ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
№ 871, 2017, с. 77–79

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
“Physical and mathematical sciences”
№ 871, 2017, p. 77–79

ФАКТОРИЗАЦІЇ І СИМЕТРИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЕМ МНОГОЧЛЕНІВ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

М. І. Кучма

Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 27 травня 2017 р.)

Встановлено необхідні й достатні умови існування факторизації симетричних матриць, які симетрично еквівалентні до форм Сміта, над кільцем многочленів з інволюцією. Отримано критерій ∇-конгруентності симетричних матричних двочленів.

Ключові слова: симетрично еквівалентні матриці, ∇-конгруентні матриці, факторизація матриці.

2000 MSC: 15A23

УДК: 512.64

Алгебраїчний підхід до вивчення факторизації та симетричної еквівалентності симетричних матриць над кільцями з інволюціями започатковано у роботах [7], [8] та [10]. П. С. Казимірський [5] вирішив проблему виділення із матричного многочлена регулярного множника, що дало змогу знайти необхідні й достатні умови факторизації симетричних матриць над кільцем многочленів та квазімногочленів з інволюцією [1], [3] і [4]. Факторизації симетричних матриць тісно пов’язані із задачею про симетричну еквівалентність таких матриць. Зокрема, у праці [1] доведено, що зі строгої еквівалентності регулярних симетричних матриць випливає їх конгруентність. У роботі [2] встановлено, що довільна матриця з кільця з інволюцією, форма Сміта якої симетрична, односторонньо еквівалентна до симетричної, і доведено конгруентність прямих добутків строго еквівалентних многочленних матриць, а в [6] вказано умови симетричної еквівалентності та конгруентності симетричних матриць до їх форм Сміта над кільцем многочленів з інволюцією.

Метою цієї роботи є визначення умов існування факторизації симетричних матриць над кільцем многочленів з інволюцією, які симетрично еквівалентні до їх форм Сміта.

Нехай у кільці многочленів $\mathrm{C}[x]$ визначено інволюцію ∇ одним із можливих способів [7]:

$$(\alpha) \quad \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i x^i\Big)^{\nabla} = \sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i (-x)^i,$$

$$(\beta) \quad \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i x^i\Big)^{\nabla} = \sum_{i=1}^{m} a_i (-x)^i,$$

$$(\gamma) \quad \Big(\sum_{i=1}^{m} a_i x^i\Big)^{\nabla} = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i.$$

У кільці матриць $M_n(\mathrm{C}[x])$ інволюцію ∇ введемо так:

$$A(x)^{\nabla} = \|a_{ij}(x)\|^{\nabla} = \|a_{ji}(x)^{\nabla}\|.$$

Многочленну матрицю $A(x)$ називають симетричною, якщо $A(x) = A(x)^{\nabla}$. Матриці $A(x)$ і $B(x)$ називають еквівалентними, якщо існують матриці $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$ такі, що $P(x)A(x)Q(x) = B(x)$. Матриці $A(x)$ і $B(x)$ називають симетрично еквівалентними, якщо існує матриця $R(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$ така, що $R(x)A(x)R(x)^{\nabla} = B(x)$. Якщо для матриць $A(x)$ і $B(x)$ існують P, $Q \in GL_n(\mathrm{C})$ такі, що $PA(x)Q = B(x)$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називають строго еквівалентними [1]. Якщо ж для матриць $A(x)$ і $B(x)$ існує $T \in GL_n(\mathrm{C})$ така, що $TA(x)T^{\nabla} = B(x)$, то $A(x)$ і $B(x)$ називають ∇ – конгруентними [6].

Факторизацією симетричної матриці $A(x)$ з кільця $M_n(\mathrm{C}[x])$ називають її зображення у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}, \tag{1}$$

де $B(x)$ — регулярна (унітальна) многочленна матриця, а $C(x)$ — деяка неособлива симетрична матриця. Нагадаємо, що многочленна матриця $A(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} A_i x^i$ називається регулярною (унітальною), якщо $\det A_m \neq 0$ ($A_m = E$ — одинична матриця), і сингулярною, якщо $\det A_m = 0$.

Позначимо через $S_A(x)$ форму Сміта многочленної матриці $A(x)$:

$$S_A(x) = P(x)A(x)Q(x), \tag{2}$$

де матриці $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$.

Припустимо, що форму Сміта матриці $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$S_A(x) = \Phi(x)I(x)\Phi(x)^{\nabla}, \tag{3}$$

де $\Phi(x)$, $I(x)$ — d- матриці [5].

Зазначимо, що розклад (1) симетричної матриці $A(x)$, в якому $B(x)$ – регулярна матриця із формою Сміта $\Phi(x)$, а матриця $C(x)$ має форму Сміта $I(x)$, називають допустимою факторизацією матриці $A(x)$, паралельною факторизації (3) її форми Сміта. Інакше кажучи, факторизація (1) допустима тоді, коли форма Сміта многочленної матриці дорівнює добутку форм Сміта її співмножників.

Теорема 1. *Нехай для симетричної многочленної матриці $A(x)$ існує допустима факторизація*

$$A(x) = B(x)CB(x)^{\nabla} \quad (4)$$

паралельна факторизації її форми Сміта

$$S_A(x) = \Phi(x)I\Phi(x)^{\nabla}, \quad (5)$$

в якій матриця $B(x)$ лівоеквівалентна до форми Сміта $S_B(x) = \Phi(x)$, а $C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — неособлива числова матриця з формою Сміта I. Тоді існує матриця $R(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$ така, що

$$R(x)A(x)R(x)^{\nabla} = S_A(x). \quad (6)$$

□ *Доведення.* Нехай для матриці $A(x)$ існує факторизація (4), паралельна факторизації її форми Сміта (5), в якій матриця $B(x)$ лівоеквівалентна до форми Сміта $\Phi(x)$, тобто існує матриця $K(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$ така, що $B(x) = K(x)\Phi(x)$. Тоді

$$A(x) = K(x)\Phi(x)C\Phi(x)^{\nabla}K(x)^{\nabla}. \quad (7)$$

Відомо [9], що симетрична (ермітова) матриця C конгруентна (ермітово конгруентна) до діагональної матриці $I(C)$ — матриці інерції для C, тому маємо $C = GI(C)G^{\nabla}$. Оскільки $\Phi(x)G = G\Phi(x)$, зі співвідношення (7) одержимо

$$A(x) = K(x)\Phi(x)GI(C)G^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla}K(x)^{\nabla} =$$

$$=K(x)G\Phi(x)I(C)\Phi(x)^{\nabla}G^{\nabla}K(x)^{\nabla}=R(x)S_A(x)R(x)^{\nabla},$$

де матриця $R(x) = K(x)G$ оборотна над $\mathrm{C}[x]$.

Отже, матриця $A(x)$ симетрично еквівалентна до форми Сміта $S_A(x)$.

Теорему доведено. ■

Теорема 2. *Нехай $\Phi(x)$ – d-матриця,* deg det $\Phi(x) = nr$*, яка є дільником форми Сміта $S_A(x)$ симетричної матриці $A(x)$. Для матриці $A(x)$, яка симетрично еквівалентна (6) формі Сміта $S_A(x)$, існує факторизація (1), в якій $B(x)$ — унітальна матриця степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$, $C(x) = C(x)^{\nabla}$ — неособлива матриця, тоді й тільки тоді, коли симетрична матриця*

$$V(\Phi)S_A(x)V(\Phi)^{\nabla}$$

одночасно ділиться зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^{\nabla}$ за деяких допустимих значень параметрів матриці $V(\Phi)$, для яких виконується умова

$$\det M_{V(\Phi)R(x)||E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}||}(\Phi) \not\equiv 0,$$

де $R(x)$ – довільна оборотна матриця із співвідношення (6), а матриця $V(\Phi)$ – ядро визначальної матриці $W(\Phi)$, введеної в [5].

Доведення випливає з теореми 1 праці [4] і факту симетричної еквівалентності матриці $A(x)$ до її форми Сміта $S_A(x)$.

Як наслідок, із теореми 2 випливають умови допустимої факторизації матриць, які симетрично еквівалентні до їх форм Сміта.

Теорема 3. *Нехай для форми Сміта $S_A(x)$ симетричної матриці $A(x)$ існує місце факторизація (3). Для матриці $A(x)$, симетрично еквівалентної до форми Сміта $S_A(x)$, існує допустима факторизація (1), в якій $B(x)$ – сингулярна матриця з формою Сміта $\Phi(x)$, $C(x)$ – неособлива матриця. Якщо ж матриця $R(x)^{-1}\Phi(x)$ регуляризується справа, то множник $B(x)$ у факторизації (1) є регулярним степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$, де $R(x)$ – оборотна матриця із співвідношення (6).*

□ *Доведення.* Зі співвідношень (3) і (6) маємо

$$A(x) = R(x)^{-1}S_A(x)[R(x)^{\nabla}]^{-1} =$$

$$= R(x)^{-1}\Phi(x)I(x)\Phi(x)^{\nabla}[R(x)^{\nabla}]^{-1}.$$

Позначивши через $B(x) = R(x)^{-1}\Phi(x)$, отримаємо факторизацію (1), в якій $B(x)$ сингулярна матриця з формою Сміта $\Phi(x)$.

Якщо ж матриця $R(x)^{-1}\Phi(x)$ регуляризується справа, то це означає, що існує матриця $Z(x) \in GL_n(\mathrm{C}[x])$ така, що $R(x)^{-1}\Phi(x)Z(x) = B(x)$ – регулярна матриця степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$. Тому одержимо факторизацію (1), в якій $C(x) = Z(x)^{-1}I(x)[Z(x)^{\nabla}]^{-1}$.

Теорему доведено. ■

Теорема 4. *Симетричні матричні двочлени*

$$A(x) = Ex^m - A \quad і \quad B(x) = Ex^m - B,$$

де матриці A, $B \in M_n(\mathrm{C})$, m – парне число, є ∇ – конгруентними, тоді й тільки тоді, коли матриці A і B подібні.

□ *Доведення.* Необхідність. Нехай симетричні матричні двочлени $A(x) = Ex^m - A$ і $B(x) = Ex^m - B$ є ∇ – конгруентними, тобто існує матриця $R \in GL_n(\mathrm{C})$ така, що

$$R(Ex^m - A)R^{\nabla} = Ex^m - B. \quad (8)$$

Прирівнюючи матричні коефіцієнти при однакових степенях x у рівності (8), отримаємо $RAR^{\nabla} = B$ і $RR^{\nabla} = E$, де E – одинична матриця. З останньої рівності одержимо, що матриця R унітарна при інволюції (α) і R ортогональна при інволюціях (β) і (γ). Це і доводить подібність матриць A і B,

Достатність. Припустимо, що $A(x) = Ex^m - A$ і $B(x) = Ex^m - B$ – симетричні матричні двочлени, в яких симетричні матриці A і B подібні. Тоді існують матриці U, $V \in GL_n(\mathrm{C})$ (унітарні при інволюції (α) або ортогональні при інволюціях (β) і (γ)) такі, що $A = UDU^{\nabla}$, $B = VDV^{\nabla}$, де $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, λ_i, $i = \overline{1, n}$ – власні значення матриць A і B. Враховуючи останні співвідношення, отримаємо

$$A(x) = Ex^m - A = U(Ex^m - D)U^{\nabla} =$$

$$= UV^{-1}(Ex^m - B)[V^{\nabla}]^{-1}U^{\nabla} = RB(x)R^{\nabla},$$

де матриця $R = UV^{-1} \in GL_n(\mathrm{C})$.

Отже, матричні двочлени $A(x) = Ex^m - A$ і $B(x) = Ex^m - B$ є ∇ – конгруентними.

Теорему доведено. ■

Література

[1] *Зеліско В. Р.* Припустима факторизація і еквівалентність симетричних матриць над кільцем многочленів з інволюцією // Алгебра і топологія: темат. зб. наук. праць. – К.: ІСДО України, 1993. – С. 53–62.

[2] *Зеліско В. Р.* Симетричні матриці і їх прямі добутки над кільцями з інволюціями // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2005. – Вип. 3 – С. 7–12.

[3] *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Симетричні матриці та матричні рівняння над кільцем квазімногочленів з інволюцією // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2013. – Вип. 11. – С. 45–51.

[4] *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Факторизація симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 4 – С. 91–95.

[5] *Казимірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наукова думка, 1981. – 224 с.

[6] *Кучма М. І.* Симетрична еквівалентність матричних многочленів і виділення спільного унітального дільника із матричних многочленів // Укр. мат. журн. – 2001. – 53. № 2. – С. 211–219.

[7] *Любачевский Б. Д.* Одно представление симметрической многочленной матрицы // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1972. – 13, № 2 – С. 41–45.

[8] *Любачевский Б. Д.* Факторизация симметрических матриц с элементами из кольца с инволюцией // Сибирский мат. журн. – 1973. – 14, № 2 – С. 337–356.

[9] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 656 с.

[10] *Якубович В. А.* Факторизация симметричных матричных многочленов // Докл. АН СССР. – 1970. – 194, № 3 – С. 532–535.

FACTORIZATIONS AND SYMMETRIC EQUIVALENCE OF MATRICES OVER POLYNOMIAL RING WITH INVOLUTION

M. I. Kuchma

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

We establish necessary and sufficient conditions for the existence of factorization of symmetric matrices that symmetric equivalent to the Smith forms over ring of polynomials with involution. The criterion of ∇-congruence symmetric matrix binomials is obtained.

Key words: symmetric equaivalent matrices, ∇-congruent matrices, factorization of matrix.

2000 MSC: 15A23

UDK: 512.64