ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
№ 871, 2017, с. 103–109

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
“Physical and mathematical sciences”
№ 871, 2017, p. 103–109

ЗАГАЛЬНА ПЕРША КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ З КУСКОВО-НЕПЕРЕРВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА СТАЦІОНАРНОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

Р. М. Тацій, О. О. Карабин, О. Ю. Чмир

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
вул. Клепарівська, 35, 79058, Львів, Україна

(Отримано 26 вересня 2015 р.)

Запропоновано та обґрунтовано нову схему розв’язування загальної першої крайової задачі для рівняння гіперболічного типу з кусково-неперервними коефіцієнтами та стаціонарною неоднорідністю. В основу схеми розв’язування покладено концепцію квазіпохідних, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, а також класичний метод Фур’є та метод редукції. Перевагою методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім на основі матричного числення об’єднати отримані розв’язки. Такий підхід дає змогу застосувати програмні засоби до процесу розв’язання задачі та графічної ілюстрації розв’язку.

Ключові слова: квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, метод Фур’є та метод власних функцій.

2000 MSC: 34B05; 34B27; 34A37

УДК: 517.912

Основними методами розв’язування нестаціонарних крайових задач є: прямі, основу яких становить метод відокремлення змінних; метод джерел (метод функції Ґріна); метод інтегральних перетворень; наближені та числові методи.

Запропонована в цій роботі схема належить до прямих методів розв’язування крайових задач для рівнянь гіперболічного типу. В основу реалізації цієї схеми покладено концепцію квазіпохідних [1], що дає змогу “обійти” проблему множення узагальнених функцій.

Першою була роз’язана мішана задача для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами за загальних крайових умов першого роду [2].

У цій роботі досліджено загальну першу крайову задачу для рівняння гіперболічного типу з кусково-неперервними коефіцієнтами та стаціонарною неоднорідністю. За допомогою методу редукції розв’язування такої задачі зведено до знаходження розв’язку двох задач: стаціонарної неоднорідної крайової задачі з вихідними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння.

I. Постановка задачі

Нехай $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} \ldots < x_{n-1} < x_n = l$ – довільне розбиття відрізка $[0;l]$ дійсної осі Ox на n частин.

Введемо основні позначення:
θ_i – характеристична функція проміжку $[x_i;x_{i+1})$, тобто $\theta_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i;x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i;x_{i+1}), \end{cases} \quad i = \overline{0, n-1}.$

Зауваження 1. Якщо $a_1 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{1i}\theta_i$, $a_2 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{2i}\theta_i$, то $a_1 \cdot a_2 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{1i} \cdot a_{2i}\theta_i$. Зокрема, якщо $a = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i\theta_i$, то $\frac{1}{a} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i^{-1}\theta_i$.

Покладемо
$r(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} r_i(x)\theta_i$, $r_i(x) \in C[x_i;x_{i+1})$, $r_i(x) > 0$;
$\lambda(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x)\theta_i$, $\lambda_i(x) \in C[x_i;x_{i+1})$, $\lambda_i(x) > 0$;
$f(x) = g(x) + s(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} g_i(x)\theta_i + \sum\limits_{i=1}^{n-1} s_i\delta_i(x - x_i)$, де $g_i(x)$ – функція розподілу джерел тепла на проміжку $[x_i;x_{i+1})$, s_i – дійсні числа, $\delta_i = \delta_i(x - x_i)$ - δ – функція Дірака з носієм у точці $x = x_i$.

Розглянемо загальну першу крайову задачу для рівняння гіперболічного типу

$$r(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x), \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x_0,t) = \psi_0(t), \\ u(x_n,t) = \psi_n(t) \end{cases} \tag{2}$$

та початковими умовами

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi_0(x), \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{3}$$

де $\psi_0(t)$, $\psi_n(t) \in C^2(0;+\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – кусково-неперервні на $(x_0;x_n)$. Метод редукції відшукання розв’язку задачі детально описано в [3, 4]. Згідно з цим методом розв’язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t). \tag{4}$$

II. Побудова функції $w(x,t)$

Визначимо функцію $w(x,t)$ як розв'язок крайової задачі

$$\left(\lambda w_x{}'\right)_x{}' = -f(x), \tag{5}$$

$$\begin{cases} w(x_0,t) = \psi_0(t), \\ w(x_n,t) = \psi_n(t). \end{cases} \tag{6}$$

В основу методу розв'язування задачі (5), (6) покладено концепцію квазіпохідних [5].

Введемо вектори:

$\overline{W} = \begin{pmatrix} w \\ w^{[1]} \end{pmatrix}$, де $w^{[1]} = \lambda w_x{}'$,

$\overline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(x) \end{pmatrix}$, $\overline{S}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -s_i \end{pmatrix}$, $\overline{S} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \overline{S}_i \cdot \delta_i$.

За таких позначень квазідиференціальне рівняння (5) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{W}_x{}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{W} + \overline{G} + \overline{S}. \tag{7}$$

Під розв'язком системи (7) розуміємо абсолютно неперервну вектор-функцію $\overline{W}(x,t)$, що перетворює цю систему на тотожність майже всюди.

Крайові умови (6) запишемо у векторній формі

$$P \cdot \overline{W}(x_0,t) + Q \cdot \overline{W}(x_n,t) = \overline{\Gamma}\,(t)\,, \tag{8}$$

де $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{\Gamma}\,(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_n(t) \end{pmatrix}$.

Нехай $w_i(x,t)$, $w_i^{[1]}(x,t)$ та $g_i(x)$ визначені на проміжку $[x_i; x_{i+1})$. Приймемо

$$w(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x,t)\theta_i. \tag{9}$$

На проміжку $[x_i; x_{i+1})$ система (7) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}_x{}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ -g_i(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -s_i \end{pmatrix}, \tag{10}$$

де $s_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Розглянемо однорідну систему, що відповідає системі (10)

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}_x{}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}.$$

Матриця Коші $B_i(x,s)$ такої системи має вигляд

$$B_i(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

де $b_i(x,s) = \int\limits_s^x \frac{dz}{\lambda_i(z)}$ (див. [6]).

Для довільного $k \geq i$ позначимо

$$B(x_k,x_i) \stackrel{\text{def}}{=} B_{k-1}(x_k,x_{k-1}) \cdot B_{k-2}(x_{k-1},x_{k-2}) \cdot \ldots \times \\ \times B_i(x_{i+1},x_i). \tag{12}$$

Структура (11) матриць $B_i\,(x,s)$ дає можливість встановити структуру матриці (12)

$$B(x_k,x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{m=i}^{k-1} b_m(x_{m+1},x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причому $B(x_k,\,x_k) \stackrel{\text{def}}{=} E$, де E – одинична матриця.

Розв'язок системи (10) на проміжку $[x_i; x_{i+1})$ має вигляд

$$\overline{W}_i(x,t) = B_i(x,x_i) \cdot \overline{P}_i + \int\limits_{x_i}^{x} B_i(x,s) \cdot \overline{G}_i(s)\,ds, \tag{13}$$

де $\overline{P}_i$ – поки що не відомий вектор.

Аналогічно, на проміжку $[x_{i-1}; x_i)$

$$\overline{W}_{i-1}(x,t) = B_{i-1}(x,x_{i-1}) \cdot \overline{P}_{i-1} + \\ + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} B_{i-1}(x,s) \cdot \overline{G}_{i-1}(s)\,ds. \tag{14}$$

У точці $x = x_i$ повинна виконуватись умова спряження, а саме $\overline{W}_i(x_i,t) = \overline{W}_{i-1}(x_i,t) + \overline{S}_i$ (див. [7]), в результаті чого одержимо рекурентне співвідношення

$$\overline{P}_i = B_{i-1}(x_i,x_{i-1}) \cdot \overline{P}_{i-1} + \\ + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i,s) \cdot \overline{G}_{i-1}(s)\,ds + \overline{S}_i. \tag{15}$$

Методом математичної індукції з (15) отримаємо

$$\overline{P}_i = B(x_i,x_0) \cdot \overline{P}_0 + \sum_{k=0}^{i} B(x_i,x_k)\overline{Z}_k, \tag{16}$$

де $\overline{Z}_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k,s) \cdot \overline{G}_{k-1}(s)\,ds + \overline{S}_k$, $k = \overline{1,n-1}$, причому $\overline{Z}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \overline{0}$, $\overline{S}_n \stackrel{\text{def}}{=} \overline{0}$; $\overline{P}_0$ – початковий (невідомий) вектор.

Для знаходження $\overline{P}_0$ використовуємо крайові умови (8), в яких приймемо

$$\overline{W}(x_0,t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{P}_0,$$

$$\overline{W}(x_n,t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{W}_{n-1}(x_n,t) = B_{n-1}(x_n,x_{n-1})\overline{P}_{n-1} + \\ + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} B_{n-1}(x_n,s) \cdot \overline{G}_{n-1}(s)\,ds = \\ = B(x_n,x_0)\overline{P}_0 + \sum_{k=0}^{n} B(x_n,x_k)\overline{Z}_k.$$

Тоді

$$[P + QB(x_n,x_0)]\overline{P}_0 + Q\sum_{k=0}^{n} B(x_n,x_k)\overline{Z}_k = \overline{\Gamma},$$

звідки одержуємо

$$\overline{P}_0 = [P + QB(x_n, x_0)]^{-1} \left(\overline{\Gamma} - Q \sum_{k=0}^{n} B(x_n, x_k) \overline{Z}_k \right). \tag{17}$$

Обчислимо
$[P + QB(x_n, x_0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_n} & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}$,
де $\sigma_n = \sum\limits_{m=0}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m)$, $\sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$;

$$\overline{\Gamma} - Q \sum_{k=0}^{n} B(x_n, x_k) \overline{Z}_k = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} B(x_n, x_k) \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k, s) \cdot \overline{G}_{k-1}(s)\, ds + \overline{S}_k \right). \tag{18}$$

Запишемо праву частину (18) в матричному вигляді

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k, s) \cdot \overline{G}_{k-1}(s)\, ds + \overline{S}_k =$$

$$= \begin{pmatrix} -\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} b_{k-1}(x_k, s) \cdot g_{k-1}(s)\, ds \\ -\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} g_{k-1}(s)\, ds - s_k \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} I_{k-1}(x_k) \\ I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k \end{pmatrix} = \overline{Z}_k;$$

$$\sum_{k=0}^{n} B(x_n, x_k) \begin{pmatrix} I_{k-1}(x_k) \\ I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(I_{k-1}(x_k) + (I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k) \cdot \sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \right) \\ \sum\limits_{k=0}^{n} \left(I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k \right) \end{pmatrix}.$$

Отже, отримуємо

$$\overline{\Gamma} - Q \sum_{k=0}^{n} B(x_n, x_k) \overline{Z}_k = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_n(t) - \sum\limits_{k=0}^{n} \left(I_{k-1}(x_k) + (I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k) \cdot \sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \right) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Підставимо (19) в (17)

$$\overline{P}_0 = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \frac{\psi_n(t) - \psi_0(t)}{\sigma_n} - \frac{1}{\sigma_n} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(I_{k-1}(x_k) + (I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k) \cdot \sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \right) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

На основі формул (13), (16), (20), після перетворень, отримаємо зображення вектор-функції $\overline{W}_i(x,t)$ на проміжку $[x_i; x_{i+1})$

$$\overline{W}_i(x,t) = B_i(x, x_i) \cdot \left(B(x_i, x_0) \cdot \overline{P}_0 + \sum_{k=0}^{i} B(x_i, x_k) \overline{Z}_k \right) + \int\limits_{x_i}^{x} B_i(x, s) \cdot \overline{G}_i(s)\, ds = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x, x_i) + \sigma_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{P}_0 +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{i} \left(I_{k-1}(x_k) + (I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k) \sum\limits_{m=k}^{i-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \right) + b_i(x, x_i) \sum\limits_{k=0}^{i} \left(I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k \right) + I_i(x) \\ \sum\limits_{k=0}^{i} \left(I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k \right) + I_i^{[1]}(x) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Перша координата вектора $\overline{W}_i(x,t)$ в (21) і є шуканою функцією $w_i(x,t)$. Отже,

$$w_i(x,t) = \psi_0(t) + (b_i(x, x_i) + \sigma_i) \frac{\psi_n(t) - \psi_0(t)}{\sigma_n} -$$

$$-\frac{1}{\sigma_n} (b_i(x, x_i) + \sigma_i) \left(\sum_{k=0}^{n} \left(I_{k-1}(x_k) + (I_{k-1}^{[1]}(x_k) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -s_k) \sum_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \right) \right) + \sum_{k=0}^{i} (I_{k-1}(x_k) +$$

$$+ (I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k) \sum_{m=k}^{i-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \Big) +$$

$$+ b_i(x, x_i) \sum_{k=0}^{i} \left(I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k \right) + I_i(x). \tag{22}$$

Підставляючи вираз (22) у (9), можемо записати розв'язок на всьому проміжку $[x_0; x_n]$.

III. Побудова функції $v(x,t)$

Запишемо мішану задачу для функції $v(x,t)$. Підставляючи (4) в (1) та враховуючи, що функція $w(x,t)$ задовольняє (5), одержуємо неоднорідне рівняння

$$r(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -r(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (23)$$

З (4) та (3) для функції $v(x,t)$ отримаємо початкові умови

$$\begin{cases} v(x,0) = \varphi_0(x) - w(x,0) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_0(x), \\ \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x) - \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_1(x). \end{cases} \quad (24)$$

Оскільки функція $w(x,t)$ справджує крайові умови (6), то із (4) випливають крайові умови для функції $v(x,t)$

$$\begin{cases} v(x_0,t) = 0, \\ v(x_n,t) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Отже, за умови, що розв’язок $w(x,t)$ задачі (5), (6) є відомим, функція $v(x,t)$ є розв’язком мішаної задачі (23)–(25).

IV. Метод Фур’є та задача на власні значення

1. Розвинення в ряди (Фур’є) за власними функціями. Шукатимемо нетривіальні розв’язки відповідного до (23) однорідного рівняння

$$r(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad (26)$$

що справджує крайові умови (25), у вигляді

$$v(x,t) = T(t)\cdot X(x), \quad (27)$$

де $T(t)$, $X(x)$ – поки що невідомі функції [3]. Підставивши (27) в рівняння (26) і ділячи обидві частини рівності на $r(x)\cdot T(t)\cdot X(x)$, одержимо квазідиференціальне рівняння

$$(\lambda(x)X'(x))' + \omega^2 r(x)X(x) = 0, \quad (28)$$

де ω – параметр.

Підставивши (27) в умови (25) та врахувавши, що $T(t)\neq 0$, отримаємо крайові умови

$$\begin{array}{l} X(x_0) = 0, \\ X(x_n) = 0. \end{array} \quad (29)$$

Задача (28), (29) – задача на власні значення. Властивості власних значень ω_k та власних функцій $X_k(x,\omega_k)$ задачі (28), (29) детально описано в [4]. Якщо $F(x)$ деяка функція, що задовольняє певні умови, то її розвинення за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ має вигляд

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k X_k(x,\omega_k), \quad (30)$$

де коефіцієнти Фур’є F_k обчислюють за формулами

$$F_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int_{x_0}^{x_n} F(x)X_k(x,\omega_k)r(x)\,dx. \quad (31)$$

Зауважимо, що $\|X_k\|^2$ – квадрат норми власної функції X_k

$$\|X_k\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} X_k^2(x,\omega_k)r(x)\,dx. \quad (32)$$

Уточнимо, які ж умови задовольняє функція $F(x)$. Вважатимемо, що $F(x)$ – абсолютно неперервна функція, яка має різні аналітичні вирази на кожному з проміжків $[x_i;x_{i+1})$, тобто допускає зображення

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(x)\theta_i \quad (33)$$

на проміжку $[x_0;x_n]$.

Функції вигляду (33) (взагалі кажучи, кусково-неперервні, з розривами першого роду в точках x_i, $i=\overline{0,n-1}$) додаються, множаться та інтегруються так: якщо $F_1(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} F_{1i}(x)\theta_i$, $F_2(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} F_{2i}(x)\theta_i$, то $F_1 \pm F_2 = \sum\limits_{i=0}^{n-1}(F_{1i}\pm F_{2i})\theta_i$, $F_1\cdot F_2 = \sum\limits_{i=0}^{n-1}(F_{1i}\cdot F_{2i})\theta_i$,

$$\int_{x_0}^{x_n} F_1(x)F_2(x)r(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_0}^{x_n} F_{1i}(x)F_{2i}(x)r_i(x)\,dx, \quad (34)$$

$$\|F_k\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} F_k^2(x)r(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_0}^{x_n} F_{k\ i}^2(x)r_i(x)\,dx, \quad (35)$$

якщо $k\geq 1$.

Вираз (34) – це скалярний добуток функцій $F_1(x)$ і $F_2(x)$, а (35) – квадрат норми функції $F_k(x)$ з вагою $r(x)$.

Приймемо

$$X_k(x,\omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{k\,i}(x,\omega_k)\theta_i. \quad (36)$$

Тоді для коефіцієнтів Фур’є F_k з розвинення (30) та для квадратів норми функцій $X_k(x)$ з формул (31) і (32) отримаємо:

$$F_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} F_i(x)X_{k\ i}(x,\omega_k)r_i(x)\,dx,$$

$$\|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{k\ i}^2(x,\omega_k)r_i(x)\,dx.$$

2. Конструктивна побудова власних функцій. Ввівши квазіпохідну $X^{[1]} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda X'$, вектор $\overline{X} = \begin{pmatrix} X \\ X^{[1]} \end{pmatrix}$ та матрицю $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ -\omega^2 r & 0 \end{pmatrix}$, зведемо квазідиференціальне рівняння (28) до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{X}' = A\overline{X}. \tag{37}$$

Своєю чергою, крайові умови (29) матимуть вигляд

$$P\overline{X}(x_0) + Q\overline{X}(x_n) = \overline{0}. \tag{38}$$

Відповідну систему на проміжку $[x_i; x_{i+1})$ запишемо у вигляді

$$\overline{X}'_i = A_i\overline{X}_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{39}$$

де $A_i(x)$ – це матриці $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ -\omega^2 r_i & 0 \end{pmatrix}$.

Матрицю Коші системи (39) позначимо $\widetilde{B}_i(x, s, \omega)$ і аналогічно, як і в формулі (12), позначимо $\widetilde{B}(x_i, x_0, \omega) \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{j=0}^{i} \widetilde{B}_{i-j}(x_{i-j+1}, x_{i-j}, \omega)$.

Позначимо також

$$\widetilde{B}(x, x_0, \omega) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{B}_i(x, x_i, \omega)\widetilde{B}(x_i, x_0, \omega)\theta_i, \tag{40}$$

(аналог матриці Коші на всьому проміжку $[x_0; x_n]$);

$$\widetilde{B}(x_n, x_0, \omega) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Нетривіальний розв'язок $\overline{X}(x, \omega)$ системи (37) шукаємо у вигляді

$$\overline{X}(x, \omega) = \widetilde{B}(x, x_0, \omega) \cdot \overline{C}, \tag{42}$$

де $\overline{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – деякий ненульовий вектор.

Вектор-функція $\overline{X}(x, \omega)$ має задовольняти крайові умови (38), тобто

$$P\overline{X}(x_0, \omega) + Q\overline{X}(x_n, \omega) = \overline{0},$$

$$\left[P\widetilde{B}(x_0, x_0, \omega) + Q\widetilde{B}(x_n, x_0, \omega)\right] \cdot \overline{C} = \overline{0}.$$

Врахувавши, що $\widetilde{B}(x_0, x_0, \omega) = E$, прийдемо до рівності

$$\left[P + Q\widetilde{B}(x_n, x_0, \omega)\right] \cdot \overline{C} = \overline{0}. \tag{43}$$

Для існування ненульового вектора $\overline{C}$ в (43) необхідно і достатньо виконання умови

$$\det\left[P + Q\widetilde{B}(x_n, x_0, \omega)\right] = 0. \tag{44}$$

Конкретизуємо вигляд лівої частини характеристичного рівняння (44), врахувавши вигляд матриць P, Q та (41)

$$\det\left[P + Q\widetilde{B}(x_n, x_0, \omega)\right] =$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \end{pmatrix}\right] = b_{12}(\omega).$$

Сформулюємо таке твердження.

Твердження 1. Характеристичне рівняння задачі на власні значення (28), (29) має вигляд

$$b_{12}(\omega) = 0. \tag{45}$$

Як відомо [4], корені ω_k характеристичного рівняння (45), які є власними значеннями задачі (28), (29), є додатними та різними. Для знаходження ненульового вектора $\overline{C}$ підставимо в рівність (43) ω_k замість ω. Тоді прийдемо до векторної рівності

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{11}(\omega_k) & b_{12}(\omega_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ b_{11}(\omega_k) \cdot C_1 + b_{12}(\omega_k) \cdot C_2 = 0. \end{cases} \tag{46}$$

Оскільки визначник цієї системи $b_{12}(\omega) = 0$, то система (46) має розв'язки вигляду $C_1 = 0$, $C_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Прийнявши, наприклад, $C_2 = 1$, маємо $\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нехай $\overline{X}_k(x, \omega_k)$ – нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню ω_k. Тоді

Твердження 2. Власні вектори системи диференціальних рівнянь (37) з крайовими умовами (38) мають структуру

$$\overline{X}_k(x, \omega_k) = \widetilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Наслідок 1. Власні функції $X_k(x, \omega_k)$, як перші координати власних векторів $\overline{X}_k(x, \omega_k)$, можна записати у вигляді

$$X_k(x, \omega_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \widetilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{47}$$

Зокрема, оскільки $X_k(x, \omega_k)$ має вигляд (36), то з (40) та (47) випливає, що

$$X_{ki}(x, \omega_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \widetilde{B}_i(x, x_i, \omega_k) \times$$

$$\times \widetilde{B}(x_i, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{48}$$

V. Побудова розв'язку $v(x, t)$ мішаної задачі (23)–(25)

Для розв'язання задачі (23)–(25) застосуємо метод власних функцій [4], який полягає в тому, що розв'язок задачі (23)–(25) шукаємо у вигляді

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x, \omega_k), \tag{49}$$

де $T_k(t)$ – невідомі функції, які визначимо далі.

Оскільки $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ входить у праву частину рівняння (23), то розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями $X_k(x, \omega_k)$ крайової задачі (28), (29)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) X_k(x, \omega_k). \tag{50}$$

Підставляючи вираз (49) у (23) та враховуючи (50), отримаємо рівність

$$r(x)\sum_{k=1}^{\infty} T_k{}''(t) X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\left(\lambda X_k{}'(x,\omega_k)\right)' -$$

$$-r(x)\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) X_k(x,\omega_k).$$

Враховуючи, що власні функції $X_k(x,\omega_k)$ задовольняють рівняння (28), приходимо до рівності

$$r(x)\sum_{k=1}^{\infty} T_k{}''(t) X_k(x,\omega_k) = -r(x)\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 X_k(x,\omega_k)\times$$

$$\times T_k(t) - r(x)\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) X_k(x,\omega_k),$$

яка після скорочення на $r(x) > 0$ набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k{}''(t) + \omega_k^2 T_k(t) + w_k(t)\right] X_k(x,\omega_k) = 0. \qquad (51)$$

Прирівнюючи коефіцієнти Фур'є (51) до нуля, приходимо до диференціальних рівнянь

$$T_k{}''(t) + \omega_k^2 T_k(t) = -w_k(t), \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (52)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (52) має вигляд

$$T_k(t) = a_k \cos\omega_k t + d_k \sin\omega_k t -$$

$$-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds, \qquad (53)$$

де a_k, d_k – невідомі сталі [8].

Позначимо $I(t) = \frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds$. Зауважимо, що $I(0) = 0$, $I'_t(0) = 0$.

Для визначення сталих a_k, d_k розвинемо в ряди Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ праві частини початкових умов (24)

$$\Phi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{0k} X_k(x,\omega_k), \qquad (54)$$

$$\Phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1k} X_k(x,\omega_k), \qquad (55)$$

де Φ_{0k}, Φ_{1k} – відповідні коефіцієнти Фур'є.

З (53) випливає, що

$$T_k(0) = a_k, \qquad (56)$$

$$T_k{}'(t) = -a_k\omega_k \sin\omega_k t + d_k\omega_k \cos\omega_k t - I_t{}'(t),$$

звідки

$$T_k{}'(0) = d_k\omega_k. \qquad (57)$$

З (49), першої умови в (24), та врахувавши (54), одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{0k} X_k(x,\omega_k).$$

Звідки, використовуючи (56), маємо

$$T_k(0) = a_k = \Phi_{0k}.$$

Аналогічно з (49), другої умови в (24), врахувавши (55), маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k{}'(0) X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1k} X_k(x,\omega_k).$$

Звідки, використовуючи (57), знаходимо

$$T_k{}'(0) = d_k\omega_k = \Phi_{1k}, \quad d_k = \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k}.$$

Отже, остаточно отримуємо розв'язок мішаної задачі (23)–(25) у вигляді ряду

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0k}\cos\omega_k t + \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k}\sin\omega_k t -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right] X_k(x,\omega_k).$$

Враховуючи (36) та те, що $v(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(x,t)\theta_i$, де $v_i(x,t)$ визначені на проміжку $[x_i; x_{i+1})$, одержуємо

$$v_i(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{0k}\cos\omega_k t + \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k}\sin\omega_k t -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t \sin\omega_k(t-s)\cdot w_k(s)\,ds\right] X_{ki}(x,\omega_k), \qquad (58)$$

де функції $X_{ki}(x,\omega_k)$ обчислюються за формулою (48).

Врахувавши (22), (58), отримаємо розв'язок задачі (1)–(3)

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1}\left[w_i(x,t) + v_i(x,t)\right]\theta_i.$$

Висновки

Теорема про розвинення за власними функціями адаптована для випадку диференціальних рівнянь з кусково-неперервними (за просторовою змінною) коефіцієнтами.

Отримано явні формули для обчислення розв'язку та його квазіпохідної для будь-якого підінтервалу основного проміжку, які є справедливими для довільної скінченної кількості точок розриву першого роду згаданих вище коефіцієнтів.

Ця схема дослідження задачі розглядалась у випадку прямокутно-декартової системи координат. Однак вона залишається правомірною для будь-якої криволінійної, ортогональної системи координат. Так, наприклад, у роботі [1] фактично описано алгоритм розв'язування крайової задачі для функції у циліндричних та сферичних координатах.

Зауважимо, що отримані результати безпосередньо застосовують у прикладних задачах.

Література

[1] *Тацій Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для найпростіших квазідиференціальних рівнянь другого порядку / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. О. Власій // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Серія "Фіз.-мат. науки". – 2011. – № 718. – С. 61–69.

[2] *Тацій Р. М.* Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами / Р. М. Тацій, О. О. Власій, М. Ф. Стасюк // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Серія "Фіз.-мат. науки". – 2014. – № 804. – С. 64–69.

[3] *Арсенин В. Я.* Методы математической физики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.

[4] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

[5] *Тацій Р. М.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. Мазуренко, О. О. Власій. – Дрогобич: Коло, 2011. – 297 с.

[6] *Рудавський Ю. К.* Збірник задач з диференціальних рівнянь: навч. посіб. / Ю. К. Рудавський, П. І. Каленюк, Р. М. Тацій та ін. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2001. – 244 с.

[7] *Власій О. О.* Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами / О. О. Власій, М. Ф. Стасюк, Р. М. Тацій // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Серія "Фіз.-мат. науки". – 2009. – № 660. – С. 34–38.

[8] *Каленюк П. І.* Диференціальні рівняння: навч. посіб. / П. І. Каленюк, Ю. К. Рудавський, Р. М. Тацій, І. Ф. Клюйник, В. М. Колісник, П. П. Костробій, І. Я. Олексів – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2014. – 380 с.

THE TOTAL FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF HIPERBOLIC TYPE WITH PIECEWISE CONTINUOUS COEFFICIENTS AND STATIONARY HETEROGENEOUS

R. M. Tatsij, O. O. Karabyn, O. Yu. Chmyr

Lviv State University of vital activity safety
35, Kleparivska Str., 79058, Lviv, Ukraine

A new solving scheme of the general first boundary value problem for a hyperbolic type equation with piecewise continuous coefficients and stationary heterogeneous was proposed and justified. In the basis of the solving scheme is a concept of quasi-derivatives, a modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and a reduction method. The advantage of this method is a possibility to examine a problem on each breakdown segment and then to combine obtained solutions on the basis of matrix calculation. Such an approach allows to use software tools for the solution.

Key words: kvazidifferential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of eigenfunctions.

2000 MSC: 34B05; 34B27; 34A37

UDK: 517.912