ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
№ 871, 2017, с. 65–69

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
“Physical and mathematical sciences”
№ 871, 2017, p. 65–69

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ЗАЛИШКІВ ПІДХІДНИХ ДРОБІВ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З ДОДАТНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

В. Р. Гладун, О. С. Манзій, В. В. Пабирівський

Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 5 травня 2017 р.)

Розглянуто питання збіжності та стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами. Встановлено деякі властивості добутків залишків підхідних дробів парного та непарного порядків гіллястих ланцюгових дробів загального вигляду. З їх використанням отримано формулу різниці сусідніх підхідних дробів.

Ключові слова: гіллястий ланцюговий дріб, підхідний дріб, залишки підхідного дробу.

2000 MSC: 11A55, 11J70, 40A15

УДК: 517.524

Вступ

Неперервні дроби та їх багатовимірні узагальнення – гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) широко застосовуються в різних галузях науки, зокрема, в електротехніці – для синтезу багатополюсників та побудови математичних моделей транзисторів; у механіці – для дослідження механічних коливань у різних енергетичних устаткуваннях у суднобудуванні; в теорії антен – для дослідження задач збудження модульованих імпедансних, діелектричних структур та антенних решіток; у теоретичній фізиці – для зображення масового оператора квазічастинок, що взаємодіють з фотонами [1–4]. Операторні ланцюгові дроби застосовано для розв’язування рівнянь Шредінгера в лінійній теорії в’язкопружності. У теорії функцій ГЛД використовують для побудови дробово-раціональних наближень функцій багатьох змінних, зокрема багатовимірних гіпергеометричних функцій, для інтерполяції і апроксимації функцій [5–8]. Це спонукає до розвитку аналітичної теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів, яка охоплює встановлення ознак збіжності та стійкості до збурень, оцінок похибок наближень підхідними дробами, побудову розвинень функцій у такі дроби [2, 9–11].

Досліджуючи збіжність ГЛД з додатними елементами, використовують формулу різниці двох підхідних дробів та деякі спеціальні нерівності, які дозволяють одержати оцінки різниці підхідних дробів. Основні ознаки збіжності та стійкості до збурень ГЛД

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{1}$$

з додатними частинними знаменниками запропоновано в роботі [2]. Зокрема, встановлено, що область $(0, +\infty)$ є областю стійкості до збурень ГЛД (1). Цей результат повністю розв’язує задачу дослідження стійкості до збурень такого класу ГЛД. У роботі [12] подано формули відносних похибок підхідних дробів ГЛД загального вигляду, визначено достатні умови стійкості до збурень таких гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами та побудовано множини відносної стійкості до збурень.

Задача дослідження збіжності ГЛД (1) все ще розв’язана не повністю. Залишається відкритим питання, чи є умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty \tag{2}$$

де $\alpha_k = \min\{b_{i(k)} : i_p = \overline{1,N}, p = \overline{1,k}\}$, достатньою для збіжності ГЛД (1)? Ознаку збіжності ГЛД (1), яка при $N = 1$ еквівалентна критерію збіжності Зейделя, встановлено в роботі [2].

I. Основні поняття та означення

Гіллястий ланцюговий дріб – це багатовимірне узагальнення неперервного дробу. Вперше означення ГЛД запропоновано в роботі [15]. За аналогією з одновимірним випадком для визначення ГЛД було застосовано композицію багатовимірних дробово-лінійних відображень [2].

Гіллястим ланцюговим дробом називається вираз

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} := b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \ddots + \sum\limits_{i_k=1}^{N} \cfrac{a_{i(k)}}{b_{i(k)} + \ddots}}}, \tag{3}$$

де $N \in \mathbb{N}$ – кількість гілок розгалуження, $i(0) = i_0 = 0$, $i(k) = i_1 i_2 ... i_k$, $i_p = \overline{1,\ N}$, $p = \overline{1,\ k}$, $k = 1, 2,\ ...,$ – мультиіндекси.

Розглянемо множини мультиіндексів:

$$I_0 = \{0\},\ I_k = \{i(k) : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}\},\ k = 1, 2, \ldots$$

Числа $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots$, називають відповідно частинними чисельниками та знаменниками, b_0 – вільним членом, відношення $a_{i(k)}/b_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, k-ми частинними ланками. Сукупність усіх k-х частинних ланок утворює k-й поверх ГЛД (3).

Скінченні гіллясті ланцюгові дроби

$$f_0 = b_0, \quad f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \quad n = 1,\ 2,\ ..., \tag{4}$$

називають n-ми підхідними дробами або n-ми апроксимантами ГЛД (3).

Нескінченний ГЛД (3) розглядають як послідовність підхідних дробів (4). ГЛД (3) називають збіжним, якщо існує скінченна границя послідовності $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Величину цієї границі називають значенням ГЛД (3).

Величини, що визначаються рекурентними співвідношеннями

$$Q_{i(p)}^{(n)} = b_{i(p)} + \sum_{i_{p+1}=1}^{N} \frac{a_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(n)}},\ i(p) \in I_p, \tag{5}$$

$p = n-1,\ n-2,\ ...,\ 0$, причому

$$Q_{i(n)}^{(n)} = b_{i(n)},\ i(n) \in I_n,$$

називають залишками n-го підхідного дробу ГЛД (3).

Позначимо

$$g_{i(p)}^{(n)} = \frac{a_{i(p)}}{Q_{i(p-1)}^{(n)} Q_{i(p)}^{(n)}},\ i(p) \in I_p,\ p = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Важливу роль у дослідженні збіжності ГЛД відіграє формула різниці двох підхідних дробів:

$$f_n - f_m =$$

$$= (-1)^m \sum_{i_1, i_2,\ ...,\ i_{m+1}=1}^{N} \frac{\prod\limits_{k=1}^{m+1} a_{i(k)}}{\prod\limits_{k=1}^{m+1} Q_{i(k)}^{(n)} \prod\limits_{k=1}^{m} Q_{i(k)}^{(m)}},\ n > m, \tag{7}$$

за умови, що усі залишки $Q_{i(p)}^{(s)} \neq 0$, $i_p \in I_p, p = \overline{1, s}$, $s \in \{n,\ m\}$.

Новий підхід до дослідження збіжності ГЛД, що використовує формулу (7), вперше запропоновано в роботі [14], в якій встановлено, що ГЛД (1) збігається, якщо розбігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \alpha_{k+1}$, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \alpha_{k+1} = \infty,$$

де α_k визначають згідно з (2). В роботі [16], використовуючи формулу типу (7), Д. І. Боднар вперше встановив необхідну умову збіжності ГЛД (1) з додатними частинними знаменниками, довівши, що ГЛД (1) розбігається, якщо збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$, де $\beta_k = \max\{b_{i(k)} : i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}\}$. Критерій збіжності ГЛД (1) за деяких обмежень на частинні знаменники запропоновано в роботах [17, 18].

II. Властивості залишків підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами

Для ГЛД (3) з додатними елементами з формули (7) випливає властивість вилки, яка виражається системою нерівностей

$$f_{2m} < f_{2m+2} < f_{2n+1} < f_{2n-1},\ m \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}.$$

Із властивості вилки випливає

Теорема 1. ([2, 15]) *ГЛД (3) з додатними елементами збігається тоді й лише тоді, коли*

$$\lim_{n \to \infty} (f_{2m+1} - f_{2m}) = 0. \tag{8}$$

Звідси доходимо висновку, що дослідження збіжності ГЛД (3) з додатними елементами зводиться до дослідження різниці двох сусідніх підхідних дробів.

Формулу різниці підхідних дробів ГЛД (3) f_{2m+1}, f_{2m}, враховуючи позначення (6), запишемо у вигляді:

$$f_{2m+1}-f_{2m}=\sum_{i_1=1,\, i_2=1,\, \ldots,\, i_{2m+1}=1}^{N}\frac{\prod\limits_{k=1}^{2m+1}a_{i(k)}}{\prod\limits_{k=1}^{2m+1}Q_{i(k)}^{(2m+1)}\prod\limits_{k=1}^{2m}Q_{i(k)}^{(2m)}}=$$

$$\sum_{i_1=1,\, i_2=1,\, \ldots,\, i_{2m+1}=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}}\prod_{k=1}^{m}\frac{a_{i(2k)}}{Q_{i(2k-1)}^{(2m)}Q_{i(2k)}^{(2m)}}\prod_{k=1}^{m}\frac{a_{i(2k+1)}}{Q_{i(2k)}^{(2m+1)}Q_{i(2k+1)}^{(2m+1)}}=$$

$$\sum_{i_1=1,\, i_2=1,\, \ldots,\, i_{2m+1}=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}}\prod_{k=1}^{m}g_{i(2k)}^{(2m)}\prod_{k=1}^{m}g_{i(2k+1)}^{(2m+1)}.$$

Використовуючи рекурентні співвідношення (5), перетворимо величини $g_{i(k)}^{(s)}$, $i(k)\in I_k$, $k=\overline{1,s}$, $s\in\{2m,\ 2m+1\}$:

$$g_{i(k)}^{(s)}=\frac{a_{i(k)}}{Q_{i(k)}^{(s)}}\left(b_{i(k-1)}+\sum_{j=1}^{N}\frac{a_{i(k-1)j}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}}\right)^{-1}=$$

$$\left(\frac{b_{i(k-1)}Q_{i(k)}^{(s)}}{a_{i(k)}}+\sum_{j=1}^{N}\frac{Q_{i(k)}^{(s)}\Big/a_{i(k)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}\Big/a_{i(k-1)j}}\right)^{-1}.$$

Тоді формула різниці двох сусідніх підхідних дробів ГЛД (3) набуде вигляду

$$f_{2m+1}-f_{2m}=\sum_{i_1=1,i_2=1,\ldots,i_{2m+1}=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(2m+1)}}\prod_{k=2}^{2m+1}\left(\frac{b_{i(k-1)}Q_{i(k)}^{(s)}}{a_{i(k)}}+\sum_{j=1}^{N}\frac{Q_{i(k)}^{(s)}\Big/a_{i(k)}}{Q_{i(k-1)j}^{(s)}\Big/a_{i(k-1)j}}\right)^{-1},$$

де $s=2m+k-2\,[k/2]$.

Зафіксувавши довільний набір індексів $i_1,\ i_2,\ \ldots,i_k$, позначимо

$$g_{i(k)}^{(2m+1)}=g_{i_k},\ g_{i(k)}^{(2m)}=g'_{i_k},$$

$$Q_{i(k)}^{(2m+1)}=Q_{i_k},\ Q_{i(k)}^{(2m)}=Q'_{i_k},$$

$$b_{i(k)}=b_{i_k},\ a_{i(k)}=a_{i_k},$$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{Q_{i(k)}^{(2m+1)}\Big/a_{i(k)}}{Q_{i(k-1)j}^{(2m+1)}\Big/a_{i(k-1)j}}=\xi_{i_k}, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{Q_{i(k)}^{(2m)}\Big/a_{i(k)}}{Q_{i(k-1)j}^{(2m)}\Big/a_{i(k-1)j}}=\xi'_{i_k}. \tag{10}$$

Доведемо, що добутки

$$\left(\frac{a_{i_1}}{Q_{i_1}}\prod_{k=1}^{s}g_{i_{2k+1}}\right)^{-1},\ s=\overline{1,m},$$

$$\left(\frac{a_{i_2}}{Q'_{i_2}}\prod_{k=2}^{s+1}g'_{i_{2k}}\right)^{-1},\ s=\overline{1,m-1},$$

є відповідно многочленами змінних ξ_{i_k}, $k=\overline{2,2s+1}$, ξ'_{i_k},$k=\overline{3,2s+2}$, які визначаються згідно з (9), (10).

Теорема 2. *Для добутків* $\left(\frac{a_{i_1}}{Q_{i_1}}\prod\limits_{k=1}^{s}g_{i_{2k+1}}\right)^{-1}$ *справджується формула*

$$\left(\frac{a_{i_1}}{Q_{i_1}}\prod_{k=1}^{s}g_{i_{2k+1}}\right)^{-1}=P_{i_{2s}}\frac{Q_{i_{2s+1}}}{a_{i_{2s+1}}}+R_{i_{2s+1}},\ s=\overline{1,m}, \tag{11}$$

де величини

$$P_{i_{2s}}\left(\xi_{i_2},\xi_{i_3},\ldots,\xi_{i_{2s}}\right),\ R_{i_{2s+1}}\left(\xi_{i_3},\xi_{i_4},\ldots,\xi_{i_{2s+1}}\right),$$

визначаються рекурентними співвідношеннями

$$\begin{aligned}P_{i_{2s}}&=\frac{P_{i_{2s-2}}}{a_{i_{2s-1}}}\left(\xi_{i_{2s}}a_{i_{2s}}+b_{i_{2s-1}}b_{i_{2s}}\right)+R_{i_{2s-1}}b_{i_{2s}},\\ R_{i_{2s+1}}&=\xi_{i_{2s+1}}\left(b_{i_{2s-1}}\frac{P_{i_{2s-2}}}{a_{i_{2s-1}}}+R_{i_{2s-1}}\right),\ s=\overline{1,m},\end{aligned} \tag{12}$$

за початкових умов $R_{i_1}=0$, $P_{i_0}=1$.

□ *Доведення.* Якщо $s=1$, маємо:

$$\left(\frac{a_{i_1}}{Q_{i_1}}g_{i_3}\right)^{-1}=\frac{Q_{i_1}Q_{i_2}Q_{i_3}}{a_{i_1}a_{i_3}}=\frac{a_{i_2}Q_{i_1}Q_{i_2}Q_{i_3}}{a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}}=$$

$$a_{i_2}\left(\frac{b_{i_1}Q_{i_2}}{a_{i_2}}+\xi_{i_2}\right)\frac{Q_{i_3}}{a_{i_3}}=\left(b_{i_1}Q_{i_2}+\xi_{i_2}a_{i_2}\right)\frac{Q_{i_3}}{a_{i_3}}=$$

$$\frac{1}{a_{i_1}}\left(\xi_{i_2}a_{i_2}+b_{i_1}b_{i_2}\right)\frac{Q_{i_3}}{a_{i_3}}+\xi_{i_3}\frac{b_{i_1}}{a_{i_1}}=P_{i_2}\frac{Q_{i_3}}{a_{i_3}}+R_{i_3}.$$

Припустимо, що формула (11), справджується для довільного $s=n$, $1\le n\le m-1$, і доведемо її, якщо $s=n+1$:

$$\left(\frac{a_{i_1}}{Q_{i_1}}\prod_{k=1}^{n+1}g_{i_{2k+1}}\right)^{-1}=\left(\frac{a_{i_1}}{Q_{i_1}}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{a_{i_{2k+1}}}{Q_{i_{2k}}Q_{i_{2k+1}}}\right)^{-1}=$$

$$\frac{Q_{i_{2n+2}}Q_{i_{2n+3}}}{a_{i_{2n+3}}}\left(\frac{a_{i_1}}{Q_{i_1}}\prod_{k=1}^{n}\frac{a_{i_{2k+1}}}{Q_{i_{2k}}Q_{i_{2k+1}}}\right)^{-1}=a_{i_{2n+2}}\frac{Q_{i_{2n+2}}}{a_{i_{2n+2}}}$$

$$\times\frac{Q_{i_{2n+3}}}{a_{i_{2n+3}}}\left(P_{i_{2n}}\frac{Q_{i_{2n+1}}}{a_{i_{2n+1}}}+R_{i_{2n+1}}\right)=a_{i_{2n+2}}\frac{Q_{i_{2n+3}}}{a_{i_{2n+3}}}\times$$

$$\left(\frac{P_{i_{2n}}}{a_{i_{2n+1}}}\left(b_{i_{2n+1}}\frac{Q_{i_{2n+2}}}{a_{i_{2n+2}}}+\xi_{i_{2n+2}}\right)+R_{i_{2n+1}}\frac{Q_{i_{2n+2}}}{a_{i_{2n+2}}}\right)=$$

$$\left(Q_{i_{2n+2}}\left(R_{i_{2n+1}}+b_{i_{2n+1}}\frac{P_{i_{2n}}}{a_{i_{2n+1}}}\right)+\xi_{i_{2n+2}}a_{i_{2n+2}}\frac{P_{i_{2n}}}{a_{i_{2n+1}}}\right)$$

$$\times\frac{Q_{i_{2n+3}}}{a_{i_{2n+3}}}=\left(b_{i_{2n+2}}\frac{Q_{i_{2n+3}}}{a_{i_{2n+3}}}+\xi_{i_{2n+3}}\right)\times$$

$$\left(R_{i_{2n+1}}+b_{i_{2n+1}}\frac{P_{i_{2n}}}{a_{i_{2n+1}}}\right)+\xi_{i_{2n+2}}a_{i_{2n+2}}\frac{P_{i_{2n}}}{a_{i_{2n+1}}}\frac{Q_{i_{2n+3}}}{a_{i_{2n+3}}}=$$

$$\left(\frac{P_{i_{2n}}}{a_{i_{2n+1}}}\left(\xi_{i_{2n+2}}a_{i_{2n+2}}+b_{i_{2n+1}}b_{i_{2n+2}}\right)+R_{i_{2n+1}}b_{i_{2n+2}}\right)$$

$$\frac{Q_{i_{2n+3}}}{a_{i_{2n+3}}}+\xi_{i_{2n+3}}\left(b_{i_{2n+1}}\frac{P_{i_{2n}}}{a_{i_{2n+1}}}+R_{i_{2n+1}}\right)=$$

$$P_{i_{2n+2}}\frac{Q_{i_{2n+3}}}{a_{i_{2n+3}}}+R_{i_{2n+3}}.$$

■

Теорема 3. *Для добутків* $\left(\frac{a_{i_2}}{Q'_{i_2}}\prod_{k=2}^{s+1}g'_{i_{2k}}\right)^{-1}$ *справджується формула*

$$\left(\frac{a_{i_2}}{Q'_{i_2}}\prod_{k=2}^{s+1}g'_{i_{2k}}\right)^{-1}=P_{i_{2s+1}}\frac{Q'_{i_{2s+2}}}{a_{i_{2s+2}}}+R_{i_{2s+2}},\ s=\overline{1,m-1}, \tag{13}$$

де величини

$$P_{i_{2s+1}}=P_{i_{2s+1}}\left(\xi_{i_3},\xi_{i_4},\ldots,\xi_{i_{2s+1}}\right),$$

$$R_{i_{2s+2}}=R_{i_{2s+2}}\left(\xi_{i_4},\xi_{i_5},\ldots,\xi_{i_{2s+2}}\right)$$

визначаються рекурентними співвідношеннями

$$P_{i_{2s+1}}=\frac{P_{i_{2s-1}}}{a_{i_{2s}}}\left({\xi'}_{i_{2s+1}}a_{i_{2s+1}}+b_{i_{2s}}b_{i_{2s+1}}\right)+R_{i_{2s}}b_{i_{2s+1}},$$

$$R_{i_{2s+2}}={\xi'}_{i_{2s+2}}\left(b_{i_{2s}}\frac{P_{i_{2s-1}}}{a_{i_{2s}}}+R_{i_{2s}}\right),\ s=\overline{1,m-1}, \tag{14}$$

за початкових умов $R_{i_2}=0$, $P_{i_1}=1$.

□ *Доведення.* Якщо $s=1$, маємо:

$$\frac{Q'_{i_2}Q'_{i_3}Q'_{i_4}}{a_{i_2}a_{i_4}}=\frac{a_{i_3}}{a_{i_2}}\left(b_{i_2}\frac{Q'_{i_3}}{a_{i_3}}+{\xi'}_{i_3}\right)\frac{Q'_{i_4}}{a_{i_4}}=$$

$$\frac{1}{a_{i_2}}\left(b_{i_2}Q'_{i_3}+{\xi'}_{i_3}a_{i_3}\right)\frac{{Q'}_{i_4}}{a_{i_4}}=$$

$$\frac{1}{a_{i_2}}\left({\xi'}_{i_3}a_{i_3}+b_{i_2}b_{i_3}\right)\frac{Q'_{i_4}}{a_{i_4}}+\xi'_{i_4}\frac{b_{i_2}}{a_{i_2}}=P_{i_3}\frac{Q'_{i_4}}{a_{i_4}}+R_{i_4}.$$

Припустимо, що формула (13), справджується для довільного $s=n$, $1\le n\le m-2$, і доведемо її для $s=n+1$:

$$\left(\frac{a_{i_2}}{Q'_{i_2}}\prod_{k=2}^{n+2}g'_{i_{2k}}\right)^{-1}=\left(\frac{a_{i_2}}{Q'_{i_2}}\prod_{k=2}^{n+2}\frac{a_{i_{2k}}}{Q'_{i_{2k-1}}Q'_{i_{2k}}}\right)^{-1}=$$

$$\frac{Q'_{i_{2n+3}}Q'_{i_{2n+4}}}{a_{i_{2n+4}}}\left(\frac{a_{i_2}}{Q'_{i_2}}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{a_{i_{2k}}}{Q'_{i_{2k-1}}Q'_{i_{2k}}}\right)^{-1}=a_{i_{2n+3}}\frac{Q'_{i_{2n+3}}}{a_{i_{2n+3}}}$$

$$\times\frac{Q'_{i_{2n+4}}}{a_{i_{2n+4}}}\left(P_{i_{2n+1}}\frac{Q'_{i_{2n+2}}}{a'_{i_{2n+2}}}+R_{i_{2n+2}}\right)=a_{i_{2n+3}}\frac{Q'_{i_{2n+4}}}{a_{i_{2n+4}}}\times$$

$$\left(\frac{P_{i_{2n+1}}}{a_{i_{2n+2}}}\left(b_{i_{2n+2}}\frac{Q'_{i_{2n+3}}}{a_{i_{2n+3}}}+{\xi'}_{i_{2n+3}}\right)+R_{i_{2n+2}}\frac{Q'_{i_{2n+3}}}{a_{i_{2n+3}}}\right)=$$

$$\left(Q'_{i_{2n+3}}\left(R_{i_{2n+2}}+b_{i_{2n+2}}\frac{P_{i_{2n+1}}}{a_{i_{2n+2}}}\right)+{\xi'}_{i_{2n+3}}a_{i_{2n+3}}\frac{P_{i_{2n+1}}}{a_{i_{2n+2}}}\right)$$

$$\times\frac{Q'_{i_{2n+4}}}{a_{i_{2n+4}}}=\left(b_{i_{2n+3}}\frac{Q'_{i_{2n+4}}}{a_{i_{2n+4}}}+{\xi'}_{i_{2n+4}}\right)\times$$

$$\left(R_{i_{2n+2}}+b_{i_{2n+2}}\frac{P_{i_{2n+1}}}{a_{i_{2n+2}}}\right)+\xi'_{i_{2n+3}}a_{i_{2n+3}}\frac{P_{i_{2n+1}}}{a_{i_{2n+2}}}\frac{Q'_{i_{2n+4}}}{a_{i_{2n+4}}}=$$

$$\left(\frac{P_{i_{2n+1}}}{a_{i_{2n+2}}}\left({\xi'}_{i_{2n+3}}a_{i_{2n+3}}+b_{i_{2n+2}}b_{i_{2n+3}}\right)+R_{i_{2n+2}}b_{i_{2n+3}}\right)\times$$

$$\frac{Q'_{i_{2n+4}}}{a_{i_{2n+4}}}+\xi'_{i_{2n+4}}\left(b_{i_{2n+2}}\frac{P_{i_{2n+1}}}{a_{i_{2n+2}}}+R_{i_{2n+2}}\right)=$$

$$P_{i_{2n+3}}\frac{Q'_{i_{2n+4}}}{a_{i_{2n+4}}}+R_{i_{2n+4}}.$$

■

Із урахуванням теорем 2, 3 формула різниці між двома підхідними дробами ГЛД (3) набуває вигляду

$$f_{2m+1}-f_{2m}=\sum_{i_1=1,\,i_2=1,\,\ldots\,,\,i_{2m+1}=1}^{N}\frac{1}{Q_{i(1)}^{(2s)}}\left(P_{i(2s)}\frac{Q_{i(2s+1)}^{(2m+1)}}{a_{i(2s+1)}}+R_{i(2s+1)}\right)^{-1}\left(P_{i(2s+1)}\frac{Q_{i(2s+2)}^{(2m)}}{a_{i(2s+2)}}+R_{i(2s+2)}\right)^{-1}. \tag{15}$$

Висновки

Формули (11), (13) є узагальненням формул для добутків залишків підхідних дробів ГЛД (1), встановлених Д. І. Боднаром [2], на випадок ГЛД загального вигляду. Формула різниці (15), отримана на основі рекурентних співвідношень (12), (14), дає можливість встановити точніші ознаки збіжності ГЛД (3) з додатними елементами. Також ці результати доцільно використати для дослідження стійкості до збурень таких ГЛД.

Література

[1] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions with Application. – Amsterdam: North-Holland, 1992. – 606 p.

[2] *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.

[3] *Hensley D.* Continued Fractions. – Singapore: World Scientific Publishing Co, 2006. – 260 p.

[4] *Cuyt A., Petersen V. B., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B.* Handbook of Continued Fractions for Special Functions. – Berlin: Springer, 2008. – 431 p.

[5] *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and applications. – New York – Sydney – Toronto, Chichester, Ellis Hoorwood, 1976. – 376 p.

[6] *Gil A., Segura J., Temme N. M.* Numerical Methods for Special Functions. – Philadelphia: SIAM, 2007. – 417 p.

[7] *Backeljauw F., Becuwe S., Cuyt A.* Validated Evaluation of Special Mathematical Functions // Lecture Notes in Computer Science. – 5144. – 2008. P. 206–216.

[8] *Гоєнко Н. П., Гладун В. Р., Манзій О. С.* Про нескінченні залишки гіллястого ланцюгового дробу Ньордунда для гіпергеометричних функцій Апеля // Карпатські матем. публ. – 2014. – Т.6, № 1. – С. 11–25.

[9] *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: van Nostrand, 1948. – 433 p.

[10] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.

[11] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions, Vol. 1: Convergence Theory. Atlantic Studies in Mathematics for Engineering and Science Series. Editor: C. K. Chui. – Atlantis Press World Scientific, Amsterdam, Paris, 2008. – 308 p.

[12] *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Достатні умови стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – Львів. – 2002. – 45, № 1. – С. 22-27.

[13] *Bodnar D.* Sur la convergence des fractions continues branches avec des termes positifs. Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Skrifter, 1994. – 1. – 21 p.

[14] *Боднар Д. И., Олексив И. Я.* О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами // Укр.мат.журн. – 1976. – 28, № 3. – С. 373–377.

[15] *Скоробогатько В. Я., Дронюк Н. С., Бобик О. Л., Пташник Б. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – № 2. – С. 131–133.

[16] *Боднар Д. И.* Необходимый признак сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными членами // Мат. методы и физ.–мех. поля. – Львов. – 1979. – 10. – С. 15-19.

[17] *Боднар Д. И.* Необходимый и достаточный признак сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными членами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – Львов. – 1981. – 13. – С. 12–15.

[18] *Боднар Д. И.* Признак сходимости ветвящихся цепных // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 8. – С. 3–7.

SOME PROPERTIES OF THE TAILS OF THE APPROXIMANT OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH POSITIVE ELEMENTS

V. R. Hladun, O. S. Manziy, V. V. Pabyrivskyi

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine

The paper deals with the problems of convergence and stability to perturbations of branched continued fractions with positive elements. We establish some properties of products of the tails of even and odd approximants of branched continued fractions of the general form. Using them, we obtain a formula of the difference of two adjacent approximants.

Key words: branched continued fraction, approximants, tails of approximants.

2000 MSC: 11A55, 11J70, 40A15

UDK: 517.524