ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА І МЕХАНІКА

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
**"Фізико-математичні науки"**
№ 871, 2017, с. 114–122

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
**"Physical and mathematical sciences"**
№ 871, 2017, p. 114–122

# ПРО ТЕРМОПРУЖНІСТЬ ПЛАСТИН, ПОДАТЛИВИХ НА ПОПЕРЕЧНІ ЗСУВИ ТА СТИСКАННЯ

О. О. Кільчинський[a], Є. В. Массалітіна[b]

[a]*Державний економіко-технологічний університет транспорту*
*вул. Лукашевича, 19, 03049, Київ, Україна*
[b]*Національний технічний університет України "КПІ"*
*просп. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна*

*(Отримано 25 травня 2017 р.)*

Розвинено уточнений наближений метод аналітичного дослідження напружено-деформованого стану ортотропних пластин. Ефективність методу підтверджено під час порівняння точного та наближеного розв'язків задачі термопружності для круглого циліндра.

**Ключові слова:** уточнений метод, анізотропна пластина, напружений стан, податливість на зсув та стискання.

**2000 MSC:** 74B05, 74E10, 74F10, 74G10, 74K20

**УДК:** 517.564/565

## Вступ

Аналітичні розв'язки задач про пружну рівновагу пластин та оболонок знаходяться, як правило, наближеними методами, основаними на можливості зведення вихідної тривимірної задачі до простішої двовимірної. Типовими методами такого зведення є метод гіпотез, метод розкладень у степеневий ряд, асимптотичний [1], [2]. Як один з можливих варіантів зведення тривимірної задачі до двовимірної пропонуємо метод пом'якшення нев'язок. Метод полягає у поєднанні розкладень у степеневий ряд із процедурою пом'якшення нев'язок – мінімізації можливих неузгодженостей оптимальним підбором параметрів деформування. Метод не потребує застосування гіпотез про геометрію деформування елемента нормалі до серединної поверхні, можливість нехтування окремими складовими тензора напружень тощо. Замість таких гіпотез автори вводять доказово обґрунтовані кінцеві співвідношення для визначення параметрів деформування у напрямку нормалі до серединної поверхні. Конкурентність методу підтверджено в роботах [3]–[5] на розрахунках пружної рівноваги прямокутної та круглої пластин під дією поверхневих навантажень. Нижче цей метод розвинено для розв'язання задач термопружності.

## I. Формулювання задачі

Розглянемо задачу про деформований та напружений стан пружної ортотропної пластини сталої товщини $h$ під дією об'ємних та поверхневих сил у неоднорідному температурному полі. Виберемо у просторі ортогональну систему координат $(\alpha, \beta, z)$ так, щоб координатна поверхня $(\alpha, \beta)$ збігалась із серединною площиною пластини, координата $z$ змінювалася по нормалі до серединної площини $(-0,5h \leq z \leq 0,5h)$, а головні напрямки пружності збігались з координатними лініями. Коефіцієнти Ламе для цих ліній позначимо через $H_1, H_2, H_3$. У вибраній системі координат коефіцієнти Ламе змінюються за законом:

$$H_1 = H_1(\alpha,\beta), H_2 = H_2(\alpha,\beta), H_3 = 1. \tag{1}$$

Проекції вектора переміщень для точок $(\alpha, \beta, z)$ пластини позначимо через $u_\alpha$, $u_\beta$, $u_z$. Через $e_\alpha$, $e_\beta$, $e_z$, $e_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha z}$, $e_{\beta z}$ та $\sigma_\alpha$, $\sigma_\beta$, $\sigma_z$, $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha z}$, $\tau_{\beta z}$ позначимо компоненти тензорів деформацій та напружень. Інтегральні характеристики напруженого стану – зусилля $T_1$, $T_2$, $S$, $N_1$, $N_2$ та моменти $M_1$, $M_2$, $G$ – визначимо за формулами:

$$T_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_\alpha dz, T_2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma_\beta dz, S = \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{\alpha\beta} dz, N_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{\alpha z} dz,$$

$$N_2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} \tau_{\beta z} dz, M_1 = \int_{-0,5h}^{0,5h} z\sigma_\alpha dz,$$

$$M_2 = \int_{-0,5h}^{0,5h} z\sigma_\beta dz, G = \int_{-0,5h}^{0,5h} z\tau_{\alpha\beta} dz. \tag{2}$$

Відповідно до впливу зовнішніх факторів на граничних поверхнях пластини переміщення (напруження) повинні задовольняти певну систему граничних умов, що однозначно визначають її деформований та напружений стан. Поставлена задача належить до крайових задач теорії пружності, з якою пов'язано чотири відомі [1], [7] групи рівнянь (їх наведемо нижче).

Перша група (співвідношення між деформаціями та переміщеннями):

$$e_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta}u_\beta,$$

$$e_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha}u_\alpha,$$

$$e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, e_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{u_\alpha}{H_1} + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{u_\beta}{H_2},$$

$$e_{\alpha z} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z},$$

$$e_{\beta z} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_z}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial z}. \qquad (3)$$

Друга група (диференціальні рівняння рівноваги у напруженнях):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2\sigma_\alpha) - \sigma_\beta\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \beta}(H_1^2\tau_{\alpha\beta}) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(H_1H_2\tau_{\alpha z}) + K_1H_1H_2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(H_1\sigma_\beta) - \sigma_\alpha\frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2^2\tau_{\alpha\beta}) + \qquad (4)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(H_1H_2\tau_{\beta z}) + K_2H_1H_2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2\tau_{\alpha z}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(H_1\tau_{\beta z}) + \frac{\partial}{\partial z}(H_1H_2\sigma_z) + K_3H_1H_2 = 0,$$

де $K_1, K_2, K_3$ – проекції вектора об'ємних сил на дотичні до координатних ліній $\alpha, \beta, z$.

Третя група (диференціальні рівняння рівноваги у зусиллях та моментах):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2T_1) - T_2\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \beta}(H_1^2S) =$$

$$= -H_1H_2\Big(\int_{-0,5h}^{0,5h} K_1dz + X_2\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(H_1T_2) - T_1\frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2^2S) =$$

$$-H_1H_2\Big(\int_{-0,5h}^{0,5h} K_2dz + Y_2\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2N_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(H_1N_2) = -H_1H_2\Big(\int_{-0,5h}^{0,5h} K_3dz + Z_2\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2M_1) - M_2\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \beta}(H_1^2G) =$$

$$= H_1H_2\Big(N_1 - hX_1 - \int_{-0,5h}^{0,5h} zK_1dz\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(H_1M_2) - M_1\frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2^2G) =$$

$$= H_1H_2\Big(N_2 - hY_1 - \int_{-0,5h}^{0,5h} zK_2dz\Big). \qquad (5)$$

У рівняннях системи (5) праві частини визначаються через проекції вектора об'ємних сил та задані граничні напруження на площинах $z = \mp 0,5h$ за формулами:

$$X_1 = 0,5(X^+ - X^-), \quad Y_1 = 0,5(Y^+ - Y^-),$$

$$Z_1 = 0,5(Z^+ - Z^-), \quad X_2 = X^+ + X^-,$$

$$Y_2 = Y^+ + Y^-, \quad Z_2 = Z^+ + Z^-,$$

$$X^- = -\tau_{\alpha z}\big|_{z=-0,5h}, \quad Y^- = -\tau_{\beta z}\big|_{z=-0,5h},$$

$$Z^- = -\sigma_z\big|_{z=-0,5h}, \quad X^+ = \tau_{\alpha z}\big|_{z=0,5h},$$

$$Y^+ = \tau_{\beta z}\big|_{z=0,5h}, \quad Z^+ = \sigma_z\big|_{z=0,5h}. \qquad (6)$$

Систему (5) і рівності (6) можна отримати, якщо кожне з рівнянь (4) домножити на степені $z^0$, $z^1$ та проінтегрувати по $z$ від $z = -0,5h$ до $z = 0,5h$, враховуючи співвідношення (2).

Четверта група (співвідношення термопружності закону Гука для ортотропного тіла):

$$e_\alpha = a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{13}\sigma_z + \alpha_{11}T, \quad e_{\beta z} = a_{44}\tau_{\beta z},$$

$$e_\beta = a_{12}\sigma_\alpha + a_{22}\sigma_\beta + a_{23}\sigma_z + \alpha_{22}T, \quad e_{\alpha z} = a_{55}\tau_{\alpha z},$$

$$e_z = a_{13}\sigma_\alpha + a_{23}\sigma_\beta + a_{33}\sigma_z + \alpha_{33}T, \quad e_{\alpha\beta} = a_{66}\tau_{\alpha\beta}, \qquad (7)$$

де $\alpha_{11}$, $\alpha_{22}$, $\alpha_{33}$ – коефіцієнти лінійного теплового розширення в напрямках $\alpha$, $\beta$, $z$ відповідно, $T$ – температура, що відраховується від первісного недеформованого стану пластини. Через $a_{ij}$ позначено коефіцієнти пружності, які можна подати через технічні сталі за формулами

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_2} = -\frac{\nu_{21}}{E_1}, a_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_3} = -\frac{\nu_{31}}{E_1},$$

$$a_{22} = \frac{1}{E_2}, a_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_3} = -\frac{\nu_{32}}{E_2}, a_{33} = \frac{1}{E_3},$$

$$a_{44} = \frac{1}{G_{23}}, a_{55} = \frac{1}{G_{13}}, a_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \qquad (8)$$

Сталі $E_1$, $E_2$, $E_3$ є модулями Юнга на розтягнення–стискання у напрямках $\alpha$, $\beta$, $z$; $G_{23}$, $G_{23}$, $G_{12}$ – модулями зсуву у поверхнях $\alpha = const$, $\beta = const$, $z = const$; $\nu_{12}$, $\nu_{21}$, $\nu_{13}$, $\nu_{31}$, $\nu_{23}$, $\nu_{32}$ – коефіцієнтами Пуассона (перший індекс позначає напрям поперечного стискання, другий – відповідний напрям сили розтягнення). Формули (7) можна подати також у вигляді:

$$\sigma_\alpha = b_{11}e_\alpha + b_{12}e_\beta + b_{13}e_z - \beta_{11}T, \quad \tau_{\beta z} = b_{44}e_{\beta z},$$

$$\sigma_\beta = b_{12}e_\alpha + b_{22}e_\beta + b_{23}e_z - \beta_{22}T, \quad \tau_{\alpha z} = b_{55}e_{\alpha z},$$

$$\sigma_z = b_{13}e_\alpha + b_{23}e_\beta + b_{33}e_z - \beta_{33}T, \quad \tau_{\alpha\beta} = b_{66}e_{\alpha\beta}. \qquad (9)$$

Справджуються співвідношення:

$$\beta_{11} = b_{11}\alpha_{11} + b_{12}\alpha_{22} + b_{13}\alpha_{33},$$

$$\beta_{22} = b_{12}\alpha_{11} + b_{22}\alpha_{22} + b_{23}\alpha_{33},$$

$$\beta_{33} = b_{13}\alpha_{11} + b_{23}\alpha_{22} + b_{33}\alpha_{33},$$

$$b_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{1-\tilde{\nu}^2}E_1, \quad b_{12} = \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{1-\tilde{\nu}^2}E_1,$$
$$b_{13} = \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{1-\tilde{\nu}^2}E_1, \quad b_{22} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{1-\tilde{\nu}^2}E_2,$$
$$b_{23} = \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{1-\tilde{\nu}^2}E_2, \quad b_{33} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{1-\tilde{\nu}^2}E_3,$$
$$b_{44} = G_{23}, \quad b_{55} = G_{13}, \quad b_{66} = G_{12},$$
$$\tilde{\nu}^2 = \nu_{12}\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{13} + 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}. \qquad (10)$$

Рівняння (1)–(10) становлять основу для подальшого наближеного методу, в якому, як і в усіх теоріях, що визначають напружений стан пластини лише за зусиллями та моментами, на торцевих поверхнях $\alpha = const$, $\beta = const$ умови за напруженнями також задовольняються інтегрально, але замість відомих [1] гіпотез теорії пластин та оболонок запропоновано застосовувати спеціальні кінцеві співвідношення, знайдені за процедурою пом'якшення нев'язок.

## II. Основні положення методу пом'якшення

### 1. Апроксимація переміщень та деформовано-напруженого стану

Визначаючи переміщення, деформації та напруження пластини, надалі розрізнятимемо вхідні характеристики, отримані безвідносно до рівнянь рівноваги (4) (ці характеристики позначатимемо додатковим верхнім індексом (1)), та вихідні характеристики, одержані з урахуванням рівнянь (4) (їх позначатимемо додатковим верхнім індексом (2)). Переміщення довільної точки ($\alpha$, $\beta$, $z$) пластини апроксимуватимемо законом:

$$u_\alpha = u_\alpha^{(1)} = u + z\phi, \quad u_\beta = u_\beta^{(1)} = v + z\psi,$$
$$u_z = u_z^{(1)} = w + z\varepsilon + 0,5z^2\chi, \qquad (11)$$

де $u$, $v$, $w$, $\phi$, $\psi$, $\varepsilon$, $\chi$ є параметрами деформування, функціями від $\alpha$, $\beta$. Звідси за формулами (3) виводимо функціональні залежності (лінійні та квадратичні відносно $z$), що визначають закон зміни деформацій. Тангенціальні деформації $e_\alpha$, $e_\beta$, $e_\gamma$ та поперечна деформація $e_\gamma$ змінюються за координатою $z$ (товщиною пластини) за лінійним законом:

$$e_\alpha = e_\alpha^{(1)} = \varepsilon_\alpha + z\varkappa_\alpha, \quad e_\beta = e_\beta^{(1)} = \varepsilon_\beta + z\varkappa_\beta,$$
$$e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}^{(1)} = \varepsilon_{\alpha\beta} + z\varkappa_{\alpha\beta}, \quad e_z = e_z^{(1)} = \varepsilon + z\chi, \qquad (12)$$

де

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}v, \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}u,$$
$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{u}{H_1} + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{v}{H_2},$$
$$\varkappa_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\psi, \varkappa_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\phi,$$
$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\phi}{H_1} + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\psi}{H_2}. \qquad (13)$$

Деформації поперечних зсувів $e_{\alpha z}$, $e_{\beta z}$ змінюються за товщиною за квадратичним законом:

$$e_{\alpha z} = e_{\alpha z}^{(1)} = \gamma_1 + z\delta_1 + z^2\eta_1, e_{\beta z} = e_{\beta z}^{(1)} = \gamma_2 + z\delta_2 + z^2\eta_2, \qquad (14)$$

де

$$\gamma_1 = \phi + \frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha}, \delta_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}, \eta_1 = \frac{1}{2H_1}\frac{\partial\chi}{\partial\alpha},$$
$$\gamma_2 = \psi + \frac{1}{H_2}\frac{\partial w}{\partial\beta}, \delta_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta}, \eta_2 = \frac{1}{2H_2}\frac{\partial\chi}{\partial\beta}. \qquad (15)$$

Закони зміни вхідних (неврівноважених) напружень виводимо за формулами (2), (7), (9), (12). Тангенціальні напруження отримаємо у вигляді:

$$\sigma_\alpha^{(1)} = \frac{1}{h}T_1 + \frac{12z}{h^3}M_1 - \beta_{11}\mathring{T},$$
$$\sigma_\beta^{(1)} = \frac{1}{h}T_2 + \frac{12z}{h^3}M_2 - \beta_{22}\mathring{T},$$
$$\tau_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{h}S + \frac{12z}{h^3}G \qquad (16)$$

де

$$T_1 = h(b_{11}\varepsilon_\alpha + b_{12}\varepsilon_\beta + b_{13}\varepsilon) - \beta_{11}\langle T\rangle,$$
$$T_2 = h(b_{12}\varepsilon_\alpha + b_{22}\varepsilon_\beta + b_{23}\varepsilon) - \beta_{22}\langle T\rangle,$$
$$M_1 = \frac{h^3}{12}(b_{11}\varkappa + b_{12}\varkappa + b_{13}\chi) - \beta_{11}\langle zT\rangle,$$
$$M_2 = \frac{h^3}{12}(b_{12}\varkappa + b_{22}\varkappa + b_{23}\chi) - \beta_{22}\langle zT\rangle,$$
$$S = hb_{66}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad G = \frac{h^3}{12}b_{66}\varkappa_{\alpha\beta}. \qquad (17)$$

У формулах (16), (17) і надалі для довільної інтегровної функції $f(\alpha,\beta,z)$ позначено:

$$\langle f\rangle = \int\limits_{-0,5h}^{0.5h} f(\alpha,\beta,z)dz, \quad \mathring{f} = f - \frac{1}{h}\langle f\rangle - \frac{12z}{h^3}\langle zf\rangle. \quad (18)$$

Для напружень у площинах $z = const$ матимемо:

$$\tau_{\alpha z}^{(1)} = \frac{\gamma_1 + z\delta_1 + z^2\eta_1}{a_{55}}, \quad \tau_{\beta z}^{(1)} = \frac{\gamma_2 + z\delta_2 + z^2\eta_2}{a_{44}},$$
$$\sigma_z^{(1)} = b_{13}(\varepsilon_\alpha + z\varkappa_\alpha) + b_{23}(\varepsilon_\beta + z\varkappa_\beta) +$$
$$+ b_{33}(\varepsilon_\alpha + z\chi) - \beta_{33}T. \qquad (19)$$

Для вихідних тангенціальних напружень приймемо:

$$\sigma_\alpha^{(2)} = \sigma_\alpha^{(1)}, \quad \sigma_\beta^{(2)} = \sigma_\beta^{(1)}, \quad \tau_{\alpha\beta}^{(2)} = \tau_{\alpha\beta}^{(1)}. \qquad (20)$$

Відповідні їм вихідні напруження у площинах $z = const$ знайдемо на основі рівнянь (2), (4), (5):

$$\tau_{\alpha z}^{(2)} = X_1 + \frac{z}{h}X_2 + \frac{3}{2}\frac{h^2-4z^2}{h^3}(N_1 - hX_1) -$$
$$- \int\limits_{-0,5h}^{z}\mathring{K}_1 dz + \tau_{\alpha z}^{(2)*},$$
$$\tau_{\beta z}^{(2)} = Y_1 + \frac{z}{h}Y_2 + \frac{3}{2}\frac{h^2-4z^2}{h^3}(N_2 - hY_1) -$$

$$-\int\limits_{-0,5h}^{z}\mathring{K}_2 dz+\tau_{\beta z}^{(2)*},$$

$$\sigma_z^{(2)}=Z_1+\frac{z}{h}Z_2+\frac{h^2-4z^2}{2h^2}\left(z div\overrightarrow{g_1}+\frac{h}{4}div\overrightarrow{g_2}+\frac{z}{h}Z_2\right)+$$

$$+\frac{(h-z)(h+2z)^2}{2h^3}\langle K_3\rangle-$$

$$-\int\limits_{-0,5h}^{z}K_3 dz+\int\limits_{-0,5h}^{z}dz\int\limits_{-0,5h}^{z}div\vec{\mathring{K}}dz+\sigma_z^{(2)*},$$

$$\tau_{\alpha z}^{(2)*}=\frac{1}{H_1H_2}\left(\beta_{11}\frac{\partial}{\partial\alpha}H_2-\beta_{22}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right)\int\limits_{-0,5h}^{z}\mathring{T}dz,$$

$$\tau_{\beta z}^{(2)*}=\frac{1}{H_1H_2}\left(\beta_{22}\frac{\partial}{\partial\beta}H_1-\beta_{11}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\right)\int\limits_{-0,5h}^{z}\mathring{T}dz,$$

$$\sigma_z^{(2)*}=\frac{\beta_{11}-\beta_{22}}{2H_1H_2}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}H_1^2-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}H_2^2\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-0,5h}^{z}dz\int\limits_{-0,5h}^{z}\mathring{T}dz-$$

$$-\frac{\beta_{11}+\beta_{22}}{2H_1H_2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-0,5h}^{z}dz\int\limits_{-0,5h}^{z}\mathring{T}dz,$$

$$div\vec{g}_i=\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial H_2X_i}{\partial\alpha}-\frac{\partial H_1Y_i}{\partial\beta}\right)\quad(i=1;2),$$

$$\vec{\mathring{K}}=(\mathring{K}_1,\mathring{K}_2),$$

$$div\vec{\mathring{K}}=\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial H_2\mathring{K}_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial H_1\mathring{K}_2}{\partial\beta}\right).\qquad(21)$$

Формули (16) та (19) задають компоненти тензора $\tilde{T}^{(1)}$ – тензора вхідних (неврівноважених) напружень, що не підпорядковані рівнянням рівноваги (4). Компоненти тензора $\tilde{T}^{(2)}$ – тензора вихідних (врівноважених) напружень – подаються формулами (16), (20), (21). За компонентами тензора $\tilde{T}^{(2)}$ можна скласти вирази для вихідних деформацій $e_\alpha^{(2)}$, $e_\beta^{(2)}$, $e_z^{(2)}$, $e_{\alpha\beta}^{(2)}$, $e_{\alpha z}^{(2)}$, $e_{\beta z}^{(2)}$ та переміщень $u_\alpha^{(2)}$, $u_\beta^{(2)}$, $u_z^{(2)}$.

## 2. Оптимальні кінцеві співвідношення та основна система рівнянь

Враховуючи зв'язки між компонентами тензорів $\tilde{T}^{(1)}$, $\tilde{T}^{(2)}$ та співвідношення (7), знайдемо:

$$e_z^{(2)}=e_z^{(1)}+a_{33}(\sigma_z^{(2)}-\sigma_z^{(1)}),$$

$$e_{\alpha z}^{(2)}=a_{55}\tau_{\alpha z}^{(2)},\quad e_{\beta z}^{(2)}=a_{44}\tau_{\beta z}^{(2)}.\qquad(22)$$

З третього, п'ятого та шостого співвідношень (3) на основі рівностей (22) матимемо:

$$\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z}=\frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}+a_{33}\left(\sigma_z^{(2)}-\sigma_z^{(1)}\right),$$

$$\frac{\partial u_\alpha^{(2)}}{\partial z}=a_{55}\tau_{\alpha z}^{(2)}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial\alpha},$$

$$\frac{\partial u_\beta^{(2)}}{\partial z}=a_{44}\tau_{\beta z}^{(2)}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial\beta}.\qquad(23)$$

Звідси інтегруванням за змінною z отримаємо:

$$u_z^{(2)}=u_{z0}^{(2)}+u_z^{(1)}-w+a_{33}\int\limits_0^z(\sigma_z^{(2)}-\sigma_z^{(1)})dz,$$

$$u_\alpha^{(2)}=u_{\alpha0}^{(2)}+a_{55}\int\limits_0^z\tau_{\alpha z}^{(2)}dz-\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_0^z\tau_z^{(2)}dz,$$

$$u_\beta^{(2)}=u_{\beta0}^{(2)}+a_{55}\int\limits_0^z\tau_{\beta z}^{(2)}dz-\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\beta}\int\limits_0^z\tau_z^{(2)}dz,\qquad(24)$$

де $u_{z0}^{(2)}$, $u_{\alpha0}^{(2)}$, $u_{\beta0}^{(2)}$ – додаткові параметри, що визначають деформований стан пластини і мають зміст вихідних переміщень у серединній площині. У загальному випадку через можливі відмінності вхідних та вихідних характеристик ($\tilde{T}^{(1)}$, $u_z^{(1)}$, $u_\alpha^{(1)}$, $u_\beta^{(1)}$, з одного боку, та $\tilde{T}^{(2)}$, $u_z^{(2)}$, $u_\alpha^{(2)}$, $u_\beta^{(2)}$, з другого) матимемо дві групи нев'язок $\{\Delta_{j1}$, $\Delta_{j2}$, $\Delta_{j3}\}$ ($j$ – номер групи, $j=1;2$). Для нев'язок 1-ї та 2-ї груп (нев'язок за напруженнями та нев'язок за переміщеннями) приймемо:

$$1)\quad \Delta_{11}=\left|\sigma_z^{(2)}-\sigma_z^{(1)}\right|,\ \Delta_{12}=\left|\tau_{\alpha z}^{(2)}-\tau_{\alpha z}^{(1)}\right|,$$

$$\Delta_{13}=\left|\tau_{\beta z}^{(2)}-\tau_{\beta z}^{(1)}\right|,\qquad(25)$$

$$2)\quad \Delta_{21}=\left|u_z^{(2)}-u_z^{(1)}\right|,\ \Delta_{22}=\left|u_\alpha^{(2)}-u_\alpha^{(1)}\right|,$$

$$\Delta_{23}=\left|u_\beta^{(2)}-u_\beta^{(1)}\right|.\qquad(26)$$

Нев'язки розглядатимемо як прояв відхилень між точним та наближеним розв'язками. Тому їх будемо пом'якшувати (мінімізувати). Пом'якшення нев'язок (окремо для кожної групи) здійснюватимемо за методом середнього квадратичного – оптимальним підбором параметрів $\varepsilon$, $\chi$, $\phi$, $\psi$ та $u_{z0}^{(2)}$, $u_{\alpha0}^{(2)}$, $u_{\beta0}^{(2)}$ для мінімізації функціоналів $I_{jk}$:

$$I_{jk}=\int\limits_{-0,5h}^{0,5h}\Delta_{jk}^2dz\quad(j=1;2,\ k=\overline{1;3}).\qquad(27)$$

Вирази функціоналів складемо за формулами (11), (16), (19) та (21), (24). Кожній групі нев'язок, (25) чи (26), відповідає своя група оптимальних кінцевих співвідношень, які встановлюють лінійну залежність значень $\varepsilon$, $\chi$, $\phi$, $\psi$ від інших параметрів деформування та перерізальних зусиль. Результати мінімізації функціоналів $I_{j1}$, $I_{j2}$, $I_{j3}$ $(j=1;2)$ знайдемо у вигляді:

$$\varepsilon=\frac{1}{b_{33}}(-b_{13}\varepsilon_\alpha-b_{23}\varepsilon_\beta+f_1),$$

$$\chi = \frac{1}{b_{33}}(-b_{13}\varkappa_\alpha - b_{23}\varkappa_\beta + \frac{1}{h}f_2,$$

$$\phi = a_{55}\left(1+\frac{\delta_{j2}}{5}\right)\frac{N_1}{h} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(w + h^2\frac{5-2\delta_{j2}}{120}\chi\right) -$$

$$-a_{55}\frac{\delta_{j2}}{5}X_1 + a_{55}\frac{12}{h^3}\delta_{j2}\left\langle z\int\limits_0^z \tau_{\alpha z}^{(2)*}dz\right\rangle,$$

$$\psi = a_{44}\left(1+\frac{\delta_{j2}}{5}\right)\frac{N_2}{h} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(w + h^2\frac{5-2\delta_{j2}}{120}\chi\right) -$$

$$-a_{44}\frac{\delta_{j2}}{5}Y_1 + a_{44}\frac{12}{h^3}\delta_{j2}\left\langle z\int\limits_0^z \tau_{\beta z}^{(2)*}dz\right\rangle,$$

$$u_{z0}^{(2)} = w - \frac{3h}{1120}a_{33}(Z_2 + \langle K_3\rangle + h\,div\,\vec{g}_1),$$

$$u_{\alpha0}^{(2)} = u + \frac{h^2}{24}\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha} - \frac{h}{24}a_{55}X_2 +$$

$$+\frac{h^2}{1920}a_{33}\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{12}{h}\langle zK_3\rangle + h\,div\,\vec{g}_2\right),$$

$$u_{\beta0}^{(2)} = u + \frac{h^2}{24}\frac{1}{H_2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\beta} - \frac{h}{24}a_{44}X_2 +$$

$$+\frac{h^2}{1920}a_{33}\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{12}{h}\langle zK_3\rangle + h\,div\,\vec{g}_2\right), \qquad (28)$$

де

$$f_1 = Z_1 + \frac{5+\delta_{j2}}{60}\left(h\,div\,\vec{g}_2 + \frac{12}{h}\langle zK_3\rangle\right) +$$

$$+\frac{1}{h}\left\langle\left(\sigma_z^{(2)*} + \beta_{33}T\right)\left(1 + \frac{h^2-12z^2}{2h^2}\delta_{j2}\right)\right\rangle,$$

$$f_2 = Z_2 + \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{35}\delta_{j2}\right)(Z_2 + \langle K_3\rangle + h\,div\,\vec{g}_1) +$$

$$+\frac{12}{h^2}\left\langle\left(1 + \frac{3h^2-20z^2}{2h^2}\delta_{j2}\right)z\left(\sigma_z^{(2)*} + \beta_{33}T\right)\right\rangle,$$

$$\delta_{j2} = \begin{cases}0, & j=1,\\ 1, & j=2.\end{cases} \qquad (29)$$

Прийнявши $j = 1$, за формулами (28) отримаємо кінцеві співвідношення, що мінімізують нев'язки за напруженнями; їх доцільно застосовувати для визначення напруженого стану, зусиль, моментів, деформацій та змін кривини пластини. Якщо $j = 2$, за цими ж формулами знайдемо співвідношення, корисні для визначення переміщень. Отримані кінцеві співвідношення дають змогу вилучити параметри $\varepsilon$, $\chi$ у формулах (17) і встановити (без звичних припущень [1] теорії пластин і оболонок) безпосередні зв'язки між зусиллями, моментами та деформаціями $\varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_{\alpha\beta}$ серединної поверхні. За допомогою співвідношень (28), (29) та (10), з формул (17) виводимо:

$$T_1 = \frac{E_1 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(\varepsilon_\alpha^T + \nu_{12}\varepsilon_\beta^T + \frac{\nu_{12}\nu_{23}+\nu_{13}}{E_3}f_1\right),$$

$$T_2 = \frac{E_2 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\left(\varepsilon_\beta^T + \nu_{21}\varepsilon_\alpha^T + \frac{\nu_{13}\nu_{21}+\nu_{23}}{E_3}f_1\right),$$

$$M_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}\left(\varkappa_\alpha^T + \nu_{12}\varkappa_\beta^T + \frac{\nu_{12}\nu_{23}+\nu_{13}}{E_3 h}f_2\right),$$

$$M_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}\left(\varkappa_\beta^T + \nu_{21}\varkappa_\alpha^T + \frac{\nu_{13}\nu_{21}+\nu_{23}}{E_3 h}f_2\right),$$

$$S = hG_{12}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad G = \frac{h^3}{12}G_{12}\varkappa_{\alpha\beta}, \qquad (30)$$

де

$$\varepsilon_\alpha^T = \varepsilon_\alpha - \alpha_{11}\frac{\langle T\rangle}{h}, \quad \varepsilon_\beta^T = \varepsilon_\beta - \alpha_{22}\frac{\langle T\rangle}{h},$$

$$\varkappa_\alpha^T = \varkappa_\alpha - \alpha_{11}\frac{12\langle zT\rangle}{h^3}, \quad \varkappa_\beta^T = \varkappa_\beta - \alpha_{22}\frac{12\langle zT\rangle}{h^3}. \qquad (31)$$

Підставивши вирази зусиль і моментів (30) у рівняння (5) і замінивши параметри $\varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_\alpha$, $\varkappa_{\alpha\beta}$ їх виразами за формулами (13), отримаємо замкнену систему п'яти диференціальних рівнянь з п'ятьма невідомими $u$, $v$, $w$ та $\phi$, $\psi$. Розв'язки цієї системи треба підпорядкувати граничним умовам (6) та умовам на торцевих поверхнях $\alpha = const$, $\beta = const$.

Формули (2), (5), (6), (8), (10)–(13), (16)–(18), (20), (21) та (28)–(31) утворюють основну систему рівнянь, що визначають термопружний стан пластини за методом пом'якшення нев'язок.

Зважаючи на характер функціоналів (27) і базового закону (11), можна сподіватись, що за цим методом у формі (11) можна отримати середні квадратичні наближення (за змінною z) до точних розв'язків задач термопружності. Очікувані похибки наближених розв'язків становитимуть величини порядку $h^2/l^2$ порівняно з одиницею, де $h$ – товщина, а $l$ – характерний розмір у серединній площині пластини.

## III. Задача про термопружність круглої пластини

Розглянемо задачу про пружну рівновагу круглої пластини радіуса $R$ і товщини $h$ в неоднорідному температурному полі за відсутності масових сил і поверхневих навантажень на площинах $z = \pm 0,5h$. Віднесемо її до циліндричної системи координат $(r, \vartheta, z)$ з початком у геометричному центрі $O$ пластини і віссю $Oz$ по нормалі до серединної площини. Для вибраної системи координат всі співвідношення (1)–(31) справджуватимуться, якщо прийняти:

$$\alpha = r, \quad \beta = \vartheta, \quad H_1 = 1, \quad H_2 = r. \qquad (32)$$

Нехай пластина є однорідною трансверсально ізотропною, у кожній точці площина ізотропії проходить паралельно до площини $z = 0$. Приймемо, що масові сили відсутні:

$$K_1 = K_2 = K_3 = 0, \qquad (33)$$

поверхні $z = \pm 0,5h$ вільні від навантажень:

$$\tau_{rz}\Big|_{z=\pm0,5h} = \tau_{\theta z}\Big|_{z=\pm0,5h} = \sigma_z\Big|_{z=\pm0,5h} = 0, \qquad (34)$$

на зовнішній циліндричній поверхні пластини виконуються умови жорсткого закріплення:

$$r = R \Rightarrow u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \qquad (35)$$

Відповідно до властивостей трансверсально ізотропного матеріалу для пружних і теплових характеристик пластини у формулах (8), (10), (21), та (28)–(31) приймемо:

$$E_1 = E_2 = E, \quad E_3 = E', \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu,$$

$$\nu_{13} = \nu_{23} = \nu', \quad \nu_{31} = \nu_{32} = \nu' \frac{E}{E'}, \quad a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E},$$

$$a_{33} = \frac{1}{E'}, \quad a_{44} = a_{55} = \frac{1}{G'}, \quad a_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E},$$

$$a_{12} = \frac{-\nu}{E}, \quad a_{13} = a_{23} = \frac{-\nu'}{E'}, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha,$$

$$\alpha_{33} = \alpha', \quad b_{11} = b_{22} = \left[1 - (\nu')^2 \frac{E}{E'}\right] \frac{E}{1 - \tilde{\nu}^2},$$

$$1 - \tilde{\nu}^2 = (1+\nu)\left[1 - \nu - 2(\nu')^2 \frac{E}{E'}\right],$$

$$b_{12} = \left[\nu + (\nu')^2 \frac{E}{E'}\right] \frac{E}{1 - \tilde{\nu}^2}, \quad b_{13} = b_{23} = E\nu' \frac{1+\nu}{1 - \tilde{\nu}^2},$$

$$b_{33} = E' \frac{1 - \nu^2}{1 - \tilde{\nu}^2}, \quad \beta_{11} = \beta_{22} = E(\alpha + \nu'\alpha') \frac{1+\nu}{1 - \tilde{\nu}^2},$$

$$\beta_{33} = \left(\alpha' + \frac{2\nu'\alpha}{1-\nu} \frac{E}{E'}\right) b_{33}. \qquad (36)$$

Нехай ця пластина перебуває у полі температур, що змінюються за законом:

$$T = k(r^2 z + n z^3) \quad (k, n = const). \qquad (37)$$

**Зауваження 1.** Температурне поле (37), якщо $n = -\frac{2}{3}\frac{\lambda}{\lambda'}$, є розв'язком рівняння теплопровідності: $\left(\lambda_r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \lambda_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \lambda_z r \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) T = 0$ ($\lambda_r$, $\lambda_\theta$, $\lambda_z$ – коефіцієнти теплопровідності, для трансверсально ізотропного матеріалу $\lambda_r = \lambda_\theta = \lambda$, $\lambda_z = \lambda'$).

Згідно з умовами задачі геометрія і фізичні властивості пластини, зовнішні навантаження (33),(34), граничні умови (35) і температурне поле (37) характеризуються осьовою симетрією. Відповідно всі переміщення, деформований та напружений стан пластини мають ту саму осьову симетрію (не залежать від координати $\theta$), зокрема, задовольняють умови:

$$u_\theta = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0 \qquad (38)$$

$$(0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad -0,5h \le z \le 0,5h).$$

Для поставленої задачі про пружну рівновагу знайдемо і порівняємо два розв'язки – наближений (його отримаємо за методом пом'якшення невя'зок) і точний.

**1. Наближений розв'язок за методом пом'якшення нев'язок**

Враховуючи зовнішні навантаження, характер температурного поля (37) і фізичні властивості матеріалу (36), дослідимо деформовано-напружений стан пластини за системою рівнянь (2), (5), (6), (8), (10)–(13), (16)–(18), (20), (21) та (28)–(31).

Зі співвідношень (2) для осесиметричного напруженого стану (за формулами (38)) маємо:

$$S = 0, \quad G = 0, \quad N_2 = 0. \qquad (39)$$

Через відсутність поверхневих навантажень на площинах $z = \pm 0,5h$ за формулами (6) знаходимо:

$$X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = Z_1 = Z_2 = 0. \qquad (40)$$

Враховуючи рівності (33), (39) і (40), система (5) зводиться до трьох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}(rT_1) - T_2 = 0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rN_1) = 0, \\ \dfrac{d}{dr}(rM_1) - M_2 = rN_1. \end{cases} \qquad (41)$$

У разі осесиметричного деформування закон (11) набуває вигляду:

$$u_r = u + z\phi, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = w + z\varepsilon + 0,5z^2\chi; \quad (42)$$

зважаючи на формули (12), тангенціальні деформації змінюються за законом:

$$e_r = \varepsilon_r + z\varkappa_r, \; e_\theta = \varepsilon_\theta + z\varkappa_\theta, \; e_{r\theta} = 0, \; e_z = \varepsilon + z\chi. \quad (43)$$

За рівностями (13) тут маємо:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varkappa_r = \frac{d\phi}{dr}, \quad \varkappa_\theta = \frac{\phi}{r}. \qquad (44)$$

Відповідно до умов навантаження і характеру температурного поля (37) за формулами (18) (21), (28), (29) та (36) з кінцевих співвідношень (28) отримаємо:

$$\varepsilon = -\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta, \quad \chi = -\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}(\varkappa_r + \varkappa_\theta) +$$

$$+ k\left(\alpha' + \frac{2\nu'\alpha}{1-\nu}\frac{E}{E'}\right)\left(r^2 + \frac{3}{20}nh^2 - \frac{3}{70}nh^2\delta_{j2}\right),$$

$$\phi = -\frac{dw}{dr} - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{60}\delta_{j2}\right)h^2\frac{d\chi}{dr}. \qquad (45)$$

Визначаючи напружений стан, зусилля і моменти, у формулах (45) треба прийняти $\delta_{j2} = 0$ $(j = 1)$; знаходячи переміщення, прийняти $\delta_{j2} = 1$ $(j = 2)$.

З урахуванням навантажень (33) і (40), зі співвідношень (30) за формулами (21), (29), (31) та (36), (37) для зусиль $T_1$, $T_2$ і моментів $M_1$, $M_2$ (якщо $\delta_{j2} = 0$) отримаємо:

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right),$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{d\phi}{dr} + \nu\frac{\phi}{r}\right) - M^*,$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}\right),$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{d\phi}{dr}+\frac{\phi}{r}\right)-M^*,$$

$$M^* = k\alpha\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}\left(r^2+\frac{3}{20}nh^2\right). \qquad (46)$$

Інтегруючи друге рівняння системи (41) (за умови, що за $r=0$ зусилля $N_1$ є скінченним), знайдемо:

$$N_1 = 0. \qquad (47)$$

Підставимо вирази (46) у перше та третє рівняння системи (41). З першого матимемо: інтегруючи друге рівняння системи (41) (за умови, що за $r=0$ зусилля $N_1$ є скінченним), знайдемо:

$$\left(r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}-1\right)u=0 \Rightarrow u=C_1r+\frac{C_2}{r}. \qquad (48)$$

З третього рівняння, оскільки вже знайдено значення (47), отримаємо:

$$\left(r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}-1\right)\phi = 2k\left(1+\nu\right)\alpha r^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi = k\alpha\frac{1+\nu}{4}\left(r^3+C_3r+\frac{C_4}{r}\right). \qquad (49)$$

Оскільки за $r=0$ величини $u$ та $\phi$ є скінченними, то $C_2=C_4=0$. Сталу $C_1$ визначимо за першою з граничних умов (35). Задовольняючи умову $u\big|_{r=R}=0$, з формули (48) (якщо $C_2=0$) отримуємо: $C_1R=0 \Rightarrow C_1=0$. Враховуючи знайдені значення сталих, за формулами (48),(49) маємо:

$$u=0, \quad \phi = k\alpha\frac{1+\nu}{4}\left(r^3+C_3r\right). \qquad (50)$$

Складемо вирази для визначення параметрів деформування пластини відповідно до закону (43). За формулами (44), (45) і (50) знайдемо:

$$\varepsilon_r=\varepsilon_\theta=0, \quad \varkappa_r = k\alpha\frac{1+\nu}{4}\left(C_3+3r^2\right),$$

$$\varkappa_\theta = k\alpha\frac{1+\nu}{4}\left(C_3+r^2\right), \qquad (51)$$

$$\varepsilon=0, \quad \chi = -\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}k\alpha\frac{1+\nu}{2}(C_3+2r^2)+$$

$$+\left(\frac{2\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\alpha+\alpha'\right)\left(r^2+\frac{3}{20}nh^2-\frac{3}{70}nh^2\delta_{j2}\right). \qquad (52)$$

Для знаходження переміщення $w$ за третьою з формул (45) (якщо $j=2 \Rightarrow \delta_{j2}=1$) отримаємо:

$$\frac{dw}{dr} = -\phi-\frac{1}{40}h^2\frac{d\chi}{dr}. \qquad (53)$$

Зі співвідношення (53), підставивши вирази параметрів $\phi$, $\chi$ за формулами (50), (52), одержимо:

$$\frac{dw}{dr}=-k\alpha r\left[\frac{1+\nu}{4}\left(r^2+C_3\right)+\frac{1}{20}h^2\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\right]. \qquad (54)$$

Звідси, задовольняючи умову $\frac{dw}{dr}\big|_{r=R}=0$ (четверту з умов (35)), знайдемо сталу $C_3$:

$$C_3 = -R^2-\frac{h^2\alpha}{5(1+\nu)}\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right). \qquad (55)$$

Підставивши знайдене значення $C_3$ у вираз (54), матимемо: $\frac{dw}{dr}=k\alpha\frac{1+\nu}{4}r\left(R^2-r^2\right)$. Звідси, інтегруючи за змінною $r$ і задовольняючи умову $w\big|_{r=R}=0$ (третю з умов (35)), одержимо:

$$w=-k\alpha\frac{1+\nu}{16}\left(R^2-r^2\right)^2. \qquad (56)$$

За формулами (50), (55) і (46) знайдемо кінцевий вираз для параметра $\phi$, зусилля і моменти:

$$\phi=-k\alpha r\left[\frac{1+\nu}{4}(R^2-r^2)+\frac{h^2}{20}\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\right], \qquad (57)$$

$$T_1=0, \quad M_1=-k\alpha\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}\left[\frac{1-\nu}{4}r^2+\frac{1+\nu}{4}R^2+\right.$$

$$\left.+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{h^2}{20}+\frac{3}{20}nh^2\right],$$

$$T_2=0, \quad M_2=-k\alpha\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}\left[\frac{3(1-\nu)}{4}r^2+\frac{1+\nu}{4}R^2+\right.$$

$$\left.+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{h^2}{20}+\frac{3}{20}nh^2\right], \qquad (58)$$

Спираючись на формулу (42), перейдемо тепер до визначення переміщень пластини. Підставимо значення (55) сталої $C_3$ у формулу (52) і приймемо там $\delta_{j2}=1$ $(j=2)$. Тоді матимемо:

$$\varepsilon=0, \quad \chi=k\alpha\left[\nu'\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{R^2}{2}+\right.$$

$$+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(r^2+\frac{1}{10}\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}h^2\right)+$$

$$\left.\frac{3}{28}\left(\frac{2\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)nh^2\right]. \qquad (59)$$

За формулами (42), (52), (57) та (56), (59) для тангенціальних і нормальних переміщень знайдемо:

$$u_r=-k\alpha r\left[\frac{1+\nu}{4}\left(R^2-r^2\right)+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{h^2}{20}\right]z,$$

$$u_\theta=0, \quad u_z=-k\alpha\frac{1+\nu}{16}\left(R^2-r^2\right)^2+k\alpha\times$$

$$\times\left[\nu'\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{R^2}{2}+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(r^2+\frac{1}{10}\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}h^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{28}\left(\frac{2\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)nh^2\right]\frac{z^2}{2}. \qquad (60)$$

## 2. Точний розв'язок

Точний розв'язок задачі про пружну рівновагу трансверсально ізотропної круглої пластини радіуса $R$ і товщини $h$ в умовах жорсткого закріплення (35) у температурному полі (37) за відсутності масових сил і поверхневих навантажень на площинах $z = \pm 0,5h$ ми знайшли [5] у вигляді:

$$u_r = -k\alpha r\left[\frac{1+\nu}{4}\left(R^2-r^2\right)+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{z^2}{3}\right]z,$$

$$u_\theta = 0,\quad u_z = -k\alpha\frac{1+\nu}{16}\left(R^2-r^2\right)^2+k\alpha\times$$
$$\times\left[\nu'\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{R^2}{2}+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(r^2+\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{z^2}{3}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)n\frac{z^2}{2}\right]\frac{z^2}{2}. \qquad (61)$$

Звідси за формулами (2), (3), (9), (32) і (36) для напружень, зусиль та моментів у пластині матимемо:

$$\sigma_r = -\frac{E}{1-\nu}k\alpha\left[\left(\frac{1+\nu}{4}R^2+\frac{1-\nu}{4}r^2\right)z+\right.$$
$$\left.+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{z^3}{3}+nz^3\right],\quad \sigma_{r\theta}=\sigma_{rz}=0,$$
$$\sigma_\theta = -\frac{E}{1-\nu}k\alpha\left[\left(\frac{1+\nu}{4}R^2+3\frac{1-\nu}{4}r^2\right)z+\right.$$
$$\left.+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{z^3}{3}+nz^3\right],\quad \sigma_{\theta z}=\sigma_z=0. \qquad (62)$$

$$T_1=N_1=S=0,\quad M_1=-k\alpha\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}\left[\frac{1-\nu}{4}r^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1+\nu}{4}R^2+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{h^2}{20}+\frac{3}{20}nh^2\right],\quad G=0,$$
$$T_2=N_2=0,\quad M_2=-k\alpha\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}\left[\frac{3(1-\nu)}{4}r^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1+\nu}{4}R^2+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{h^2}{20}+\frac{3}{20}nh^2\right], \qquad (63)$$

Для порівняння точного і наближеного розв'язків знайдемо середні квадратичні наближення розв'язків (61) у формі закону (42). Апроксимуючи переміщення $u_r$, $u_z$ по змінній $z$ на відрізку $[-0,5h; 0,5h]$, матимемо:

$$u_r = -k\alpha r\left[\frac{1+\nu}{4}\left(R^2-r^2\right)+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{h^2}{20}\right]z,$$

$$u_\theta=0,\quad u_z=-k\alpha\frac{1+\nu}{16}\left(R^2-r^2\right)^2-$$
$$-k\alpha\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{h^4}{1120}-$$
$$-k\alpha\left(\frac{2\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)n\frac{3h^4}{2240}+k\alpha\left[\nu'\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{E}{E'}\frac{R^2}{2}+\right.$$
$$+\left(\nu'\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(r^2+\frac{1}{14}\frac{\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}h^2\right)+$$
$$\left.+\frac{3}{28}\left(\frac{2\nu'}{1-\nu}\frac{E}{E'}+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)nh^2\right]\frac{z^2}{2}. \qquad (64)$$

Порівнюючи результати застосування обох розв'язків, зауважимо: 1) вирази зусиль та моментів, знайдені за методом пом'якшення (за формулами (39), (47), (58)), повністю збігаються із тими, що задано формулами (63) і знайдено за точним методом; 2) вирази переміщень $u_r$, $u_z$ згідно з формулами (60) (наближений метод) і формулами (61) (точний метод) мають певні відмінності серед доданків порядку $h^2/R^2$ порівняно з одиницею, але, як можна переконатись, вирази за формулами (60) практично співпадають з середніми квадратичними наближеннями (64) точних розв'язків (абсолютна похибка тут має порядок $h^4/R^4$).

## Висновки

У роботі розроблено наближений аналітичний метод розрахунку деформовано-напруженого стану анізотропних пластин у неоднорідному температурному полі. Метод виходить лише з можливості апроксимації переміщень за товщиною пластини, не потребує застосування традиційних гіпотез [1], [2] теорії тонких пластин. Прогнозуємо, що метод дасть змогу знаходити середні квадратичні наближення точних розв'язків за товщиною пластини з похибкою порядку $h^2/R^2$ порівняно з одиницею.

## Література


[1] *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.

[2] *Кильчевский Н. А.* Основы аналитической механики оболочек, I. – К.: Изд-во АН УССР, 1963. – 354 с.

[3] *Кільчинський О. О., Скрипка В. І.* Про деформацію пластин, податливих на поперечні зсуви та стискання // Питання оптимізації обчислень (ПОО XV): Праці міжнар. конф. – К. 2013. – С. 116–117.

[4] *Кільчинський О. О., Массалітіна Є. В.* Уточнений метод пом'якшення нев'язок для ортотропної пластини // Зб. наук. праць ДЕТУТ. Серія «Транспортні системи і технології». – К., 2014. – № 24. – С. 163–172.

[5] *Кільчинський О. О., Массалітіна Є. В.* Уточнений метод пом'якшення нев'язок для круглої пластини, податливої на поперечні зсуви та стискання // Матеріали XV Міжнар. наук. конф-ції ім. акад. Михайла Кравчука, секція I (диференціальні та інтегральні

рівняння, їх застосування). – К., 2014. – С. 142–145.

[6] *Кільчинський О. О., Массалітіна Є. В.* Про деякі тестові задачі термопружності для круглого циліндра // Матеріали XVII Міжнар. наук. конф-ції ім. акад. Михайла Кравчука, секція I (диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування). – К., 2016. – С. 139–142.

[7] *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.

# ON THE THERMOELASTICITY OF PLATES, THE COMPLIANT TO IN-PLANE SHEAR AND COMPRESSION

O. O. Kilchinskiy[a], E. V. Massalitina[b]

[a] *State Economy Tecnology University of Transport*
*19, Lukashevich Str., 03049, Kyiv, Ukraine*
[b] *National Technical University of Ukraine "KPI"*
*37, Prosp. Peremohy, 03056, Kyiv, Ukraine*

Developed refined approximate method the analytical study of stress-strain state orthotropic plates. The effectiveness of the method was confirmed by comparing the exact and approximate solutions of the problem of thermoelasticity for a circular cylinder.

**Key words:** refined method, anisotropic plate, stress state, yielding in shear and compression.

**2000 MSC:** 74B05, 74E10, 74F10, 74G10, 74K20

**UDK:** 517.564/565