ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 871, 2017, с. 5–12

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 871, 2017, p. 5–12

ПРО ОДИН АНАЛОГ МЕТОДУ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Т. М. Антонова, С. М. Возна

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 30 листопада 2015 р.)

Досліджено збіжність гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду, який пов'язаний із задачею відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю раціональних наближень функції двох змінних. Використовуючи формулу різниці двох наближень та систему фундаментальних нерівностей для досліджуваного дробу, встановили оцінку похибки апроксимації значення гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду його підхідним дробом. Накладаючи додаткові умови на елементи дробу, отримали точнішу оцінку швидкості збіжності.

Ключові слова: гіллястий ланцюговий дріб, підхідний дріб, збіжність, похибка апроксимації, фундаментальні нерівності.

2000 MSC: 11A55, 11J70, 40A15

УДК: 517.524

Вступ

Одним із засобів побудови раціональних наближень функцій однієї та багатьох змінних є функціональні неперервні (ланцюгові) дроби та їх багатовимірні узагальнення – функціональні гіллясті ланцюгові дроби. Порівнюючи розвинення аналітичних функцій у ланцюгові дроби та степеневі ряди, виявили, що області збіжності ланцюгових дробів, у які розвиваються деякі аналітичні функції, значно ширші, ніж області збіжності відповідних степеневих рядів. Але для застосування неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень до наближення функцій однієї змінної чи багатьох змінних важливою є інформація не лише про області збіжності, але й про швидкість їх збіжності (аналіз похибок апроксимації). Один підхід, що вивчає таку інформацію для неперервних дробів, описано у монографії H. S. Wall'a [1]. Цей підхід використовує систему нерівностей для елементів дробу, які називаються фундаментальними нерівностями. Загальну теорію аналізу похибок апроксимації неперервних дробів, що передбачає вивчення областей включення, розробили W. B. Jones та W. J. Thron [2]. Аналоги методу фундаментальних нерівностей для багатовимірних узагальнень неперервних дробів наведено у монографіях Д. І. Боднара [3], Х. Й. Кучмінської [4] та у роботах [5, 6].

У цій роботі досліджено збіжність гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду, запропонованого W. Siemaszko при розв'язуванні задачі відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю раціональних наближень функції двох змінних [7]. Доведено теорему, у якій обґрунтовано один з аналогів методу фундаментальних нерівностей для досліджуваного дробу. Накладаючи додаткові умови на елементи дробу, отримали точнішу оцінку швидкості його збіжності.

I. Двовимірні відповідні гіллясті ланцюгові дроби

Одним з найпоширеніших методів розвинення аналітичних функцій багатьох змінних у гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) є побудова дробів, відповідних до заданих формальних кратних степеневих рядів. Функціональний ГЛД називається відповідним до формального степеневого ряду, якщо розвинення кожного його n-го наближення, $n = 0, 1, \ldots,$ у степеневий ряд збігається із заданим рядом до всіх членів степеня n включно.

Однак відповідні ГЛД будуються неоднозначно. Це зумовило виділення деяких класів функціональних ГЛД, у яких поставлена задача має єдиний розв'язок. Першу конструкцію відповідних ГЛД для функцій двох змінних запропонували Х. Й. Кучмінська [8], а також J. Murphy, M. R. O'Donohoe [9]:

$$a_{0,0}+\Phi_0+\mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i,i}z_1z_2}{1+\Phi_0},\ \Phi_i=\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i+j,i}z_1}{1}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i,i+j}z_2}{1}.$$

Такі дроби пізніше почали називати двовимірними неперервними дробами (ДНД). W. Siemaszko досліджував двовимірні відповідні ГЛД інших конструкцій [7]:

$$b_{0,0}+F_{0,0}+\mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty}\frac{b_{i,0}z_1}{1+F_{i,0}}+\mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty}\frac{b_{0,i}z_2}{1+F_{0,i}}, \qquad (1)$$

$$F_{i,j}=\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{b_{i+k,j}z_1z_2}{1},\qquad (2)$$

а також [10]

$$c_{0,0}+F_0+\mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty}\frac{c_{i,0}z_2}{1+F_i},\ F_j=\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{c_{j,k}z_1}{1}.\qquad (3)$$

Коефіцієнти $a_{i,j},\ b_{i,j},\ c_{i,j},\ i,j=0,1,\ldots,$ обчислюють за певними формулами залежно від коефіцієнтів заданого ряду, $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$.

ГЛД вигляду (3) були узагальнені на випадок N змінних і отримали назву ГЛД з нерівнозначними змінними, а у випадку фіксованих значень змінних – ГЛД спеціального вигляду [11]. Найменш вивчені ГЛД вигляду (1)-(2).

II. Гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду. Основні поняття. Постановка задачі

У цій роботі об'єктом дослідження є нескінченні ГЛД вигляду

$$b_0+F_{0,0}+\mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i,0}}{b_{i,0}+F_{i,0}}+\mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{0,i}}{b_{0,i}+F_{0,i}},\qquad (4)$$

де $F_{i,j}$ – звичайні ланцюгові (неперервні) дроби

$$F_{i,j}=\mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty}\frac{a_{p+i,p+j}}{b_{p+i,p+j}},\ i=0,1,\ldots,\ j=0,1,\ldots,\qquad (5)$$

а $b_0,\ a_{k,j},\ b_{k,j},\ \ j=0,1,\ldots,\ k=0,1,\ldots,\ k+j\geq 1$ — комплексні сталі або комплекснозначні функції двох комплексних змінних z_1,z_2, визначені в області $D\subset\mathbb{C}^2$. ГЛД, всі елементи якого є числа, називатимемо числовим ГЛД спеціального вигляду (типу Siemaszko). Якщо серед елементів ГЛД є функції комплексних змінних z_1,z_2, то такий ГЛД називатимемо функціональним ГЛД спеціального вигляду (типу Siemaszko).

n-е наближення (n-й підхідний дріб за Siemaszko) ГЛД (4)–(5) означається так:

$$f_0=b_0,\quad f_n=b_0+F_{0,0}^{([n/2])}+$$

$$+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\frac{a_{i,0}}{b_{i,0}+F_{i,0}^{([(n-i)/2])}}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\frac{a_{0,i}}{b_{0,i}+F_{0,i}^{([(n-i)/2])}},\qquad (6)$$

де $n=1,2,\ldots$, $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α,

$$F_{i,j}^{(0)}=0,\quad F_{i,j}^{(k)}=\mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{k}\frac{a_{p+i,p+j}}{b_{p+i,p+j}},\qquad (7)$$

$$i=0,1,\ldots,\ j=0,1,\ldots,\ k=1,2,\ldots.$$

Залишками наближень ГЛД (4)–(5) називають такі вирази:

$$Q_{i,0}^{(0)}=b_{i,0},\ Q_{i,0}^{(k+1)}=b_{i,0}+F_{i,0}^{([(k+1)/2])}+\frac{a_{i+1,0}}{Q_{i+1,0}^{(k)}},\qquad (8)$$

$$i=1,2,...,\ k=0,1,\ldots,$$

$$Q_{0,i}^{(0)}=b_{0,i},\ Q_{0,i}^{(k+1)}=b_{0,i}+F_{0,i}^{([(k+1)/2])}+\frac{a_{0,i+1}}{Q_{0,i+1}^{(k)}},\qquad (9)$$

$$i=1,2,...,\ k=0,1,\ldots.$$

а залишками наближень (7) звичайних ланцюгових дробів (5) вирази

$$Q_{k+i,k}^{(0)}=b_{k+i,k},\ Q_{k+i,k}^{(p+1)}=b_{k+i,k}+\frac{a_{k+i+1,k+1}}{Q_{k+i+1,k+1}^{(p)}},\qquad (10)$$

$$k=1,2,...,\ i=0,1,\ldots,\ p=0,1,\ldots,$$

$$Q_{k,k+i}^{(0)}=b_{k,k+i},\ Q_{k,k+i}^{(p+1)}=b_{k,k+i}+\frac{a_{k+1,k+i+1}}{Q_{k+1,k+i+1}^{(p)}},\qquad (11)$$

$$k=1,2,...,\ i=0,1,\ldots,\ p=0,1,\ldots.$$

Враховуючи позначення (8)–(9), можна записати:

$$f_n=b_0+F_{0,0}^{([n/2])}+\frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(n-1)}}+\frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(n-1)}},\ n=1,2,...,\qquad (12)$$

або

$$f_1=b_0+\frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(0)}}+\frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(0)}},$$

$$f_n=b_0+\frac{a_{1,1}}{Q_{1,1}^{([n/2]-1)}}+\frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(n-1)}}+\frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(n-1)}},\ n=2,3,....\qquad (13)$$

Вважається, що наближення f_k мають сенс, якщо при згортанні дробу (обчисленні його залишків за формулами (8)–(9)) не виникає невизначеність типу $\frac{0}{0}$ (припускається, що $\frac{1}{0}=\infty$, $\frac{1}{\infty}=0$ і $\frac{\alpha_1}{0}+\ldots+\frac{\alpha_m}{0}=\frac{0}{0}$, якщо $m>1$).

ГЛД (4)–(5) називається збіжним, якщо, починаючи з деякого номера n_0, всі його наближення мають сенс й існує скінченна границя $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$. Значення цієї границі вважається значенням збіжного ГЛД.

Величина $|f-f_k|$ називається похибкою наближення (похибкою апроксимації) значення ГЛД (4)–(5) його k-м підхідним дробом.

Говорять, що функціональний ГЛД (4)–(5) рівномірно збігається в області D, якщо, починаючи з деякого номера n_0, всюди в D його наближення $f_k=f_k(z_1,z_2)$, $k\geq n_0$, мають сенс і скінченні, і для довільного ε існує такий номер $n_1\geq n_0$, що для всіх $n,m\geq n_1$ і довільних $(z_1,z_2)\in D$ виконується нерівність

$$|f_n-f_m|<\varepsilon.$$

Завдання цієї роботи – встановити умови, виконання яких не тільки забезпечує рівномірну збіжність функціональних ГЛД вигляду (4)–(5), але й дає змогу оцінити швидкість такої збіжності.

III. Дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду.

Одним з методів дослідження збіжності, який дає змогу оцінювати похибки апроксимації гіллястих ланцюгових дробів загального вигляду, є метод фундаментальних нерівностей [3, с. 53]. Аналоги цього методу встановлено і для ДНД [4, с. 132], і для ГЛД вигляду (3) [5, 6]. Для цього істотно використовуються формули різниці двох наближень досліджуваних дробів. Для ГЛД вигляду (4)–(5) у монографії [3, с. 156] наведено таку формулу:

$$f_n - f_m = F_{0,0}^{([n/2])} - F_{0,0}^{([m/2])} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i \left(F_{i,0}^{([(n-i)/2])} - F_{i,0}^{([(m-i)/2])}\right) \prod\limits_{j=1}^{i} a_{j,0}}{\prod\limits_{j=1}^{i} Q_{j,0}^{(n-j)} Q_{j,0}^{(m-j)}} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i \left(F_{0,i}^{([(n-i)/2])} - F_{0,i}^{([(m-i)/2])}\right) \prod\limits_{j=1}^{i} a_{0,j}}{\prod\limits_{j=1}^{i} Q_{0,j}^{(n-j)} Q_{0,j}^{(m-j)}} +$$

$$+\frac{(-1)^m \prod\limits_{j=1}^{m+1} a_{j,0}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1} Q_{j,0}^{(n-j)} \prod\limits_{j=1}^{m} Q_{j,0}^{(m-j)}} + \frac{(-1)^m \prod\limits_{j=1}^{m+1} a_{0,j}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1} Q_{0,j}^{(n-j)} \prod\limits_{j=1}^{m} Q_{0,j}^{(m-j)}},$$

$$n > m. \tag{14}$$

Формулу різниці двох наближень неперервних дробів (5) можна записати у вигляді

$$F_{i,j}^{(p)} - F_{i,j}^{(r)} = (-1)^r \frac{\prod\limits_{k=1}^{r+1} a_{i+k,j+k}}{\prod\limits_{k=1}^{r+1} Q_{i+k,j+k}^{(p-k)} \prod\limits_{k=1}^{r} Q_{i+k,j+k}^{(r-k)}}, \tag{15}$$

$$p > r;\ r, i, j = 0, 1, \ldots.$$

Формули (14)–(15) встановлено за припущення, що значення всіх залишків $Q_{0,k}^{(p)}, Q_{k,0}^{(p)},\ Q_{i,j}^{(r)}, Q_{j,i}^{(r)}$, які входять у ці формули, не дорівнюють 0.

Сформулюємо та доведемо теорему, у якій обґрунтовано один з аналогів методу фундаментальних нерівностей для дослідження збіжності ГЛД (4)–(5).

Вважатимемо, що для ГЛД (4)–(5) справджуються фундаментальні нерівності, якщо

$$Q_{i+k,k}^{(p)} \neq 0,\ Q_{k,k+i}^{(p)} \neq 0,\ Q_{k,0}^{(p)} \neq 0,\ Q_{0,k}^{(p)} \neq 0, \tag{16}$$

$$i = 0, 1, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots,\ p = 0, 1, \ldots,$$

та існують такі додатні сталі M, $M_{1,0}$, $M_{0,1}$, H', H'', ρ_j, ρ'_j, ρ''_j, $\rho_{j,0}$, $\rho_{0,j}$, $j = 1, 2, \ldots$, що

$$\frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_{1,1}^{(p)}\right|} \le M,\ \frac{|a_{1,0}|}{\left|Q_{1,0}^{(p)}\right|} \le M_{1,0},\ \frac{|a_{0,1}|}{\left|Q_{0,1}^{(p)}\right|} \le M_{0,1},\ p = 0, 1, \ldots, \tag{17}$$

$$\frac{|a_{k+j,k}|}{\left|Q_{k+j,k}^{(m)} Q_{k+j-1,k-1}^{(m+1)}\right|} \le \rho'_k,\ \frac{|a_{k,k+j}|}{\left|Q_{k,k+j}^{(m)} Q_{k-1,k+j-1}^{(m+1)}\right|} \le \rho''_k,$$

$$k = 2, 3, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots,\ m = 0, 1, \ldots, \tag{18}$$

$$\frac{|a_{k,k}|}{\left|Q_{k,k}^{(m)} Q_{k-1,k-1}^{(m+1)}\right|} \le \rho_k,\ k = 2, 3, \ldots, m = 0, 1, \ldots, \tag{19}$$

$$\frac{|a_{j+1,0}|}{\left|Q_{j+1,0}^{(p)} Q_{j,0}^{(p+1)}\right|} \le \rho_{j+1,0},\ j = 1, 2, \ldots, p = 0, 1, \ldots, \tag{20}$$

$$\frac{|a_{0,j+1}|}{\left|Q_{0,j+1}^{(p)} Q_{0,j}^{(p+1)}\right|} \le \rho_{0,j+1},\ j = 1, 2, \ldots, p = 0, 1, \ldots, \tag{21}$$

$$\frac{|a_{k+1,1}|}{\left|Q_{k+1,1}^{([n/2]-1)} Q_{k,0}^{(n)}\right|} \le H',\ \frac{|a_{1,k+1}|}{\left|Q_{1,k+1}^{([n/2]-1)} Q_{0,k}^{(n)}\right|} \le H'',$$

$$k = 1, 2, \ldots, n = 2, 3, \ldots. \tag{22}$$

Теорема 1. *Нехай для функціонального ГЛД* (4)–(5) *справджуються фундаментальні нерівності* (16)–(22)*, причому*

$$\rho'_j \le 1,\ \rho''_j \le 1,\ \rho_{j,0} \le 1,\ \rho_{0,j} \le 1,\ j = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

$$\lim_{p\to\infty} \prod_{j=1}^{p} \rho_{j+1} = 0,\ \lim_{p\to\infty} p \prod_{j=1}^{p} \rho'_{j+1} = 0,\ \lim_{p\to\infty} p \prod_{j=1}^{p} \rho''_{j+1} = 0, \tag{24}$$

$$\lim_{p\to\infty} p \prod_{j=1}^{p} \rho_{j+1,0} = 0,\ \lim_{p\to\infty} p \prod_{j=1}^{p} \rho_{0,j+1} = 0. \tag{25}$$

Тоді ГЛД (4)–(5) *рівномірно збігається в області D, і швидкість його збіжності характеризується нерівністю*

$$|f - f_{2p}| \le H' M_{1,0} p \left(\prod_{j=2}^{[p/2]+1} \rho'_j + \prod_{j=2}^{p+1} \rho_{j,0}\right) +$$

$$+M_{1,0} \prod_{j=2}^{2p+1} \rho_{j,0} + H'' M_{0,1} p \left(\prod_{j=2}^{[p/2]+1} \rho''_j + \prod_{j=2}^{p+1} \rho_{0,j}\right) +$$

$$+M_{0,1} \prod_{j=2}^{2p+1} \rho_{0,j} + M_{1,1} \prod_{j=2}^{p+1} \rho_j,\ p = 2, 3, \ldots. \tag{26}$$

□ *Доведення.* Застосуємо схему доведення ознаки збіжності двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами, розглянутої у роботі [12]. З формули (14) випливає, що

$$|f_n - f_{2p}| \le \left|F_{0,0}^{([n/2])} - F_{0,0}^{(p)}\right| +$$

$$+\sum_{i=1}^{2p} \frac{\left|F_{i,0}^{([(n-i)/2])} - F_{i,0}^{([(2p-i)/2])}\right| \prod\limits_{j=1}^{i} |a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{i} \left|Q_{j,0}^{(n-j)} Q_{j,0}^{(2p-j)}\right|} +$$

$$+\frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}|Q_{j,0}^{(n-j)}|\prod\limits_{j=1}^{2p}|Q_{j,0}^{(2p-j)}|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2p}\frac{\left|F_{0,i}^{([(n-i)/2])}-F_{0,i}^{([(2p-i)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{i}|a_{0,j}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|Q_{0,j}^{(n-j)}Q_{0,j}^{(2p-j)}\right|}+$$

$$+\frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}|a_{0,j}|}{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}|Q_{0,j}^{(n-j)}|\prod\limits_{j=1}^{2p}|Q_{0,j}^{(2p-j)}|}. \tag{27}$$

Використовуючи відому методику [3, с. 54] і умови (17)–(19), матимемо:

$$\left|F_{i,0}^{(p)}-F_{i,0}^{(2r)}\right|\le\frac{|a_{i+1,1}|}{\left|Q_{i+1,1}^{(p-1)}\right|}\prod_{j=2}^{2r+1}\rho_j', \tag{28}$$

$$p>2r;\ r=0,1,\ldots,\ i=1,2,\ldots,$$

$$\left|F_{i,0}^{(p)}-F_{i,0}^{((2r-1))}\right|\le\frac{|a_{i+1,1}|}{\left|Q_{i+1,1}^{(2r-2)}\right|}\prod_{j=2}^{2r}\rho_j', \tag{29}$$

$$p>2r-1;\ r=1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,$$

$$\left|F_{0,0}^{(p)}-F_{0,0}^{((r))}\right|\le M\prod_{j=2}^{r+1}\rho_j, \tag{30}$$

$$p>2r;\ r=1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots.$$

Беручи до уваги нерівності (17), (20), одержимо

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{2i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{2i}\left|Q_{j,0}^{(p-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2i-1}\left|Q_{j,0}^{(r-j)}\right|}=\frac{|a_{1,0}|}{\left|Q_{1,0}^{(r-1)}\right|}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{i}\frac{|a_{2j,0}|}{\left|Q_{2j-1,0}^{(p-2j+1)}Q_{2j,0}^{(p-2j)}\right|}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|a_{2j+1,0}|}{\left|Q_{2j,0}^{(r-2j)}Q_{2j+1,0}^{(r-2j-1)}\right|}\le$$

$$\le M_{1,0}\prod_{j=2}^{2i}\rho_{j,0},\ i=1,2,\ldots,\ p\ge 2i,\ r\ge 2i-1, \tag{31}$$

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{2i+1}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{2i+1}\left|Q_{j,0}^{(p-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{2i}\left|Q_{j,0}^{(r-j)}\right|}=\frac{|a_{1,0}|}{\left|Q_{1,0}^{(p-1)}\right|}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{i}\frac{|a_{2j,0}|}{\left|Q_{2j-1,0}^{(r-2j+1)}Q_{2j,0}^{(r-2j)}\right|}\prod_{j=1}^{i}\frac{|a_{2j+1,0}|}{\left|Q_{2j,0}^{(p-2j)}Q_{2j+1,0}^{(p-2j-1)}\right|}\le$$

$$\le M_{1,0}\prod_{j=2}^{2i+1}\rho_{j,0},\ p\ge 2i+1,\ r\ge 2i,\ i=1,2,\ldots. \tag{32}$$

Оцінимо з урахуванням нерівностей (28)–(29) суму

$$S_{1,2p}=\sum_{i=1}^{2p}\frac{\left|F_{i,0}^{([(n-i)/2])}-F_{i,0}^{([(2p-i)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(2p-j)}\right|}.$$

Спочатку розглянемо випадок, коли $p=2m$.

$$S_{1,4m}=\sum_{i=1}^{4m}\frac{\left|F_{i,0}^{([(n-i)/2])}-F_{i,0}^{([(4m-i)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\left|F_{4i-3,0}^{([(n-4i+3)/2])}-F_{4i-3,0}^{([(4m-4i+3)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i-3}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-3}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left|F_{4i-2,0}^{([(n-4i+2)/2])}-F_{4i-2,0}^{([(4m-4i+2)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i-2}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-2}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left|F_{4i-1,0}^{([(n-4i+1)/2])}-F_{4i-1,0}^{([(4m-4i+1)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i-1}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-1}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left|F_{4i,0}^{([(n-4i)/2])}-F_{4i,0}^{([(4m-4i)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|}\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{m}\frac{|a_{4i-2,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+2}\rho_j'}{\left|Q_{4i-2,1}^{(2m-2i)}\right|}\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i-3}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-3}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{|a_{4i-1,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+2}\rho_j'}{\left|Q_{4i-1,1}^{(2m-2i)}\right|}\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i-2}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-2}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{|a_{4i,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+1}\rho_j'}{\left|Q_{4i,1}^{([(n-4i+1)/2]-1)}\right|}\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i-1}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-1}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{|a_{4i+1,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+1}\rho_j'}{\left|Q_{4i+1,1}^{([(n-4i)/2]-1}\right|}\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{|a_{4i-2,1}|}{\left|Q_{4i-2,1}^{(2m-2i)}Q_{4i-3,0}^{(4m-4i+3)}\right|}\prod_{j=2}^{2m-2i+2}\rho_j'\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i-3}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-3}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i-4}\left|Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{|a_{4i-1,1}|}{\left|Q_{4i-1,1}^{(2m-2i)}Q_{4i-2,0}^{(4m-4i+2)}\right|}\prod_{j=2}^{2m-2i+2}\rho'_j\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i-2}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-2}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i-3}\left|Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{|a_{4i,1}|}{\left|Q_{4i,1}^{([(n-4i+1)/2]-1)}Q_{4i-1,0}^{(n-4i+1)}\right|}\prod_{j=2}^{2m-2i+1}\rho'_j\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i-1}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-1}\left|Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i-2}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{|a_{4i+1,1}|}{\left|Q_{4i+1,1}^{([(n-4i)/2]-1}Q_{4i,0}^{(n-4i)}\right|}\prod_{j=2}^{2m-2i+1}\rho'_j\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i}\left|Q_{j,0}^{(4m-j)}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i-1}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}\right|}.$$

Далі враховуємо ще й нерівності (31), (32):

$$S_{1,4m}\le\sum_{i=1}^{m}M_{1,0}\frac{|a_{4i-2,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+2}\rho'_j\prod\limits_{j=2}^{4i-3}\rho_{j,0}}{\left|Q_{4i-2,1}^{(2m-2i)}Q_{4i-3,0}^{(4m-4i+3)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}M_{1,0}\frac{|a_{4i-1,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+2}\rho'_j\prod\limits_{j=2}^{4i-2}\rho_{j,0}}{\left|Q_{4i-1,1}^{(2m-2i)}Q_{4i-2,0}^{(4m-4i+2)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}M_{1,0}\frac{|a_{4i,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+1}\rho'_j\prod\limits_{j=2}^{4i-1}\rho_{j,0}}{\left|Q_{4i,1}^{([(n-4i+1)/2]-1)}Q_{4i-1,0}^{(n-4i+1)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}M_{1,0}\frac{|a_{4i+1,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+1}\rho'_j\prod\limits_{j=2}^{4i}\rho_{j,0}}{\left|Q_{4i+1,1}^{([(n-4i)/2])-1}Q_{4i,0}^{(n-4i)}\right|}\le$$

$$\le H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=2}^{2m-2i+2}\rho'_j\left(\prod_{j=2}^{4i-3}\rho_{j,0}+\prod_{j=2}^{4i-2}\rho_{j,0}\right)+$$

$$+H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=2}^{2m-2i+1}\rho'_j\left(\prod_{j=2}^{4i-1}\rho_{j,0}+\prod_{j=2}^{4i}\rho_{j,0}\right)=$$

$$=H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=2}^{[(4m-4i+3)/2]+1}\rho'_j\prod_{j=2}^{4i-3}\rho_{j,0}+$$

$$+H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=2}^{[(4m-4i+2)/2]+1}\rho'_j\prod_{j=2}^{4i-2}\rho_{j,0}+$$

$$+H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=2}^{[(4m-4i+1)/2]+1}\rho'_j\prod_{j=2}^{4i-1}\rho_{j,0}+$$

$$+H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=2}^{[(4m-4i)/2]+1}\rho'_j\prod_{j=2}^{4i}\rho_{j,0}=$$

$$=H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{4m}\prod_{j=2}^{[(4m-i)/2]+1}\rho'_j\prod_{j=2}^{i}\rho_{j,0}$$

Отже,

$$S_{1,4m}\le H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{4m}\prod_{j=2}^{[(4m-i)/2]+1}\rho'_j\prod_{j=2}^{i}\rho_{j,0}.\tag{33}$$

Нарешті, беручи до уваги умови (23), отримаємо

$$S_{1,4m}\le H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{2m}\prod_{j=2}^{[(4m-i)/2]+1}\rho'_j+$$

$$+H'M_{1,0}\sum_{i=2m+1}^{4m}\prod_{j=2}^{i}\rho_{j,0}\le$$

$$\le H'M_{1,0}\left(\sum_{i=1}^{2m}\prod_{j=2}^{[(4m-2m)/2]+1}\rho'_j+\sum_{i=2m+1}^{4m}\prod_{j=2}^{2m+1}\rho_{j,0}\right)\le$$

$$\le 2mH'M_{1,0}\left(\prod_{j=2}^{m+1}\rho'_j+\prod_{j=2}^{2m+1}\rho_{j,0}\right).\tag{34}$$

Нехай тепер $p=2m+1$. Діючи у той самий спосіб, що й у попередньому випадку, оцінимо суму $S_{1,4m+2}$.

$$\sum_{i=1}^{4m+2}\frac{\left|F_{i,0}^{([(n-i)/2])}-F_{i,0}^{([(4m+2-i)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m+2-j)}\right|}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m+1}\frac{\left|F_{4i-3,0}^{([(n-4i+3)/2])}-F_{4i-3,0}^{([(4m-4i+5)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i-3}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-3}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m+2-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m+1}\frac{\left|F_{4i-2,0}^{([(n-4i+2)/2])}-F_{4i-2,0}^{([(4m-4i+4)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i-2}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-2}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m+2-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left|F_{4i-1,0}^{([(n-4i+1)/2])}-F_{4i-1,0}^{([(4m-4i+3)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i-1}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-1}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m+2-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left|F_{4i,0}^{([(n-4i)/2])}-F_{4i,0}^{([(4m-4i+2)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{4i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m+2-j)}\right|}\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{m+1}\frac{|a_{4i-2,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+3}\rho'_j}{\left|Q_{4i-2,1}^{([(n-4i+3)/2]-1)}\right|}\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i-3}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-3}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m+2-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m+1}\frac{|a_{4i-1,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+3}\rho'_j}{\left|Q_{4i-1,1}^{([(n-4i+3)/2]-1)}\right|}\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i-2}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-2}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m+2-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{|a_{4i,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+2}\rho'_j}{\left|Q_{4i,1}^{(2m-2i)}\right|}\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i-1}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i-1}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m+2-j)}\right|}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{|a_{4i+1,1}|\prod\limits_{j=2}^{2m-2i+2}\rho'_j}{\left|Q_{4i+1,1}^{(2m-2i)}\right|}\frac{\prod\limits_{j=1}^{4i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{4i}\left|Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(4m+2-j)}\right|}\le$$

$$\le H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m+1}\prod_{j=2}^{2m-2i+3}\rho'_j\left(\prod_{j=2}^{4i-3}\rho_{j,0}+\prod_{j=2}^{4i-2}\rho_{j,0}\right)+$$

$$+H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=2}^{2m-2i+2}\rho'_j\left(\prod_{j=2}^{4i-1}\rho_{j,0}+\prod_{j=2}^{4i}\rho_{j,0}\right)=$$

$$=H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m+1}\prod_{j=2}^{[(4m-4i+5)/2]+1}\rho'_j\prod_{j=2}^{4i-3}\rho_{j,0}+$$

$$+H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m+1}\prod_{j=2}^{[(4m-4i+4)/2]+1}\rho'_j\prod_{j=2}^{4i-2}\rho_{j,0}+$$

$$+H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=2}^{[(4m-4i+3)/2]+1}\rho'_j\prod_{j=2}^{4i-1}\rho_{j,0}+$$

$$+|H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=2}^{[(4m-4i+2)/2]+1}\rho'_j\prod_{j=2}^{4i}\rho_{j,0}.$$

Отже,

$$S_{1,4m+2}=H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{4m+2}\prod_{j=2}^{[(4m+2-i)/2]+1}\rho'_j\prod_{j=2}^{i}\rho_{j,0},\quad(35)$$

а з урахуванням умов (23) –

$$S_{1,4m+2}\le H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{2m+1}\prod_{j=2}^{[(4m+2-i)/2]+1}\rho'_j+$$

$$+H'M_{1,0}\sum_{i=2m+2}^{4m+2}\prod_{j=2}^{i}\rho_{j,0}\le$$

$$\le(2m+1)H'M_{1,0}\left(\prod_{j=2}^{m+1}\rho'_j+\prod_{j=2}^{2m+2}\rho_{j,0}\right),$$

тобто

$$S_{1,4m+2}\le(2m+1)H'M_{1,0}\left(\prod_{j=2}^{m+1}\rho'_j+\prod_{j=2}^{2m+2}\rho_{j,0}\right).\quad(36)$$

Із нерівностей (34), (36) випливає, що

$$S_{1,2p}\le H'M_{1,0}p\left(\prod_{j=2}^{[p/2]+1}\rho'_j+\prod_{j=2}^{p+1}\rho_{j,0}\right).\quad(37)$$

Використовуючи аналогічну методику і умови теореми, можна переконатись у правильності нерівності

$$S_{2,2p}=\sum_{i=1}^{2p}\frac{\left|F_{0,i}^{([(n-i)/2])}-F_{0,i}^{([(2p-i)/2])}\right|\prod\limits_{j=1}^{i}|a_{0,j}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|Q_{0,j}^{(n-j)}Q_{0,j}^{(2p-j)}\right|}\le$$

$$\le H''M_{0,1}p\left(\prod_{j=2}^{[p/2]+1}\rho''_j+\prod_{j=2}^{p+1}\rho_{0,j}\right).\quad(38)$$

Беручи до уваги нерівності (27), (30), (32), (37), (38), одержимо

$$|f_n-f_{2p}|\le H'M_{1,0}p\left(\prod_{j=2}^{[p/2]+1}\rho'_j+\prod_{j=2}^{p+1}\rho_{j,0}\right)+$$

$$+M_{1,0}\prod_{j=2}^{2p+1}\rho_{j,0}+H''M_{0,1}p\left(\prod_{j=2}^{[p/2]+1}\rho''_j+\prod_{j=2}^{p+1}\rho_{0,j}\right)+$$

$$+M_{0,1}\prod_{j=1}^{2p+1}\rho_{0,j}+M_{1,1}\prod_{j=1}^{p+1}\rho_j,\ n\ge 2p+1,\ p=1,2,\ldots.\quad(39)$$

Спрямовуючи у цій нерівності $p\to\infty$ і враховуючи умови (24), (25), доходимо висновку про збіжність ГЛД. Оцінка (26) випливає з нерівності (39), якщо $n\to\infty$. ■

Якщо для всіх натуральних $j=1,2,\ldots$

$$\rho_j=\rho<1,\ \rho'_j=\rho'<1,\ \rho''_j=\rho''<1,$$

$$\rho_{j,0}=\vartheta_1<1,\ \rho_{0,j}=\vartheta_2<1,$$

то умови (23)–(25) виконуються, а оцінка (26) набуває вигляду

$$|f-f_{2p}|\le H'M_{1,0}p\left((\rho')^{[p/2]}+\vartheta_1^p\right)+M_{1,0}\vartheta_1^{2p}+$$

$$+H''M_{0,1}p\left((\rho'')^{[p/2]}+\vartheta_2^p\right)+M_{0,1}\vartheta_2^{2p}+M_{1,1}\rho^p,$$

$$p=2,3,\ldots.$$

Зауважимо, що оцінку похибки наближення у цьому випадку можна уточнити.

Теорема 2. *Нехай для ГЛД* (4)–(5) *справджуються фундаментальні нерівності* (16)–(22)*, причому*

$$\rho_j' = \rho' < 1,\ \rho_j'' = \rho'' < 1,$$

$$\rho_{j,0} = \vartheta_1 < 1,\ \rho_{0,j} = \vartheta_2 < 1,\ j = 1, 2, \dots, \tag{40}$$

$$\lim_{p\to\infty} \prod_{j=1}^{p} \rho_{j+1} = 0. \tag{41}$$

Тоді ГЛД (4)–(5) *рівномірно збігається в області D, і швидкість його збіжності характеризується нерівністю*

$$|f_n - f_{2p}| \le M_{1,0}\left(H'(\vartheta_1+1)S_1 + \vartheta_1^{2p}\right) +$$

$$+M_{0,1}\left(H''(\vartheta_2+1)S_2 + \vartheta_2^{2p}\right) + M_{1,1}\prod_{j=2}^{p+1}\rho_j,$$

$$p = 2, 3, \dots, \tag{42}$$

де

$$\begin{array}{l} \delta_1 = \max(\rho', \vartheta_1^2),\ \hat{\delta}_1 = \min(\rho', \vartheta_1^2), \\ \delta_2 = \max(\rho'', \vartheta_2^2),\ \hat{\delta}_2 = \min(\rho'', \vartheta_2^2); \end{array} \tag{43}$$

$$S_i = \begin{cases} \dfrac{\delta_i^p}{\delta_i - \hat{\delta}_i}, & \text{якщо } \hat{\delta}_i < \delta_i, \\ p\delta_i^{p-1}, & \text{якщо } \hat{\delta}_i = \delta_i, \end{cases} \quad i = 1,\ 2. \tag{44}$$

□ *Доведення.* Як зазначено вище, збіжність ГЛД випливає з теореми 1. Для перевірки правильності оцінки (42) застосовуємо ту саму схему, що й для доведення теореми 1. З нерівностей (33), (35) і умов (40) випливає, що

$$S_{1,2p} \le H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{2p}(\rho')^{[(2p-i)/2]}\vartheta_1^{i-1} = H'M_{1,0}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{p}(\rho')^{[(2p-2i+1)/2]}\vartheta_1^{2i-2} + \sum_{i=1}^{p}(\rho')^{[(2p-2i)/2]}\vartheta_1^{2i-1}\right) =$$

$$= H'M_{1,0}\sum_{i=1}^{p}(\rho')^{p-i}(\vartheta_1+1)\vartheta_1^{2i-2} =$$

$$= H'M_{1,0}(\vartheta_1+1)\delta_1^{p-1}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\hat{\delta}_1}{\delta_1}\right)^{p-i} \le$$

$$\le H'M_{1,0}(\vartheta_1+1)S_1.$$

Аналогічно можна показати, що за умов теореми

$$S_{2,2p} \le H'M_{0,1}(\vartheta_2+1)S_2,$$

де $\delta_i,\ \hat{\delta}_i,\ S_i,\ i = 1,\ 2$, визначають згідно з (43), (44).

Тому

$$|f_n - f_{2p}| \le M_{1,0}\left(H'(\vartheta_1+1)S_1 + \vartheta_1^{2p}\right) +$$

$$+M_{0,1}\left(H''(\vartheta_2+1)S_2 + \vartheta_2^{2p}\right) + M_{1,1}\prod_{j=2}^{p+1}\rho_j,$$

$$p = 2, 3, \dots,$$

звідки при $n \to \infty$ випливає правильність оцінки (42). ■

Висновки

У роботі сформульовано один з аналогів фундаментальних нерівностей та доведено ознаку збіжності гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду (типу Siemaszko), що пов'язаний із задачею відповідності гіллястого ланцюгового дробу до формального подвійного степеневого ряду. Встановлено оцінку похибки наближення значення досліджуваного гіллястого ланцюгового дробу його підхідним дробом та з'ясовано, за яких умов її можна уточнити. Оскільки у фундаментальні нерівності входять залишки наближень гіллястого ланцюгового дробу, доцільно продовжити дослідження, щоб з'ясувати умови щодо елементів дробу, за яких фундаментальні нерівності справджуються. Також доцільно розглянути інші способи побудови наближень досліджуваного гіллястого ланцюгового дробу.

Література

[1] *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York : Van Nostrand, 1948. – 433 p.

[2] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.

[3] *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.

[4] *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.

[5] *Антонова Т. М.* Швидкість збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Волинський математичний вісник. – 1999. – 6. – С. 5–11.

[6] *Антонова Т. М., Боднар Д. І.* Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці ІМ НАН України. – 2000. – Т. 31. – С. 5–18.

[7] *Siemaszko W.* Branched continued fraction for double power series // J. Comp. and Appl. Math. – 1980. 6, № 2. – P. 121–125.

[8] *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614–618.

[9] *Murphy J., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comp. and Appl. Math. – 1978. – No 4. – P. 181–190.

[10] *Siemaszko W.* On some conditions for convergence of branched continued fraction. – Lecture Notes in Math., 1981, 888. – P. 363–370.

[11] *Баран О. Є.* Наближення функцій багатьох змінних гіллястими ланцюговими дробами з нерівнозначними змінними: дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Івано-Франківськ, 2014. – 146 с.

[12] *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Деякі достатні умови збіжності двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія математика і інформатика – 2008. – Вип. 16. – С. 5–15.

ON ONE ANALOGUE OF THE METHOD OF FUNDAMENTAL INEQUALITIES FOR RESEARCH OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS OF THE SPECIAL FORM

T. M. Antonova, S. M. Vozna

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

The paper is devoted to research of convergence of branched continued fraction of the special form, which is connected with the correspondence problem between a formal double power series and a sequence of the rational approximants of a function of two variables. By using the difference formula for two approximants and the system of fundamental inequalities for researched fraction, the estimation of truncation error for value of branched continued fraction of the special form by its approximant is established. By applying additional restriction on elements of fraction, more accurate estimation of the convergence speed is obtained.

Key words: branched continued fraction, approximant, convergence, truncation error, fundamental inequalities.

2000 MSC: 11A55, 11J70, 40A15

UDK: 517.524