ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 871, 2017, с. 70–76

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 871, 2017, p. 70–76

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

В. С. Ільків, Б. Б. Пахолок

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 10 квітня 2017 р.)

Досліджено задачу з нелокальними інтегральними моментними умовами за часовою координатою для систем рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Знайдено необхідні й достатні умови існування розв'язку цієї задачі у класі періодичних за просторовими змінними функцій. Використано формулу інтегрування частинами для вивчення асимптотичних властивостей розв'язку та встановлено фредгольмовість задачі.

Ключові слова: системи рівнянь з частинними похідними, нелокальна задача, малі знаменники, інтегральні умови.

2000 MSC: 35E20

УДК: 517.946.4

Вступ

Нелокальні умови для рівнянь з частинними похідними часто використовують у математичних моделях багатьох фізичних, біологічних та інших природних процесів. Інтегральні умови є одним із видів нелокальних умов. Зокрема, інтегральні умови інтерпретують вимірювання зважених середніх значень розв'язку, а локальні умови — вимірювання в окремих точках.

Задачі з нелокальними умовами, взагалі, є некоректними за Адамаром і пов'язані з проблемою малих знаменників, в якій проявляються діофантові властивості параметрів задачі. Метричний підхід до вивчення нелокальних задач у соболєвських (та інших) шкалах періодичних, майже періодичних функцій застосовано у роботах [1, 2].

Результати вивчення задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними опубліковано у багатьох роботах, зокрема [3–15].

У цій роботі для систем рівнянь з частинними похідними розглянуто задачу з нелокальними інтегральними умовами за часовою змінною у вигляді моментів. Вивчено залежність розв'язності задачі від довжини інтервалу інтегрування у соболєвській шкалі періодичних за просторовими змінними функцій та досліджено властивість фредгольмовості. Результати узагальнюють і доповнюють твердження робіт [14–16].

Постановку задачі виконано у другому пункті роботи, існування узагальненого розв'язку доведено у третьому, структуру характеристичних матриць та існування розв'язку задачі досліджено у четвертому, а висновки наведено у п'ятому пункті роботи.

I. Постановка задачі

У цьому пункті введено область, у якій розглядається задача, систему рівнянь з частинними похідними та нелокальні інтегральні умови (типу моментів), простори періодичних вектор-функцій і подано означення розв'язку.

Нехай $Q_p = [0,T] \times \Omega^p$ — циліндр, Ω^p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, де $p \in \mathbb{N}$, $0 < T_0 \le T \le T_1 < +\infty$, і нехай $t \in [0,T]$, $x = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega^p$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_p})$ та $\partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$ для $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$.

В області Q_p для $n \ge 2$ розглядається задача для системи диференціальних рівнянь

$$L_n(\partial_t, \partial_x)u \equiv \partial_t^n u + \sum_{j=1}^{n} A_j(\partial_x)\partial_t^{n-j} u = 0 \qquad (1)$$

з нелокальними інтегральними за змінною t умовами

$$\mathcal{M}(r; \partial_t^{j-1}u) \equiv \equiv \int_0^T t^r \partial_t^{j-1} u(t,\cdot)\, dt = \varphi_j, \quad j = 1, \dots, n, \qquad (2)$$

де $A_j(\partial_x) = \sum_{|s| \le j} A_{js}\partial_x^s$ — диференціальні вирази з комплексними матричними порядку m коефіцієнтами A_{js}, порядок r моментів $\mathcal{M}(r; \partial_t^{j-1}u)$ похідних $\partial_t^{j-1}u$ шуканого векторного розв'язку

$$u = u(t,x) = (u_1, \dots, u_m)$$

є невід'ємним дійсним числом. Задані праві частини $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в умовах (2) є 2π-періодичними за x вектор-функціями, як і розв'язок u задачі (1), (2).

Пронумеруємо корені $\mu_j = \mu_j(k)$ алгебричного рівняння

$$\det \sum_{j=0}^{n} (-\lambda)^{n-j} A_j(ik) \equiv \det L_n(i\tilde{k}\mu, ik) = 0, \qquad (3)$$

де $A_0(ik) = I_m$ (I_m — одинична матриця порядку m), $\tilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \dots + k_p^2}$, так, щоб всі різні корені мали перші номери, і позначимо

$$\lambda_j = \lambda_j(k) = -i\tilde{k}\mu_j(k), \qquad j = 1, \dots, nm. \qquad (4)$$

© В. С. Ільків, Б. Б. Пахолок, 2017

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Припускаємо існування таких чисел $K \geq 1$, $R \geq 1$, μ_0, μ_-, μ^+, що корені μ_j у разі $\tilde{k} \geq K$ задовольняють такі нерівності:

$$\left|e^{-i\tilde{k}\mu_j(k)T}\right| \leq R, \quad |\mu_\alpha(k) - \mu_\beta(k)| \geq \mu_0 > 0, \\ 0 < \mu_- \leq |\mu_j(k)| \leq \mu^+ < +\infty. \tag{5}$$

Зокрема, числа $R = R(\vec{a})$, $\mu_0 = \mu_0(\vec{a})$ та $\mu^+ = \mu^+(\vec{a})$ існують для строго гіперболічної системи (де μ_0 – стала гіперболічності) та для довільного вектора коефіцієнтів $\vec{a}$, складеного з усіх елементів матриць A_{js} ($j = 1, \ldots, n, |s| \leq j$), відповідно; додатково в умовах (5) припускається лише існування додатного числа $\mu_- = \mu_-(\vec{a})$ (цю умову можна послабити, помноживши сталу μ_- на функцію $\tilde{k}^{-\gamma}$ вектора k, де $0 < \gamma < 1$).

З умови (5) випливає, що корені μ_j можуть збігатися або бути нульовими лише для скінченної множини векторів k, яку визначає нерівність $\tilde{k} < K$.

Нехай $\mathbf{H}$ — простір m-вимірних векторів, компоненти яких є тригонометричними 2π-періодичними многочленами (простір основних функцій), а $\mathbf{H}'$ — спряжений з ним простір узагальнених 2π-періодичних вектор-функцій (формальних тригонометричних рядів).

Нехай $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega^p)$ — простір Соболєва 2π-періодичних за $x_1, \ldots, x_p$ вектор-функцій

$$v(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} v_k e^{ik\cdot x}, \qquad v_k \in \mathbb{C}^m,$$

що утворений поповненням простору $\mathbf{H}$ за нормою

$$\|v; \mathbf{H}_q\| = \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q} \|v_k\|^2\Big)^{1/2},$$

де $k\cdot x = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$, $\|\cdot\|$ — евклідова норма. Включення $\mathbf{H} \subset \mathbf{H}_q \subset \mathbf{H}'$ просторів є неперервними для всіх чисел $q \in \mathbb{R}$.

Позначимо $\mathbf{H}^n_q = \mathbf{H}^n_q(Q_p)$ — банахів простір функцій $u = u(t, x)$ таких, що $\partial^j_t u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H}_{q-j})$ для $j = 1, \ldots, n$ та

$$\|u; \mathbf{H}^n_q\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \|\partial^j_t u(t, \cdot); \mathbf{H}_{q-j}\|^2.$$

Означення 1. Узагальненим розв'язком задачі (1), (2) називається елемент $u \in \mathbf{C}^n([0, T]; \mathbf{H}')$, який задовольняє на інтервалі $(0, T)$ систему диференціальних рівнянь (1) і нелокальні умови (2) у просторі $\mathbf{H}'$.

Означення 2. Розв'язком задачі (1), (2) називається такий узагальнений розв'язок, який належить до простору $\mathbf{H}^n_q$.

З означення 2 випливає, що умова $\varphi_j \in \mathbf{H}_{q+1-j}$ є *необхідною* умовою існування розв'язку u задачі (1), (2). Для цього розв'язку справджується оцінка

$$\|\varphi_j; \mathbf{H}_{q+1-j}\| \leq \frac{T^{r+1}}{r+1} \|u; \mathbf{H}^n_q\|, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Задача (1), (2) розглядається у шкалі $\{\mathbf{H}_q\}_{q\in\mathbb{R}}$ (тобто функції φ_j та $u(t, \cdot)$ належать до просторів зі шкали для усіх $j = 1, \ldots, n$ та $t \in [0, T]$) і є некоректною за Адамаром [2, 1] у цій шкалі (як і в інших шкалах, пов'язаних з простором $\mathbf{H}'$).

II. Узагальнений розв'язок

У цьому пункті введено позначення, сформульовано та доведено теорему про існування узагальнених розв'язків задачі (1), (2), зокрема подано зображення цих розв'язків.

Оскільки розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{ik\cdot x}, \tag{6}$$

то функція $u_k = u_k(t)$ є розв'язком задачі

$$L_n\Big(\frac{d}{dt}, ik\Big) u_k = 0, \tag{7}$$

$$\mathcal{M}\Big(r; \Big(\frac{d}{dt}\Big)^{j-1} u_k\Big) = \hat{\varphi}_{jk}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

де $\hat{\varphi}_{jk}$ — коефіцієнти Фур'є вектор-функції φ_j.

Спочатку визначимо всі функції u_k, $k \in \mathbb{Z}^p$. Для цього запровадимо новий невідомий вектор

$$v_k \equiv v_k(t) = \mathrm{col}(v_{1k}, \ldots, v_{nk}) \tag{9}$$

з координатами $v_{jk} = (i\tilde{k})^{n+1-j} u^{(j-1)}_k$ і порядку nm матрицю $L(k)$, де

$$L(k) = \mathrm{col}\Big(\big(0 \;\; I_{(n-1)m}\big), \Big(\frac{-A_{n+1-j}(ik)}{(i\tilde{k})^{n+1-j}}\Big)^n_{j=1}\Big), \tag{10}$$

з власними значеннями $\mu_1, \ldots, \mu_{nm}$ і рівномірно обмеженою нормою

$$\|L(k)\|^2 \leq (n-1)m + A^2(K_1), \\ A^2(K_1) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|s|\leq j} K_1^{2(|s|-j)} \|A_{js}\|^2, \tag{11}$$

у разі $\tilde{k} \geq K_1 \geq K$ (величину K_1 буде усталено). Функція $A(K_1)$ монотонно спадає і

$$\lim_{K_1\to\infty} A^2(K_1) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|s|=j} \|A_{js}\|^2 \equiv A_0^2 < \infty.$$

Тоді v_k є розв'язком такої задачі:

$$v'_k = i\tilde{k}L(k)v_k, \quad \mathcal{M}(r; v_k) = \hat{\varphi}_k, \tag{12}$$

де $\hat{\varphi}_k = \mathrm{col}\big((i\tilde{k})^n \hat{\varphi}_{1k}, \ldots, i\tilde{k}\hat{\varphi}_{nk}\big)$.

Використаємо фундаментальну матрицю E_k та характеристичну матрицю M_k, прийнявши

$$E_k \equiv E_k(t) = i\tilde{k}L(k)e^{i\tilde{k}L(k)(t-T)}, \quad M_k = \mathcal{M}(r; E_k). \tag{13}$$

Введемо проектори $P_k = M_k^- M_k$ та $Q_k = M_k M_k^-$, що діють у просторі $\mathbb{C}^{nm}$, де M_k^- — псевдообернена [19, p. 428] до M_k матриця (для невиродженої матриці M_k маємо $M_k^- = M_k^{-1}$ і $P_k = Q_k = I_{nm}$), а також проектори P та Q, що діють на функції $\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \hat{\psi}_k e^{ik\cdot x}$, де $\hat{\psi}_k \in \mathbb{C}^{nm}$, за правилами

$$P\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} P_k\hat{\psi}_k e^{ik\cdot x}, \qquad Q\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} Q_k\hat{\psi}_k e^{ik\cdot x}. \tag{14}$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (12) *існує тоді й тільки тоді, коли* $(I_{nm}-Q_k)\hat{\varphi}_k=0$*; він має вигляд*

$$v_k=E_k(t)M_k^-\hat{\varphi}_k+E_k(t)(I_{nm}-P_k)U_k, \qquad (15)$$

де U_k *— довільний вектор з простору* $\mathbb{C}^{nm}$.

□ *Доведення.* Загальний розв'язок

$$v_k=E_k(t)C_k$$

системи $v_k'=i\tilde{k}L(k)v_k$ у разі $M_kC_k=\hat{\varphi}_k$ задовольняє умову $\mathcal{M}(r;v_k)=\hat{\varphi}_k$, тобто є шуканим розв'язком.

Оскільки

$$M_kC_k-\hat{\varphi}_k=M_kC_k-Q_k\hat{\varphi}_k+(Q_k-I_{nm})\hat{\varphi}_k,$$

то, на основі формули

$$(I_{nm}-Q_k^H)M_k=M_k^H(I_{nm}-Q_k)=0, \qquad (16)$$

яка випливає [20, с. 123] з властивостей $Q_kM_k=M_k$ і $Q_k^H=Q_k$, де матриця Q_k^H ермітово спряжена з Q_k, отримуємо рівність

$$\|M_kC_k-\hat{\varphi}_k\|^2=\|M_kC_k-Q_k\hat{\varphi}_k\|^2+\|(I_{nm}-Q_k)\hat{\varphi}_k\|^2.$$

Якщо $(I_{nm}-Q_k)\hat{\varphi}_k\neq 0$, то

$$\|M_kC_k-\hat{\varphi}_k\|^2\geq\|(I_{nm}-Q_k)\hat{\varphi}_k\|^2>0$$

для довільного вектора C_k, зокрема $M_kC_k\neq\hat{\varphi}_k$, — розв'язок задачі (12) не існує.

У протилежному випадку система $M_kC_k=\hat{\varphi}_k$ еквівалентна зі системою

$$M_kC_k=Q_k\hat{\varphi}_k+M_k(I_{nm}-P_k)U_k,$$

яка має [19, р. 436] загальний розв'язок

$$C_k=M_k^-\hat{\varphi}_k+(I_{nm}-P_k)U_k,$$

де $(I_{nm}-P_k)U_k$ — ядро матриці M_k.

Звідси випливає (15). Теорему доведено. ■

Встановимо теорему існування узагальненого розв'язку задачі (1), (2), яка справджується для довільного вектора коефіцієнтів $\vec{a}$.

Розіб'ємо горизонтально одиничну матрицю I_{nm} у такий спосіб:

$$I_{nm}=\operatorname{col}\big(I_m(1),\ldots,I_m(n)\big),$$

де матриці $I_m(j)$ мають m рядків.

Теорема 2. *Узагальнений розв'язок* u *задачі* (1), (2) *існує тоді й тільки тоді, коли справджується умова* $(I-Q)\varphi=0$*, де* $\varphi=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\hat{\varphi}_ke^{ik\cdot x}$*. Його зображує формула*

$$u=I_m(1)\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(i\tilde{k})^{-n}v_ke^{ik\cdot x},$$

якщо

$$v\equiv\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}v_ke^{ik\cdot x}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}E_k(t)M_k^-\hat{\varphi}_ke^{ik\cdot x}+$$
$$+\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}E_k(t)\big((I-P)U\big)_ke^{ik\cdot x}, \qquad (17)$$

де I *— одиничний оператор,* $U=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}U_ke^{ik\cdot x}$ *— довільний вектор,* n *компонент якого належать до простору* $\mathbf{H}'$*, а вектори* $\big((I-P)U\big)_k=(I_{nm}-P_k)U_k$ *є коефіцієнтами Фур'є функції* $(I-P)U$.

□ *Доведення.* Оскільки розв'язок задачі (1), (2) має вигляд (6), то функція $v_k=v_k(t)$ є розв'язком задачі (12) і $v_{1k}=I_m(1)v_k=(i\tilde{k})^nu_k$ за формулою (9), тобто $u_k=(i\tilde{k})^{-n}I_m(1)v_k$.

Використавши формулу (15), одержимо рівність (17). Підстановка співвідношення між u_k і v_k у формулу (6) завершує доведення теореми. ■

Введемо у просторі узагальнених 2π-періодичних вектор-функцій проектор $\Pi(\mathcal{Z})$, де $\mathcal{Z}$ — довільна підмножина із $\mathbb{Z}^p$, який на елемент $\psi=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\hat{\psi}_ke^{ik\cdot x}$, де $\hat{\psi}_k\in\mathbb{C}^m$, діє за формулою

$$\Pi(\mathcal{Z})\psi=\sum_{k\in\mathcal{Z}}\hat{\psi}_ke^{ik\cdot x}.$$

Якщо $\mathcal{Z}$ — скінченна множина, то елемент $\Pi(\mathcal{Z})\varphi$ є векторним тригонометричним многочленом для кожної узагальненої вектор-функції φ.

Нехай $\mathcal{K}_0\equiv\mathcal{K}_0(T)=\{k\in\mathbb{Z}^p\colon\det M_k=0\}$, а $\bar{\mathcal{K}}_0=\mathbb{Z}^p\setminus\mathcal{K}_0$ — доповнення множини $\mathcal{K}_0$, тоді формулу (17) перепишемо у вигляді

$$v\equiv\Pi(\mathcal{K}_0)v+\Pi(\bar{\mathcal{K}}_0)v=$$
$$=\sum_{k\in\mathcal{K}_0}E_k(t)\big(M_k^-\hat{\varphi}_k+(I_{nm}-P_k)U_k\big)e^{ik\cdot x}+$$
$$+\sum_{k\in\bar{\mathcal{K}}_0}E_k(t)M_k^{-1}\hat{\varphi}_ke^{ik\cdot x}, \qquad (18)$$

з якого випливають такі очевидні наслідки.

Наслідок 1. Ядро задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{C}^n([0,T];\mathbf{H}')$ складається із таких елементів:

$$u=I_m(1)\sum_{k\in\mathcal{K}_0}E_k(t)(I_{nm}-P_k)U_ke^{ik\cdot x}, \qquad (19)$$

де U_k — довільні вектори із $\mathbb{C}^{nm}$.

Наслідок 2. Задача (1), (2) є фредгольмовою тоді й лише тоді, коли множина $\mathcal{K}_0$ – скінченна. У цьому випадку ядро задачі має скінченну розмірність, яка дорівнює $\sum_{k\in\mathcal{K}_0}\operatorname{rank}(I_{nm}-P_k)$, де $\operatorname{rank}(I_{nm}-P_k)$ – ранг мариці $I_{nm}-P_k$.

Наслідок 3. Якщо $\mathcal{K}_0=\emptyset$, тобто $\det M_k\neq 0$ для усіх $k\in\mathbb{Z}^p$, то узагальнений розв'язок задачі (1), (2) – єдиний і має вигляд

$$u=I_m(1)\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(i\tilde{k})^{-n}E_k(t)M_k^{-1}\hat{\varphi}_ke^{ik\cdot x}; \qquad (20)$$

навпаки, з єдиності випливає, що $\mathcal{K}_0$ – порожня множина.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

III. Дослідження характеристичних матриць. Існування розв'язку

У цьому пункті встановлено структуру матриць M_k, умову існування обернених матриць M_k^{-1}, їх структуру та оцінки. Доведено теорему існування розв'язку задачі (1), (2).

Для оцінювання функцій $u_k = u_k(t)$, які містять функції від матриці $L(k)$, доцільно подати останні у спеціальній формі [2]. Нехай матриця $L(k)$ має прості власні значення $\mu_1 = \mu_1(k), \dots, \mu_{nm} = \mu_{nm}(k)$ і функція $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ визначена в околі спектра цієї матриці, $C \in \mathbb{C}^{nm}$ — довільний вектор, тоді добуток матриці $S(L(k))$ на вектор C є добутком трьох матриць, зокрема

$$S(L(k))C = \mathbf{R}_k\big(C\big)W^{-\top}(k) \begin{pmatrix} S(\mu_1) \\ \dots \\ S(\mu_{nm}) \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

де $W^{-\top}(k)$ — обернена до транспонованої $W^{\top}(k)$ матриці Вандермонда $W(k) = \big(\mu_j^{i-1}\big)_{i,j=1,\dots,nm}$,

$$\mathbf{R}_k(C) = \big(C\ L(k)C\ \dots\ L^{nm-1}(k)C\big) -$$

матриця керованості (див. [17, с. 135] та [18, с. 123]) системи

$$v_k' = L(k)v_k + Ch_k,$$

в якій $h_k = h_k(t)$ — керування.

Зауваження 1. Аналог формули (21) у разі кратних власних значень введено для гладких функцій у роботі [2].

Із заміни (9), формул (15) і (21) для функції $S(z) = e^{-i\tilde{k}z(T-t)}$, де $t \in [0, T]$, за умов $\tilde{k} \geq K_1 \geq K$ і $C_k = M_k^{-}\hat{\varphi}_k + (I_{nm} - P_k)U_k$, маємо

$$(i\tilde{k})^{n+1-j}u_k^{(j-1)}(t) = v_{jk}(t) = I_m(j)E_k(t)C_k =$$
$$= i\tilde{k}I_m(j)L(k)\mathbf{R}_k(C_k)W^{-\top}(k) \begin{pmatrix} e^{-i\tilde{k}\mu_1(T-t)} \\ \dots \\ e^{-i\tilde{k}\mu_{nm}(T-t)} \end{pmatrix}.$$

На основі оцінки $\|W^{-1}(k)\|^2 \leq nm\,\|W^{-1}(k)\|_\infty^2$ з роботи [21, p. 108, 109] та оцінки [21, p. 417]

$$\|W^{-1}(k)\|_\infty \leq \max_{\alpha=1,\dots,nm} \prod_{j=1,j\neq\alpha}^{nm} \frac{1+|\mu_j|}{|\mu_\alpha - \mu_j|}$$

одержимо

$$\|W^{-\top}(k)\| \leq \sqrt{nm}\mu, \qquad \mu = \Big(\frac{1+\mu^+}{\mu_0}\Big)^{nm-1},$$

тому з припущення (5) випливає

$$\|(i\tilde{k})^{n+1-j}u_k^{(j-1)}(t)\| = \|v_{jk}(t)\| \leq$$
$$\leq \tilde{k}nm\mu R\|I_m(j)L(k)\mathbf{R}_k(C_k)\|. \qquad (22)$$

Аналогічно отримано нерівність

$$\|v_k(t)\| \leq \tilde{k}nm\mu R\|L(k)\mathbf{R}_k(C_k)\| \leq$$
$$\leq \tilde{k}nm\mu R\Big(\sum_{j=1}^{nm}\|L(k)\|^{2j}\Big)^{1/2}\|C_k\| \leq \tilde{k}R_2(K_1)\|C_k\|,$$

де $R_2(K_1) = nm\mu RR_1(K_1)\sqrt{(n-1)m + A^2(K_1)}$,

$$R_1^2(K_1) = \sum_{j=1}^{nm}\big((n-1)m + A^2(K_1)\big)^{j-1}.$$

Функція $R_2(K_1)$ монотонно спадає і

$$\lim_{K_1\to\infty} R_2^2(K_1) = (nm\mu R)^2\sum_{j=1}^{nm}\big((n-1)m + A_0^2\big)^j < \infty.$$

Для похідної $u_k^{(n)}$ маємо співвідношення

$$u_k^{(n)}(t) = -\sum_{j=1}^{n}(i\tilde{k})^{-j}A_j(ik)v_{n+1-j}(t),$$

тому за формулою (11)

$$\|u_k^{(n)}(t)\|| \leq A(K_1)\|v_k(t)\| \leq \tilde{k}R_2(K_1)A(K_1)\|C_k\|.$$

Позначимо $\mathcal{K}_1 = \big\{k \in \mathbb{Z}^p : \tilde{k} \geq K_1\big\}$, де число K_1 задає формула $K_1 = \max(K, K_0)$, а невід'ємне число K_0 є коренем рівняння $K_0T_0\mu_- = 4rR_2(K_0)$, тоді

$$\|\Pi(\mathcal{K}_1)u; \mathbf{H}_q^n\|^2 =$$
$$= \sum_{k\in\mathcal{K}_1}\tilde{k}^{2(q-n)}\sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[T_0,T_1]}\|\tilde{k}^{n-j}u_k^{(j)}(t)\|^2 \leq$$
$$\leq R_2^2(K_1)\sum_{k\in\mathcal{K}_1}\tilde{k}^{2(q-n+1)}\sum_{j=1}^{n}\|I_m(j)L(k)\mathbf{R}_k(C_k)\|^2 +$$
$$+ R_2^2(K_1)A^2(K_1)\sum_{k\in\mathcal{K}_1}\tilde{k}^{2(q-n+1)}\|C_k\|^2.$$

Оскільки для евклідової норми

$$\sum_{j=1}^{n}\|I_m(j)L(k)\mathbf{R}_k(C_k)\|^2 = \|L(k)\mathbf{R}_k(C_k)\|^2,$$

то справджується нерівність

$$\|\Pi(\mathcal{K}_1)u; \mathbf{H}_q^n\|^2 \leq$$
$$\leq R_2^2(K_1)\big(1 + A^2(K_1)\big)\sum_{k\in\mathcal{K}_1}\|\tilde{k}^{q-n+1}C_k\|^2. \qquad (23)$$

Введемо позначення для виключної множини

$$\mathcal{T}_0 = \bigcup_{k\in\bar{\mathcal{K}}_1}\big\{T \in [T_0, T_1] : \det M_k = 0\big\}. \qquad (24)$$

Теорема 3. *Нехай $r \geq 1$, виконується умова теореми 2, вектор $\vec{a}$ коефіцієнтів диференціального рівняння* (1) *задовольняє умови* (5) *і $\varphi_j \in \mathbf{H}_{q+2-j}$ для $j = 1, \dots, n$. Тоді існують розв'язки u задачі* (1), (2)

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

у просторі $\mathbf{H}_q^n$*; вони відрізняються лише скінченновимірними проекціями (тригонометричними многочленами)* $\Pi(\bar{\mathcal{K}}_1)u$ *цих розв'язків і*

$$\|\Pi(\mathcal{K}_1)u;\mathbf{H}_q^n\|^2 \le nm\Big(\frac{2R_2(K_1)}{T^r}\Big)^2\big(1+A^2(K_1)\big)\times \\ \times\sum_{j=1}^{n}\|\Pi(\mathcal{K}_1)\varphi_j;\mathbf{H}_{q+2-j}\|^2. \quad (25)$$

Множина $\mathcal{T}_0$ *— скінченна і для кожного значення* $T\in[T_0,T_1]\setminus\mathcal{T}_0$ *розв'язок задачі* (1)*,* (2) *— єдиний та має вигляд* (20)*, а для кожного* $T\in\mathcal{T}_0$ *— єдиний з точністю до ядра* (19) *за умови* $(I-Q)\varphi=0$ *та має вигляд*

$$u{=}I_m(1)\sum_{k\in\mathcal{K}_0}(i\tilde{k})^{-n}E_k(t)(M_k^{-}\hat{\varphi}_k+(I_{nm}-P_k)U_k)e^{ik\cdot x}+ \\ +I_m(1)\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\mathcal{K}_0}(i\tilde{k})^{-n}E_k(t)M_k^{-1}\hat{\varphi}_k e^{ik\cdot x},$$

□ *Доведення.* Існування узагальнених розв'язків задачі (1), (2) дає теорема 2. На основі формули (23) встановимо оцінку (25), яка й доводить існування розв'язку з простору $\mathbf{H}_q^n$.

У рівнянні $M_kC_k=\hat{\varphi}_k$ для визначення вектора C_k, інтегруючи частинами, перетворимо матрицю M_k:

$$M_k=\int_0^T t^r\, de^{i\tilde{k}L(k)(t-T)}=T^r\big(I_{nm}-H(k)\big),$$

де $H(k)=\dfrac{r}{T^r}\mathcal{M}\big(r-1;e^{i\tilde{k}L(k)(t-T)}\big)$.

З формули (21), де $S(z)=\mathcal{M}\big(r-1;e^{i\tilde{k}z(t-T)}\big)$, маємо факторизацію

$$H(k)C_k{=}\frac{r}{T^r}\mathbf{R}_k(C_k)W^{-\top}(k)\begin{pmatrix}\mathcal{M}\big(r{-}1;e^{i\tilde{k}\mu_1(t-T)}\big)\\ \dots\\ \mathcal{M}\big(r{-}1;e^{i\tilde{k}\mu_{nm}(t-T)}\big)\end{pmatrix}.$$

Із рівності

$$\mathcal{M}\big(r{-}1;e^{i\tilde{k}\mu_j(t-T)}\big)=\frac{1}{i\tilde{k}\mu_j}\times \\ \times\begin{cases}1-e^{i\tilde{k}\mu_j(t-T)}, & r=1,\\ T^{r-1}-(r-1)\mathcal{M}\big(r{-}2;e^{i\tilde{k}\mu_j(t-T)}\big), & r>1,\end{cases}$$

і нерівності

$$\big|\mathcal{M}\big(r{-}2;e^{i\tilde{k}\mu_j(t-T)}\big)\big|\le R\mathcal{M}(r{-}2;1)=\frac{T^{r-1}}{r-1}R,$$

де $r>1$, одержуємо

$$\|H(k)C_k\|\le\frac{2rRnm\mu}{\tilde{k}T\mu_-}\|C_k\|\times \\ \times\Big(\sum_{j=1}^{nm}\|L(k)\|^{2(j-1)}\Big)^{1/2}\le\frac{2rR_2(K_1)}{\tilde{k}T_0\mu_-}\|C_k\|.$$

Отже, $\|H(k)\|\le\dfrac{2rR_2(K_1)}{K_1T_0\mu_-}\le\dfrac12$ на множині $\mathcal{K}_1$, тому матриця M_k — невироджена, $C_k=M_k^{-1}\hat{\varphi}_k$ і

$$\|M_k^{-1}\|=T^{-r}\|\sum_{j=0}^{\infty}H^j(k)\|\le\frac{T^{-r}\|I_{nm}\|}{1-\|H(k)\|}\le\frac{2\|I_{nm}\|}{T^r},$$

$$\|C_k\|\le 2\|I_{nm}\|T^{-r}\|\hat{\varphi}_k\|.$$

Підставляючи останню оцінку у формулу (23), отримуємо нерівність (25).

Скінченність множини (24) випливає зі скінченності множини $\{T\in[T_0,T_1]\colon \det M_k=0\}$ нулів цілої функції $\det M_k\equiv\det M_k(T)$ на скінченному відрізку $[T_0,T_1]$, де $k\in\bar{\mathcal{K}}_1$, та скінченності множини $\bar{\mathcal{K}}_1$, число елементів якої не перевищує числа $(1+2K_1)^p$.

Якщо $T\in[T_0,T_1]\setminus\mathcal{T}_0$, то $\mathcal{K}_0=\emptyset$ і відповідне твердження теореми випливає з наслідку 3. Останнє твердження одержуємо з теореми 2 та наслідку 1. Теорему доведено.

Наслідок 4. Задача (1), (2) є фредгольмовою для всіх $T\in[T_0,T_1]$, де T_0, T_1 — довільні додатні числа і $T_0<T_1$.

Твердження цього наслідку випливає з наслідку 2 теореми 2 та із доведення теореми 3. ■

Висновки

Встановлено умови однозначної розв'язності задачі з нелокальними інтегральними умовами у вигляді моментів для систем рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу в просторі узагальнених функцій та у шкалі соболєвських просторів, періодичних за просторовими змінними вектор-функцій.

Ця задача є некоректною за Адамаром для малих значень порядків моментів, а для порядків моментів, вищих за одиницю, — задача коректна із втратою похідної. Подібний результат отримали автори [15, 16] для задачі з інтегральними крайовими умовами для системи рівнянь Ляме у просторах майже періодичних за просторовими змінними функцій та гіперболічних рівнянь у просторах періодичних за просторовими змінними функцій.

Досліджено характер залежності норми розв'язку від параметрів задачі, розглянуто питання фредгольмовості задачі та встановлено вигляд елементів її ядра.

Встановлено єдиність розв'язку задачі (1), (2) для усіх (за винятком скінченної кількості) значень довжини $T\in[T_0,T_1]$ проміжку інтегрування в умовах (2); гладкість правих частин у необхідних умовах існування розв'язку лише на одиницю менша від гладкості у достатніх умовах, тобто достатні умови близькі до необхідних.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Література

[1] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

[2] *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1624—1650. *Il'kiv V. S., Ptashnyk B. I.* Problems for partial differential equations with nonlocal conditions. Metric approach to the problem of small denominators // Ukr. Math. Journ., 58 (2006), no 12, 1847–1875.

[3] *Fardigola L. V.* Test for propriety in a layer of a boundary problem with integral condition // Ukr. Math. Journ., 42 (1990), no 11, 1388–1394.

[4] *Fardigola L. V.* An integral boundary-value problem in a layer for a system of linear partial differential equations // Sbornik Math, 53 (1995), no 6, 1671–1692.

[5] *Ільків В. С.* Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Вісн. Держ. ун-ту „Львів. політехніка“. Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 318–323.

[6] *Pul'kina L. S.* A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation // Diff. Eq., 40 (2004), No 7, 947–953.

[7] *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку // Вісн. Нац. у-ту „Львів. політехніка“. – 2008. – № 625. – С. 12–19.

[8] *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – 50, № 1. – С. 32–39.

[9] *Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations, Bull. Georg. Nation. Acad. Sci, 5 (2011), no 11, 31–37.

[10] *Симотюк М. М., Савка І. Я.* Початково-нелокальна задача для факторизованого рівняння із частинними похідними // Вісн. Нац. у-ту „Львів. політехніка“. – 2013. – Вип. 768. – С. 19-–25.

[11] *Каленюк П. І., Ільків В. С., Нитребич З. М., Когут І. В.* Однозначна розв'язність задачі з інтегральними умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка“. – 2013. – Вип. 768. – С. 5—11.

[12] *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь динамічної теорії пружності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 4. – С. 40–53.

[13] *Kuz' A. M., Ptashnyk B. I.* A problem with integral conditions with respect to time for Gårding hyperbolic equations // Ukr. Math. Journ, 65 (2013), No 2, 277–293.

[14] *Kuz' A. M., Ptashnyk B. I.* A problem with integral conditions with respect to time for a system of equations of the dynamic elasticity theory // Journ. of Math. Sci. 208 (2015), No 3, 310–326.

[15] *Ільків В. С., Нитребич З. М., Пукач П. Я.* Задача з інтегро-крайовими умовами для системи рівнянь Ляме у просторах майже періодичних функцій // Буков. мат. журн. – 2015. – 3, № 2. – С. 27–41.

[16] *Il'kiv V. S., Nytrebych Z. M., Pukach P. Ya.* Boundary-value problem with integral conditions for a system of Lame equations in the space of almost periodic function // Electron. J. Differential. Equations, 2016 (2016), no 304, 1–12.

[17] *Сэйдж Э. П., Уайт Ч. С.* Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.

[18] *Острём К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. – М.: Мир, 1987. – 480 с.

[19] *Lancaster P., Tismenetsky M.* The Theory of Matrices. – Academic Press, Orlando, FL, 1985.

[20] *Пытьев Ю. П.* Математические методы интерпретации эксперимента. – М.: Высш. шк., 1989. – 351 с.

[21] *Higham Nicholas J.* Accuracy and Stability of Numerical Algorithms. Second edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2002. 680 p.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR A HYPERBOLIC SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. S. Il'kiv, B. B. Pakholok

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The paper is devoted to investigation of the problem with nonlocal integral moment type conditions on time coordinate for a system of partial differential equations with constant coefficients. Necessary and sufficient conditions for the existence of the solution of this problem in the class of periodic functions for the spatial variables are found. Integration by parts formula used to study the asymptotic properties of solutions and fredholmovity of the problem was proved.

Key words: system of partial differential equations, nonlocal problem, small denominators, integral conditions.

2000 MSC: 35E20

UDK: 517.946.4

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua