ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 871, 2017, с. 80–87

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 871, 2017, p. 80–87

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПАРИ ПАРНИХ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОЇ КІЛЬКОСТІ ЗМІННИХ, ЯКІ ВОЛОДІЮТЬ У СУКУПНОСТІ ВЛАСТИВІСТЮ ДОДАТНОЇ ВИЗНАЧЕНОСТІ

О. В. Лопотко

Національний лісотехнічний університет України
вул. Генерала Чупринки, 103, 79057, Львів, Україна

(Отримано 14 грудня 2014 р.)

Одержано інтегральне зображення пари парних функцій скінченної кількості змінних, для яких ядро $[k_1(x+y)+k_2(x-y)]$, $x,y\in R^n$ додатно визначено.

Ключові слова: інтегральне зображення, додатно визначені функції.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9

Теорія самоспряжених операторів, які діють у просторі зі скалярним добутком, породженим додатно визначеним ядром, потребує вивчення додатно визначених функцій. Ці функції досліджував у [3] М. Г. Крейн, який застосував метод напрямних функціоналів, а також отримав інтегральне зображення для парних додатно визначених функцій $k(x)$, для яких ядро $K(x,y)=\frac{1}{2}[k(x+y)+k(x-y)]$ $(x,y\in R^1)$ додатно визначене, причому $K(x,y)=K(-x,y)=K(x,-y)=K(-x,-y)$. Ю. М. Березанський у [1] запропонував метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер $K(x,y)\,(x,y\in R^1)$ за допомогою власних функцій диференціальних операторів. У монографії [2] за допомогою цієї методики доведено теорему про інтегральне зображення таких ядер $K(x,y)$, якщо $x,y\in R^n$. У роботі [4] отримано інтегральне зображення для пари парних додатно визначених у сукупності (п.п.д.в.с.) функцій $k_1(x),k_2(x)$, для яких ядро $K(x,y)=[k_1(x+y)+k_2(x-y)]$ $(x,y\in R^1)$ додатно визначене, причому $K(x,y)=K(-x,-y)$. В роботі [5] одержано інтегральне зображення для п.п.д.в.с. функцій $k_1(x)$, $k_2(x)$, якщо $x\in R^2$. У цій статті побудоване інтегральне зображення для п.п.д.в.с. функцій $k_1(x)$, $k_2(x)$ $(x\in R^n)$.

Спочатку введемо позначення, які використаємо у майбутньому

$$F_i(x,y;\lambda)=\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda_i}x_i}{\sqrt{\lambda_i}}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_i}y_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big/\cos\sqrt{\lambda_i}x_i\cos\sqrt{\lambda_i}y_i\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\sqrt{\lambda_k}x_k\cos\sqrt{\lambda_k}y_k\quad(i=\overline{1,n};\ x,y,\lambda\in R^n)$$

$$F_{i_1i_2}(x,y;\lambda)=\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda_{i_1}}x_{i_1}}{\sqrt{\lambda_{i_1}}}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_{i_1}}y_{i_1}}{\sqrt{\lambda_{i_1}}}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_{i_2}}x_{i_2}}{\sqrt{\lambda_{i_2}}}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_{i_2}}y_{i_2}}{\sqrt{\lambda_{i_2}}}\Big/\cos\sqrt{\lambda_{i_1}}x_{i_1}\cos\sqrt{\lambda_{i_1}}y_{i_1}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\sqrt{\lambda_{i_2}}x_{i_2}\cos\sqrt{\lambda_{i_2}}y_{i_2}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\sqrt{\lambda_k}x_k\cos\sqrt{\lambda_k}y_k;\quad(i_1,i_2=\overline{1,n};\ x,y,\lambda\in R^n)$$

$$F_{12\ldots n}(x,y;\lambda)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\sqrt{\lambda_k}x_k}{\sqrt{\lambda_k}}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_k}y_k}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Позначимо через

$$P_i(x;\lambda)=F_i(x,x;\lambda);\quad P_{i_1,i_2}(x;\lambda)=F_{i_1,i_2}(x,x;\lambda);\ldots$$
$$P_{12\ldots n}(x;\lambda)=F_{12\ldots n}(x,x;\lambda).$$

Означення 1. Пару парних дійсних, неперервних функцій $k_1(x),k_2(x)$ $(x\in R^n)$ називатимемо додатно визначеними у сукупності, якщо для довільної фінітної функції $u(x)\in C_0^\infty(R^n)$ виконується нерівність

$$\int_{R^n}\int_{R^n}[k_1(x+y)+k_2(x-y)]\,u(y)\,\overline{u(x)}\,dxdy\geq 0.\quad(1)$$

Теорема 1. *Кожні п.п.д.в.с. функції* $k_1(x)$, $k_2(x)$, *які задовольняють оцінки* $|k_1(x)|\leq Ce^{N|x|^2}$ *і* $|k_2(x)|\leq Ce^{N|x|^2}$ $(N>0,x\in R^n)$, *допускають зображення*

$$k_1(x)+k_2(0)=\int_{R^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_i}x_i}{2}d\sigma_0(\lambda)+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{n}\int_{R^n}P_{i_1}(x;\lambda)d\sigma_{i_1}(\lambda)+\sum_{\substack{i_1=1\\ i_1<i_2}}^{n-1}\int_{R^n}P_{i_1i_2}d\sigma_{i_1i_2}(\lambda)+\ldots$$

$$+\sum_{\substack{i_1=1\\ i_1<i_2\ldots<i_k}}^{n-k+1}\int_{R^n}P_{i_1i_2\ldots i_k}(x;\lambda)d\sigma_{i_1i_2\ldots i_k}(\lambda)+\ldots$$

$$+\int_{R^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_i}x_i}{2\lambda_i}\,d\sigma_{12\ldots n}(\lambda); \qquad (2)$$

$$k_1(0)+k_2(x)=\int_{R^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_i}x_i}{2}d\sigma_0(\lambda)-$$

$$-\sum_{i_1=1}^{n}\int_{R^n}P_{i_1}(x;\lambda)d\sigma_{i_1}(\lambda)+\sum_{\substack{i_1=1\\ i_1<i_2}}^{n-1}\int_{R^n}P_{i_1i_2}(x;\lambda)d\sigma_{i_1i_2}(\lambda)-\ldots$$

$$+\sum_{\substack{i_1=1\\ i_1<i_2\ldots<i_k}}^{n-k+1}\int_{R^n}P_{i_1i_2\ldots i_k}(x;\lambda)d\sigma_{i_1i_2\ldots i_k}(\lambda)+\ldots$$

$$+(-1)^n\int_{R^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_i}x_i}{2\lambda_i}\,d\sigma_{12\ldots n}(\lambda). \qquad (3)$$

Всі борелівські міри визначаються однозначно. Навпаки, функції вигляду (2), (3) *є п.п.д.в.с. функціями.*

☐ *Доведення.* Щоб одержати інтегральне зображення для $k_1(x)$, $k_2(x)$ $(x\in R^n)$, потрібно спочатку побудувати оснащення

$$H_-\supseteq H_0\supseteq H_+. \qquad (4)$$

Для цього за допомогою функцій $k_1(x)$, $k_2(x)$ $(x\in R^n)$ побудуємо ядро $K(x,y)=k_1(x+y)+k_2(x-y)$ $(x,y\in R^n)$. Далі виберемо функцію $p(x)=p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$, де $p(x_j)\in C^\infty(R^j)$, $p(x_j)\geq 1$ $(j=\overline{1,n})$ так, щоб виконувалася умова

$$\int_{R^n}\frac{K(x,x)}{p(x)}dx<\infty.$$

Тоді оснащення (4) набуває вигляду

$$\begin{array}{l} H_-=H_-^{(1)}\otimes\ldots\otimes H_-^{(n)}=L_2(R^n;p^{-1}(x)dx)\supseteq\\ H_0=H_0^{(1)}\otimes\ldots\otimes H_0^{(n)}=L_2(R^n;dx)\supseteq\\ H_+=H_+^{(1)}\otimes\ldots\otimes H_+^{(n)}=L_2(R^n;p(x)dx),\end{array}$$

причому $K(x,y)\subseteq H_-\otimes H_-=L_2(R^n\times R^n;p^{-1}(x)p^{-1}(y)dxdy)$. Далі введемо квазіскалярний добуток у просторі $L_2(R^n;dx)$

$$\langle u,v\rangle_{H_k}=\int_{R^n}\int_{R^n}K(x,y)u(y)v(x)dxdy\ (u,v\in C_0^\infty(R^n)). \quad (5)$$

Після проведення факторизації та поповнення відносно (5) одержимо гільбертів простір H_k.

Позначимо через A_j $(j=\overline{1,n})$ мінімальний оператор у просторі $H_0=L_2(R^n,dx)$, який відповідає виразу $L^{(j)}=-\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ $(j=\overline{1,n})$. Кожний із операторів A_j $(j=\overline{1,n})$ допускає продовження оснащення (4) з $\Lambda=C_0^\infty(R^n)$, у певний спосіб топологізоване. Тоді спряжений у $L_2(R^n;dx)$ оператор A_j^* $(j=\overline{1,n})$ збігається з відповідністю $u\to L^{(j)+}u$ $(u\in C_0^\infty(R^n))$. Звуження A_j^* $(j=\overline{1,n})$ на Λ можна розглядати як оператор у просторі H_k.

Як оператор F_j $(j=\overline{1,n})$ приймаємо оператор $u\to L^{(j)+}u,\ u\in C_0^\infty(R^j)$, який діє у просторі $H_+^{(j)}=L_2(R^{(j)},p(x_j)dx_j)$. Роль операторів C_j $(j=\overline{1,n})$ виконуватимуть оператори у просторі H_+ вигляду $u\to L^{(j)+}u$, де $u\in\Im(C_j)=H_+^{(1)}\otimes\ldots\otimes H_+^{(j-1)}\otimes C_0^\infty(R^j)\otimes H_+^{(j+1)}\otimes\ldots\otimes H_+^{(n)}$. Оскільки $H_k\supseteq H_+$, то оператори C_j $(j=\overline{1,n})$ можна розуміти як оператори у просторі H_k.

Оскільки комутативність $K(x,y)$ і A_j у просторі H_0 еквівалентна ермітовості C_j в просторі H_k, то можна обмежитись перевіркою ермітовості C_j в H_k, тобто рівності

$$\left\langle L^{(j)+}u,v\right\rangle=\left\langle u,L^{(j)+}v\right\rangle,\ u,v\in C_0^\infty(R^n),\ j=\overline{1,n}. \quad (6)$$

Перевірку (6) для д.в. ядра $K(x,y)$ здійснюємо аналогічно [5].

Тепер до ядра $K(x,y)$ можна застосувати теорему 4.2 [2, с. 706–707] і отримати таке зображення

$$[k_1(x+y)+k_2(x-y)]=\int_{R^n}\Omega_\lambda(x,y)d\rho(\lambda)\ (x,y\in R^n), \quad (7)$$

де

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Omega_\lambda=\lambda_j\Omega_\lambda,\quad -\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\Omega_\lambda=\lambda_j\Omega_\lambda\ (j=\overline{1,n}). \quad (8)$$

Оскільки ядро $\Omega_\lambda(x;y)$ задовольняє (8), то, виразивши їх через фундаментальну систему $\chi_0^{(j)}(x_j,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda_j}x_j$; $\chi_1^{(j)}(x_j,\lambda)=\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_j}x_j}{\lambda_j}$, $(j=\overline{1,n})$ розв'язків рівняння $L^{(j)}u-\lambda u=0$, які задовольняють умови

$$\frac{d}{dx_j}\chi_m(x_j;\lambda)=\delta_{mk}\ (m,k=0,1;\ j=\overline{1,n}),$$

одержимо

$$\Omega_\lambda(x;y)=\sum_{\alpha,\beta\in A}\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\cdots+\beta_n}\Omega_\lambda}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial y_1^{\beta_1}\ldots\partial y_n^{\beta_n}}\right)(0;0)\times$$

$$\times\chi_\alpha(x;\lambda)\chi_\beta(y;\lambda), \qquad (9)$$

де векторний індекс $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ змінюється по цілочисловому паралелепіпеді A точок з координатами $\alpha_1=0,1,\ldots,\alpha_n=0,1$;

$$\chi_\alpha(x;\lambda)=\chi_{\alpha_1}^{(1)}(x_1;\lambda_1)\ldots\chi_{\alpha_n}^{(n)}(x_n;\lambda_n).$$

Якщо підставимо (9) в (7) і позначимо

$$d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)=\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\cdots+\beta_n}\Omega_\lambda}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial y_1^{\beta_1}\ldots\partial y_n^{\beta_n}}\right)(0;0)d\rho\left(\lambda\right),$$

одержимо

$$k_1(x+y)+k_2(x-y)=$$
$$=\int\limits_{R^n}\sum_{\alpha,\beta\in A}\chi_\alpha(x;\lambda)\chi_\beta(y;\lambda)d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\ (x,y\in R^n). \quad (10)$$

Матриця $\|d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{\alpha,\beta\in A}$ є векторним позначенням для індексів рядків і стовпців, додатно визначена у звичайному сенсі, тобто $\sum\limits_{\alpha,\beta\in A}\sigma_{\alpha\beta}(\Delta)\xi_\alpha\xi_\beta\geq 0$ для довільних ξ_α $(\alpha\in A)$. Інтеграл (13) збігається у сенсі простору $L_2\big(R^l(-\infty,\infty);\ \|d\sigma_{\alpha\beta}\|_{\alpha,\beta\in A}\big)$, де R^l – дійсний простір вимірності l, який дорівнює порядку матриці $\|d\sigma_{\alpha\beta}\|_{\alpha,\beta\in A}$.

Якщо тепер виконаємо у (10) заміну $x_1=-x_1$, $y_1=-y_1$ і додамо отриману рівність до (10), а тоді в одержаній рівності здійснимо заміну $x_2=-x_2$, $y_2=-y_2$ і аналогічно зі змінними $x_3=-x_3$; $y_3=-y_3$; $\ldots$; $x_n=-x_n$; $y_n=-y_n$, то одержимо зображення

$$k_1(x_1+y_1,...,x_n+y_n)+k_2(x_1-y_1,...,x_n-y_n)=$$
$$=\int\limits_{R^n}\prod_{i=1}^{n}\cos\sqrt{\lambda_i}x_i\cos\sqrt{\lambda_i}y_i d\sigma_0(\lambda)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{R^n}F_i(x,y;\lambda)d\sigma_i(\lambda)+$$
$$+\sum_{\substack{i_1=1\\ i_1<i_2}}^{n-1}\int\limits_{R^n}F_{i_1i_2}(x,y;\lambda)d\sigma_{i_1i_2}(\lambda)+\ldots$$
$$+\sum_{\substack{i_1=1\\ i_1<i_2\ldots<i_k}}^{n-k+1}\int\limits_{R^n}F_{i_1i_2\ldots i_k}(x,y;\lambda)d\sigma_{i_1i_2\ldots i_k}(\lambda)+\ldots$$
$$+\int\limits_{R^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin\sqrt{\lambda_i}x_i}{\sqrt{\lambda_i}}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_i}y_i}{\sqrt{\lambda_i}}d\sigma_{12\ldots n}(\lambda). \quad (11)$$

Якщо тепер у (11) приймемо $y_1=x_1$; $y_2=x_2$; $\ldots$; $y_n=x_n$, то одержимо зображення (2). Якщо у (11) приймемо $y_1=-x_1$; $y_2=-x_2$; $\ldots$; $y_n=-x_n$, то отримаємо зображення (3).

Однозначність мір в (2) і (3) випливає із обмежень, які накладені на функції $k_1(x),k_2(x)$.

Тепер доведемо останнє твердження теореми. Покажемо, що із інтегральних зображень (2) і (3) випливає (1). Для простоти припустимо, що $n=2$. У цьому випадку інтегральні зображення (2) і (3) матимуть такий вигляд

$$k_1(x_1,x_2)+k_2(0,0)=\int\limits_{R^2}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\cdot\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2)+$$
$$+\int\limits_{R^2}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)+\int\limits_{R^2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\cdot\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)+$$
$$+\int\limits_{R^2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2); \quad (12)$$

$$k_1(0,0)+k_2(x_1,x_2)=\int\limits_{R^2}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\cdot\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2)-$$
$$-\int\limits_{R^2}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)-\int\limits_{R^2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\cdot\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)+$$
$$+\int\limits_{R^2}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2). \quad (13)$$

Спочатку доведемо нерівність (1), якщо в (12) і (13) $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$. У цьому випадку елементарне ядро матиме такий вигляд

$$\Omega_\lambda(x,y)=\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2+$$
$$+\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2+\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2$$

і

$$\Omega_\lambda(0,0)=1;\quad \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)=\lambda_1;\quad \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)=\lambda_2;\quad \frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)=\lambda_1\lambda_2,$$

а міри в (12) і (13) запишемо так

$$d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2)=\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda);\quad d\rho_1(\lambda)=d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=\lambda_2 d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=\lambda_1 d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=\lambda_1\lambda_2 d\rho(\lambda).$$

Тому інтегральні зображення (12) і (13) набудуть вигляду

$$k_1(x_1,x_2)+k_2(0,0)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_+} d\rho(\lambda); \tag{14}$$

$$k_1(0,0)+k_2(x_1,x_2)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda). \tag{15}$$

Із (14) і (15) знаходимо

$$k_1(x_1+y_1,x_2+y_2)+k_2(0,0)+k_1(0,0)+k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}d\rho(\lambda)+\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1-y_1)\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda)$$

або, враховуючи, що $k_1(0,0)+k_2(0,0)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_+} d\rho(\lambda)$, отримаємо

$$k_1(x_1+y_1,x_2+y_2)+k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2)+$$

$$+\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)+$$

$$+\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\lambda_1}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)+$$

$$+\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\lambda_1}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2). \tag{16}$$

За допомогою (16) перевіряємо (1).

Далі доведемо нерівність (1), якщо в (12), (13) $\lambda_1<0$, $\lambda_2\geq 0$. У такому разі елементарне ядро матиме такий вигляд:

$$\Omega_\lambda(x,y)=$$
$$=\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2+$$
$$+\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2+$$
$$+\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2+$$
$$+\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2$$

і

$$\Omega_\lambda(0,0)=1;\ \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)=|\lambda_1|;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)=\lambda_2;\ \frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)=|\lambda_1|\lambda_2,$$

а міри в (12) і (13) можна записати так

$$d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2)=\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=\lambda_2 d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=|\lambda_1|d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=|\lambda_1|\lambda_2 d\rho(\lambda).$$

Тому інтегральні зображення (12), (13) подамо у вигляді:

$$k_1(x_1,x_2)+k_2(0,0)=\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1 d\rho(\lambda); \tag{17}$$

$$k_1(0,0)+k_2(x_1,x_2)=\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda). \tag{18}$$

Приймемо у (17) і (18) $x_2=0$, одержимо

$$k_1(x_1,0)+k_2(0,0)=\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1 d\rho(\lambda); \tag{19}$$

$$k_1(0,0)+k_2(x_1,0)=\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}d\rho(\lambda). \tag{20}$$

Якщо тепер приймемо $x_1{=}x_1{+}y_1$ в (19), а $x_1{=}x_1{-}y_1$ в (20) і додамо ці рівності, то одержимо

$$k_1(x_1{+}y_1,0){+}k_2(x_1-y_1,0){=}\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}(x_1+y_1)d\rho(\lambda). \tag{21}$$

Аналогічно, якщо в (17) і (18) $x_1=0$, отримаємо

$$k_1(0,x_2)+k_2(0,0)=\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}d\rho(\lambda); \tag{22}$$

$$k_1(0,0)+k_2(0,x_2)=\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2d\rho(\lambda). \tag{23}$$

Якщо тепер приймемо $x_2{=}x_2{+}y_2$ в (22), а $x_2{=}x_2{-}y_2$ в (23) і додамо ці рівності, то отримаємо

$$k_1(0,x_2{+}y_2){+}k_2(0,x_2-y_2){=}\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda). \tag{24}$$

Тому із (21) і (24) випливає рівність

$$\begin{aligned}k_1(x_1+y_1,x_2+y_2)+k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)=&\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2d\rho(\lambda_1,\lambda_2)+\\&+\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2d\rho(\lambda_1,\lambda_2)+\\&+\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2d\rho(\lambda_1,\lambda_2)+\\&+\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2d\rho(\lambda_1,\lambda_2).\end{aligned} \tag{25}$$

Якщо перейти до мір $d\rho_1(\lambda)$, $d\rho_2(\lambda)$, $d\rho_3(\lambda)$, $d\rho_4(\lambda)$ в (25), одержимо

$$\begin{aligned}k_1(x_1+y_1,x_2+y_2)+k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)=&\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2d\rho_1(\lambda)+\\&+\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1}{|\lambda_1|}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2d\rho_3(\lambda)+\\&+\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\rho_2(\lambda)+\\&+\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1}{|\lambda_1|}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\rho_4(\lambda).\end{aligned} \tag{26}$$

За допомогою (26) перевіряємо (1).

Доведемо тепер нерівність (1), якщо в (12) і (13) $\lambda_1\geq 0$; $\lambda_2<0$. У цьому випадку елементарне ядро матиме такий вигляд:

$$\begin{gathered}\Omega_\lambda(x,y)=\\=\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}y_2+\\+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}y_2+\\+\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}y_2+\\+\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}y_2\end{gathered}$$

і

$$\Omega_\lambda(0,0)=1;\ \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)=\lambda_1;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0){=}|\lambda_2|;\ \frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0){=}\lambda_1|\lambda_2|,$$

а міри в (12) і (13) запишемо так

$$d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2)=\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=|\lambda_2|d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=\lambda_1d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2){=}\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda){=}\lambda_1|\lambda_2|d\rho(\lambda).$$

Тому інтегральні зображення (12), (13) набудуть вигляду

$$k_1(x_1,x_2)+k_2(0,0)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_-}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2d\rho(\lambda);\quad(27)$$

$$k_1(0,0)+k_2(x_1,x_2)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_-}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1d\rho(\lambda).\quad(28)$$

Прийнявши в (27) і (28) $x_2=0$, одержимо

$$k_1(x_1,0)+k_2(0,0)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_-}d\rho(\lambda);\quad(29)$$

$$k_1(0,0)+k_2(x_1,0)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_-}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1d\rho(\lambda).\quad(30)$$

Якщо тепер прийняти $x_1{=}x_1{+}y_1$ в (29), а $x_1{=}x_1{-}y_1$ в (30) і додати отримані рівності, одержимо

$$k_1(x_1+y_1,0)+k_2(x_1-y_1,0)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_-}\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1+y_1)d\rho(\lambda).\quad(31)$$

Аналогічно, якщо в (27) і (28) прийняти $x_1=0$, то одержимо

$$k_1(0,x_2)+k_2(0,0)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_-}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2d\rho(\lambda);\quad(32)$$

$$k_1(0,0)+k_2(0,x_2)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_-}d\rho(\lambda).\quad(33)$$

Якщо тепер прийняти $x_2{=}x_2{+}y_2$ в (32), а $x_2{=}x_2{-}y_2$ в (33) і додати ці рівності, то одержимо

$$k_1(0,x_2+y_2)+k_2(0,x_2-y_2)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_-}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda)\quad(34)$$

Тому із (31), (34) випливає рівність

$$\begin{aligned}k_1(x_1+y_1,x_2+y_2)+k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)&=\iint\limits_{R^1_+\times R^1_-}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}y_2d\rho(\lambda_1,\lambda_2)+\\&+\iint\limits_{R^1_+\times R^1_-}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}y_2d\rho(\lambda_1,\lambda_2)+\\&+\int\limits_{R^1_+\times R^1_-}\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}y_2d\rho(\lambda_1,\lambda_2)+\\&+\iint\limits_{R^1_+\times R^1_-}\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}y_2d\rho(\lambda_1,\lambda_2).\end{aligned}\quad(35)$$

Якщо перейти до мір $d\rho_1(\lambda)$, $d\rho_2(\lambda)$, $d\rho_3(\lambda)$, $d\rho_4(\lambda)$ в (35), одержимо

$$\begin{aligned}k_1(x_1+y_1,x_2+y_2)+k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)&=\iint\limits_{R^1_+\times R^1_-}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}y_2d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2)+\\&+\iint\limits_{R^1_+\times R^1_-}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}y_2}{|\lambda_2|}d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)+\\&+\iint\limits_{R^1_+\times R^1_-}\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\lambda_1}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}y_2d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)+\\&+\iint\limits_{R^1_+\times R^1_-}\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\lambda_1}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}y_2}{|\lambda_2|}d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2).\end{aligned}\quad(36)$$

За допомогою (36) перевіряємо (1).

Доведемо тепер нерівність (1), якщо в (12) і (13) $\lambda_1<0$; $\lambda_2<0$. У цьому випадку елементарне ядро матиме такий вигляд:

$$\Omega_\lambda(x,y)=$$
$$=\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}y_2+$$

$$+\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}x_2 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}y_2+$$
$$+\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}y_2+$$
$$+\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}x_2 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}y_2$$

і

$$\Omega_\lambda(0,0)=1;\ \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)=|\lambda_1|;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)=|\lambda_2|;\ \frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)=|\lambda_1|\cdot|\lambda_2|,$$

а міри в (12) і (13) запишуться так

$$d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2)=\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=|\lambda_2|d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=|\lambda_1|d\rho(\lambda);$$

$$d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2)=$$
$$=\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=|\lambda_1|\cdot|\lambda_2|d\rho(\lambda).$$

Тому інтегральні зображення (12), (13) матимуть вигляд

$$k_1(x_1,x_2)+k_2(0,0)=\int\limits_{R^1_-\times R^1_-}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda); \tag{37}$$

$$k_1(0,0)+k_2(x_1,x_2)=\int\limits_{R^1_-\times R^1_-}d\rho(\lambda). \tag{38}$$

Із (37) і (38) знаходимо

$$k_1(x_1+y_1,x_2+y_2)+k_2(0,0)+k_1(0,0)+k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)=\int\limits_{R^1_-\times R^1_-}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}(x_1+y_1)\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}(x_2+y_2)d\rho(\lambda)+\int\limits_{R^1_-\times R^1_-}d\rho(\lambda)$$

або

$$k_1(x_1+y_1,x_2+y_2)+k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)=\int\limits_{R^1_-\times R^1_-}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}y_2 d\rho_1(\lambda)+$$
$$+\int\limits_{R^1_-\times R^1_-}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}x_2 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}y_2}{|\lambda_2|}d\rho_2(\lambda)+$$
$$+\int\limits_{R^1_-\times R^1_-}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1}{|\lambda_1|}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}x_2 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_2}y_2 d\rho_3(\lambda)+$$
$$+\int\limits_{R^1_-\times R^1_-}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1}{|\lambda_1|}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}x_2 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda_2}y_2}{|\lambda_2|}d\rho_4(\lambda). \tag{39}$$

За допомогою (39) перевіряємо (1).

Теорема доведена. ■

Зауваження 1. Якщо у нерівності (1) $k_1(x)=0$ $(x\in R^n)$, то оператори $A_j\geq 0$ $(j=\overline{1,n})$. Це доводиться аналогічно [5]. Тому інтегрування в (11) потрібно здійснювати на $R^n_+=\underbrace{R^1_+\times R^1_+\times\ldots\times R^1_+}_{n}$. Якщо тепер прийняти в (11) $k_1(x)=0$ і $y_1=y_2=\ldots=y_n=0$, то одержимо зображення

$$k_2(x_1,\ldots,x_n)=\int\limits_{R^n_+}\prod_{i=1}^{n}\cos\sqrt{\lambda_i}x_i d\rho(\lambda).$$

Це зображення, для $n=2$, отримано в [5].

Зауваження 2. Якщо у нерівності (1) $k_2(x)=0$ $(x\in R^n)$, то оператори $A_j<0$ $(j=\overline{1,n})$. Це доводиться аналогічно [5]. Тому інтегрування в (11) потрібно здійснювати на $R^n_-=\underbrace{R^1_-\times R^1_-\times\ldots\times R^1_-}_{n}$. Якщо тепер прийняти в (11) $k_2(x)=0$ і $y_1=y_2=\ldots=y_n=0$, то одержимо зображення

$$k_1(x_1,\ldots,x_n)=\int\limits_{R^n_-}\prod_{i=1}^{n}\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda_i}x_i d\rho(\lambda).$$

Це зображення, для $n=2$, також отримано в [5].

Зауваження 3. Якщо в (11) $k_1(x)=k_2(x)=\frac{1}{2}k(x)$ $(x\in R^n)$, то прийнявши $y_1=y_2=\ldots=y_n=0$, одержимо зображення

$$k(x_1,\ldots,x_n)=\int\limits_{R^n}\prod_{i=1}^{n}\cos\sqrt{\lambda_i}x_i d\rho(\lambda).$$

Це зображення, для $n=2$, отримано в [2, с. 712].

Зауваження 4. Якщо в (11) $k_1(x)=k_2(x)=\frac{1}{2}k(x)$ $(x\in R^n)$ і $k(0,x_j)=0$ $(j=\overline{1,n})$, то, прийнявши

$y_1 = x_1, y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n$, одержимо

$$[k(2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n) + k(0, \ldots, 0)] =$$

$$= \int\limits_{R^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - \cos 2\sqrt{\lambda_i} x_i}{\lambda_i} d\rho(\lambda),$$

якщо врахувати, що $k(0, \ldots, 0) = 0$, то отримаємо зображення

$$k(t_1, \ldots, t_n) = \int\limits_{R^n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - \cos \sqrt{\lambda_i} t_i}{\lambda_i} d\rho(\lambda).$$

Це зображення, для $n = 2$, також одержано в [2, с. 712].

Література

[1] *Березанский Ю. М.* Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. – 1956. – 108, № 3. – С. 893–896.

[2] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 800 с.

[3] *Крейн М. Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // Докл. АН СССР. 1946. – 53, № 1, – С. 3–6.

[4] *Лопотко О. В.* Інтегральне зображення парних додатно визначених функцій однієї змінної // Укр. мат. журн. – 2010. – 62, № 2. – С. 281–284.

[5] *Лопотко О. В.* Інтегральне зображення парних додатно визначених функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, № 6. – С. 844–853.

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF POSITIVELY DEFINITE FUNCTIONS OF END NUMBER VARIABLES

O. V. Lopotko

National University Forest of Lviv
103, General Chuprynka Str., 79057, Lviv, Ukraine

We obtain integral representation of positively definite functions of end number variables, for which the kernel $[k_1(x+y) + k_2(x-y)],\ x, y \in R^n$ is positively definite.

Key words: integral representation, positively definite functions.

2000 MSC: 34860

UDK: 517.9