ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 871, 2017, с. 93–98

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 871, 2017, p. 93–98

ПРО УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ДВОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

З. М. Нитребич[a], О. М. Маланчук[a, b]

[a]*Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна
[b]*Національний медичний університет ім. Д. Галицького*
вул. Пекарська, 69, 79017, Львів, Україна

(Отримано 7 грудня 2016 р.)

Знайдено умови неіснування у класі цілих функцій розв'язку задачі для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом, який задовольняє за цією змінною неоднорідні локальні двоточкові умови. Припущено при цьому, що характеристичний визначник задачі тотожно дорівнює нулеві. У випадку існування неєдиного розв'язку задачі у класі цілих функцій запропоновано формули для знаходження її часткового розв'язку.

Ключові слова: двоточкові умови за часом, характеристичний визначник задачі, диференціально-символьний метод.

2000 MSC: 35L15

УДК: 517.95

Вступ

В останні десятиріччя активно досліджуються багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними (див. праці [1–6] та бібліографію в них). Це зумовлено тим, що такі задачі є моделями багатьох фізичних, економічних, медико-біологічних, демографічних та інших процесів.

Одним з найважливіших питань у теорії багатоточкових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними є встановлення умов їх коректності у певних функційних просторах.

Вперше коректну розв'язність задач із багатоточковими умовами за часовою змінною для гіперболічних диференціальних рівнянь із частинними похідними на підставі метричного підходу досліджено у статті [7].

У працях [8–10] встановлено класи однозначної розв'язності задач із локальними багатоточковими умовами за часом для рівнянь із частинними похідними в необмежених областях.

Щодо існування та єдиності розв'язку багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними у згаданих дослідженнях припускалось, що характеристичний визначник задачі є відмінним від тотожного нуля.
Умови існування нетривіальних розв'язків однорідної двоточкової за часом задачі для диференціального рівняння другого порядку за часом та довільного порядку за просторовими змінними у класах цілих функцій досліджено у працях [11–13]. У цій статті встановлено умови існування розв'язків згаданого вище рівняння, що задовольняють неоднорідні локальні двоточкові за часом умови, якщо характеристичний визначник задачі при цьому тотожно дорівнює нулеві.

I. Формулювання задачі

Дослідимо в області змінних $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^s$ $(s \in \mathbb{N})$ умови існування нетривіальних розв'язків задачі

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial}{\partial t} + b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\right]U(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &A_1 U(0,x) + A_2 \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_0(x), \\ &B_1 U(h,x) + B_2 \frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = \varphi_1(x), \;\; h > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

де $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – довільні диференціальні поліноми степенів p_a та p_b (за сукупністю змінних) відповідно з комплексними коефіцієнтами, A_1, A_2, B_1, B_2 – комплексні числа такі, що $|A_1|^2+|A_2|^2 \neq 0$ та $|B_1|^2+|B_2|^2 \neq 0$, а $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – задані цілі функції, хоча б одна з яких є ненульовою.

Для задачі (1), (2) складемо її характеристичний визначник, тобто визначник такого вигляду

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1(h,\nu) & C_2(h,\nu) \end{vmatrix},$$

де

$$C_1(h,\nu) = B_1 T_0(h,\nu) + B_2 \frac{dT_0}{dt}(h,\nu),$$

$$C_2(h,\nu) = B_1 T_1(h,\nu) + B_2 \frac{dT_1}{dt}(h,\nu),$$

$$T_0(t,\nu)=\begin{cases} e^{-a(\nu)t}\Big\{a(\nu)\dfrac{\sinh\Big[t\sqrt{D(\nu)}\Big]}{\sqrt{D(\nu)}}+\cosh\Big[t\sqrt{D(\nu)}\Big]\Big\}, & \text{якщо } D(\nu)\neq 0,\\ e^{-a(\nu)t}\big\{a(\nu)t+1\big\}, & \text{якщо } D(\nu)=0, \end{cases}$$
$$T_1(t,\nu)=\begin{cases} e^{-a(\nu)t}\dfrac{\sinh\Big[t\sqrt{D(\nu)}\Big]}{\sqrt{D(\nu)}}, & \text{якщо } D(\nu)\neq 0,\\ t\,e^{-a(\nu)t}, & \text{якщо } D(\nu)=0, \end{cases} \tag{3}$$

$D(\nu)=a^2(\nu)-b(\nu),\ \nu=(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\mathbb{C}^s.$

Зауважимо, що функції (3) утворюють нормальну в точці $t=0$ фундаментальну систему розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$\Big[\frac{d^2}{dt^2}+2a(\nu)\frac{d}{dt}+b(\nu)\Big]T(t,\nu)=0. \tag{4}$$

Функції (3) цілі стосовно вектора-параметра ν, оскільки коефіцієнти $a(\nu)$, $b(\nu)$ рівняння (4) за припущенням є поліномами – цілими функціями. Крім цього, функція $\Delta(\nu)$ як суперпозиція цілих функцій є також цілою.

Знайдемо умови існування розв'язків задачі (1), (2) у просторі цілих функцій, якщо $\Delta(\nu)\equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$. У випадку існування неєдиного розв'язку задачі (1), (2) за допомогою диференціально-символьного методу [14, 15] побудуємо її часткові розв'язки.

Зауважимо, що випадок $\Delta(\nu)\not\equiv 0$ для задачі (1), (2) досліджено у праці [16].

II. Основні результати

Нехай $p=\max\{p_a,\,p_b/2,\,1\}$. Число $p\in[1;\infty)$ визначає порядок цілих функцій $T_0\,(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}$, $T_1\,(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}$ за сукупністю змінних $\nu_1,\,\nu_2,\,\ldots,\nu_s$, де $\nu\cdot x=\nu_1x_1+\ldots+\nu_sx_s$;

Введемо у розгляд класи цілих функцій:

$A_{p'}$ – клас цілих функцій $\varphi(x)$, порядок яких є меншим за p', де $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, якщо $1\le p<\infty$. Якщо ж $p=1$, то $A_{p'}=A_\infty$ є класом цілих усіх функцій;

$\mathbb{A}_{p'}$ – клас цілих функцій $U(t,x)$, які для кожного фіксованого $t\in\mathbb{R}$ належать до $A_{p'}$.

Дослідимо умови існування та неіснування розв'язків задачі (1), (2) у вказаних класах цілих функцій у випадку $\Delta(\nu)\equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$.

Припустимо, що в класі $\mathbb{A}_{p'}$ існує цілий розв'язок $U(t,x)$ рівняння (1), що задовольняє умови (2). Позначимо $U(0,x)=\varphi(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\psi(x)$. Тоді функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ є також цілими і належать до класу $A_{p'}$.

Розв'язок задачі (1), (2) як єдиний розв'язок задачі Коші у класі $\mathbb{A}_{p'}$ для рівняння (1) з початковими даними φ та ψ з $A_{p'}$ запишемо у вигляді [14, 15]:

$$U(t,x)=\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}+ \\ +\psi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}, \tag{5}$$

де $O=(0,\ldots,0)\in\mathbb{C}^s$.

З виконання першої двоточкової умови (2) для $U(t,x)$ одержуємо тотожність на $\mathbb{R}$:

$$A_1\varphi\,(x)+A_2\psi\,(x)\equiv\varphi_0(x). \tag{6}$$

Розглянемо випадок, коли $A_2\neq 0$. Тоді з тотожності (6) отримаємо

$$\psi(x)\equiv\frac{1}{A_2}\big[\varphi_0(x)-A_1\varphi(x)\big]. \tag{7}$$

З виконання другої двоточкової умови маємо

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{C_1(h,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}+ \\ +\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{C_2(h,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}\equiv\varphi_1(x).$$

В останній тотожності використаємо (7):

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{C_1(h,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}+ \\ +\frac{1}{A_2}\left[\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)-A_1\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right]\Big\{C_1(h,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}\equiv \\ \equiv\varphi_1(x)$$

або

$$\frac{1}{A_2}\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{C_2(h,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}- \\ -\frac{1}{A_2}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{\Delta(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}\equiv\varphi_1(x).$$

Оскільки $\Delta(\nu)\equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$, то

$$\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{C_2(h,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}\equiv A_2\varphi_1(x). \tag{8}$$

Якщо ж $A_1 \neq 0$, то аналогічно одержуємо таку тотожність

$$\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{C_1(h,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} \equiv A_1\varphi_1(x). \quad (9)$$

Якщо $A_1A_2 \neq 0$, то тотожності (8) та (9) еквівалентні.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1), (2) *виконується тотожність* $\Delta(\nu) \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}^s$. *Якщо для деякого* $x \in \mathbb{R}^s$ *та для* $\varphi_0, \varphi_1 \in A_{p'}$ *справджується хоча б одна з умов*

$$\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{C_2(h,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} \neq A_2\varphi_1(x), \quad (10)$$

якщо $A_2 \neq 0$, *або*

$$\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{C_1(h,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} \neq A_1\varphi_1(x), \quad (11)$$

якщо $A_1 \neq 0$, *то у класі цілих функцій* $\mathbb{A}_{p'}$ *розв'язок задачі* (1), (2) *не існує*.

□ *Доведення.* Припустимо протилежне, що в класі $\mathbb{A}_{p'}$ існує розв'язок задачі (1), (2). Тоді виконується тотожність (8), якщо $A_2 \neq 0$ або (9), якщо $A_1 \neq 0$. А це суперечить умовам (10) та (11). Теорему доведено. ■

Приклад 1. Дослідити в області $\mathbb{R}^3$ змінних t та $x = (x_1, x_2)$ розв'язність задачі для рівняння

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 3\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\frac{\partial}{\partial t} - \Big(1 + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 6\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\Big]U(t,x) = 0 \quad (12)$$

з неоднорідними локальними двоточковими умовами

$$\begin{aligned} U(0,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) &= \varphi_0(x), \\ U(h,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(h,x) &= \varphi_1(x). \end{aligned} \quad (13)$$

∇ Нормальна в точці $t = 0$ фундаментальна система розв'язків відповідного до (12) звичайного диференціального рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\left(\nu_1^2 - 3\nu_2\right)\frac{d}{dt} - \left(1 + 2\nu_1^2 - 6\nu_2\right)\right]T(t,\nu) = 0$$

матиме вигляд

$$\begin{aligned} T_0(t,\nu) &= \begin{cases} \dfrac{2\nu_1^2 - 6\nu_2 + 1 + e^{-2\left(\nu_1^2 - 3\nu_2 + 1\right)t}}{2\nu_1^2 - 6\nu_2 + 2}\, e^t, & \text{якщо } \nu_1^2 - 3\nu_2 + 1 \neq 0, \\ (1-t)\, e^t, & \text{якщо } \nu_1^2 - 3\nu_2 + 1 = 0, \end{cases} \\ T_1(t,\nu) &= \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-2\left(\nu_1^2 - 3\nu_2 + 1\right)t}}{2\nu_1^2 - 6\nu_2 + 2}\, e^t, & \text{якщо } \nu_1^2 - 3\nu_2 + 1 \neq 0, \\ t\, e^t, & \text{якщо } \nu_1^2 - 3\nu_2 + 1 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Для задачі (12), (13) маємо $a(\nu) = \nu_1^2 - 3\nu_2$, $b(\nu) = -1 - 2\left(\nu_1^2 - 3\nu_2\right)$, $A_1 = B_1 = 1$, $A_2 = B_2 = -1$, $s = 2$, $p_a = p_b = p = 2$. Крім того,

$$\triangle(\nu) = T_1(h,\nu) - T_1'(h,\nu) + T_0(h,\nu) - T_0'(h,\nu) \equiv 0.$$

Умова (10), як і умова (11), для задачі (12), (13) формулюється так:
для деякої точки $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *справджується нерівність*

$$\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\left(-2\nu_1^2 + 6\nu_2 - 1\right)h + \nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} \neq \varphi_1(x) \quad (15)$$

для цілих функцій φ_0, φ_1 *з класу* A_2.

Отже, за виконання умови (15) розв'язок задачі (12), (13) у класі цілих функцій $\mathbb{A}_2$ згідно з теоремою 1 не існує. △

Приклад 2. Дослідити розв'язність двоточкової задачі в області $\mathbb{R}^3$ змінних t та $x = (x_1, x_2)$ для диференціального рівняння

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^3}{\partial t\partial x_1\partial x_2} + 1 + \frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\Big]U(t,x) = 0 \quad (16)$$

з неоднорідними локальними двоточковими умовами

$$\begin{aligned} \alpha U(0,x) + \beta\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) &= \varphi_0(x), \\ \alpha U(\pi,x) + \beta\frac{\partial U}{\partial t}(\pi,x) &= \varphi_1(x), \end{aligned} \quad (17)$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0$.

∇ Нормальна фундаментальна система розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\nu_1\nu_2\frac{d}{dt} + 1 + \nu_1^2\nu_2^2\right]T(t,\nu) = 0$$

має вигляд

$$\begin{aligned} T_0(t,\nu) &= e^{-\nu_1\nu_2 t}\left[\nu_1\nu_2\sin t + \cos t\right], \\ T_1(t,\nu) &= e^{-\nu_1\nu_2 t}\sin t. \end{aligned} \quad (18)$$

Для задачі (16), (17) маємо $a(\nu) = \nu_1\nu_2$, $b(\nu) = \nu_1^2\nu_2^2 + 1$, $D(\nu) = -1$, $h = \pi$, $A_1 = B_1 = \alpha$, $A_2 = B_2 = \beta$, $p_a = 2$, $p_b = 4$, $p = 2$. Крім того,

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha e^{-\pi\nu_1\nu_2} & -\beta e^{-\pi\nu_1\nu_2} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Умови (10) та (11) для задачі (16), (17) збігаються і мають такий вигляд:
для деякої точки $x \in \mathbb{R}^2$ справджується нерівність

$$-\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-\pi\nu_1\nu_2+\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} \neq \varphi_1(x) \qquad (19)$$

для цілих функцій φ_0, φ_1 з класу A_2.

Отже, якщо виконується умова (19), згідно з теоремою 1 розв'язок неоднорідної задачі (16), (17) у класі цілих функцій $\mathbb{A}_2$ не існує. $\triangle$

III. Побудова часткових розв'язків двоточкової задачі у класі існування неєдиного розв'язку задачі

Розглянемо випадок, коли умови теореми 1 не виконуються.

Якщо для задачі (1), (2) $\Delta(\nu) \equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$ і для довільного $x \in \mathbb{R}^s$ виконуються рівності

$$\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{C_2(h,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} = A_2\varphi_1(x),$$

$$\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{C_1(h,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} = A_1\varphi_1(x)$$

для $\varphi_0, \varphi_1 \in A_{p'}$, то розв'язок задачі (1), (2) у класі цілих функцій $\mathbb{A}_{p'}$ може існувати, але не є єдиним.

Продемонструємо на прикладах можливість побудови часткових розв'язків задачі в цьому випадку.

Приклад 3. Розглянемо задачу (12), (13), у якій для цілих функцій φ_0, φ_1 з класу A_2 і для довільного $x \in \mathbb{R}^2$ виконується рівність

$$\varphi_1(x) = \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\left(-2\nu_1^2+6\nu_2-1\right)h+\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}. \qquad (20)$$

∇ Умова (15) не виконується. Покажемо, що розв'язок задачі (12), (13) з умовою (20) (надалі задача (12), (13), (20)) у класі цілих функцій A_2 існує, однак не є єдиним.

Зауважимо, що ядро задачі (12), (13) є нескінченновимірним. До нього належать не лише цілі, а й класичні розв'язки вигляду

$$U(t,x) = e^t\varphi(x),$$

де φ – довільна двічі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}^2$ функція.

Цілий (частковий) розв'язок задачі (12), (13), (20) за функцією $\varphi_0(x)$ можна знайти, наприклад, за однією з формул:

$$U(t,x) = \varphi_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=(0,0)}$$

або

$$U(t,x) = -\varphi_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=(0,0)}, \qquad (21)$$

де $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ – функції (14).

Випадок 1. Нехай $\varphi_0(x_1,x_2) = e^{x_1+x_2}$. Тоді умова (20) виглядає так

$$\varphi_1(x_1,x_2) = \left\{e^{\left(-2\nu_1^2+6\nu_2-1\right)h+\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=(1,1)} = e^{3h+x_1+x_2}.$$

За формулою (21) знаходимо частковий розв'язок задачі (12), (13), (20):

$$U(t,x) = -e^{\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}}\left\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=(0,0)} = $$

$$= -T_1(t,1,1)e^{x_1+x_2} = \frac{1}{2}\left(1-e^{2t}\right)e^{t+x_1+x_2}.$$

Випадок 2. Нехай $\varphi_0(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2$. Обчислюємо

$$\varphi_1(x_1,x_2) =$$

$$= \left(2\frac{\partial}{\partial\nu_1} - \frac{\partial}{\partial\nu_2}\right)\left\{e^{(-2\nu_1^2+6\nu_2-1)h+\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=(0,0)} =$$

$$= e^{-h}(-6h+2x_1-x_2).$$

Знайдемо частковий розв'язок задачі (12), (13), (20) за формулою (21):

$$U(t,x) = \left\{2\frac{\partial}{\partial\nu_1} - \frac{\partial}{\partial\nu_2}\right\}\left\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=(0,0)} =$$

$$= 2\frac{\partial T_0}{\partial\nu_1}(t,0,0) - \frac{\partial T_0}{\partial\nu_2}(t,0,0) +$$

$$+ 2x_1T_0(t,0,0) - x_2T_0(t,0,0).$$

Оскільки

$$T_0(t,0,0) = \frac{1}{2}\left(e^{-2t}+1\right)e^t, \quad \frac{\partial T_0}{\partial\nu_1}(t,0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial\nu_2}(t,0,0) = \frac{3}{2}\left(2te^{-2t}+e^{-2t}-1\right)e^t,$$

то шуканий розв'язок задачі (12), (13), (20) має вигляд

$$U(t,x) =$$

$$= \frac{1}{2}e^t\left[(-6t-3+2x_1-x_2)e^{-2t}+2x_1-x_2+3\right].$$

Зауважимо, що знайдений розв'язок є лише частковим: його сума з елементами ядра задачі є також розв'язком задачі (12), (13), (20). $\triangle$

Приклад 4. Розглянемо задачу (16), (17), у якій для цілих функцій φ_0, φ_1 з класу A_2 і для довільного $x \in \mathbb{R}^2$ виконується рівність

$$\varphi_1(x) = -\varphi_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{-\pi\nu_1\nu_2+\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}. \qquad (22)$$

∇ Умова (19) не справджується. Покажемо, що розв'язок задачі (16), (17), (22) у класі цілих функцій $\mathbb{A}_2$ існує.

Частковий розв'язок задачі (16), (17), (22), який є цілою функцією, за функцією $\varphi_0(x)$ можна знайти, наприклад, за формулою

$$U(t,x) = \frac{1}{\alpha}\varphi_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=(0,0)}, \qquad (23)$$

якщо $\alpha \neq 0$, або за такою формулою

$$U(t,x) = \frac{1}{\beta}\varphi_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=(0,0)}, \qquad (24)$$

якщо $\beta \neq 0$, де $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ – функції (18).

Для цілої функції $\varphi_0(x_1,x_2)$, наприклад, вигляду $\varphi_0(x_1,x_2) = (x_1+3x_2)e^{x_1-x_2}$ згідно з умовою (22) обчислюємо:

$$\varphi_1(x_1,x_2) =$$
$$= -\left(\frac{\partial}{\partial\nu_1} + 3\frac{\partial}{\partial\nu_2}\right)\Big\{e^{-\pi\nu_1\nu_2+\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=(1,-1)} =$$
$$= -(x_1+3x_2-2\pi)\,e^{\pi+x_1-x_2}.$$

Для $\alpha \neq 0$ за формулою (23) знаходимо частковий розв'язок задачі (16), (17), (22):

$$U_1(t,x) =$$
$$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\nu_1} + 3\frac{\partial}{\partial\nu_2}\right)e^{\frac{\partial}{\partial\nu_1}-\frac{\partial}{\partial\nu_2}}\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=(0,0)} =$$
$$= \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{\partial T_0}{\partial\nu_1}(t,1,-1) + 3\frac{\partial T_0}{\partial\nu_2}(t,1,-1) +$$
$$+ (x_1+3x_2)\,T_0(t,1,-1)\Big)e^{x_1-x_2} =$$
$$= \frac{1}{\alpha}\left[(x_1+3x_2-2t)(\cos t - \sin t) + 2\sin t\right]e^{t+x_1-x_2}.$$

Для $\beta \neq 0$ частковий розв'язок задачі (16), (17), (22) знаходимо за формулою (24):

$$U_2(t,x) =$$
$$= \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\nu_1} + 3\frac{\partial}{\partial\nu_2}\right)e^{\frac{\partial}{\partial\nu_1}-\frac{\partial}{\partial\nu_2}}\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=(0,0)} =$$
$$= \frac{1}{\beta}\Big(\frac{\partial T_1}{\partial\nu_1}(t,1,-1) + 3\frac{\partial T_1}{\partial\nu_2}(t,1,-1) +$$
$$+ (x_1+3x_2)\,T_1(t,1,-1)\Big)e^{x_1-x_2} =$$
$$= \frac{1}{\beta}(x_1+3x_2-2t)\,e^{t+x_1-x_2}\sin t.$$

Зауважимо, що різниця функцій $U_1(t,x)$ та $U_2(t,x)$ для $\alpha\beta \neq 0$ є елементом ядра задачі (16), (17), (22). $\triangle$

Висновки

Досліджено розв'язність задачі (1), (2) для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часовою змінною з неоднорідними локальними двоточковими умовами за часом, якщо характеристичний визначник задачі тотожно дорівнює нулеві. Встановлено умови, за яких розв'язок цієї задачі у класі цілих функцій не існує. У випадку розв'язності задачі (1), (2) запропоновано спосіб знаходження її часткових розв'язків, який продемонстровано на прикладах.

Література

[1] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[2] *Пташник Б. Й., Кміть І. Я., Ільків В. С., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[3] *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 3. – С. 400–413.

[4] *Il'kiv V. S., Savka I. Y.* Nonlocal two-point problem for partial differential equations with linearly dependent coefficients // J. Math. Sci. – 2010. – Vol. 167, № 1. – P. 47–61.

[5] *Пташник Б. Й., Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для B-параболічних рівнянь // Укр. матем. журн. – 2013. – Т. 65, № 3. – С. 418–429.

[6] *Симотюк М. М., Тимків І. Р.* Задача з багатоточковими умовами для системи параболічних рівнянь високого порядку зі змінними коефіцієнтами // Прикарпатський вісник НТШ. Серія "Число". – 2015. – № 1 (29). – С. 45–59.

[7] *Пташник Б.Й.* Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // ДАН УРСР. – 1966. – № 10. – С. 1254–1257.

[8] *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // ДАН СССР. – 1968. – Т. 183, № 5. – С. 995–998.

[9] *Борок В. М., Перельман М. А.* О классах единственности решения многоточечной краевой зада-

чи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.

[10] *Віленць І. Л.* Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних // ДАН УРСР. – Сер. А. – 1974. – № 3. – С. 195–197.

[11] *Нитребич З. М., Маланчук О. М.* Однорідна задача з локальними крайовими умовами на границі смуги для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. – Серія "Математика і інформатика". – 2015. – Вип. № 2 (27). – С. 98–108.

[12] *Malanchuk O. M., Nytrebych Z. M.* Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables // Open Math. – 2017. – Vol. 15, Is. 1. – P. 101–110.

[13] *Нитребич З. М., Маланчук О. М.* Критерій існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків однорідної двоточкової задачі для рівнянь з частинними похідними // Буковинський матем. журнал. – 2016. – Т. 4, № 3–4. – С. 140–149.

[14] *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

[15] *Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M.* On an operational method of solving initial-value problems for partial differential equations induced by generalized separation of variables // J. Math. Sci. – 1999. – Vol. 97, № 1. – P. 3879–3887.

[16] *Нитребич З. М., Маланчук О. М.* Диференціально-символьний метод розв'язування двоточкової за часом задачі для рівняння з частинними похідними // Укр. матем. вісник. – 2016. – Т. 13, № 4. – С. 514–531.

ABOUT THE CONDITIONS OF SOLVABILITY OF TWO-POINT IN TIME PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Z. M. Nytrebych[a], O. M. Malanchuk[a, b]

[a] *Lviv Polytechnic National University*
12, S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine
[b] *Danylo Halytsky Lviv National Medical University,*
69, Pekarska Str., 79017, Lviv, Ukraine

We find the conditions of nonexistence in the class of entire functions of the solution of the problem for a homogeneous partial differential equation of the second order with respect to time, which satisfies nonhomogeneous local two-point conditions in time variable. It is assumed that the characteristic determinant of the problem identically equals zero. In the case of the existence of a nonunique solution of the problem in the class of entire functions, formulas for constructing the particular solution are proposed.

Key words: two-point in time conditions, characteristic determinant of the problem, differential-symbol method.

2000 MSC: 35L15

UDK: 517.95