ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 871, 2017, с. 88–93

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 871, 2017, p. 88–93

ВІДНОВЛЕННЯ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ

Г. П. Лопушанська

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, 79001, Львів, Україна

(Отримано 1 березня 2016 р.)

Доведено коректність оберненої задачі про знаходження пари функцій: розв'язку u першої крайової задачі для лінійного рівняння дифузії $D_t^\alpha u - u_{xx} = g(t)F_0(x) + h(x,t)$ з регуляризованою дробовою похідною порядку $\alpha \in (0,2)$ за часом в обмеженій циліндричній області та функції $F_0(x)$ за додатково заданих значень u в фіксований момент часу.

Ключові слова: похідна дробового порядку, обернена крайова задача, інтегральне рівняння, функція Міттаг–Леффлера.

2000 MSC: 35S15

УДК: 517.95

Вступ

Багато важливих фізичних процесів описують за допомогою крайових задач для рівнянь з регуляризованими похідними ([1–4]) функції u дробових порядків

$$D_t^\alpha u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau-\frac{u(x,0)}{t^\alpha}\Big],\ \alpha\in(0,1),$$

$$D_t^\alpha v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{v_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}d\tau - \frac{u_t(x,0)}{t^{\alpha-1}}\Big],\ \alpha\in(1,2).$$

Різні обернені задачі для рівнянь з регуляризованими дробовими похідними за часом (в основному порядків $\alpha \in (0,1)$) вивчались, зокрема, у [5]–[10].

У цій статті встановлюємо існування розв'язку (u, F_0) оберненої крайової задачі

$$D_t^\alpha u - u_{xx} = g(t)F_0(x) + h(x,t),\ (x,t)\in(0,l)(0,t_0], \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t\in[0,t_0], \quad (2)$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad u_t(x,0) = F_2(x), \quad x\in[0,l], \quad (3)$$

$$u(x,t_0) = F_3(x), \quad x\in[0,l], \quad (4)$$

де $\alpha \in (0,2)$, g, h, F_1, F_2, F_3 – задані функції, t_0 – задане додатне число. У випадку $\alpha \in (0,1]$ друга умова в (3) відсутня та вважаємо, що $D_t^1 u = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Зауважимо, що єдиність визначення залежної тільки від просторової змінної правої частини в одновимірному рівнянні дифузії з похідною дробового порядку $\alpha \in (0,1)$ за інших крайових даних та умови перевизначення доведена в [7].

I. Основні позначення

Нехай $Q_0 = (0,l)\times(0,t_0]$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ – простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в $\mathbb{R}^N$ ([11], с. 13), $N = 1,2,\ldots$, $\mathcal{D}(\bar{Q}_0) = \{v \in C^\infty(\bar{Q}_0) : (\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=t_0} = 0, \quad k = 0,1,\ldots\}$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ та $\mathcal{D}'(\bar{Q}_0)$ – простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ та $\mathcal{D}(\bar{Q}_0)$, (f,φ) – значення $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ на основній функції $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, а також значення $f \in \mathcal{D}'(\bar{Q}_0)$ на $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0)$, $g\hat{*}\varphi$ – згортка узагальненої функції g та основної функції φ ([11], с. 111): $(g\hat{*}\varphi)(x) = (g(\xi),\varphi(x+\xi))$, $f*g$ – згортка узагальнених функцій f і g: $(f*g,\varphi) = (f, g\hat{*}\varphi)$ для кожної основної функції φ, $f_\lambda \in \mathcal{D}'_+(R) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : f = 0$, якщо $t < 0\}$:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \text{ і } f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \le 0,$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція, $\theta(t)$ – одинична функція Хевісайда. Правильні такі співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \qquad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}. \quad (5)$$

Нагадаємо, що похідна $v_t^{(\alpha)}(x,t)$ Рімана–Ліувілля функції $v(x,t)$ порядку $\alpha > 0$ визначається формулою

$$v_t^{(\alpha)}(x,t) = f_{-\alpha}(t) * v(x,t),$$

звідки одержуємо зв'язок між регуляризованою похідною та похідною Рімана–Ліувілля дробового порядку

$$D_t^\alpha v(x,t) = v_t^{(\alpha)}(x,t) - f_{1-\alpha}(t)v(x,0), \quad \alpha\in(0,1),$$

$$D_t^\alpha v(x,t) = v_t^{(\alpha)}(x,t) -$$
$$- f_{1-\alpha}(t)v(x,0) - f_{2-\alpha}(t)v_t(x,0), \quad \alpha\in(1,2).$$

Використовуємо функцію Міттаг–Леффлера [1]

$$E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{p=0}^\infty \frac{z^p}{\Gamma(p\alpha+\mu)}.$$

Функція $E_{\alpha,\mu}(-z)$ $(z>0)$ – нескінченно диференційовна за $\alpha\in(0,2)$, $\mu\in\mathbb{R}$, має тільки скінченну кількість дійсних додатних нулів ([1], с. 142) та має оцінку $E_{\alpha,\mu}(-z)\le\frac{r_\mu}{1+z}$, $\quad z>0,\quad$ де r_μ – додатна стала.

Відомо зображення

$$E_{\alpha,\mu}(-z)=H^{1,1}_{1,2}\left(z\Big|{(0,1);\atop (0,1),(1-\mu,\alpha)}\right) \tag{6}$$

за допомогою H-функції Фокса [12]. За теоремами 1.7 та 1.11 із [12] одержуємо обмеженість функцій $E_{\alpha,\mu}(-z)$, якщо $z\le 1$, та асимптотику

$$E_{\alpha,\mu}(-z)=O\Big(\frac{c_{\alpha,\mu}}{z}\Big)\quad\text{при}\quad z\to+\infty,$$

де $c_{\alpha,\mu}$ – певні додатні сталі.

Нехай $C(Q_0)$, $C(\bar Q_0)$, $C[0,t_0]$ – класи неперервних відповідно в Q_0, $\bar Q_0$ та на $[0,t_0]$ функцій,

$$C_{2,\alpha}(Q_0)=\{v\in C(Q_0):\ v_{xx},D^\alpha_t v\in C(Q_0)\},$$

$$C_{2,\alpha}(\bar Q_0)=\{v\in C_{2,\alpha}(Q_0):\ v,v_t\in C(\bar Q_0)\},$$

$(C_{2,\alpha}(\bar Q_0)=C_{2,\alpha}(Q_0)\cap C(\bar Q_0)$ при $\alpha\in(0,1])$, $\tilde C^{2s+1}(0,l)$ – клас функцій $F\in C^{2s}[0,l]$, які мають обмежену на $(0,l)$ похідну порядку $2s+1$ та $F(0)=F(l)=F''(0)=F''(l)=\dots=F^{(2s)}(0)=F^{(2s)}(l)=0$, $\tilde C^{2s+2}(0,l)$ – клас функцій $F\in C^{2s+1}[0,l]$, які мають обмежену на $(0,l)$ похідну порядку $2s+2$ та $F(0)=F(l)=F''(0)=F''(l)=\dots=F^{(2s)}(0)=F^{(2s)}(l)=0$,

$$\tilde C^{2s+1}(Q_0)=\{v\in C(\bar Q_0):v(\cdot,t)\in\tilde C^{2s+1}(0,l)\,\forall t\in(0,t_0]\},$$

$$\tilde C^{2s+2}(Q_0)=\{v\in C(\bar Q_0):v(\cdot,t)\in\tilde C^{2s+2}(0,l)\,\forall t\in(0,t_0]\},$$

$$s=0,1,2,\dots.$$

II. Коректність задачі

Означення 1. Розв'язком задачі (1)–(4) називається пара функцій

$$(u,F_0)\in\mathcal{M}:=C_{2,\alpha}(\bar Q_0)\times\tilde C^2(0,l)$$

$$\big((u,F_0)\in C_{2,\alpha}(\bar Q_0)\times\tilde C^1(0,l),\ \text{якщо}\ \alpha\in(0,1]\big),$$

що задовольняє рівняння (1) в Q_0 та умови (2)–(4).

Лема 1. *За довільних сталих $\lambda>0$, $\alpha\in(1,2)$ функція*

$$T(t)=\theta(t)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha),\quad t\ge 0 \tag{7}$$

є фундаментальним розв'язком рівняння

$$T^{(\alpha)}+\lambda T=\delta \tag{8}$$

($\delta(t)$ – дельта-функція Дірака). Цей розв'язок єдиний у $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

□ *Доведення.* Записуємо рівняння (8) у вигляді

$$f_{-\alpha}*T+\lambda T=\delta(t).$$

Діючи на нього оператором $f_\alpha*$ та використовуючи формули (5), одержуємо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$T=-\lambda f_\alpha*T+f_\alpha,$$

яке розв'язуємо методом послідовних наближень:

$$T^0(t)=f_\alpha(t),$$

$$T^1(t)=f_\alpha(t)-\lambda f_\alpha(t)*f_\alpha(t)=f_\alpha(t)-\lambda f_{2\alpha}(t),$$

$$T^2(t)=T^0(t)-\lambda f_\alpha(t)*T^1(t)=f_\alpha(t)-\lambda f_{2\alpha}(t)+\lambda^2 f_{3\alpha}(t),$$

$$\dots$$

За методом математичної індукції знаходимо

$$T(t)=\sum_{p=1}^{\infty}(-\lambda)^{p-1}f_{p\alpha}(t)=\theta(t)\sum_{m=0}^{\infty}(-\lambda)^m f_{m\alpha+\alpha}(t)=$$

$$=\theta(t)\sum_{m=0}^{\infty}(-\lambda)^m\frac{t^{m\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(m\alpha+\alpha)}=\theta(t)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha).$$

■

Шукатимемо розв'язок прямої задачі (1)–(3) у вигляді ряду Фур'є

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l},\quad (x,t)\in Q_0, \tag{9}$$

за власними функціями $\sin\frac{k\pi x}{l}$ $(k=1,2,\dots)$ задачі Штурма–Ліувілля

$$X''+\lambda X=0,\quad x\in(0,l),\quad X(0)=X(l)=0. \tag{10}$$

Для знаходження невідомих функцій $T_k(t)$ одержуємо задачі Коші

$$D^\alpha T_k+\lambda_k T_k=g(t)F_{0k}+h_k(t)\quad t\in(0,t_0), \tag{11}$$

$$T_k(0)=F_{1k},\quad T_k'(0)=F_{2k},\quad k=1,2,\dots, \tag{12}$$

де $\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, F_{0k}, F_{1k}, F_{2k}, $h_k(t)$ – коефіцієнти розвинення відповідно функцій $F_0(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $h(x,t)$ за власними функціями задачі (10):

$$h(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$F_j(x)=\sum_{k=1}^{\infty}F_{jk}\sin\frac{k\pi x}{l},\quad j=0,1,2.$$

Використовуючи зв'язок між похідними дробового порядку Капуто та Рімана–Ліувілля, зводимо кожну із задач (11), (12) до рівняння

$$T_k^{(\alpha)}+\lambda_k T_k= \tag{13}$$

$$=g(t)F_{0k}+h_k(t)+f_{1-\alpha}(t)F_{1k}+f_{2-\alpha}(t)F_{2k},\quad t\in(0,t_0]$$

і за лемою 1 одержуємо його розв'язок

$$T_k(t)=F_{0k}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha)*g(t)+ \tag{14}$$

$$+t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha)*+h_k(t)+$$

$$+F_{1k}E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha)+F_{2k}tE_{\alpha,2}(-\lambda_k t^\alpha),\quad t\in(0,t_0].$$

Теорема 1. *Нехай $\alpha \in (1,2)$, $g \in C[0,t_0]$, $h \in \tilde{C}^2(Q_0)$, $F_0 \in \tilde{C}^2(0,l)$, $F_j \in \tilde{C}^1(0,l)$, $j = 1,2$. Тоді існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0)$ прямої задачі* (1)–(3). *Він має вигляд* (9), *де $T_k(t)$ визначаються формулою* (14). *Правильні оцінки*

$$||u||_{C(Q_0)} \le a||h||_{C^1(Q_0)} + a_0||F_0||_{C(0,l)}+$$

$$+a_1||F_1||_{C(0,l)} + a_2||F_2||_{C(0,l)},$$

$$||u_{xx}||_{C(Q_0)} + ||D_t^\alpha u||_{C(Q_0)} \le \hat{a}||h||_{C^2(Q_0)}+$$

$$+\hat{a}_0||F_0||_{C^2(0,l)} + \hat{a}_1||F_1||_{C^1(0,l)} + \hat{a}_2||F_2||_{C^1(0,l)},$$

де a, a_0, a_1, a_2, $\hat{a}, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ – певні додатні сталі.

Нехай $\alpha \in (0,1]$, $g \in C[0,t_0]$, $h \in \tilde{C}^1(Q_0)$, $F_j \in \tilde{C}^1(0,l)$, $j = 0,1$. Тоді існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0)$ задачі ((1))–((3)). Він має вигляд (9), де $T_k(t)$ визначаються формулою ((14)) (ці формули не містять доданків із F_2 та F_{2k}). Правильні оцінки

$$||u||_{C(Q_0)} \le a_0||h||_{C(Q_0)} + a_0||F_0||_{C(0,l)} + a_1||F_1||_{C(0,l)},$$

$$||u_{xx}||_{C(Q_0)} + ||D_t^\alpha u||_{C(Q_0)} \le$$

$$\le \hat{a}_0||h||_{C^1(Q_0)} + \hat{a}_0||F_0||_{C^1(0,l)} + \hat{a}_1||F_1||_{C^1(0,l)},$$

де $a, a_0, a_1, \hat{a}, \hat{a}_0, \hat{a}_1$ – певні додатні сталі,

$$||v||_{C(Q_0)} = \sup_{(x,t)\in Q_0} |v(x,t)|,$$

$$||v||_{C^r(0,l)} = ||v||_{\tilde{C}^r(0,l)} = \max_{m=\overline{0,r}} \sup_{x\in(0,l)} |v^{(m)}(x)|,$$

$$||v||_{\tilde{C}^r(Q_0)} = \max_{m=\overline{0,r}} \max_{t\in[0,t_0]} \sup_{(x,t)\in Q_0} \Big|\frac{\partial^m v(x,t)}{\partial x^m}\Big|, \ r=0,1,\dots$$

□ *Доведення.* Якщо $g \in C[0,t_0]$, неперервній та обмеженій на $(0,l)$ функції $F_0(x)$, знаходимо оцінку

$$|F_{0k}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * g(t)| \le$$

$$\le |F_{0k}| \max_{t\in[0,t_0]} \int_0^t \tau^{\alpha-1}|E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha)|d\tau \le$$

$$\le M_0 r_\alpha \int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}d\tau}{1+\lambda_k\tau^\alpha} = \frac{M_0 r_\alpha ln(1+\lambda_k\tau^\alpha)}{\alpha\lambda_k} \le \frac{M_1}{k^{2-2s}}$$

для довільного $s > 0$. Тут і далі M_i $(i = 0,1,\dots)$ – певні додатні сталі. Тоді, якщо $s \in (0, \frac{1}{2})$, ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \big[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * g(t)\big] F_{0k} \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (15)$$

рівномірно та абсолютно збігається на $\bar{Q}_0$. Подібно міркуючи далі, одержуємо, що за $F_0 \in \tilde{C}^2(0,l)$ продиференційований двічі за x ряд (15) рівномірно та абсолютно збігається на $\bar{Q}_0$, Оскільки функція $T_{k0}(t) = F_{0k}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * g(t)$ задовольняє рівняння вигляду (8) із вільним членом $g(t)F_{0k}$, при $g \in C[0,T]$, $F_0 \in \tilde{C}^2(0,l)$, одержуємо також існування неперервних похідних $T_{k0}^{(\alpha)}(t)$ та $D_t^\alpha T_{k0}(t)$, $t \in [0,T]$. Подібно проводимо дослідження другого доданка у формулі (14).

Якщо $F_j \in C[0,l]$, матимемо $|F_{jk}E_{\alpha,j}(-\lambda_k t^\alpha)| \le \frac{C_j}{1+\lambda_k\tau^\alpha}$, $j = 1,2$, де C_1, C_2 – певні додатні сталі. Тоді ряди

$$\sum_{k=1}^\infty F_{jk}E_{\alpha,j}(-\lambda_k t^\alpha) \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad j = 1,2 \qquad (16)$$

рівномірно та абсолютно збігаються на $\bar{Q}_0$, $j = 1,2$. Якщо $F_j \in \tilde{C}^1(0,l)$, то $F_{jk} = \frac{2\int_0^l F_j'(x)\cos(\lambda_k^{1/2}x)dx}{l\lambda_k^{1/2}} = \frac{\tilde{F}_{jk}}{\lambda_k^{1/2}}$, де $\tilde{F}_{jk}$ – коефіцієнти розвинення у ряд Фур'є функції $F_j'(x)$ за системою $\{1, \cos(\lambda_k^{1/2}x)\}_{k=1}^\infty$. Тоді продиференційовані двічі за x ряди (16) мажоруються збіжними числовими рядами

$$M_2 \sum_{k=1}^\infty \frac{|\tilde{F}_{jk}|}{k} \le M_2\Big[\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}\Big]^{1/2}\Big[\sum_{k=1}^\infty \tilde{F}_{jk}^2\Big]^{1/2}, j = 1,2.$$

Із рівняння (13) одержуємо існування неперервної похідної D_t^α функції (14) та суми ряду (9).

Оскільки $E_{1,1}(-z) = e^{-z}$, у випадку $\alpha \in (0,1)$ функція $E_{\alpha,1}(-z)$ не має дійсних додатних нулів ([1], с. 142), $E_{\alpha,\alpha}(-z) \ge 0$, $z \ge 0$, якщо $\alpha \in (0,1]$, то можна послабити умови щодо функцій F_0 та h. Тільки за неперервності та обмеженості $F_0(x)$ на $(0,l)$ перший доданок у формулі (14), якщо $\alpha \in (0,1)$, матиме оцінку

$$|F_{0k}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * g(t)| \le$$

$$\le M_3\big|F_{0k}\big| \int_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k\tau^\alpha)d\tau =$$

$$= M_3|F_{0k}|\frac{[1-E_{\alpha,1}(-\lambda_k\tau^\alpha)]}{\lambda_k} \le \frac{M_4}{\lambda_k}.$$

Тоді ряд (15) рівномірно й абсолютно збігається на $\bar{Q}_0$. Якщо $F_0 \in \tilde{C}^1(0,l)$, то $F_{0k} = \frac{2\int_0^l F_0'(x)\cos(\lambda_k^{1/2}x)dx}{l\lambda_k^{1/2}} = \frac{\tilde{F}_{0k}}{\lambda_k^{1/2}}$, де $\tilde{F}_{0k}$ – коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є функції $F_0(x)$ за системою $\{1, \cos(\lambda_k^{1/2}x)\}_{k=1}^\infty$. Тоді продиференційований двічі за x ряд (15) мажорується числовим рядом $M_5\sum_{k=1}^\infty \frac{|\tilde{F}_{0k}|}{k} \le M_5\Big[\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}\Big]^{1/2}\Big[\sum_{k=1}^\infty \tilde{F}_{0k}^2\Big]^{1/2} \le M_6$.

Єдиність розв'язку задачі випливає з принципу максимуму [4], а також із одержаних оцінок. ■

Теорема 2. *Нехай $\alpha \in (1,2)$, $g \in C[0,t_0]$,*

$$G_k := \int_0^{t_0} \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k\tau^\alpha)g(t_0-\tau)d\tau \ne 0, \ k = 1,2,\dots \qquad (17)$$

$$h \in \tilde{C}^4(Q_0), \ F_j \in \tilde{C}^3(0,l), \quad j = 1,2,$$

$$F_3 \in \tilde{C}^5(0,l), \ F_3(x) = \sum_{k=1}^\infty F_{3k} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Тоді існує розв'язок $(u, F_0) \in \mathcal{M}$ *оберненої задачі* (1) – (4). *Функція* u *визначається формулами* (9), (14),

$$F_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{0k} \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in (0,l),$$

де

$$F_{0k} = \Big[F_{3k} - \int_0^{t_0} \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k\tau^\alpha)h_k(t_0-\tau)d\tau -$$

$$-F_{1k}E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha) - F_{2k}t_0E_{\alpha,2}(-\lambda_k t_0^\alpha)\Big]G_k^{-1},\ k=1,2,\ldots$$

Правильні оцінки

$$||u||_{C(Q_0)} + ||F_0||_{C(0,l)} \le b_0||h||_{C^2(Q_0)} +$$

$$+b_1||F_1||_{C^1(0,l)} + b_2||F_2||_{C^1(0,l)} + b_3||F_3||_{C^3(0,l)},$$

$$||u_{xx}||_{C(Q_0)} + ||D_t^\alpha u||_{C(Q_0)} + ||F_0||_{C^2(0,l)} \le$$

$$\le \hat{b}_0||h||_{C^4(Q_0)} + \sum_{j=1}^{2}\hat{b}_j||F_j||_{C^3(0,l)} + \hat{b}_3||F_3||_{C^5(0,l)},$$

де b_0, b_1, b_2, b_3, $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3$ *– певні додатні сталі.*

Якщо $\alpha \in (0,1]$, $g \in C[0,t_0]$, $h \in \tilde{C}^2(Q_0)$, $F_1 \in \tilde{C}^2(0,l)$, $F_3 \in \tilde{C}^4(0,l)$, *виконується умова* (17), *то існує розв'язок* $(u, F_0) \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0) \times \tilde{C}^1(0,l)$ *оберненої задачі ((1))–((4)). Функція* u *визначається формулами ((9)), ((14)),* F_0 *та* F_{0k} *– тими самими формулами, що й у випадку* $\alpha \in (1,2)$, *але без доданків із* F_2 *та* F_{2k}. *Правильні оцінки*

$$||u||_{C(Q_0)} + ||F_0||_{C(0,l)} \le$$

$$\le b_0||h||_{C^1(Q_0)} + b_1||F_1||_{C^1(0,l)} + b_3||F_3||_{C^3(0,l)},$$

$$||u_{xx}||_{C(Q_0)} + ||D_t^\alpha u||_{C(Q_0)} + ||F_0||_{C^1(0,l)} \le$$

$$\le \hat{b}_0||h||_{C^2(Q_0)} + \hat{b}_1||F_1||_{C^2(0,l)} + \hat{b}_3||F_3||_{C^4(0,l)},$$

де b_0, b_1, b_3, $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_3$ *– певні додатні сталі.*

Зауважимо, що умова (17), зокрема, виконується, якщо $g(t) = g_0 = \mathrm{const}$ та за деякого $t_0 > 0$ (довільного $t_0 > 0$, якщо $\alpha \in (0,1]$). У цьому випадку, із урахуванням формули

$$\lambda\int_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda\tau^\alpha)d\tau = 1 - E_{\alpha,1}(-\lambda\tau^\alpha),$$

ця умова рівнозначна умові $E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha) \ne 1$. Оскільки, у разі $\alpha \in (1,2)$, $\mu > 0$ функції $E_{\alpha,\mu}(-z)$ мають тільки скінченну кількість дійсних додатних нулів ([1], с. 142), то існують такі додатні числа t_0, що остання умова виконується. Якщо $\alpha \in (0,1]$, функція $E_{\alpha,1}(-z)$ не має дійсних додатних нулів.

□ *Доведення.* За теоремою 1 за відомої $F_0 \in \tilde{C}^2(0,l)$ існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0)$ прямої задачі (1) – (3), що має вигляд (9), а $T_k(t)$ визначаються формулою (14). Підставляючи цей розв'язок в умову перевизначення (4), одержуємо

$$F_{0k}\int_0^{t_0} \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k\tau^\alpha)g(t_0-\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^{t_0} \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k\tau^\alpha)h_k(t_0-\tau)d\tau +$$

$$+F_{1k}E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha) + F_{2k}t_0E_{\alpha,2}(-\lambda_k t_0^\alpha) = F_{3k},$$

звідки знаходимо вирази для невідомих коефіцієнтів F_{0k} розвинення функції $F_0(x)$ у ряд Фур'є. Залишається обґрунтувати рівномірну збіжність такого розвинення та належність суми ряду до класу $\tilde{C}^2(0,l)$.

Враховуємо, що $\frac{1}{G_k}$ може рости як λ_k, якщо $k \to +\infty$. Тоді з доведення теореми 1 випливає, що за $h \in \tilde{C}^2(Q_0)$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^{t_0} \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k\tau^\alpha)h_k(t_0-\tau)d\tau}{G_k}\sin\frac{k\pi x}{l}$ рівномірно та абсолютно збігається на $\bar{Q}_0$ і що за $h \in \tilde{C}^4(Q_0)$ цей ряд можна двічі почленно диференціювати за x. Знову ж, як під час доведення теореми 1, враховуючи однаковий характер поведінки функцій $E_{\alpha,\mu}(-\lambda_k t^\alpha)$ ($\mu = 1, 2, \alpha$), за великих λ_k, одержуємо, що для $F_j \in \tilde{C}^1(0,l)$ ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{F_{jk}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k\tau^\alpha)\sin\frac{k\pi x}{l}}{G_k}$ рівномірно й абсолютно збігаються в $\bar{Q}_0$, а для $F_j \in \tilde{C}^3(0,l)$ допускають почленне диференціювання за x два рази, при $F_3 \in \tilde{C}^3(0,l)$ ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{F_{3k}\sin\frac{k\pi x}{l}}{G_k}$ рівномірно й абсолютно збігаються на $\bar{Q}_0$, а якщо $F_3 \in \tilde{C}^5(0,l)$ допускають почленне диференціювання за x два рази. Послаблення умов щодо функції $h(x,t)$ у випадку $\alpha \in (0,1]$ одержуємо так само, як у випадку прямої задачі. ■

Теорема 3. *За умови* (17) *розв'язок* $(u, F_0) \in \mathcal{M}$ *задачі* (1) – (4) *єдиний.*

□ *Доведення.* Припускаючи існування двох розв'язків (u^1, F_0^1), (u^2, F_0^2) класу $\mathcal{M}$ оберненої задачі (1) – (4), для $u = u^1 - u^2$, $F_0 = F_0^1 - F_0^2$ матимемо задачу

$$D_t^\alpha u - u_{xx} = g(t)F_0(x), \quad (x,t) \in Q_0,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,t_0],$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,l],$$

$$u(x,t_0) = 0, \quad x \in [0,l].$$

За теоремою 1 за відомої $F_0 \in \tilde{C}^2(0,l)$ ($F_0 \in \tilde{C}^1(0,l)$, якщо $\alpha \in (0,1]$) існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0)$ прямої задачі, що має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{0k}\int_0^t \tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k\tau^\alpha)g(t-\tau)d\tau \sin\frac{k\pi x}{l},$$

$(x,t) \in Q_0$. Підставляючи його в умову перевизначення, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{0k}G_k\sin\frac{k\pi x}{l} = 0, \quad (x,t) \in Q_0.$$

За повнотою системи власних функцій

$$F_{0k}G_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Звідси, враховуючи умову (17), отримуємо $F_{0k} = 0$ для всіх $k = 1, 2, \dots$, а отже, $F_0(x) = 0$, $x \in [0, l]$. ■

Теорема 4. *В умовах теореми 2 розв'язок* $(u, F_0) \in \mathcal{M}$ *задачі* (1) – (4) *неперервно залежить від даних.*

□ *Доведення.* Твердження теореми випливає з одержаних у теоремі 2 оцінок. ■

Висновки

Встановлено достатні умови коректності задачі на відновлення елементів правої частини лінійного рівняння дифузії з регуляризованою дробовою похідною порядку $\alpha \in (0, 2)$ за часом при додатково (до крайових та початкових умов) заданих значеннях розв'язку прямої задачі у певний фіксований момент часу. Якщо $\alpha \in (0, 1]$, умови на відомі функції у правій частині рівняння є слабшими. У цьому випадку умову (3) треба замінити на одну початкову умову $u(x, 0) = F_1(x)$, $x \in [0, l]$.

Література

[1] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1999. – 671 с.

[2] *Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии // Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 11–16.

[3] *Ворошилов А. А., Килбас А. А.* Условия существования классического решения задачи Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Докл. Акад. наук. – 2007. – Т. 414, № 4. – С. 1-4.

[4] *Luchko Yu.* Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – **351**. – P. 409–422.

[5] *Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M. and Yamazaki T.* Uniqueness in an inverse problem for a one-dimentional fractional diffusion equation // Inverse problems. – 2009. – **25**. – P. 1–16.

[6] *Nakagawa J., Sakamoto K. and Yamamoto M.* Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration // Journal of Math-for-Industry. – 2010. – 2A. – P. 99–108.

[7] *Zhang Y. and Xu X.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation // Inverse problems. – 2011. – **27**. – P. 1–12.

[8] *Rundell W., Xu X. and Zuo L.* The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation // Applicable Analysis. – 2012. – **1**. – P. 1–16.

[9] *Hatano Y., Nakagawa J., Wang Sh. and Yamamoto M.* Determination of order in fractional diffusion equation // Journal of Math-for-Industry. – 2013. – 5A. – P. 51–57.

[10] *Лопушанський А. О., Лопушанська Г. П.* Одна обернена крайова задача для дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 5. – С. 655–667.

[11] *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс – М.: Наука, 1965. – 328 с.

[12] *Kilbas A. A., Sajgo M.* H-Transforms: Theory and Applications.– Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC.– 2004. – 401 p.

ON DETERMINATION OF THE RIGHT-HAND SIDE OF FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

H. P. Lopushanska

Ivan Franko National University of Lviv
1, Universytetska Str., 79001, Lviv, Ukraine

We prove the correctness of the inverse problem on determination of a pare of functions: the solution u of the first boundary value problem for linear diffusion equation

$$D_t^\alpha u - u_{xx} = g(t)F_0(x) + h(x, t)$$

with regularized fractional derivative of order $\alpha \in (0, 2)$ with respect to time on bounded cylindrical domain and function $F_0(x)$. Given values of u in a fixed time moment is as the over-determination condition.

Key words: fractional derivative, inverse boundary value problem, integral equation, Mittag–Leffler function.

2000 MSC: 35S15

UDK: 517.95