елементи систем $V(L_{a,0,c,d})$ та $W(L_{a,0,c,d})$ мають вигляд відповідно

$$v_{0,k}(x, L_{a,0,c,d}) = v_{0,k}(x, L_{a,d}), k = 1, 2, ... \tag{19}$$

$$v_{1,k}(x, L_{a,0,c,d}) = v_{1,k}(x, L_{a,d}) +$$
$$+ C_{3,k}\left(e^{i\rho_{1,k}x} + e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\right), k = 1, 2, ... \tag{20}$$

$$C_{3,k} = c\left(i\rho_{1,k}\left(1 - e^{i\rho_{1,k}}\right) + d\left(1 + e^{i\rho_{1,k}}\right)\right)^{-1} \times$$
$$\times v_{1,k}(0, L_{a,d}), k = 1, 2, ... \tag{21}$$

$$w_{1,k}(x, L_{a,0,c,d}) = v_{1,k}(x, L_{a,d}), k = 1, 2, ... \tag{22}$$

$$w_{0,k}(x, L_{a,0,c,d}) = v_{0,k}(x, L_{a,d}) +$$
$$+ C_{4,k}\left(e^{i\rho_{0,k}x} - e^{i\rho_{0,k}(1-x)}\right), k = 1, 2, ... \tag{23}$$

$$C_{4,k} = c\left(i\rho_{0,k}\left(1 + e^{i\rho_{0,k}}\right) + a\left(1 - e^{i\rho_{0,k}}\right)\right)^{-1} \times$$
$$\times v_{0,k}(0, L_{a,d}), k = 1, 2, ... \tag{24}$$

Отже, елементи системи $V(L_{a,0,c,d})$ визначені співвідношеннями (19)–(21), а біортогональної системи $W(L_{a,0,c,d})$ – формулами (21)–(23). Базисність за Ріссом цих систем в просторі $L_2(0,1)$ випливає із теореми Кесельмана–Михайлова [25]. Теорему 3 доведено. ■

Наслідок 1. Базиси Рісса $V(L_{a,b,0,d})$, $W(L_{a,b,0,d})$, $V(L_{a,0,c,d})$, $W(L_{a,0,c,d})$ є квадратично близькими [26] до ортонормованого базису $V(L_{a,d})$ простору $L_2(0,1)$, а отже, і між собою.

Розглянемо детальніше часткові випадки крайових умов (9).

Нехай $a = 0$. Крайові умови (9) та спряжені крайові умови (10) мають вигляд

$$\begin{cases} y'(0) - y'(1) + b(y(0) - y(1)) = 0, \\ y'(0) + y'(1) + d(y(0) - y(1)) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} z'(0) - z'(1) = 0, \\ z'(0) + z'(1) + d(z(0) - z(1)) + b(z(0) + z(1)) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

У цьому випадку оператор $L_{0,d}$, породжений самоспряженими умовами

$$\begin{cases} y'(0) - y'(1) = 0, \\ y'(0) + y'(1) + d(y(0) - y(1)) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

має дві послідовності власних значень $\lambda_{0,k} = 4k^2\pi^2 \in \sigma_0(A_{0,d})$, $k = 0, 1, ...$, $\lambda_{1,k} \in \sigma_1(A_{0,d}) = \sigma_1(A_{a,d})$ та відповідні власні функції

$$v_0(x, L_{0,d}) = 1, \quad v_{0,k}(x, L_{0,d}) = \sqrt{2}\cos 2k\pi x,$$

$$v_{1,k}\left(x,L_{0,d}\right)=\mu_{1,k}\big(e^{i\rho_{1,k}x}-e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\big),k=1,... \quad (28)$$

Власні функції оператора $L_{0,b,0,d}$ визначимо співвідношеннями

$$v_0\left(x,L_{0,b,0,d}\right)=1,$$

$$v_{0,k}\left(x,L_{0,b,0,d}\right)=\sqrt{2}\cos 2k\pi x, k=1,..., \quad (29)$$

$$v_{1,k}\left(x,L_{0,b,0,d}\right)=v_{1,k}\left(x,L_{0,d}\right)+$$

$$+bi\mu_{1,k}\left(\rho_{1,k}\right)^{-1}\left(e^{i\rho_{1,k}x}+e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\right),k=1,... \quad (30)$$

Елементи системи функцій $W\left(L_{0,b,0,d}\right)$ задамо формулами

$$w_0\left(x,L_{0,b,0,d}\right)=\begin{cases} 2x-1, d=2 \\ 1+\dfrac{b}{d-2}\left(2x-1\right), d\neq 2\end{cases}$$

$$w_{1,k}\left(x,L_{0,b,0,d}\right)=\mu_{1,k}\big(e^{i\rho_{1,k}x}-e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\big), \quad (31)$$

$$w_{0,k}\left(x,L_{0,b,0,d}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cos 2k\pi x+b\left(2k\pi\right)^{-1}\sqrt{2}\sin 2k\pi x,\ k=1,... \quad (32)$$

Отже, правильним є

Наслідок 2. Нехай $rgM_{1,1}=2$, $a=c=0$. Тоді за фіксованого $d\in\mathbb{R}$, для кожного $b\in\mathbb{R}$, власні значення оператора $L_{0,b,0,d}$ і оператора $L_{0,d}$ співпадають та система $V\left(L_{0,b,0,d}\right)$ власних функцій оператора $L_{0,b,0,d}$ є базисом Барі [26] простору $L_2(0,1)$. Елементи біортогональної системи функцій $W\left(L_{0,b,0,d}\right)$ визначено формулами (31), (32).

Якщо $a=0$, $d=0$, то крайові умови (9) та спряжені крайові умови (10) мають вигляд

$$\begin{cases} y'(0)-y'(1)+b(y(0)-y(1))=0,\\ y'(0)+y'(1)=0.\end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} z'(0)-z'(1)=0,\\ z'(0)+z'(1)+b(z(0)+z(1))=0.\end{cases} \quad (34)$$

Оператор $L_{0,0}$, породжений для рівняння (1) крайовою задачею із самоспряженими умовами

$$\begin{cases} y'(0)-y'(1)=0,\\ y'(0)+y'(1)=0,\end{cases} \quad (35)$$

які еквівалентні умовам Неймана, має дві послідовності власних значень $\lambda_{0,k}=4k^2\pi^2$, $\lambda_{1,k}=\left(2k-1\right)^2\pi^2$, $k=1,...$, та відповідні власні функції

$$v_0\left(x,L_{0,0}\right)=1,\quad v_{0,k}\left(x,L_{0,0}\right)=\sqrt{2}\cos 2k\pi x,$$

$$v_{1,k}\left(x,L_{0,0}\right)=\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x,\ k=1,... \quad (36)$$

Власні функції оператора $L_{0,b,0,0}$ задачі (1), (33) визначимо співвідношеннями

$$v_0\left(x,L_{0,b,0,0}\right)=1,$$

$$v_{0,k}\left(x,L_{0,b,0,0}\right)=\sqrt{2}\cos 2k\pi x,\ k=1,2,... \quad (37)$$

$$v_{1,k}\left(x,L_{0,b,0,0}\right)=\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x-$$

$$-b(2k-1)^{-1}\pi^{-1}\sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x,\ k=1,2,... \quad (38)$$

Елементи біортогональної системи функцій $W\left(L_{0,b,0,0}\right)$ задамо виразами

$$w_0\left(x,L_{0,b,0,0}\right)=1-b\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$w_{1,k}\left(x,L_{0,b,0,0}\right)=\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x,\ k=1,2,... \quad (39)$$

$$w_{0,k}\left(x,L_{0,b,0,d}\right)=\sqrt{2}\cos 2k\pi x+$$

$$+b(2k\pi)^{-1}\sqrt{2}\sin 2k\pi x,\ k=1,... \quad (40)$$

Тому правильним є

Наслідок 3. Нехай $rgM_{1,1}=2$, $a=c=d=0$. Тоді для кожного $b\in\mathbb{R}$ власні значення оператора $L_{0,b,0,0}$ і оператора $L_{0,0}$ співпадають та система $V\left(L_{0,b,0,0}\right)$ власних функцій оператора $L_{0,b,0,0}$ є базисом Барі простору $L_2(0,1)$. Елементи біортогональної системи функцій $W\left(L_{0,b,0,0}\right)$ визначені формулами (39), (40).

Якщо $d=0$, то крайові умови (17) визначено рівностями

$$\begin{cases} y'(0)-y'(1)+a(y(0)+y(1))=0,\\ y'(0)+y'(1)+c(y(0)+y(1))=0.\end{cases} \quad (41)$$

Із рівностей (18), якщо $d=0$, маємо спряжені крайові умови

$$\begin{cases} z'(0)-z'(1)+a(z(0)+z(1))+c(z(0)-z(1))=0,\\ z'(0)+z'(1)=0.\end{cases} \quad (42)$$

Оператор $L_{a,0}$, який породжений для рівняння (1) крайовою задачею із самоспряженими умовами

$$\begin{cases} y'(0)-y'(1)+a(y(0)+y(1))=0,\\ y'(0)+y'(1)=0.\end{cases} \quad (43)$$

має дві послідовності власних значень $\lambda_{1,k}=(2k-1)^2\pi^2\in\sigma_0\left(L_{a,0}\right)$, $k=1,...$, $\lambda_{0,k}\in\sigma_1\left(L_{a,0}\right)$ та відповідні власні функції

$$v_{1,k}\left(x,L_{a,0}\right)=\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x,\quad v_{0,k}\left(x,L_{a,0}\right)=$$

$$=\mu_{0,k}\big(e^{i\rho_{0,k}x}+e^{i\rho_{0,k}(1-x)}\big),\ k=1,... \quad (44)$$

Власні функції оператора $L_{a,0,c,0}$ задачі (1), (41) визначено рівностями

$$v_{1,k}\left(x,L_{a,0,c,0}\right)=\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x,\ k=1,... \quad (45)$$

$$v_{0,k}\left(x,L_{a,0,c,0}\right)=v_{0,k}\left(x,L_{a,0}\right)+$$

$$+ci\mu_{0,k}\left(\rho_{0,k}\right)^{-1}\left(e^{i\rho_{1,k}x}-e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\right),\ k=1,... \quad (46)$$

Елементи біортогональної системи функцій $W\left(L_{a,0,c,0}\right)$ задано формулами

$$w_{1,k}\left(x,L_{a,0,c,0}\right)=$$

$$=\mu_{1,k}\big(e^{i\rho_{1,k}x}-e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\big),\ k=1,..., \quad (47)$$

$$v_{1,k}\left(x,L_{a,0}\right)=\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x+$$

$$+c(2k-1)^{-1}\pi^{-1}\sin(2k-1)\pi x,\ k=1,... \quad (48)$$

Отже, правильним є

Наслідок 4. Нехай $rgM_{1,1}=2$, $b=0$, $d=0$. Тоді за фіксованого $a\in\mathbb{R}$, для кожного $c\in\mathbb{R}$ власні значення оператора $L_{a,0,c,0}$ і оператора $L_{a,0}$ співпадають та система функцій $V\left(L_{a,0,c,0}\right)$ є базисом Барі простору $L_2(0,1)$. Елементи біортогональної системи функцій $W\left(L_{a,0,c,0}\right)$ визначено формулами (47), (48).

У випадку $a=0$, $d=0$ крайові умови (17) мають вигляд

$$\begin{cases} y'(0)-y'(1)=0, \\ y'(0)+y'(1)+c(y(0)+y(1))=0. \end{cases} \tag{49}$$

Відповідні самоспряжені умови (35) еквівалентні умовам Неймана (35).

Спряжені крайові умови до умов (49) визначено виразами

$$\begin{cases} z'(0)-z'(1)+c(z(0)-z(1))=0, \\ z'(0)+z'(1)=0. \end{cases} \tag{50}$$

Зауваження 3. Крайові умови (49), (50) заміною $y\leftrightarrow z$, $b\leftrightarrow c$ переводяться у крайові умови (33), (34).

Із зауваження 3 маємо подання власних функцій оператора $L_{0,0,c,0}$ та елементів біортогональної системи $W\left(L_{0,0,c,0}\right)$:

$$v_0\left(x,L_{0,0,c,0}\right)=1-c\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$v_{1,k}\left(x,L_{0,0,c,0}\right)=\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x,\ k=1,2,... \tag{51}$$

$$v_{0,k}\left(x,L_{0,0,c,0}\right)=\sqrt{2}\cos 2k\pi x+$$

$$+c(2k\pi)^{-1}\sqrt{2}\sin 2k\pi x,\ k=1,2,... \tag{52}$$

$$w_0\left(x,L_{0,0,c,0}\right)=1,$$

$$w_{0,k}\left(x,L_{0,0,c,0}\right)=\sqrt{2}\cos 2k\pi x,\ k=1,2,..., \tag{53}$$

$$w_{1,k}\left(x,L_{0,0,c,0}\right)=\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x-$$

$$-c(2k-1)^{-1}\pi^{-1}\sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x,\ k=1,2,... \tag{54}$$

Отже, правильним є

Наслідок 5. Нехай $rgM_{1,1}=2$, $a=b=d=0$. Тоді для кожного $c\in\mathbb{R}$, власні значення оператора $L_{0,0,c,0}$ й оператора $L_{0,0}$ співпадають та система (51), (52) власних функцій оператора $L_{0,0,c,0}$ є базисом Барі простору $L_2(0,1)$. Елементи біортогональної системи функцій $W\left(L_{0,0,c,0}\right)$ визначено формулами (53), (54).

III. Крайові задачі з нерегулярними за Біркгофом умовами

Нехай $rgM_{1,1}=1$. Визначимо крайові умови (3) співвідношеннями

$$\begin{cases} g(y'(0)-y'(1))+h(y'(0)+y'(1))+ \\ \qquad +a(y(0)+y(1))+b(y(0)-y(1))=0, \\ c(y(0)+y(1))+d(y(0)-y(1))=0. \end{cases} \tag{55}$$

Припустимо, що $rgM_{0,0}=2$, $g=0$, $h=1$. Тоді крайові умови (55) задано виразами

$$\begin{cases} y'(0)+y'(1)+a(y(0)+y(1))+b(y(0)-y(1))=0, \\ c(y(0)+y(1))+d(y(0)-y(1))=0. \end{cases} \tag{56}$$

Розглянемо випадок $c=0$. Тоді $b=0$, $d=1$, $a\neq 0$ крайові умови (56) визначені формулами

$$\begin{cases} y'(0)+y'(1)+a(y(0)+y(1))=0, \\ y(0)-y(1)=0. \end{cases} \tag{57}$$

Відповідні самоспряжені умови еквівалентні умовам Діріхле

$$y(0)+y(1)=0, \quad y(0)-y(1)=0. \tag{58}$$

Нехай $L^1_{1,a}$ – оператор задачі (1), (57), $L^1_{0,1}$ – оператор задачі (1), (58), $V\left(L^1_{1,a}\right)$ та $V\left(L^1_{0,1}\right)$ – системи власних функцій цих операторів.

Зауваження 4. Крайові умови (57) нерегулярні за Біркгофом.

Теорема 4. *Нехай $rgM_{1,1}=1$, $rgM_{0,0}=2$, $g=0$, $c=0$. Тоді для кожного $a\in\mathbb{R}$ власні значення оператора $L^1_{1,a}$ й оператора $L^1_{0,1}$ співпадають. Система $V\left(L^1_{0,1}\right)$ та біортогональна система $W\left(L^1_{a,1}\right)$ є повними і мінімальними в просторі $L_2(0,1)$, але не є майже нормованими* [26].

☐ *Доведення.* Ізоспектральність операторів $L^1_{1,a}$ та $L^1_{0,1}$ доводиться, як у теоремі 3.

Оператор $L^1_{1,a}$ має власні значення $\lambda_{s,k}\left(L^1_{1,a}\right)=(2k-s)^2\pi^2$, $s=0,1$, $k=1,2,...$, та власні функції

$$v_{0,k}\left(x,L^1_{1,a}\right)=\sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x,\ k=1,2,..., \tag{59}$$

$$v_{1,k}\left(x,L^1_{1,a}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin 2k\pi x-2k\pi a^{-1}\cos 2k\pi x\right),\ k=1,2,... \tag{60}$$

Крайові умови, які є спряженими до умов (57), визначено виразами

$$\begin{cases} z(0)+z(1)=0, \\ z'(0)-z'(1)+a(z(0)-z(1))=0. \end{cases} \tag{61}$$

Елементи біортогональної до системи $V\left(L^1_{1,a}\right)$ системи $W\left(L^1_{1,a}\right)$ власних функцій задачі із спряженими крайовими умовами (61) задано формулами

$$w_{0,k}\left(x,L^1_{1,a}\right)=\sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x-$$

$$-a^{-1}(2k-1)\pi\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x,\ k=1,2,..., \tag{62}$$

$$w_{1,k}\left(x,L^1_{1,a}\right)=\sqrt{2}\sin 2k\pi x,\ k=1,2,... \tag{63}$$

Враховуючи, що повнота та мінімальність у просторі $L_2(0,1)$ системи $V\left(L^1_{1,a}\right)$ еквівалентна існуванню єдиної біортогональної системи $W\left(L^1_{1,a}\right)$ [26] переконуємось, що твердження теореми 4 правильне. ■

Припустимо, що $rgM_{0,0}=2$, $g=1$, $h=0$. Тому крайові умови (55) визначено співвідношеннями

$$\begin{cases} y'(0)-y'(1)+a(y(0)+y(1))+b(y(0)-y(1))=0, \\ c(y(0)+y(1))+d(y(0)-y(1))=0. \end{cases} \tag{64}$$

Розглянемо випадок $d = 0$. Тоді $a = 0$, $c = 1$, $b \neq 0$ та крайові умови (56) задано виразами

$$\begin{cases} y'(0) - y'(1) + b(y(0) - y(1)) = 0, \\ y(0) + y(1) = 0. \end{cases} \quad (65)$$

Відповідні самоспряжені умови еквівалентні умовам Діріхле (58).

Спряжені крайові умови визначені співвідношеннями

$$\begin{cases} z(0) + z'(1) + b(z(0) + z(1)) = 0, \\ z(0) - z(1) = 0. \end{cases} \quad (66)$$

Нехай $L^2_{1,b}$ – оператор задачі (1), (57), $V\left(L^2_{1,b}\right)$ – система власних функцій цього оператора.

Зауваження 5. Крайові умови (65) після заміни $a \leftrightarrow b$, $y \leftrightarrow z$ переходять в умови (60). Аналогічний зв'язок існує між співвідношеннями (57) та (66).

Враховуючи зауваження 5, власні функції оператора $L^2_{1,b}$ та елементи біортогональної системи $W\left(L^2_{1,b}\right)$ визначимо виразами

$$v_{0,k}\left(x, L^2_{1,b}\right) = \sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x -$$

$$-b^{-1}(2k-1)\pi\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x, \ k = 1, 2, ..., \quad (67)$$

$$v_{1,k}\left(x, L^2_{1,b}\right) = \sqrt{2}\sin 2k\pi x, \ k = 1, 2, ..., \quad (68)$$

$$w_{0,k}\left(x, L^2_{1,b}\right) = \sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x, \ k = 1, 2, ..., \quad (69)$$

$$w_{1,k}\left(x, L^2_{1,b}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin 2k\pi x - 2k\pi b^{-1}\cos 2k\pi x\right), \ k = 1, 2, ... \quad (70)$$

Тому з теореми 4 отримуємо

Наслідок 6. Нехай $rgM_{1,1} = 1$, $rgM_{0,0} = 2$, $g = 0$, $c = 0$. Тоді для кожного $b \in \mathbb{R}$ власні значення оператора $L^2_{1,b}$ і оператора $L^1_{0,1}$ співпадають. Система $V\left(L^2_{1,b}\right)$ та біортогональна система $W\left(L^2_{1,b}\right)$ є повними і мінімальними в просторі $L_2(0,1)$, але не є майже нормованими.

Отже, в роботі отримано такі результати:

1. Вивчено самоспряжені задачі, оператори яких розщеплюються на просторах симетричних та антисиметричних функцій.

2. Досліджено випадки сильно регулярних та нерегулярних несамоспряжених збурень таких задач.

3. Сформульовано достатні умови повноти та базисності за Ріссом системи власних функцій досліджуваних задач.

Література

[1] *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – **9**. – P. 219–231.

[2] *Birkhoff G. D.* Boundary value and expansions problems of ordinary linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – **9**. – P. 373–395.

[3] *Tamarkin J.* Sur Quelques Point de la Theorie des Equation Differentielles Lineaires Ordinaires et sur la Generalisation de la serie de Fourier // Rend. Circ. Matem. Palermo – 1912. – **3**. – P. 345–382.

[4] *Tamarkin J.* Some general problem of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary function in series of fundamental // Math. Z. – 1927. – **1**. – P. 1–54.

[5] *Stone M. H.* A comparison on the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – **29**. – P. 695–761.

[6] *Stone M. H.* Irregulal differential systems on order two and the relater expansion problems // Trans. Amer. Soc. – 1927. – **30**. – P. 23–53.

[7] *Михайлов В. П.* О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // ДАН СССР – 1962. – **144**, № 5. – С. 981–984.

[8] *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Известия высших учебных заведений. Математика – 1964. – **39**, № 2. – С. 82–93.

[9] *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы Т. 3. Спектральные операторы – М.: Мир, 1974. – 662 с.

[10] *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // УМН. – 1979. – **34**, № 5. – С. 235–236.

[11] *Ильин В. А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Тр. МИАН СССР – 1979. – **142**. – Р. 157–164.

[12] *Ильин В. А., Крицков Л. В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил.: темат. обз. – 2006. – **96.** –ВИНИТИ. М. – С. 5–105.

[13] *Lang P., Locker J.* Spectral theory of two-point differential operators determined by -D2. I. Spectral properties // J. Math. Anal. Appl. – 1989. – **14**. – P. 538–558.

[14] *Lang P., Locker J.* Spectral theory of two-point differential operators determined by -D2. II. Analysis of cases // J. Math. Anal. Appl. –1989. – **14**. – P. 148–191.

[15] *Locker J.* The spectral theory of second order two-point differential operators. I. A priory estimates for

the eigenvalues and completeness // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. – 1992. – **12**. – P. 279–301.

[16] *Locker J.* The spectral theory of second order two-point differential operators. II. Asymptotic expansions and the characteristic determinant // J. Differential Equations. – 1994. – **11**. – P. 272–287.

[17] *Locker J.* The spectral theory of second order two-point differential operators. III. The eigenvalues and asymptotic formulas // Rocky Mountain J. Math. – 1996. – **2**. – P. 679–706.

[18] *Locker J.* The spectral theory of second order two-point differential operators. IV. The associated Projections and the subspace S1(L) // Rocky Mountain J. Math. – 1996. – **2**. – P. 1473–1498.

[19] *Дезин А. А.* Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Тр. МИАН. – 2000. – **229**. – С. 1–161.

[20] *Бассотти Л.* Линейные операторы, T-инвариантные относительно некоторой группы гомеоморфизмов // УМН. – 1988. – **43**, № 1. – С. 57–85.

[21] *Walker P. W.* A nonspectral Birkhoff-regular differential operator // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – **6**. – P. 187–188.

[22] *Мокин А. Ю.* О семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. – 2009. – **45**, № 1. – С. 126–141.

[23] *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 2. – С. 204–211.

[24] *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наукова думка, 1993. – 231 с.

[25] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 326 с.

[26] *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE TWO-DIFFERENTIATION OPERATOR. STRONGLY REGULAR AND NON-REGULAR NONLOCAL CONDITIONS

Ya. O. Baranetskij, P. I. Kalenyuk, P. L. Sokhan

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

We study self-adjoint problems whose operators are split on invariant subspaces induced by the involution operator $Iy(x) = y(1-x)$. Various (regular and irregular by Birkhoff) non self-adjoint perturbations of these problems are constructed. The spectral properties of operators corresponding to these perturbations are studied, in particular, eigenvalues and eigenfunctions are determined, completeness and basis property of the system of eigenfunctions are investigated.

Key words: ordinary differential equations, nonlocal problems, Birkhoff regularity, nonselfadjoint operator, involution operator, root functions, Riesz basis.

2000 MSC: 34B10, 34L10

UDK: 517.927.6+517.984.52