ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 871, 2017, с. 110–113

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 871, 2017, p. 110–113

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ У КРУГАХ ФУНКЦІЙ НА ОСНОВІ МЕТОДУ МОМЕНТІВ

М. М. Чип

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 14 квітня 2015 р.)

Встановлено інтегральні зображення аналітичних у кругах функцій та їхніх розділених різниць і похідних, коефіцієнти степеневих рядів яких є класичними моментами або узагальненими моментами на відрізку дійсної осі. Отримані формули ілюструються для дилогарифмічної функції та гіпергеометричної функції, які аналітично продовжуються з кругів збіжності рядів у області збіжності інтегралів.

Ключові слова: аналітична функція, класичні моменти, узагальнені моменти.

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

УДК: 517.53

Вступ

Аналітична в крузі функція зображається в ньому степеневим рядом. Коефіцієнти ряду вважатимемо моментами.

Класичні моменти $\{\sigma_n\}_0^\infty$ на відрізку $[a;b]$ дійсної осі зображаються у вигляді

$$\sigma_n = \int\limits_a^b x^n d\mu(x), \tag{1}$$

у якому функція $\mu(x)$ монотонно неспадна з нескінченною кількістю точок зростання ([1]).

Узагальнені моменти $\{s_n\}_0^\infty$ на відрізку $[a;b]$ дійсної осі зображаються у вигляді

$$s_{k+l} = \int\limits_a^b a_k(x) b_l(x) d\mu(x), \tag{2}$$

в якому функції $\{a_k(x)\}_0^\infty$ та $\{b_l(x)\}_0^\infty$ інтегровані з квадратом на відрізку $[a;b]$ дійсної осі ([2]).

Якщо $a_k(x) = x^k$ та $b_l(x) = x^l$, то узагальнені моменти збігаються з класичними моментами.

Інтегральне зображення аналітичної в крузі функції уможливлює аналітичне продовження зображуваної функції з круга збіжності ряду в область збіжності інтеграла ([3, 4]).

I. Метод класичних моментів

Коефіцієнти степенового ряду будемо вважатимемо класичними моментами на відрізку дійсної осі.

Теорема 1. *Нехай аналітична в крузі $\{z\colon |z| < r\}$ функція $f(z)$ зображається в ньому у вигляді*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n z^n, \tag{3}$$

в якому коефіцієнти $\{\sigma_n\}_0^\infty$ є класичними моментами вигляду (1).

Тоді справджуються інтегральні зображення

$$f(z) = \int\limits_a^b \frac{d\mu(x)}{1 - zx}, \quad z \neq \frac{1}{x}; \tag{4}$$

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \int\limits_a^b \frac{x\, d\mu(x)}{(1 - zx)(1 - \zeta x)}, \tag{5}$$

$$z \neq \frac{1}{x}, \quad \zeta \neq \frac{1}{x}, \quad \zeta \neq z.$$

□ *Доведення.*

Підставимо (1) в (3) та підсумуємо ряд інтегралів. Одержимо

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_a^b x^n\, d\mu(x) \right) z^n = \int\limits_a^b \sum_{n=0}^{\infty} (zx)^n d\mu(x).$$

Якщо $|z| < \frac{1}{|x|}$, то застосуємо формулу для суми нескінченно спадної геометричної прогресії та отримаємо (4).

Здійснимо в (4) відповідні перетворення. Тоді

$$f(z) - f(\zeta) = \int\limits_a^b \left(\frac{1}{1 - zx} - \frac{1}{1 - \zeta x} \right) d\mu(x) =$$

$$= (z - \zeta) \int\limits_a^b \frac{x\, d\mu(x)}{(1 - zx)(1 - \zeta x)},$$

звідки встановлюємо (5). ■

Наслідок 1.

Справджується інтегральне зображення похідної

$$f'(z) = \int\limits_a^b \frac{x\, d\mu(x)}{(1 - zx)^2}, \quad z \neq \frac{1}{x}. \tag{6}$$

Справді, з (5), якщо $\zeta \to z$, отримуємо (6).

В (5) приймемо $\zeta = 0$. Тоді

$$f(z) = f(0) + z\int_a^b \frac{x\,d\mu(x)}{1-zx} = s_0 + z\int_a^b \frac{x\,d\mu(x)}{1-zx} =$$
$$= \int_a^b \left(1 + \frac{zx}{1-zx}\right) d\mu(x) = \int_a^b \frac{d\mu(x)}{1-zx},$$

тобто справджується (4). Якщо в (5) прийняти $z = 0$, то також справджується (4).

Встановлені інтегральні зображення (4)–(6) здійснюють аналітичні продовження зображуваних функцій з круга збіжності ряду в зовнішність деякого відрізка чи променя.

Приклад 1. Нехай

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^2} = \frac{\mathrm{Li}_2 z}{z}, \quad |z| < 1, \tag{7}$$

де $\mathrm{Li}_2 z$ позначає дилогарифмічну функцію.

На основі співвідношення

$$\int_0^1 x^n \ln x\,dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

стверджуємо, що коефіцієнти степеневого ряду є класичними моментами на відрізку $[0;1]$ з мірою

$$d\mu(x) = \ln x\,dx$$

для функції

$$g(z) = -\frac{\mathrm{Li}_2 z}{z}.$$

Інтегральні зображення (4)–(6) набувають вигляду

$$\mathrm{Li}_2 z = -z\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{1-zx}, \tag{8}$$

$$\frac{\frac{\mathrm{Li}_2 z}{z} - \frac{\mathrm{Li}_2 \zeta}{\zeta}}{z-\zeta} = -\int_0^1 \frac{x\ln x\,dx}{(1-zx)(1-\zeta x)}, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\mathrm{Li}_2 z}{z}\right)' = -\int_0^1 \frac{x\ln x\,dx}{(1-zx)^2}. \tag{10}$$

Встановлені інтегральні зображення здійснюють аналітичні продовження функцій у лівих частинах з круга $\{z\colon |z| < 1\}$ в зовнішність променя $[1;+\infty)$.

II. Метод узагальнених моментів

Коефіцієнти степеневого ряду вважатимемо узагальненими моментами на відрізку дійсної осі.

Теорема 2. *Нехай аналітична в крузі* $\{z\colon |z| < r\}$ *функція* $f(z)$ *зображається в ньому у вигляді*

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^{n+1}, \tag{11}$$

в якому коефіцієнти $\{s_n\}_0^\infty$ *є узагальненими моментами вигляду* (2)*. Приймемо*

$$A(z;x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) z^k, \quad B(\zeta;x) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l(x)\zeta^l, \tag{12}$$

вважаючи обидва ряди рівномірно збіжними на відрізку $[a;b]$ *дійсної осі та збіжними в крузі з центром у початку координат радіуса* r.

Тоді справджується інтегральне зображення

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} = \int_a^b A(z;x)B(\zeta;x)d\mu(x), \quad \zeta \neq z. \tag{13}$$

□ *Доведення.* Виконаємо безпосередні перетворення та отримаємо

$$f(z) - f(\zeta) = (z-\zeta)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} s_{k+l} z^k \zeta^l.$$

Підставимо сюди (2) та підсумуємо ряди інтегралів. Отримаємо

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_k(x)b_l(x)d\mu(x)\right) z^k\zeta^l =$$
$$= \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l(x)\zeta^l\right) d\mu(x),$$

звідки, враховуючи (12), встановлюємо (13). ■

Наслідок 2. Справджується інтегральне зображення похідної

$$f'(z) = \int_a^b A(z;x)B(z;x)d\mu(x). \tag{14}$$

Справді, з (13), якщо $\zeta \to z$, отримуємо (14).

Наслідок 3. Справджуються інтегральні зображення функції

$$f(z) = f(0) + z\int_a^b A(z;x)b_0(x)d\mu(x), \tag{15}$$

$$f(\zeta) = f(0) + \zeta\int_a^b B(\zeta;x)a_0(x)d\mu(x). \tag{16}$$

Справді, з (13), якщо $\zeta = 0$, встановлюємо (15), з (13), якщо $z = 0$, встановлюємо (16).

Встановлені інтегральні зображення здійснюють аналітичні продовження зображуваних функцій з круга збіжності ряду в область збіжності інтегралів.

Приклад 2. Нехай

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + a)}{\nu!} z^{\nu} = \Gamma(a)\, {}_1F_0(z; a), \qquad (17)$$

$$|z| < 1, \quad \operatorname{Re} a > 0,$$

де $\Gamma(b)$ позначає значення гама-функції для значення b, ${}_1F_0(z; a)$ позначає гіпергеометричну функцію. Маємо

$$s_{k+l} = \frac{\Gamma(k + l + a + 1)}{(k + l + 1)!}. \qquad (18)$$

На основі співвідношення

$$\frac{1}{k!} \int_0^{\infty} x^{k+l+a} \Psi(l{+}1; l{+}a{+}1; x) e^{-x} dx = \frac{\Gamma(k + l + a + 1)}{(k + l + 1)!},$$

де $\Psi(l + 1; l + a + 1; x)$ позначає вироджену гіпергеометричну функцію, коефіцієнти степеневого ряду є узагальненими моментами на промені $[0; +\infty)$, для яких

$$a_k(x) = \frac{x^k}{k!}, \quad b_l(x) = x^l \Psi(l + 1; l + a + 1; x),$$

$$d\mu(x) = x^a e^{-x} dx.$$

Функції (12) мають вигляд

$$A(z; x) = e^{zx}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$B(\zeta; x) = \frac{e^{(1-\zeta)x}}{(1 - \zeta)^a x^a} \Gamma(a; (1 - \zeta)x), \quad \operatorname{Re} \zeta < 1,$$

де $\Gamma(a; (1 - \zeta)x)$ позначає доповняльну неповну гама-функцію.

Функції $\{b_l(x)\}_0^{\infty}$ можна зобразити у вигляді

$$b_l(x) = \frac{x^l}{l!} \int_0^{\infty} y^l (1 + y)^{a-1} e^{-xy} dy,$$

а функцію $B(\zeta; x)$ – у вигляді

$$B(\zeta; x) = \sum_{l=0}^{\infty} x^l \Psi(l + 1; l + a + 1; x) \zeta^l.$$

інтегральні зображення (13)–(16) набувають вигляду

$$\frac{{}_1F_0(z; a) - {}_1F_0(\zeta; a)}{z - \zeta} = \frac{1}{\Gamma(a)(1 - \zeta)^a} \int_0^{\infty} e^{(z-\zeta)x} \Gamma(a; (1 - \zeta)x) dx, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} \zeta < 1, \qquad (19)$$

$${}_1F_0'(z; a) = \frac{1}{\Gamma(a)(1 - z)^a} \int_0^{\infty} \Gamma(a; (1 - z)x) dx, \quad \operatorname{Re} z < 1, \qquad (20)$$

$${}_1F_0(z; a) = 1 + \frac{z}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{zx} \Psi(1; a + 1; x) x^a e^{-x} dx, \quad z \in \mathbb{C}, \qquad (21)$$

$${}_1F_0(\zeta; a) = 1 + \frac{\zeta}{\Gamma(a)(1 - \zeta)^a} \int_0^{\infty} e^{-\zeta x} \Gamma(a; (1 - \zeta)x) dx, \quad \operatorname{Re} \zeta < 1, \qquad (22)$$

Встановлені інтегральні зображення здійснюють аналітичні продовження функцій у лівих частинах з круга $\{z\colon |z| < 1\}$ в області збіжності інтегралів.

Висновки

Коефіцієнти степеневого ряду виражаються у вигляді моментів неоднозначно. Способи зображення моментів визначають способи знаходження інтегральних зображень суми ряду та її розділеної різниці чи похідної. Встановлені інтегральні зображення уможливлюють оцінювання значень зображуваних функцій.

Література

[1] *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз. 1961. – 312 с.

[2] *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // ДАН УРСР, Серія А. – 1981. – № 6. – С. 8–12.

[3] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

[4] *Чип М. М.* Метод моментів зображення функції рядом та інтегралом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 4. – С. 65–72.

INTEGRAL REPRESENTATION OF ANALYTIC FUNCTIONS DEFINED IN THE CIRCLES ON THE BASE OF THE MOMENTS METHOD

M. M. Chyp

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

Integral representations have been found for analytic functions, their difference quotients and derivatives which have the coefficients as the classical or generalized moments defined on a segment of the real axis. Examples for dylogarithmic and hypergeometric functions which can be analytically extended from convergent circles of the series to convergent domains of the integrals have been constructed.

Key words: analytic function, classical, moments, generalized moments.

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

UDK: 517.53