ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 871, 2017, с. 46–64

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 871, 2017, p. 46–64

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ДВОМА ГРУПАМИ ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ ТА ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

О. Г. Возняк[a], С. Д. Івасишен[b, c], І. П. Мединський[d]

[a]*Тернопільський національний економічний університет*
вул. Львівська, 11, 46004, Тернопіль, Україна
[b]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*
вул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна
[c]*Національний технічний університет України "КПІ"*
просп. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна
[d]*Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 12 червня 2017 р.)

Для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова із залежними від двох груп просторових змінних коефіцієнтами та виродженням на початковій гіперплощині побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші й одержано точні оцінки фундаментального розв'язку та його похідних.

Ключові слова: фундаментальний розв'язок задачі Коші, виродження на початковій гіперплощині, об'ємний потенціал, параметрикс, метод Леві.

2000 MSC: 35E20

УДК: 517.956.4

Вступ

У працях [1–9] (див. також [10, с. 162–172]) розглядались рівняння вигляду

$$\Big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)A(t,x,\partial_x) - a_0(t,x) \Big) u(t,x) = f(t,x),$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

за таких припущень: α і β – неперервні на відрізку $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0,T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і β монотонно неспадна; диференціальний вираз $\partial_t - A(t,x,\partial_x) - a_0(t,x)$ рівномірно параболічний за Петровським чи за Ейдельманом, його коефіцієнти обмежені, неперервні за t і гельдерові за x у шарі $\Pi_{[0,T]}$. Ці рівняння мають виродження, якщо $t = 0$, які класифікуються за величинами

$$A(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \text{ і } B(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta.$$

Так, якщо $A(T,0) < +\infty$, у рівнянь (1) слабке виродження, а коли $A(T,0) = +\infty$, то – сильне. Якщо $A(T,0) = +\infty$ і $B(T,0) = +\infty$, то маємо випадок дуже сильного виродження.

Для рівняння (1) не завжди можна розглядати задачу Коші з початковими даними, якщо $t = 0$, у звичайній постановці. Але можна говорити про фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) як про таку функцію $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, що формула

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \ (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]},$$

визначає розв'язок однорідного рівняння (1), який задовольняє умову $u\big|_{t=\tau} = \varphi$ для будь-якого $\tau \in (0,T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

В указаних вище працях для рівняння (1) побудовано ФРЗК, встановлено його властивості, за допомогою яких досліджено коректну розв'язність рівнянь зі звичайними початковими умовами у випадку слабкого виродження і без початкових умов, якщо виродження сильне. Ці результати узагальнено в працях [11–14] на випадок вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова, коефіцієнти яких не залежать від просторових змінних. Наведемо вигляд таких рівнянь для випадку однієї групи змінних виродження.

Нехай n, n_1 і n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \ge n_2 \ge 1$ і $n = n_1 + n_2$. Вважаємо, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних: основної групи $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ і групи змінних виродження $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, де $x_j := (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1,2\}$, так що $x := (x_1, x_2)$. В [11–14] розглянуто рівняння типу

$$\Big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)\big(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + A(t,\partial_{x_1})\big) - a_0(t)\Big)u(t,x) =$$
$$= f(t,x), \ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (2)$$

де $A(t,\partial_{x_1})$ – диференціальний вираз з неперервними на $[0,T]$ коефіцієнтами такий, що вираз $\partial_t - A(t,\partial_{x_1})$ рівномірно параболічний за Петровським чи за Ейдельманом у шарі $\Pi^1_{[0,T]} := [0,T] \times \mathbb{R}^{n_1}$.

У цій статті побудуємо ФРЗК для рівняння другого порядку типу (2), в якому коефіцієнти залежать не лише від t, але й від двох груп просторових змінних.

Зазначимо, що для такого рівняння тільки без виродження на початковій гіперплощині побудовано класичний ФРЗК та одержано точні оцінки його похідних у статті [17]. Зокрема, такі ж результати отримані для рівняння другого порядку типу (2), в яких коефіцієнти залежать від t і від просторових змінних з основної групи x_1, у випадку як без виродження [15], так і з виродженням на початковій гіперплощині [16].

I. Припущення та допоміжні твердження

Крім запроваджених у вступі позначень, використовуватимемо ще такі: $m_1 := 1/2$, $m_2 := 3/2$, $M := m_1 n_1 + m_2 n_2$; $\partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}$, $k := (k_1, k_2)$ і $x := (x_1, x_2)$, де $k_j \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \{1, 2\}$; $\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot)$, $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot)$, $s \in \{1, 2\}$, $z^{(1)} := (z_1, x_2)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2)$; $X(t,\tau) := (X_1(t,\tau), X_2(t,\tau))$, $X_1(t,\tau) := x_1$, $X_2(t,\tau) := x_2 + B(t,\tau)\hat{x}_1$, $\hat{x}_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$, $Z^{(s)}(t,\tau) := X(t,\tau)|_{x_s = z_s}$, $s \in \{1, 2\}$.

Розглядатимемо рівняння вигляду

$$Lu(t,x) := (S - A(t, x, \partial_{x_1}))u(t,x) = 0,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де

$$S := \alpha(t)\partial_t - \beta(t)\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}};$$

$$A(t, x, \partial_{x_1}) := \beta(t)\sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x).$$

Припускатимемо, що коефіцієнти a_{jl}, a_j і a_0 є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

1) вони обмежені й неперервні за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re}\sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1l} \geq \delta|\sigma_1|^2; \tag{2}$$

2) вони є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists\, H_1 > 0\ \exists\, \gamma_1 \in (0,1)\ \forall\{(t,x),(t,z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]}:$$

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)| \leq H_1|x_1 - z_1|^{\gamma_1}, \tag{3}$$

$$\exists\, H_2 > 0\ \exists\, \gamma_2 \in (1/3, 2/3]\ \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}$$

$$\forall h \in [\tau, T]:\ \Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \leq$$

$$\leq H_2((B(h,\tau))^{m_2\gamma_2} + |X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma_2}), \tag{4}$$

де a – будь-який із коефіцієнтів a_{jl}, a_j і a_0.

З умови (4) при $h = \tau$ випливає звичайна умова Гельдера за змінною x_2. Достатня умова виконання (4) наведена в такій лемі.

Лема 1. *Нехай a – неперервна й обмежена функція на $\Pi_{[0,T]}$, яка задовольняє умову*

$$\exists\, H_3 > 0\ \exists\, \gamma \in (1/2, 1]\ \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}:$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \leq H_3((B(T,\tau))^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-\gamma}|x_2 - z_2|^{\gamma}. \tag{5}$$

Тоді справджується нерівність (4) *з* $\gamma_2 = \gamma/m_2$.

□ *Доведення.* Досить довести обмеженість відношення

$$R := |\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)|((B(h,\tau))^{\gamma} + |X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma/m_2})^{-1}$$

для всіх $\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]}$ і $h \in [\tau, T]$.

У випадку, коли $(B(h,\tau))^{\gamma} + |X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma/m_2} > (B(T,\tau))^{\gamma}$, маємо

$$R \leq (B(T,\tau))^{-\gamma}|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \leq 2M(B(T,\tau))^{-\gamma}, \tag{6}$$

де M – стала, яка обмежує модуль функції a.

Нехай справджується протилежна нерівність

$$(B(h,\tau))^{\gamma} + |X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma/m_2} \leq (B(T,\tau))^{\gamma}. \tag{7}$$

Оскільки $X_2(h,\tau) = x_2 + B(h,\tau)\hat{x}_1$, то

$$|x_2 - z_2| \leq B(h,\tau)|\hat{x}_1| + |X_2(h,\tau) - z_2|. \tag{8}$$

Можливі такі випадки: 1) $B(h,\tau)|\hat{x}_1| \leq |X_2(h,\tau) - z_2|$ і 2) $B(h,\tau)|\hat{x}_1| > |X_2(h,\tau) - z_2|$. У випадку 1 за допомогою нерівностей (5) і (8) отримуємо

$$R \leq H_3(B(h,\tau)|\hat{x}_1| + |X_2(h,\tau) - z_2|)^{\gamma}\times$$
$$\times((B(T,\tau))^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-\gamma}\times$$
$$\times((B(h,\tau))^{\gamma} + |X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma/m_2})^{-1} \leq$$
$$\leq 2^{\gamma}H_3|X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma}((B(T,\tau))^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-\gamma}\times$$
$$\times((B(h,\tau))^{\gamma} + |X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma/m_2})^{-1},$$

а оскільки на підставі нерівності (7) $(B(T,\tau))^{-m_2}\times$ $\times|X_2(h,\tau) - z_2| \leq 1$ і $\gamma > /m_2$, то

$$|X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma} =$$
$$= (B(T,\tau))^{m_2\gamma}((B(T,\tau))^{-m_2}|X_2(h,\tau) - z_2|)^{\gamma} \leq$$
$$\leq (B(T,\tau))^{m_2\gamma}((B(T,\tau))^{-m_2}|X_2(h,\tau) - z_2|)^{\gamma/m_2} =$$
$$= (B(T,\tau))^{m_1\gamma}|X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma/m_2}$$

і

$$R \leq 2^{\gamma}H_3\left(\frac{(B(T,\tau))^{m_1}}{(B(T,\tau))^{m_1} + |\hat{x}_1|}\right)^{\gamma}\times$$
$$\times\left(\frac{|X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma/m_2}}{(B(h,\tau))^{\gamma} + |X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma/m_2}}\right) \leq 2^{\gamma}H_3. \tag{9}$$

У випадку 2 аналогічно одержуємо

$$R \leq H_3(B(h,\tau)|\hat{x}_1| + |X_2(h,\tau) - z_2|)^{\gamma}\times$$
$$\times((B(T,\tau))^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-\gamma}\times$$
$$\times((B(h,\tau))^{\gamma} + |X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma/m_2})^{-1} \leq$$
$$\leq 2^{\gamma}H_3(B(h,\tau)|\hat{x}_1|)^{\gamma}((B(T,\tau))^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-\gamma}\times$$

$$\times((B(h,\tau))^{\gamma}+|X_2(h,\tau)-z_2|^{\gamma/m_2})^{-1}\le$$

$$\le 2^{\gamma}H_3\left(\frac{|\hat{x}_1|}{(B(T,\tau))^{m_1}+|\hat{x}_1|}\right)^{\gamma}\times$$

$$\times\left(\frac{(B(h,\tau))^{\gamma}}{(B(h,\tau))^{\gamma}+|X_2(h,\tau)-z_2|^{\gamma/m_2}}\right)\le 2^{\gamma}H_3. \quad (10)$$

З нерівностей (6), (9) і (10) випливає оцінка (4) з $\gamma_2=\gamma/m_2$ і $H_2=\max\{2M(B(T,\tau))^{-\gamma},\ 2^{\gamma}H_3\}$. ■

Використовуватимемо такі оцінювальні функції:

$$E_c^{(j)}(t,\tau,z_j):=\exp\{-c(B(t,\tau))^{1-2j}|z_j|^2\},$$

$$t>\tau,\ z_j\in\mathbb{R}^{n_j},\ j\in\{1,2\}; \quad (11)$$

$$E_c(t,\tau,x,\xi):=E_c^{(1)}(t,\tau,X_1(t,\tau)-\xi_1)\times$$

$$\times E_c^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2),\ t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \quad (12)$$

$$F_c(t,\tau,x,\xi):=\exp\{-c[(4B(t,\tau))^{-1}|x_1-\xi_1|^2+$$

$$+3(B(t,\tau))^{-3}|x_2+2^{-1}B(t,\tau)(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2|^2]\},$$

$$t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \quad (13)$$

$$E_c^d(t,\tau,x,\xi):=E_c(t,\tau,x,\xi)E^d(t,\tau),$$

$$F_c^d(t,\tau,x,\xi):=F_c(t,\tau,x,\xi)E^d(t,\tau),$$

$$E^d(t,\tau):=\exp\{dA(t,\tau)\},\ t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ d\in\mathbb{R}.$$

Наведемо потрібні властивості цих функцій з [16].

Лема 2. *Функції* (11)–(13) *мають такі властивості:*

$$E_c(t,\tau,x,\xi)\le F_{c_1}(t,\tau,x,\xi)\le E_{c_2}(t,\tau,x,\xi),$$

$$t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<c_2<c_1<c; \quad (14)$$

$$(B(t,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}E_c(t,\tau,x,\xi)d\xi_2\le C(B(t,\tau))^{-m_1n_1}\times$$

$$\times E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1),\ t>\tau,\ x\in\mathbb{R}^n,\ x_1\in\mathbb{R}^{n_1}; \quad (15)$$

$$(B(t,\tau))^{-m_sn_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_s}}E_c^{(s)}(t,\tau,x_s-\xi_s)d\xi_s=C,$$

$$t>\tau,\ x_s\in\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\{1,2\}; \quad (16)$$

$$(B(t,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}E_c(t,\tau,x,\xi)\,d\xi=C,$$

$$t>\tau,\ x\in\mathbb{R}^n; \quad (17)$$

$$E_c^{(1)}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E_c^{(1)}(\theta,\tau,\lambda_1-\xi_1)\le E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1),$$

$$0<\tau<\theta<t,\ \{x_1,\lambda_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \quad (18)$$

$$(B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}E_c(t,\theta,x,\lambda)E_c(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M}E_{c_0}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0<\tau<\theta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \quad (19)$$

$$|x_1-\xi_1|^{\gamma_1}E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)\le C(B(t,\tau))^{m_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1),\ t>\tau,\ \{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}; \quad (20)$$

$$|X_s(t,\tau)-\xi_s|^{\gamma_s}E_c(t,\tau,x,\xi)\le C(B(t,\tau))^{m_s\gamma_s}\times$$

$$\times E_{c_0}(t,\tau,x,\xi),\ t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ s\in\{1,2\}; \quad (21)$$

$$E_c(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)\le E_c(t,\tau,x,\xi),$$

$$0<\tau<\theta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n; \quad (22)$$

$$E_c(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)\le E_c^{(1)}(\theta,\tau,\lambda_1-\xi_1)\times$$

$$\times E_{-c}^{(1)}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E_{c/2}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2),$$

$$B(t,t_1)=B(t_1,\tau),\ t_1<\theta<t,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \quad (23)$$

де C, c і c_0 – додатні сталі, причому $c_0<c$.

Подані нижче твердження стосуються ФРЗК для рівняння

$$L_0u(t,x)=(S-A(t,y,\partial_{x_1}))u(t,x)=0,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \quad (24)$$

коефіцієнти якого залежать тільки від змінної t і параметра $y\in\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння* (24) *як функції t і y, задовольняють умови* **1** *і* **2**. *Тоді для рівняння* (24) *існує ФРЗК G_0, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k\partial_\xi^l G_0(t,x;\tau,\xi;y)|\le$$

$$\le C_{kl}(B(t,\tau))^{-M-M_{kl}}E_c^d(t,\tau,x,\xi), \quad (25)$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k\partial_\xi^l G_0(t,x;\tau,\xi;y)|\le$$

$$\le C_{kl}(B(t,\tau))^{-M-M_{kl}}E_c^d(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\begin{cases}|y_1-z_1|^{\gamma_1}, \text{якщо } s=1,\\ (B(h,\tau))^{m_2\gamma_2}+|Y_2(h,\tau)-z_2|^{\gamma_2},\\ \text{якщо } s=2,\end{cases} \quad (26)$$

а також рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi=\exp\Big\{\int\limits_{\tau}^{t}\frac{a_0(\theta,y)}{\alpha(\theta)}d\theta\Big\}, \quad (27)$$

$$\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi=0, \quad (28)$$

$$\partial_{x_2}^{k_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}G_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_2=0, \quad (29)$$

$$\partial_{x_2}^{k_2}G_0(t,x;\tau,\xi;y)=(-\partial_{\xi_2})^{k_2}G_0(t,x;\tau,\xi;y). \quad (30)$$

Тут $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{y_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\{1,2\}$, $\{k,l\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}$ в (28) *і $k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}\setminus\{0\}$ в (29) і (30), C_{kl} і c – додатні сталі, $d\in\mathbb{R}$, $M_{kl}:=m_1(|k_1|+|l_1|)+m_2(|k_2|+|l_2|)$, γ_s, $s\in\{1,2\}$, h – числа з умов* (3) *і* (4).

Твердження теореми доводиться аналогічно до доведення відповідних тверджень з [10, с. 185–192].

Для обгрунтування застосовності методу Леві необхідні властивості об’ємних потенціалів вигляду

$$W_0(t,x;\tau,\xi;y) :=$$

$$:= \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\theta,\lambda;y) f(\theta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda. \quad (31)$$

Ці властивості наводяться у поданих нижче лемах.

Функцію f вважатимемо неперервною там, де вона визначена. Для неї будемо використовувати такі умови:

$$\mathbf{3})\ |f(t,x;\tau,\xi;y)| \leq$$
$$\leq C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+\gamma} E_c^d(t,\tau,x,\xi); \quad (32)$$

$$\mathbf{4})\ |\Delta_{x_s}^{z_s} f(t,x;\tau,\xi;y)| \leq$$
$$\leq C\beta(t)|x_s - z_s|^{\gamma_s} (B(t,\tau))^{-M-1+\gamma-m_s\gamma_s} \times$$
$$\times (E_c^d(t,\tau,x,\xi) + E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)); \quad (33)$$

5) існують неперервні похідні $\partial_{x_{2l}} f$, для яких справджуються оцінки

$$|\partial_{x_{2l}} f(t,x;\tau,\xi;y)| \leq$$
$$\leq C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+\gamma-m_2} E_c^d(t,\tau,x,\xi). \quad (34)$$

В умовах (32) – (34) $0 < \tau < t \leq T$, $\{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n$, $z_s \subset \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \{1,2\}$, $l \in \{1,\ldots,n_2\}$, $\{\gamma,\gamma_1,\gamma_2\} \subset (0,1]$.

Лема 3. *Нехай функція f задовольняє умови* **3** *і* **4**. *Тоді правильні формули*

$$\partial_{x_{1j}} W_0(t,x;\tau,\xi;y) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1j}} G_0(t,x;\theta,\lambda;y) f(\theta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda; \quad (35)$$

$$\partial_{x_{1i}} \partial_{x_{1j}} W_0(t,x;\tau,\xi;y) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1i}} \partial_{x_{1j}} G_0(t,x;\theta,\lambda;y) f(\theta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1i}} \partial_{x_{1j}} G_0(t,x;\theta,\lambda;y) \Delta_{\lambda}^{X(t,\theta)} f(\theta,\lambda;$$

$$\tau,\xi;y) d\lambda + \int\limits_{t_1}^{t} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{1i}} \partial_{x_{1j}} G_0(t,x;\theta,\lambda;y) d\lambda \Big) \times$$

$$\times f(\theta, X(t,\theta); \tau,\xi;y) \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}; \quad (36)$$

$$SW_0(t,x;\tau,\xi;y) = f(t,x;\tau,\xi;y) +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} SG_0(t,x;\theta,\lambda;y) f(\theta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} SG_0(t,x;\theta,\lambda;y) \Delta_{\lambda}^{X(t,\theta)} f(\theta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} SG_0(t,x;\theta,\lambda;y) d\lambda \times$$

$$\times f(\theta, X(t,\theta); \tau,\xi;y) \Big) \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}; \quad (37)$$

$$L_0 W_0(t,x;\tau,\xi;y) = f(t,x;\tau,\xi;y) +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} L_0 G_0(t,x;\theta,\lambda;y) f(\theta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda$$

і справджуються оцінки

$$|\partial_{x_1}^{k_1} W_0(t,x;\tau,\xi;y)| \leq$$
$$\leq C(B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|+\gamma} E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi), \quad (38)$$

$$|SW_0(t,x;\tau,\xi;y)| \leq$$
$$\leq C(B(t,\tau))^{-M-1+\gamma} E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi). \quad (39)$$

У формулах (35)–(37) *та оцінках* (38) *і* (39) $0<\tau<t\leq T$, $\{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{i,j\} \subset \{1,\ldots,n_1\}$, $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $|k_1| \leq 2$, t_1 *таке, що* $B(t,t_1) = B(t_1,\tau)$, C *і* c_0 *– деякі додатні сталі, причому* $c_0 < c$, *де* c *– стала з умов* **3** *і* **4**, $d \in \mathbb{R}$.

Доведення леми 3 здійснюється за методикою, розробленою в [10] для доведення аналогічних властивостей об’ємних потенціалів у випадку рівномірно параболічних рівнянь і вироджених рівнянь типу Колмогорова.

Лема 4. *Якщо функція f задовольняє умови* **3** *і* **5**, *то правильні формули*

$$\partial_{x_{2l}} W_0(t,x;\tau,\xi;y) =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_{2l}} G_0(t,x;\theta,\lambda;y) f(\theta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(t,x;\theta,\lambda;y) \partial_{\lambda_{2l}} f(\theta,\lambda;\tau,\xi;y) d\lambda \quad (40)$$

і справджуються оцінки

$$|\partial_{x_{2l}} W_0(t,x;\tau,\xi;y)| \leq$$
$$\leq C(B(t,\tau))^{-M-m_2+\gamma} E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi), \quad (41)$$

в яких $0<\tau<t\leq T$, $\{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n$, $l \in \{1,\ldots,n_2\}$, $c_0 \in (0,c)$, c *– стала з умов* **3**) *і* **5**), $d \in \mathbb{R}$, *число* t_1 *таке, як у лемі 3.*

□ *Доведення.* Існування відповідних невласних інтегралів доводиться аналогічно до того, як у [10] і, отже, під час доведення леми 3. Можливість перекидання похідних на другий співмножник забезпечується властивістю (30) з теореми 1 та оцінками (25) і (34). ■

Зауваження 1. Твердження лем 3 і 4 залишаються правильними, якщо функція f залежить від основної (t,x) і параметричної (τ,ξ) точок та параметра $y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ або лише від основної точки (t,x), тобто $f = f(t,x;\tau,\xi;y_2)$ або $f = f(t,x)$.

Зауваження 2. Твердження лем 3 і 4 залишаються правильними, якщо замість умов (32)–(34) припускати, що функція f неперервна і обмежена разом із похідними за x_2 та задовольняє за просторовими змінними локальну умову Гельдера з показником $\gamma \in (0,1]$.

II. Перший етап побудови ФРЗК

На першому етапі будуємо ФРЗК для рівняння

$$L_1 u(t,x) := (S - A(t,(x_1,y_2),\partial_{x_1})u(t,x) = 0,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]},\ y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \tag{42}$$

у вигляді

$$Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2) =$$

$$= Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) + W_1(t,x;\tau,\xi;y_2), \tag{43}$$

де

$$W_1(t,x;\tau,\xi;y_2) :=$$

$$:= \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{\varkappa}} Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2) Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda, \tag{44}$$

Z_0 – параметрикс, а Q_1 – невідома функція.

За параметрикс беремо функцію

$$Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) := G_0(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y_2)),$$

$$0 < \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \tag{45}$$

її властивості наводяться у поданій нижче лемі.

Лема 5. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (42) *виконуються умови* **1** *і* **2** . *Тоді правильні такі твердження:*

$$|\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le$$

$$\le C_{k0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}} E_c^d(t,\tau,x,\xi); \tag{46}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}-m_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times (E_c^d(t,\tau,x,\xi) + E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)); \tag{47}$$

$$|\Delta_{y_2}^{z_2} \partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C_{k0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}} \times$$

$$\times ((B(h,\tau))^{m_2\gamma_2} + |Y_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma_2}) E_c^d(t,\tau,x,\xi); \tag{48}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi \Big| \le$$

$$\le C_{k0}(B(t,\tau))^{-M_{k0}+m_1\gamma_1} E^d(t,\tau); \tag{49}$$

$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi \Big| \le$$

$$\le C\,|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_{k0}+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0} E^d(t,\tau); \tag{50}$$

$$|SZ_0(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M-1} E_c^d(t,\tau,x,\xi); \tag{51}$$

$$\big|\Delta_{x_s}^{z_s} SZ_0(t,x;\tau,\xi;y_2)\big| \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-1-m_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times (E_c^d(t,\tau,x,\xi) + E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)); \tag{52}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} SZ_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi \Big| \le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-1+m_1\gamma_1} E^d(t,\tau); \tag{53}$$

$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} SZ_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi \Big| \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-1+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0} E^d(t,\tau); \tag{54}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2 = 0; \tag{55}$$

$$\partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) = (-\partial_{\xi_2})^{k_2} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2), \tag{56}$$

де $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi,z^{(1)},\ z^{(2)}\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{y_2,z_2\} \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $k = (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$, *причому в* (49), (50) $k \ne 0$ *і в* (55), (56) $k_2 \ne 0$, $s \in \{1,2\}$, γ_1^0 *і* γ_2^0 *– довільні числа з* $(0,1]$, γ_1 *і* γ_2 *– числа з умов* (3) *і* (4), $h \in [\tau,T]$.

Твердження (46), (47), (49)–(56) доводять аналогічно до доведення відповідних тверджень леми 2 з [16]. Оцінки (48) є наслідком означення (45) та оцінок (26).

Зауваження 3. На підставі оцінок (14) в нерівностях (46)–(48), (51) і (52), як і в (25), (26), замість оцінювальної функції E_c^d можна брати F_c^d.

Припускаючи, що функція Q_1 з формули (44) задовольняє умови леми 3, отримуємо для цієї функції інтегральне рівняння

$$Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = K_1(t,x;\tau,\xi;y_2) +$$

$$+ \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\theta,\lambda;y_2) Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda, \tag{57}$$

в якому

$$K_1(t,x;\tau,\xi;y_2) := \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y_2)) \times$$

$$\times \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y_2)) \partial_{x_{1j}} +$$

$$+ \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y_2)) \Big) Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2). \tag{58}$$

З (58) і (56) випливають рівності

$$\partial_{x_2}^{k_2} K_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y_2)) \times$$

$$\times\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_j(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}}+$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,(x_1,y_2))\Big)\,\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2),\qquad(59)$$

$$\partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\tau,\xi;y_2)=(-\partial_{\xi_2})^{k_2}K_1(t,x;\tau,\xi;y_2),\quad(60)$$

в яких $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y_2\in\mathbb{R}^{n_2}$, $|k_2|\in\mathbb{Z}_+^{n_2}\setminus\{0\}$.

За допомогою (59) запишемо такі зображення для приростів:

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\tau,\xi;y_2)=\beta(t)\sum_{j,\,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{z_1}a_{jl}(t,(x_1,y_2))\times$$

$$\times\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j,\,l=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,(z_1,y_2))\times$$

$$\times\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{z_1}a_j(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_j(t,(z_1,y_2))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\Delta_{x_1}^{z_1}a_0(t,(x_1,y_2))\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_0(t,(z_1,y_2))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2),\qquad(61)$$

$$\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\tau,\xi;y_2)=\beta(t)\sum_{j,\,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,(x_1,y_2))\times$$

$$\times\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_j(t,(x_1,y_2))\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,(x_1,y_2))\Delta_{z_2}^{x_2}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2).\qquad(62)$$

Оцінюючи доданки з виразів (59), (61) і (62) за допомогою умов **1** і **2**, оцінок (46) і (47) та нерівності (21) і того, що

$$(B(t,\tau))^pE^d(t,\tau)\le(\beta(t))^p(A(t,\tau))^pE^d(t,\tau)\le$$

$$\le(\beta(T))^pE^{d_1}(t,\tau),\ 0<\tau<t\le T,\ p>0,\ d_1>d,$$

одержуємо оцінки

$$|\partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\tau,\xi;y_2)|\le$$

$$\le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|}E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x,\xi);\quad(63)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\tau,\xi;y_2)|\le C\beta(t)|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0-m_2|k_2|}\times$$

$$\times(E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x,\xi)+E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\qquad(64)$$

де $0<\tau<t\le T$, $\{x,z^{(s)},\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}$, $y_2\in\mathbb{R}^{n_2}$, $k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}$, $d_1>d$, $c_1\in(0,c)$, c і d – сталі з оцінок (46), $\gamma_1^0=\gamma_1$, γ_1 – число з умови (3), γ_2^0 – довільне число з проміжку (0,1].

З оцінки (63) для K_1 та оцінок (14) випливає, що для ядра K_1 виконуються умови леми 1.10 з [10, с. 44], на підставі якої для функції Q_1 справджується оцінка (32) з $\gamma=m_1\gamma_1$, тобто виконується для неї умова **3**.

Перейдемо до оцінок похідних від функції Q_1 за змінною x_2. Для цього потрібно дослідити властивості регулярності повторних ядер $\partial_{x_2}^{k_2}K_{1l}$, $l>1$, $k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}$. Як і в (40), маємо

$$\partial_{x_2}^{k_2}K_{1l}(t,x;\tau,\xi;y_2)=\int_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times K_{1(l-1)}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}K_1(t,x;\theta,\lambda;y_2)\partial_{\lambda_2}^{k_2}K_{1(l-1)}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda,\quad(65)$$

де

$$K_{11}(t,x;\tau,\xi;y_2):=K_1(t,x;\tau,\xi;y_2),$$

$$K_{1l}(t,x;\tau,\xi;y_2)=\int_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}K_1(t,x;\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times K_{1(l-1)}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda,\ l>1.$$

Зауважимо, що для встановлення формул (65) істотно використовуються рівності (60). Інтеграли в правій частині (65) оцінюємо послідовно за допомогою оцінки (63) та нерівності (19). Повторюючи міркування, які наведено в [16], одержуємо

$$|\partial_{x_2}^{k_2}K_{1l}(t,x;\tau,\xi;y_2)|\le C^l\left(\frac{\pi}{c}\right)^{l-1}\frac{\Gamma^l(m_1\gamma_1)}{\Gamma(lm_1\gamma_1)}\times$$

$$\times\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+lm_1\gamma_1-m_2|k_2|}E_{c_2}^{d_2}(t,\tau,x,\xi),$$

$$k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2},\ l\ge1,\qquad(66)$$

де $c_2<c_1$, $d_2>d_1>d$, c і d – сталі з оцінок (46), Γ – гамма-функція Ейлера.

Оцінки (66) гарантують абсолютну та рівномірну збіжність ряду

$$\sum_{l=1}^\infty\partial_{x_2}^{k_2}K_{1l}(t,x;\tau,\xi;y_2)=\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)$$

та оцінку

$$|\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)|\le$$

$$\le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|}E_{c_2}^{d_2}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_2\in\mathbb{R}^{n_2},\ k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}.\ (67)$$

де сталі c_2 і d_2 такі самі, як у (66). Отже, функція Q_1 задовольняє умову **5**) з $\gamma=m_1\gamma_1$ і $|k_2|=1$.

Далі доведемо, що функція Q_1 задовольняє умову **4**, тобто одержимо потрібні оцінки приростів цієї функції. Для цього оцінимо прирости $\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_2}^{k_2}Q_1$, $s \in \{1,2\}$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$.

Зауваження 4. Оцінки цих приростів досить виконати у випадку, коли $|x_s - z_s|^{1/m_s} \le \frac{1}{4}B(t,\tau)$, $s \in \{1,2\}$. Якщо $|x_s - z_s|^{1/m_s} > \frac{1}{4}B(t,\tau)$, то потрібні оцінки приростів безпосередньо випливають з оцінок (67). За умови $|x_s - z_s|^{1/m_s} \le \frac{1}{4}B(t,\tau)$ справджується нерівність

$$E_{c_1}(t,\tau,y^{(s)},\xi) \le C_1 E_{c_0}(t,\tau,x,\xi), \qquad (68)$$

де $c_0 \in (0,c_1)$, $y^{(s)}$ – точка на відрізку прямої, що сполучає точки x і $z^{(s)}$.

За допомогою рівностей (57) і (60), оцінок (63) і (67) та нерівності (19) отримуємо таке зображення:

$$\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = \partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\int_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\theta,\lambda;y_2)Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}K_1(t,x;\theta,\lambda;y_2)\partial_{\lambda_2}^{k_2}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda,$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_2\in\mathbb{R}^{n_2},\ k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}. \quad (69)$$

Розглянемо спершу прирости $\partial_{x_2}^{k_2}Q_1$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$, за змінною x_2. За допомогою (69) записуємо зображення

$$\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = \Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\int_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\theta,\lambda;y_2)Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{z_{2j}}^{x_{2j}}\Big(\partial_{\zeta_{2j}}\int_{\mathbb{R}^n}K_1(t,\zeta_2^{(j)};\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times\partial_{\lambda_2}^{k_2}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda\Big)\,d\zeta_{2j} =: \sum_{k=1}^{3}Q_{1k}^2, \qquad (70)$$

в якому t_1 таке, як вище, а

$$\zeta_2^{(j)} := \big(x_1,(z_{21},\dots,z_{2(j-1)},\zeta_{2j},x_{2(j+1)},\dots,x_{2n_2})\big),$$

$$j\in\{1,\dots,n_2\}.$$

Оцінимо доданки з (70): в Q_{13}^2 попередньо перенесемо диференціювання $\partial_{\zeta_{2j}}$ на другий співмножник і користуватимемося нерівностями (19), (63), (64), (67) і (68). Маємо

$$|Q_{11}^2| \le C\beta(t)|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2(|k_2|+\gamma_2^0)}E_{c_0}^{d_1}(t,\tau,x,\xi), \quad (71)$$

$$|Q_{12}^2| \le C\beta(t)|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}\int_\tau^{t_1}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2(|k_2|+\gamma_2^0)}\times$$

$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1}E_{c_0}^{d_1}(t,\theta,x,\lambda)E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda \le$$

$$\le C\beta(t)|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(B(t,t_1))^{-m_2(|k_2|+\gamma_2^0)}\times$$

$$\times\int_\tau^{t_1}(B(t,\theta))^{-1+m_1\gamma_1}(B(\theta,\tau))^{-1+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times\Big((B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M}\int_{\mathbb{R}^n}E_{c_0}^{d_1}(t,\theta,x,\lambda)\times$$

$$\times E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\Big)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta \le C\beta(t)|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2(|k_2|+\gamma_2^0)}E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi), \quad (72)$$

$$|Q_{13}^2| \le \left|\sum_{j=1}^{n_2}\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{z_{2j}}^{x_{2j}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\left|K_1(t,\zeta_2^{(j)};\theta,\lambda;y_2)\right|\times\right.$$

$$\left.\times\left|\partial_{\lambda_2}^{k_2}\partial_{\lambda_{2j}}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)\right|d\lambda\Big)\,d\zeta_{2j}\right| \le$$

$$\le C\beta(t)\sum_{j=1}^{n_2}\int_{t_1}^{t}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{z_{2j}}^{x_{2j}}\Big((B(t,\theta))^{-M-1+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2(|k_2|+1)}\times$$

$$\times E_{c_1}^{d_1}(t,\theta,\zeta_2^{(j)},\lambda)E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\Big)\,d\zeta_{2j} \le$$

$$\le C\beta(t)\sum_{j=1}^{n_2}|z_{2j}-x_{2j}|(B(t_1,\tau))^{-m_2(|k_2|+1)}\times$$

$$\times\int_{t_1}^{t}(B(t,\theta))^{-1+m_1\gamma_1}(B(\theta,\tau))^{-1+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times\Big((B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M}\int_{\mathbb{R}^n}E_{c_1}^{d_1}(t,\theta,x,\lambda)\times$$

$$\times E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\Big)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta \le C\beta(t)|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2(|k_2|+\gamma_2^0)}E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi). \quad (73)$$

З рівності (70), нерівностей (71)–(73) і (67) випливає оцінка

$$|\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C\beta(t)|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2(|k_2|+\gamma_2^0)}\times$$

$$\times(E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi)+E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,z^{(2)},\xi)),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

$$\{x_2,y_2,z_2\}\subset\mathbb{R}^{n_2},\ k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}. \qquad (74)$$

Щоб оцінити прирости $\partial_{x_2}^{k_2}Q_1$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$, за змінною x_1, на підставі (69) записуємо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = \Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_2}^{k_2}K_1(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\int_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_2}^{k_2} K_1(t, x; \theta, \lambda; y_2) Q_1(\theta, \lambda; \tau, \xi; y_2) d\lambda +$$

$$+\int_{t_1}^{\eta_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_1}^{z_1} K_1(t, x; \theta, \lambda; y_2) \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\theta, \lambda; \tau, \xi; y_2) d\lambda +$$

$$+\int_{\eta_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x; \theta, \lambda; y_2) \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\theta, \lambda; \tau, \xi; y_2) d\lambda -$$

$$-\int_{\eta_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t, z^{(1)}; \theta, \lambda; y_2) \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\theta, \lambda; \tau, \xi; y_2) d\lambda =:$$

$$=: \sum_{k=1}^{5} Q_{1k}^1, \ B(t, \eta_1) = |x_1 - z_1|^{1/m_1}. \qquad (75)$$

Доданки з (75) оцінюємо аналогічно до оцінок доданків з (70), припускаючи, що $|x_1 - z_1|^{1/m_1} \leq B(t, \tau)/4$. Маємо

$$|Q_{11}^1| \leq C\beta(t)|x_1 - z_1|^{\gamma_1} \times$$
$$\times (B(t, \tau))^{-M-1-m_2|k_2|} E_{c_0}^{d_1}(t, \tau, x, \xi),$$

$$|Q_{12}^1| \leq C\beta(t)|x_1 - z_1|^{\gamma_1} \int_{\tau}^{t_1} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} (B(t, \theta))^{-M-1-m_2|k_2|} E_{c_0}^{d_1}(t, \theta, x, \lambda) \times$$
$$\times (B(\theta, \tau))^{-M-1+m_1\gamma_1} E_{c_2}^{d_2}(\theta, \tau, \lambda, \xi) d\lambda \leq C\beta(t) \times$$
$$\times |x_1 - z_1|^{\gamma_1} (B(t, t_1))^{-1-m_2|k_2|} \int_{\tau}^{t_1} (B(\theta, \tau))^{-1+m_1\gamma_1} \times$$
$$\times \Big((B(t, \theta) B(\theta, \tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}^{d_1}(t, \theta, x, \lambda) \times$$
$$\times E_{c_2}^{d_2}(\theta, \tau, \lambda, \xi) d\lambda \Big) \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \leq C\beta(t)|x_1 - z_1|^{\gamma_1} \times$$
$$\times (B(t, \tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|} E_{c_3}^{d_2}(t, \tau, x, \xi),$$

$$|Q_{13}^1| \leq C\beta(t)|x_1 - z_1|^{\gamma_1'} \int_{t_1}^{\eta_1} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} (B(t, \theta))^{-M-1+m_1(\gamma_1 - \gamma_1')} E_{c_1}^{d_1}(t, \theta, x, \lambda) \times$$
$$\times (B(\theta, \tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|} E_{c_2}^{d_2}(\theta, \tau, \lambda, \xi) d\lambda \leq$$
$$\leq C\beta(t)|x_1 - z_1|^{\gamma_1'} (B(t_1, \tau))^{-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|} \times$$
$$\times \int_{t_1}^{\eta_1} (B(t, \theta))^{-1+m_1(\gamma_1-\gamma_1')} \Big((B(t, \theta) B(\theta, \tau))^{-M} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}^{d_1}(t, \theta, x, \lambda) E_{c_2}^{d_2}(\theta, \tau, \lambda, \xi) d\lambda \Big) \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \leq$$
$$\leq C\beta(t)|x_1 - z_1|^{\gamma_1'} (B(t, \eta_1))^{m_1(\gamma_1 - \gamma_1')} \times$$
$$\times (B(t, \tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|} E_{c_3}^{d_2}(t, \tau, x, \xi) \leq$$
$$\leq C\beta(t)|x_1 - z_1|^{\gamma_1'} (B(t, \tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|} \times$$
$$\times |x_1 - z_1|^{\gamma_1 - \gamma_1'} E_{c_3}^{d_2}(t, \tau, x, \xi) = C\beta(t)|x_1 - z_1|^{\gamma_1} \times$$
$$\times (B(t, \tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|} E_{c_3}^{d_2}(t, \tau, x, \xi), \ \gamma_1' < \gamma_1.$$

Доданки Q_{14}^1 і Q_{15}^1 оцінюються однаково. Оцінимо перший з них. Маємо

$$|Q_{14}^1| \leq C\beta(t) \int_{\eta_1}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} (B(t, \theta))^{-M-1+m_1\gamma_1} \times$$
$$\times E_{c_1}^{d_1}(t, \theta, x, \lambda) (B(\theta, \tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|} \times$$
$$\times E_{c_2}^{d_2}(\theta, \tau, \lambda, \xi) d\lambda \leq C\beta(t) (B(\eta_1, \tau))^{-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|} \times$$
$$\times \int_{\eta_1}^{t} (B(t, \theta))^{-1+m_1\gamma_1} \Big((B(t, \theta) B(\theta, \tau))^{-M} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_1}^{d_1}(t, \theta, x, \lambda) E_{c_2}^{d_2}(\theta, \tau, \lambda, \xi) d\lambda \Big) \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} \leq C\beta(t) \times$$
$$\times |x_1 - z_1|^{\gamma_1} (B(t, \tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|} E_{c_3}^{d_2}(t, \tau, x, \xi),$$

оскільки $B(\eta_1, \tau) = B(t, \tau) - |x_1 - z_1|^{1/m_1} \geq \frac{3}{4} B(t, \tau)$.

Із формули (75), одержаних вище оцінок Q_{1k}^1 та оцінки (74) випливають оцінки

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_{x_2}^{k_2} Q_1(t, x; \tau, \xi; y_2)| \leq C\beta(t)|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} \times$$
$$\times (B(t, \tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|-m_s\gamma_s^0} \times$$
$$\times (E_{c_3}^{d_2}(t, \tau, x, \xi) + E_{c_3}^{d_2}(t, \tau, z^{(s)}, \xi)),$$
$$0 < \tau < t \leq T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$
$$\{y_2, z_2\} \subset \mathbb{R}^{n_2}, \ k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}, \ s \in \{1, 2\}. \qquad (76)$$

В оцінках (76) γ_1 – число з умови **3**), $\gamma_1^0 = \gamma_1$, γ_2^0 – довільне число з проміжку $(0, 1]$. З цих оцінок випливає, що функція Q_1 задовольняє й умову **4** з $\gamma = m_1\gamma_1$, $\gamma_1 = \gamma_1^0$, $\gamma_2 = \gamma_2^0$. Отже, апріорні припущення щодо Q_1 правильні.

З наведеного вище випливає, що для інтегрального рівняння (57) існує розв'язок Q_1, який задовольняє умови **3** і **4**. Це дає змогу встановити факт існування всіх похідних від об'ємного потенціалу W_1 з (44), що входять у рівняння (42), та, отже, довести існування ФРЗК Z_1 для цього рівняння. Похідні від функції W_1 визначаються формулами (35) – (37), в яких замість W_0, G_0 і f треба взяти відповідно W_1, Z_0 і Q_1. На підставі лем 3 і 4 для похідних від W_1 справджуються оцінки (38), (39) і (41) з відповідними числами γ. Звідси та з леми 5 випливають відповідні оцінки ФРЗК Z_1. Але для подальшого потрібні оцінки приростів похідних від функції Z_1 і її властивості як функції параметра y_2. Для цього досить установити відповідні властивості функції W_1. Ці властивості наведемо у пункті 4.

III. Властивості об'ємного потенціалу W_1

Оцінимо прирости похідних від W_1. На підставі зауваження 4 досить розглянути випадок $|x_s - z_s|^{1/m_s} \le \frac{1}{4}B(t,\tau)$, $s \in \{1,2\}$. Спочатку оцінимо $\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_1$, $|k_1| \le 2$. Користуючись відповідно зміненими формулами (35) і (36), запишемо зображення

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2) =$$

$$=\int_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{\eta_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times\Delta_\lambda^{X(t,\theta)}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+\int_{\eta_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)\Delta_\lambda^{X(t,\theta)}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda-$$

$$-\int_{\eta_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{z_1}^{k_1}Z_0(t,z^{(1)};\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times\Delta_\lambda^{Z^{(1)}(t,\theta)}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{\eta_1}\Delta_{x_1}^{z_1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)d\lambda\right)\times$$

$$\times Q_1(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi;y_2)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}+$$

$$+\int_{\eta_1}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)d\lambda\right)\times$$

$$\times Q_1(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi;y_2)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}-$$

$$-\int_{\eta_1}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{z_1}^{k_1}Z_0(t,z^{(1)};\theta,\lambda;y_2)d\lambda\right)\times$$

$$\times Q_1(\theta,Z^{(1)}(t,\theta);\tau,\xi;y_2)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)} =: \sum_{j=1}^{7}W_{1j}^1, \qquad (77)$$

де числа t_1 і η_1 такі, як вище.

Доданок W_{11}^1 оцінюємо за допомогою нерівностей (47), (67) і (19):

$$|W_{11}^1| \le C\int_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)|\times$$

$$\times|Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)|d\lambda \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\times$$

$$\times\int_\tau^{t_1}(B(t,\theta))^{-m_1(|k_1|+\gamma_1^0)}(B(\theta,\tau))^{-1+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times\left((B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M}\int_{\mathbb{R}^n}E_c^d(t,\theta,x,\lambda)\times\right.$$

$$\left.\times E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\right)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-m_1(|k_1|-\gamma_1+\gamma_1^0)}E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi). \qquad (78)$$

Щоб оцінити W_{12}^1, використаємо оцінки (47) з $\gamma_1^0 \ge \gamma_1$ і (76). Тоді отримаємо

$$|W_{12}^1| \le C\int_{t_1}^{\eta_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)|\times$$

$$\times|\Delta_\lambda^{X(t,\theta)}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)|d\lambda \le C\int_{t_1}^{\eta_1}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\theta))^{-M-m_1(|k_1|+\gamma_1^0)}\times$$

$$\times E_c^d(t,\theta,x,\lambda)\Big[\,|x_1-\lambda_1|^{\gamma_1}(B(\theta,\tau))^{-M-1}\times$$

$$\times\left(E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)+E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)\right)+$$

$$+|X_2(t,\theta)-\lambda_2|^{\gamma_2^0}(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2\gamma_2^0}\times$$

$$\times\left(E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi)+E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)\right)\Big]d\lambda =$$

$$= C\Big[\int_{t_1}^{\eta_1}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\theta))^{-M-m_1(|k_1|+\gamma_1^0)}\times$$

$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1}|x_1-\lambda_1|^{\gamma_1}E_c^d(t,\theta,x,\lambda)\times$$

$$\times E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)d\lambda+\int_{t_1}^{\eta_1}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\times$$

$$\times(B(t,\theta))^{-M-m_1(|k_1|+\gamma_1^0)}(B(\theta,\tau))^{-M-1}|x_1-\lambda_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\times E_c^d(t,\theta,x,\lambda)E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{\eta_1}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\theta))^{-M-m_1(|k_1|+\gamma_1^0)}\times$$

$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2\gamma_2^0}|X_2(t,\theta)-\lambda_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times E_c^d(t,\theta,x,\lambda)E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda+\int_{t_1}^{\eta_1}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\theta))^{-M-m_1(|k_1|+\gamma_1^0)}\times$$

$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2\gamma_2^0}|X_2(t,\theta)-\lambda_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times E_c^d(t,\theta,x,\lambda)E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi)d\lambda\Big]=:$$

$$=: C\sum_{j=1}^{4}W_{12}^{1j}. \qquad (79)$$

Доданки суми (79) оцінюються за допомогою нерівностей (19) – (23), рівності (17) і того, що

$$\int_{t_1}^{\eta_1} (B(t,\theta))^{-m_1(|k_1|-\gamma_1+\gamma_1^0)} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \leq$$

$$\leq C \begin{cases} (B(t,\tau))^{1-m_1|k_1|}, \\ \text{якщо } |k_1| < 2, \gamma_1^0 = \gamma_1, \\ (B(t,\eta_1))^{m_1(\gamma_1-\gamma_1^0)} = |x_1 - z_1|^{\gamma_1-\gamma_1^0}, \\ \text{якщо } |k_1| = 2, \gamma_1^0 > \gamma_1. \end{cases}$$

Для прикладу оцінимо доданок W_{12}^{11}. Маємо

$$W_{12}^{11} \leq |x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} (B(t_1,\tau))^{-M-1} \times$$

$$\times \int_{t_1}^{\eta_1} (B(t,\theta))^{-M-m_1(|k_1|+\gamma_1^0)} E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi) \times$$

$$\times \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} |x_1 - \lambda_1|^{\gamma_1} E_c^d(t,\theta,x,\lambda) d\lambda \leq$$

$$\leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} (B(t,\tau))^{-M-1} E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi) \times$$

$$\times \int_{t_1}^{\eta_1} (B(t,\theta))^{-M-m_1(|k_1|+\gamma_1^0-\gamma_1)} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}(t,\theta,x,\lambda) d\lambda \leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} (B(t,\tau))^{-M-1} \times$$

$$\times E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi) \int_{t_1}^{\eta_1} (B(t,\theta))^{-m_1(|k_1|-\gamma_1+\gamma_1^0)} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \leq$$

$$\leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|} E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi).$$

Аналогічно оцінюючи інші доданки суми (79), прийдемо до оцінки

$$|W_{12}^1| \leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|} E_{c_4}^{d_2}(t,\tau,x,\xi). \qquad (80)$$

Вирази W_{13}^1 і W_{14}^1 оцінюються однаково, оцінимо перший з них. За допомогою (46) і (76) отримуємо

$$|W_{13}^1| \leq C \Big[\int_{\eta_1}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|} \times$$

$$\times E_c^d(t,\theta,x,\lambda) |x_1 - \lambda_1|^{\gamma_1} (B(\theta,\tau))^{-M-1} \times$$

$$\times E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi) d\lambda + \int_{\eta_1}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|} E_c^d(t,\theta,x,\lambda) |x_1 - \lambda_1|^{\gamma_1} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1} E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi) d\lambda +$$

$$+ \int_{\eta_1}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|} E_c^d(t,\theta,x,\lambda) \times$$

$$\times |X_2(t,\theta) - \lambda_2|^{\gamma_2^0} (B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2\gamma_2^0} \times$$

$$\times E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi) d\lambda + \int_{\eta_1}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-m_1|k_1|} E_c^d(t,\theta,x,\lambda) \times$$

$$\times |X_2(t,\theta) - \lambda_2|^{\gamma_2^0} (B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2\gamma_2^0} \times$$

$$\times E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta)),\xi) d\lambda \Big] =: C \sum_{k=1}^{4} W_{13}^{1k}. \qquad (81)$$

На основі (17), (21) і (22) маємо

$$W_{13}^{11} \leq C(B(t_1,\tau))^{-M-1} E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi) \times$$

$$\times \int_{\eta_1}^{t} (B(t,\theta))^{-M-m_1(|k_1|-\gamma_1)} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}(t,\theta,x,\lambda) d\lambda \leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|} E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi).$$

Використовуючи (12), (16), (18) і (21), а також нерівність (23) з $c = c_3 < c_0/2$, де c_0 – стала з оцінки (21), одержимо

$$W_{13}^{12} \leq C(B(t_1,\tau))^{-M-1} E_{c_3/2}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau) - \xi_2) \times$$

$$\times \int_{\eta_1}^{t} (B(t,\theta))^{-M-m_1(|k_1|-\gamma_1)} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}^{(1)}(t,\theta,x_1 - \lambda_1) E_{c_0}^{(2)}(t,\theta,X_2(t,\theta) - \lambda_2) E^d(t,\theta) \times$$

$$\times E_{-c_3}^{(1)}(t,\theta,x_1 - \lambda_1) E_{c_3}^{(1)}(\theta,\tau,\lambda_1 - \xi_1) E^{d_2}(\theta,\tau) d\lambda \leq$$

$$\leq C(B(t,\tau))^{-M-1} E_{c_3/2}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau) - \xi_2) E^{d_2}(t,\tau) \times$$

$$\times \int_{\eta_1}^{t} (B(t,\theta))^{-m_1(|k_1|-\gamma_1)} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} (B(t,\theta))^{-m_1 n_1} \times$$

$$\times E_{c_0-c_3}^{(1)}(t,\theta,x_1 - \lambda_1) E_{c_3}^{(1)}(\theta,\tau,\lambda_1 - \xi_1) d\lambda_1 \Big) \times$$

$$\times \Big(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} (B(t,\theta))^{-m_2 n_2} E_{c_0}^{(2)}(t,\theta,X_2(t,\theta) - \lambda_2) d\lambda_2 \Big) \times$$

$$\times \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \leq C(B(t,\tau))^{-M-1} E_{c_3/2}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau) - \xi_2) \times$$

$$\times E_{c_3}^{(1)}(t,\tau,x_1 - \xi_1) E^{d_2}(t,\tau) |x_1 - z_1|^{1/m_1 - |k_1| + \gamma_1} \leq$$

$$\leq C|x_1 - z_1|^{\gamma_1} (B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|} E_{c_3/2}^{d_2}(t,\tau,x,\xi).$$

За допомогою (21) і (19), узявши $\gamma_2^0 = \gamma_1/3$, отримуємо

$$W_{13}^{13} \leq C(B(t_1,\tau))^{-1+m_1\gamma_1-m_2\gamma_2^0} \times$$

$$\times \int_{\eta_1}^{t} (B(t,\theta)^{-m_1|k_1|+m_2\gamma_2^0} \Big((B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}^{d}(t,\theta,x,\lambda)E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda \Big) \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta \le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}(B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|}E_{c_4}^{d_2}(t,\tau,x,\xi).$$

Інтеграл W_{13}^{14} оцінюється аналогічно до W_{13}^{12}.

Із (79) та оцінок W_{13}^{1k}, $k\in\{1,2,3,4\}$, випливає оцінка

$$|W_{13}^1| \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|}E_{c_4}^{d_2}(t,\tau,x,\xi). \quad (82)$$

Вираз W_{15}^1 оцінюємо за допомогою оцінок (50), (67) і (22). Маємо

$$|W_{15}^1| \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\int_{t_1}^{\eta_1}(B(t,\theta))^{-m_1(|k_1|-\gamma_1+\gamma_1^0)}E^d(t,\theta)\times$$

$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1}E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta \le$$

$$\le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t_1,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1}E_{c_2}^{d_2}(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\int_{t_1}^{\eta_1}(B(t,\theta))^{-m_1(|k_1|-\gamma_1+\gamma_1^0)}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-m_1|k_1|+m_1\gamma_1}E_{c_2}^{d_2}(t,\tau,x,\xi), \quad (83)$$

де $\gamma_1^0=\gamma_1$, якщо $|k_1|<2$, і $\gamma_1^0>\gamma_1$ для $|k_1|=2$.

Вирази W_{16}^1, W_{17}^1 оцінюємо аналогічно. Для першого з них за допомогою оцінок (49), (67) і (22) отримаємо

$$|W_{16}^1| \le C\int_{\eta_1}^{t}(B(t,\theta))^{-m_1(|k_1|-\gamma_1)}E^d(t,\theta)\times$$

$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1}E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta \le$$

$$\le C(B(t_1,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1}E_{c_2}^{d_2}(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\int_{\eta_1}^{t}(B(t,\theta))^{-m_1(|k_1|-\gamma_1)}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-m_1(|k_1|-\gamma_1)}E_{c_2}^{d_2}(t,\tau,x,\xi). \quad (84)$$

Із зображення (77) і нерівностей (78), (80), (82)–(84) випливає оцінка

$$|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-m_1(|k_1|-\gamma_1+\gamma_1^0)}\times$$

$$\times(E_{c_4}^{d_2}(t,\tau,x,\xi)+E_{c_4}^{d_2}(t,\tau,z^{(1)},\xi)),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

$$z_1\in\mathbb{R}^{n_1},\ y_2\in\mathbb{R}^{n_2},\ |k_1|\le 2,\ \gamma_1^0\in(0,\gamma_1]. \quad (85)$$

Перейдемо до оцінок приростів $\partial_{x_1}^{k_1}W_1, |k_1|\le 2$, за змінною x_2. Для цього використаємо таке зображення:

$$\Delta_{x_2}^{z_2}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda =$$

$$=\sum_{j=1}^{n_2}\int_{z_{2j}}^{x_{2j}}\Big(\partial_{\zeta_{2j}}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda\Big)d\zeta_{2j} =$$

$$=\sum_{j=1}^{n_2}\int_{z_{2j}}^{x_{2j}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times\partial_{\lambda_{2j}}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda\Big)d\zeta_{2j} =$$

$$=\sum_{j=1}^{n_2}\int_{z_{2j}}^{x_{2j}}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times\Delta_{\lambda}^{X^{(j)}(t,\theta)}\partial_{\lambda_{2j}}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)\,d\lambda d\zeta_{2j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\int_{z_{2j}}^{x_{2j}}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\theta,\lambda;y_2)d\lambda\ \times$$

$$\times\Big(\partial_{\lambda_{2j}}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)\Big)\Big|_{\lambda=X^{(j)}(t,\theta)}\,d\zeta_{2j},$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

$$\{z_2,y_2\}\subset\mathbb{R}^{n_2},\ k_1\in\mathbb{Z}_+^{n_1},\ |k_1|\le 2, \quad (86)$$

де $\zeta_2^{(j)}$ таке, як вище, $X^{(j)}(t,\theta) := X(t,\theta)\Big|_{x=\zeta_2^{(j)}}$, $j\in\{1,\dots,n_2\}$. Обгрунтування (86) здійснюється за допомогою оцінок (46), (67) і (74) та рівності (56).

На підставі рівностей (86) запишемо зображення

$$\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2) := \sum_{j=1}^{3}W_{1j}^2, |k_1|\le 2, \quad (87)$$

де

$$W_{11}^2 := \int_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda,$$

$$W_{1l}^2 := \sum_{j=1}^{n_2}\int_{z_{2j}}^{x_{2j}}W_{1l}^{2j}(t,\zeta_2^{(j)};\tau,\xi;y_2)d\zeta_{2j},\ \ l\in\{2,3\},$$

$$W_{12}^{2j}(t,\zeta_2^{(j)}x;\tau,\xi;y_2) :=$$

$$:= \int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,\zeta_2^{(j)};\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times\Delta_{\lambda}^{X^{(j)}(t,\theta)}\partial_{\lambda_{2j}}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda,$$

$$W_{13}^{2j}(t,\zeta_2^{(j)}x;\tau,\xi;y_2) :=$$

$$:= \int_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t, \zeta_2^{(j)}; \theta, \lambda; y_2) d\lambda \times$$

$$\times \left(\partial_{\lambda_{2j}} Q_1(\theta, \lambda; \tau, \xi; y_2) \right)\Big|_{\lambda = X^{(j)}(t,\theta)}.$$

Оцінимо W_{11}^2 за допомогою (47), (67) і (19) за умови $|x_2 - z_2|^{1/m_2} \le \frac{1}{4} B(t,\tau)$. Маємо

$$|W_{11}^2| \le C \int_{\tau}^{t_1} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |x_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \times$$

$$\times (B(t,\theta))^{-M - m_1|k_1| - m_2\gamma_2^0} E_c^d(t,\theta,x,\lambda) \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1} E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi) d\lambda \Big) \times$$

$$\times \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M - m_1(|k_1| - \gamma_1) - m_2\gamma_2^0} E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi). \quad (88)$$

Для оцінки W_{12}^2 використовуємо нерівності (46), (76) і (19)–(23). Спочатку отримуємо

$$|W_{12}^{2j}(t, \zeta_2^{(j)}; \tau, \xi; y_2)| \le$$

$$\le C \int_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t, \zeta_2^{(j)}; \theta, \lambda; y_2)| \times$$

$$\times \Big(\Big| \Delta_{\lambda}^{(\lambda_1, X_2^{(j)}(t,\theta))} \partial_{\lambda_{2j}} Q_1(\theta, \lambda; \tau, \xi; y_2) \Big| +$$

$$+ \Big| \Delta_{(\lambda_1, X_2^{(j)}(t,\theta))}^{X^{(j)}(t,\theta)} \partial_{\lambda_{2j}} Q_1(\theta, \lambda; \tau, \xi; y_2) \Big|_{\lambda = X^{(j)}(t,\theta)} \Big| \Big) \times$$

$$\times d\lambda \le C \int_{t_1}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M - m_1|k_1|} \times$$

$$\times E_c^d(t,\theta,\zeta_2^{(j)},\lambda) \Big(|X_2^{(j)}(t,\theta) - \lambda_2|^{\gamma_2^0} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1 - m_2(1+\gamma_2^0)} \times$$

$$\times \Big(E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi) + E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,(\lambda_1, X_2^{(j)}(t,\theta)),\xi) \Big) +$$

$$+ |x_1 - \lambda_1|^{\gamma_1^0} (B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1(\gamma_1 - \gamma_1^0) - m_2} \times$$

$$\times \Big(E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,(\lambda_1, X_2^{(j)}(t,\theta)),\xi) +$$

$$+ E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,X^{(j)}(t,\theta),\xi) \Big) \Big) d\lambda \le$$

$$\le C(B(t_1,\tau))^{-1+m_1\gamma_1 - m_2(1+\gamma_2^0)} \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t} (B(t,\theta))^{-m_1|k_1| + m_2\gamma_2^0} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta (B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M} \times$$

$$\times \Big(\int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}^d(t,\theta,\zeta_2^{(j)},\lambda) E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi) d\lambda +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}^d(t,\theta,\zeta_2^{(j)},\lambda) E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,(\lambda_1, X_2^{(j)}(t,\tau)),\xi) d\lambda \Big) +$$

$$+ C(B(t_1,\tau))^{-1+m_1(\gamma_1 - \gamma_1^0) - m_2} \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t} (B(t,\theta))^{-m_1(|k_1| - \gamma_1^0)} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta (B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M} \times$$

$$\times \Big(\int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}^d(t,\theta,\zeta_2^{(j)},\lambda) E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,(\lambda_1, X_2^{(j)}(t,\theta)),\xi) d\lambda +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}^d(t,\theta,\zeta_2^{(j)},\lambda) E_{c_3}^{d_2}(\theta,\tau,X^{(j)}(t,\theta),\xi) d\lambda \Big) \le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M - m_1(|k_1| - \gamma_1) - m_2} E_{c_4}^{d_2}(t,\tau,\zeta_2^{(j)},\xi),$$

тому за допомогою (68) при $|x_2 - z_2|^{1/m_2} \le \frac{1}{4} B(t,\tau)$ маємо

$$|W_{12}^2| \le \sum_{j=1}^{n_2} \Big| \int_{z_{2j}}^{x_{2j}} |W_{12}^{2j}(t, \zeta_2^{(j)}; \tau, \xi; y_2)| d\zeta_{2j} \Big| \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0} (B(t,\tau))^{-M - m_1(|k_1| - \gamma_1) - m_2\gamma_2^0} \times$$

$$\times E_{c_4}^{d_2}(t,\tau,x,\xi), \quad (89)$$

де γ_2^0 – довільне число з проміжку $(0,1]$.

За допомогою нерівностей (49), (67) і (22) подібно отримуємо

$$|W_{13}^{2j}(t, \zeta_2^{(j)}; \theta, \lambda; y_2)| \le C \int_{t_1}^{t} (B(t,\theta))^{-m_1(|k_1| - \gamma_1)} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1 - m_2} E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,X^{(j)}(t,\theta),\xi) \times$$

$$\times E^d(t,\theta) \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \le C(B(t_1,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1 - m_2} \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t} (B(t,\theta))^{-m_1(|k_1| - \gamma_1)} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta E_{c_2}^{d_2}(t,\tau,\zeta_2^{(j)},\xi) \le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M - m_1(|k_1| - \gamma_1) - m_2} E_{c_2}^{d_2}(t,\theta,\zeta_2^{(j)},\lambda),$$

$$|W_{13}^2| \le \sum_{j=1}^{n_2} \Big| \int_{z_{2j}}^{x_{2j}} |W_{13}^{2j}(t, \zeta_2^{(j)}; \tau, \xi; y_2)| d\zeta_{2j} \Big| \le$$

$$\le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0} (B(t,\tau))^{-M - m_1(|k_1| - \gamma_1) - m_2\gamma_2^0} \times$$

$$\times E_{c_2}^{d_2}(t,\tau,x,\xi). \quad (90)$$

З рівностей (87) та оцінок (88)–(90) випливає оцінка

$$|\Delta_{x_2}^{z_2} \partial_{x_1}^{k_1} W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C|x_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M - m_1(|k_1| - \gamma_1) - m_2\gamma_2^0} \times$$

$$\times (E_{c_4}^{d_2}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_4}^{d_2}(t,\tau,z^{(2)},\xi)), \quad (91)$$

де $0 < \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{z_2, y_2\} \subset \mathbb{R}^{n_2}$, $|k_1| \le 2$, γ_1 – число з умови **2**), а γ_2^0 – довільне число з проміжку $(0,1]$.

Перейдемо до оцінок приростів похідних від W_1 за параметром $y_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Оскільки для приростів похідних від Z_0 справджуються оцінки (48), то треба ще мати оцінки приростів від Q_1. Щоб ці оцінки отримати, досить установити відповідні оцінки для повторних ядер K_{1l}, $l \geq 1$, де $K_{11} := K_1$.

За допомогою рівності (59) для $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$ запишемо зображення

$$\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y_2) = \beta(t)\sum_{j,\,l=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,(x_1,y_2))\times$$

$$\times\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) + \beta(t)\times$$

$$\times\sum_{j,\,l=1}^{n_1}\Delta_{y_2}^{z_2}a_{jl}(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j,\,l=1}^{n_1}\Delta_{z_2}^{y_2}a_{jl}(t,(\xi_1,z_2))\times$$

$$\times\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2) + \beta(t)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_j(t,(x_1,y_2))\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{y_2}^{z_2}a_j(t,(x_1,y_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{z_2}^{y_2}a_j(t,(\xi_1,z_2))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2)+$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,(x_1,y_2))\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$

$$+\Delta_{y_2}^{z_2}a_0(t,(x_1,y_2))\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2)+$$

$$+\Delta_{z_2}^{y_2}a_0(t,(\xi_1,z_2))\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;z_2).$$

Використовуючи оцінки (46) і (48), нерівності (4), якщо $h=\tau$, і те, що

$$(B(t,\tau))^pE^d(t,\tau) \leq (\beta(t))^p(A(t,\tau))^pE^d(t,\tau) \leq$$

$$\leq (\beta(T))^pE^{d_1}(t,\tau),\ 0<\tau<t\leq T,\ p>0,\ d_1>d,$$

отримаємо

$$|\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_{11}(t,x;\tau,\xi;y_2)| \leq C\beta(t)|y_2-z_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-1-m_2(|k_2|-\gamma_2+\gamma_2^0)}E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x,\xi),$$

$$\gamma_2^0\in(0,\gamma_2]. \tag{92}$$

Далі користуємось зображенням

$$\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_2) = \int_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_{11}(t,x;\theta,\lambda;y_2)K_{11}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$

$$+\int_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}K_{11}(t,x;\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times\Delta_{y_2}^{z_2}K_{11}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda + \int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{y_2}^{z_2}K_{11}(t,x;\theta,\lambda;y_2)\partial_{\lambda_2}^{k_2}K_{11}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}K_{11}(t,x;\theta,\lambda;z_2)\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{\lambda_2}^{k_2}K_{11}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda$$

й оцінюємо його доданки за допомогою оцінок (63) і (92) та нерівності (19). Маємо

$$|\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_{12}(t,x;\tau,\xi;y_2)| \leq C\beta(t)\times$$

$$\times\int_{\tau}^{t_1}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|y_2-z_2|^{\gamma_2}(B(t,\theta))^{-M-1-m_2|k_2|}\times$$

$$\times E_{c_1}^{d_1}(t,\theta,x,\lambda)(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1}E_{c_1}^{d_1}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda+$$

$$+C\beta(t)\int_{\tau}^{t_1}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|}\times$$

$$\times E_{c_1}^{d_1}(t,\theta,x,\lambda)|y_2-z_2|^{\gamma_2}(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2}\times$$

$$\times E_{c_1}^{d_1}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda + C\beta(t)\int_{t_1}^{t}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}|y_2-z_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times(B(t,\theta))^{-M-1+m_2(\gamma_2-\gamma_2^0)}E_{c_1}^{d_1}(t,\theta,x,\lambda)\times$$

$$\times(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|}E_{c_1}^{d_1}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda+$$

$$+C\beta(t)\int_{t_1}^{t}\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\int_{\mathbb{R}^n}(B(t,\theta))^{-M-1+m_1\gamma_1}E_{c_1}^{d_1}(t,\theta,x,\lambda)\times$$

$$\times|y_2-z_2|^{\gamma_2}(B(\theta,\tau))^{-M-1-m_2(|k_2|-\gamma_2)}E_{c_1}^{d_1}(\theta,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\leq$$

$$\leq C\beta(t)|y_2-z_2|^{\gamma_2^0}(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2(|k_2|-\gamma_2+\gamma_2^0)}\times$$

$$\times E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi),\ \gamma_2^0\in(0,\gamma_2).$$

За індукцією отримуємо

$$|\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}K_{1l}(t,x;\tau,\xi;y_2)| \leq C\beta(t)|y_2-z_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-m_1(2-l\gamma_1+\gamma_1)-m_2(|k_2|-\gamma_2+\gamma_2^0)}\times$$

$$\times E_{c_2}^{d_2}(t,\tau,x,\xi),\ l\geq 2,\ \gamma_2^0\in(0,\gamma_2).$$

Наслідком цих оцінок є оцінка

$$|\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \leq C\beta(t)|y_2-z_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-m_2(|k_2|-\gamma_2+\gamma_2^0)}E_{c_2}^{d_2}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0<\tau<t\leq T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

$$\{y_2,z_2\}\subset\mathbb{R}^{n_2},\ k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2},\ \gamma_2^0\in(0,\gamma_2). \tag{93}$$

Цю оцінку використовуватимемо для оцінки приросту за параметром $y_2\in\mathbb{R}^{n_2}$ похідних за x_2 від W_1. Запишемо зображення

$$\Delta_{y_2}^{z_2}\partial_{x_2}^{k_2}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2) =$$

$$= \int_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_2}^{z_2} \partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2) Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda +$$

$$+ \int_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\theta,\lambda;z_2) \Delta_{y_2}^{z_2} Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{y_2}^{z_2} Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2) \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\theta,\lambda;z_2) \Delta_{y_2}^{z_2} \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2) d\lambda =:$$

$$=: \sum_{k=1}^{4} L_k. \tag{94}$$

Використовуючи оцінки (48) з $h = \tau$, (67) і (19), маємо

$$|L_1| \le C|y_2 - z_2|^{\gamma_2} \int_{\tau}^{t_1} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta))^{-M-m_2|k_2|} \times$$

$$\times E_c^d(t,\theta,x,\lambda)(B(\theta,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1} E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi) d\lambda \le$$

$$\le C|y_2 - z_2|^{\gamma_2} (B(t,t_1))^{-m_2} \int_{\tau}^{t_1} (B(\theta,\tau))^{-1+m_1\gamma_1} \times$$

$$\times \Big((B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c^d(t,\theta,x,\lambda) \times$$

$$\times E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi) d\lambda \Big) \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \le C|y_2 - z_2|^{\gamma_2} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M+m_1\gamma_1 - m_2|k_2|} E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi).$$

На підставі оцінок (46), (93) і (19) отримуємо

$$|L_2| \le C|y_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \int_{\tau}^{t_1} (B(t,\theta))^{-m_2|k_2|} \times$$

$$\times (B(\theta,\tau))^{-1-m_2(\gamma_2^0 - \gamma_2)} \Big((B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_c^d(t,\theta,x,\lambda) E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi) d\lambda \Big) \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \le$$

$$\le C|y_2 - z_2|^{\gamma_2^0} (B(t,\tau))^{-M-m_2(|k_2| - \gamma_2 + \gamma_2^0)} E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi).$$

Аналогічно за допомогою оцінок (46), (48), (67) і (93) маємо

$$|L_3| \le C|y_2 - z_2|^{\gamma_2} \int_{t_1}^{t} (B(\theta,\tau))^{-1+m_1\gamma_1 - m_2|k_2|} \times$$

$$\times \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M} E_c^d(t,\theta,x,\lambda) \times$$

$$\times E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi) d\lambda \Big) \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \le C|y_2 - z_2|^{\gamma_2} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M+m_1\gamma_1 - m_2|k_2|} E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi),$$

$$|L_4| \le C|y_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \int_{t_1}^{t} (B(\theta,\tau))^{-1-m_2(|k_2| - \gamma_2 + \gamma_2^0)} \times$$

$$\times \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M} E_c^d(t,\theta,x,\lambda) \times$$

$$\times E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,\lambda,\xi) d\lambda \Big) \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta \le C|y_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M-m_2(|k_2| - \gamma_2 + \gamma_2^0)} E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,\lambda,\xi).$$

З формули (94) та одержаних оцінок виразів L_k, $k \in \{1, ..., 4\}$, випливає оцінка

$$|\Delta_{y_2}^{z_2} \partial_{x_2}^{k_2} W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C|y_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \times$$
$$\times (B(t,\tau))^{-M-m_2(|k_2| - \gamma_2 + \gamma_2^0)} E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi),$$
$$0 < \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$
$$\{y_2, z_2\} \subset \mathbb{R}^{n_2}, \ k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}, \ \gamma_2^0 \in (0,\gamma_2). \tag{95}$$

IV. Основні результати першого етапу побудови ФРЗК

Наведемо результати першого етапу побудови ФРЗК Z, а саме побудови й дослідження ФРЗК Z_1 для рівняння (42).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* **1** *і* **2**. *Тоді для рівняння* (42) *існує ФРЗК* Z_1, *для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{96}$$

$$|SZ_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-M-1} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{97}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le$$
$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (B(t,\tau))^{-M-M_{k0} - m_s\gamma_s^0} \times$$
$$\times (E_c^d(t,\tau,x,\xi) + E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)), \tag{98}$$

$$\Big| \Delta_{y_2}^{z_2} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2) \Big| \le C|y_2 - z_2|^{\gamma_2^0} \times$$
$$\times (B(t,\tau))^{-M-m_2(|k_2| - \gamma_2 + \gamma_2^0)} E_c^d(t,\tau,x,\xi); \tag{99}$$

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2) d\xi \Big| \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-m_1(|k_1| - \gamma_1)} E^d(t,\tau), \tag{100}$$

$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2) d\xi \Big| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} \times$$
$$\times (B(t,\tau))^{-m_1(|k_1| - \gamma_1) - m_s\gamma_s^0} E^d(t,\tau), \tag{101}$$

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2) d\xi_2 \Big| \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-m_1 n_1 - m_2(|k_2| - \gamma_2)} \times$$

$$\times E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau), \quad (102)$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2)d\xi\Big|\le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-m_2(|k_2|-\gamma_2)}E^d(t,\tau), \quad (103)$$

де $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{y_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\{1,2\}$, $\gamma_1^0\in(0,\gamma_1]$, $\gamma_2^0\in(0,1]$ *в* (98) *і* $\gamma_2^0\in(0,\gamma_2)$ *в* (99), (101), γ_1,γ_2 – *числа з умови* **2**), $k:=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^n$, *причому* $|k_1|\le 2$, $k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}$ *у* (96) – (99), *а в* (100) – (103) $k_1\neq 0$ *і* $k_2\neq 0$.

□ *Доведення.* Оцінки (96)–(99) випливають із відповідних оцінок Z_0 і W_1, встановлених у пунктах 3 і 4. Для одержання оцінок (100) і (101) скористаємося формулою (43) і тим, що на підставі (49) і (50) такі оцінки справджуються для Z_0. Щоб довести, що вони правильні й для W_1, використаємо оцінки

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi\Big|\le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-1+m_1\gamma_1}E^d(t,\tau) \quad (104)$$

і

$$\Big|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi\Big|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-1+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0}E^d(t,\tau), \quad (105)$$

які безпосередньо випливають з оцінок (67) і (76) та рівності (17). За допомогою означення (44) для W_1 записуємо зображення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\xi\Big)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times\Big(\Delta_\lambda^{X(t,\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\xi\Big)d\lambda+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)d\lambda\Big)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}Q_1(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi;y_2)d\xi.$$

Оцінивши його доданки за допомогою оцінок (46), (49), (104) і (105), рівності (17) та нерівностей (21)–(23), подібно до попереднього отримуємо

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi\Big|\le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-m_1(|k_1|-\gamma_1)}E^d(t,\tau).$$

Аналогічно доводимо оцінку (101) .

Залишилось отримати оцінки (102) і (103). Для цього зауважимо, що справджується рівність

$$\partial_{x_2}^{k_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2=0,\ k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}\setminus\{0\}. \quad (106)$$

Ця рівність випливає з аналогічних рівностей для повторних ядер K_{1l}, $l\ge 2$, які є наслідками означення цих ядер і рівностей (55) для Z_0. За допомогою рівностей (55) і (106) одержуємо рівності

$$\partial_{x_2}^{k_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2=$$

$$=\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Big(\partial_{x_2}^{k_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)d\lambda_2\Big)\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\xi_2\Big)d\lambda_1+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\theta,\lambda;y_2)\times$$

$$\times\Big(\partial_{\lambda_2}^{k_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\xi_2\Big)d\lambda=0$$

і

$$\partial_{x_2}^{k_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2=\partial_{x_2}^{k_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2+$$

$$+\partial_{x_2}^{k_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}W_1(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2=0,$$

з яких на підставі (15), (16), (21) і (99) випливають оцінки

$$\Big|\partial_{x_2}^{k_2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2)d\xi_2\Big|=$$

$$=\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}\Delta_{y_2}^{\xi_2}\partial_{x_2}^{k_2}Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2)\Big|_{y_2=X_2(t,\tau)}d\xi_2\Big|\le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M-m_2(|k_2|-\gamma_2+\gamma_2^0)}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}|X_2(t,\tau)-\xi_2|^{\gamma_2^0}E_c^d(t,\tau,x,\xi)d\xi_2\le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M-m_2(|k_2|-\gamma_2)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi)d\xi_2\le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2(|k_2|-\gamma_2)}E_{c_1}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2)d\xi\Big|\le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-m_2(|k_2|-\gamma_2)}E^d(t,\tau).\ \blacksquare$$

V. Другий етап побудови ФРЗК

Перейдемо до завершального етапу побудови ФРЗК Z для рівняння (1), який шукаємо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = Z_2(t,x;\tau,\xi) + W_2(t,x;\tau,\xi), \qquad (107)$$

в якому функція

$$Z_2(t,x;\tau,\xi) := Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2),$$
$$0 < \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (108)$$

є параметриксом, побудованим за ФРЗК Z_1 з пунктів 3–5, а

$$W_2(t,x;\tau,\xi) :=$$
$$:= \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^{\varkappa}} Z_2(t,x;\theta,\lambda) Q_2(\theta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda, \qquad (109)$$

де Q_2 – невідома функція.

Властивості параметриксу Z_2 містяться в лемі 6, яка безпосередньо випливає з теореми 2 та означення (108).

Лема 6. *За умов* **1**) *і* **2**) *правильні такі оцінки:*

$$|\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi)| \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \qquad (110)$$
$$|SZ_2(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-M-1} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \qquad (111)$$
$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi)| \le$$
$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (B(t,\tau))^{-M-M_{k0}-m_s\gamma_s^0} \times$$
$$\times (E_c^d(t,\tau,x,\xi) + E_c(t,\tau,z^{(s)},\xi)), \qquad (112)$$
$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_2(t,x;\tau,\xi) d\xi \Big| \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-m_1(|k_1|-\gamma_1)} E^d(t,\tau), \qquad (113)$$
$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z_2(t,x;\tau,\xi) d\xi \Big| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} \times$$
$$\times (B(t,\tau))^{-m_1(|k_1|-\gamma_1)-m_s\gamma_s^0} E^d(t,\tau), \qquad (114)$$
$$\Big| \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_2(t,x;\tau,\xi) d\xi_2 \Big| \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-m_1 n_1 - m_2(|k_2|-\gamma_2)} \times$$
$$\times E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1) E^d(t,\tau), \qquad (115)$$
$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} Z_2(t,x;\tau,\xi) d\xi \Big| \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-m_2(|k_2|-\gamma_2)} E^d(t,\tau), \qquad (116)$$

де $0 < \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \{1,2\}$, $\gamma_1^0 \in (0,\gamma_1]$, $\gamma_2^0 \in (0,1]$ *в* (110) *і* $\gamma_2^0 \in (0,1)$ *в* (112), (114), γ_1, γ_2 *– числа з умови* **2**), $k := (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$, *причому* $|k_1| \le 2$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$ *у* (110) – (112), *а в* (113) – (116) $k_1 \ne 0$ *і* $k_2 \ne 0$.

Нехай функція Q_2 задовольняє умови **3** і **4**. Тоді для неї отримаємо інтегральне рівняння

$$Q_2(t,x;\tau,\xi) = K_2(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+ \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} K_2(t,x;\theta,\lambda) Q_2(\theta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda, \qquad (117)$$

в якому ядро K_2 визначається формулою

$$K_2(t,x;\tau,\xi) := \Big(\beta(t) \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{jl}(t,x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} +$$
$$+\beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_j(t,x) \partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_0(t,x) \Big) Z_2(t,x;\tau,\xi),$$
$$0 < \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (118)$$

Доводять існування розв'язку інтегрального рівняння (117) та встановлюють потрібні властивості резольвенти аналогічно до того, як це робили на першому етапі. З урахуванням нерівностей (4), (21) і (110) маємо

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2} E_{c_1}^{d_1}(t,x;\tau,\xi).$$

Ця оцінка дає змогу одержати таку саму оцінку для резольвенти інтегрального рівняння (117), тобто оцінку

$$|Q_2(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2} E_{c_2}^{d_2}(t,x;\tau,\xi),$$
$$0 < \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (119)$$

Для отримання оцінок приростів функції Q_2 скористаємось формулами

$$\Delta_{x_s}^{z_s} Q_2(t,x;\tau,\xi) = \Delta_{x_s}^{z_s} K_2(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+ \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{x_s}^{z_s} K_2(t,x;\theta,\lambda) Q_2(\theta,\lambda;\tau,\xi) d\lambda,$$
$$0 < \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \ s \in \{1,2\}. \qquad (120)$$

і оцінками

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} K_2(t,x;\tau,\xi)| \le$$
$$\le C\beta(t)|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2-m_s\gamma_s^0} \times$$
$$\times (E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x,\xi) + E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,z^{(s)},\xi)),$$
$$\gamma_s^0 \in (0,\gamma_s), \ s \in \{1,2\}. \qquad (121)$$

які отримують звичайним оцінюванням членів таких зображень:

$$\Delta_{x_1}^{z_1} K_2(t,x;\tau,\xi) =$$
$$= \beta(t) \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_{jl}(t,x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} Z_2(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+\beta(t) \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{x_2}^{\xi_2} a_{jl}(t,z^{(1)}) \Delta_{x_1}^{z_1} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} Z_2(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+\beta(t) \sum_{j,l=1}^{n_1} \Delta_{z_1}^{x_1} a_{jl}(t,(z_1,\xi_2)) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} Z_2(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+\beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_j(t,x) \partial_{x_{1j}} Z_2(t,x;\tau,\xi) +$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_j(t,z^{(1)})\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}Z_2(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{x_1}a_j(t,(z_1,\xi_2))\partial_{x_{1j}}Z_2(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\Delta_{x_1}^{z_1}a_0(t,x)Z_2(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_0(t,z^{(1)})\Delta_{x_1}^{z_1}Z_2(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\Delta_{z_1}^{x_1}a_0(t,(z_1,\xi_2))Z_2(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\Delta_{x_2}^{z_2}K_2(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=\beta(t)\sum_{j,\,l=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_{jl}(t,x)\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}Z_2(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j,\,l=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{z_2}a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}Z_2(t,z^{(2)};\tau,\xi)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_j(t,x)\Delta_{x_2}^{z_2}\partial_{x_{1j}}Z_2(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_2}^{z_2}a_j(t,x)\partial_{x_{1j}}Z_2(t,z^{(2)};\tau,\xi)+$$

$$+\Delta_{x_2}^{\xi_2}a_0(t,x)\Delta_{x_2}^{z_2}Z_2(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\Delta_{x_2}^{z_2}a_0(t,x)Z_2(t,z^{(2)};\tau,\xi).$$

На підставі (118)–(121) маємо

$$\Big|\,\Delta_{x_s}^{z_s}Q_2(t,x;\tau,\xi)\,\Big|\le C\,\Big(\,\beta(t)|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2-m_s\gamma_s^0}\,\Big(\,E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x,\xi)+$$

$$+E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\,\Big)+\beta(t)|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$

$$\times\int_\tau^t(B(t,\theta)^{-1+m_2\gamma_2-m_s\gamma_s^0}(B(\theta,\tau))^{-1+m_2\gamma_2}\times$$

$$\times\Big(\,(B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\,E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,x,\xi)+$$

$$+E_{c_1}^{d_1}(t,\tau,z^{(s)})\,\Big)\,E_{c_2}^{d_2}(\theta,\tau,x,\xi)d\lambda\,\Big)\,\frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\,\Big)\le$$

$$\le C\beta(t)|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2-m_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times\Big(E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi)+E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,z^{(s)},\xi)\Big),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

$$\gamma_s^0\in(0,\gamma_s),\ \ s\in\{1,2\}. \qquad (122)$$

Отже, функція Q_2 задовольняє умову **3** з показником $\gamma=m_2\gamma_2$ та умову **4** з $\gamma_s=\gamma_s^0, s\in\{1,2\}$, де γ_s^0 – числа з оцінок (121). Тому для функції W_2 правильні формули (35), (36) і (37) та справджуються оцінки (38) і (39), в яких W_0, G_0 і f замінено на W_2, Z_2 і Q_2 відповідно. Умова (34), яка є важливою для обґрунтування диференційовності потенціалів W_0 і W_1 за змінною x_2 для функції Q_2 не виконується. Але за рахунок кращих властивостей ядра Z_2 і густини Q_2 можна довести, що потенціал W_2 має неперервні похідні першого порядку за x_2 та отримати їх потрібні оцінки. Точні формулювання наведено у лемі 7.

Лема 7. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1) *виконуються умови* **1** *і* **2**. *Тоді для функції* (109) *правильні формули*

$$\partial_{x_{2l}}W_2(t,x;\tau,\xi)=$$

$$=\int_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{2l}}Z_2(t,x;\theta,\lambda)Q_2(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\partial_{x_{2l}}Z_2(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_2\Big)\times$$

$$\times\Delta_{(\lambda_1,X_2(t,\theta))}^{X(t,\theta)}Q_2(\theta,(\lambda_1,X_2(t,\theta));\tau,\xi)d\lambda_1+$$

$$+\int_{t_1}^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{2l}}Z_2(t,x;\theta,\lambda)\Delta_\lambda^{(\lambda_1,X_2(t,\theta))}\times$$

$$\times Q_2(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+\int_{t_1}^t\partial_{x_{2l}}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}Z_2(t,x;\theta,\lambda)d\lambda\Big)\times$$

$$\times Q_2(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)},\ \ l\in\{1,...,n_2\},$$

і справджуються оцінки

$$|\partial_{x_{2l}}W_2(t,x;\tau,\xi)|\le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{-M-m_2(1-\gamma_2^0)}E_{c_3}^{d_2}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ l\in\{1,...,n_2\},$$

$\gamma_2^0\in(1/3,\gamma_2)$, γ_2 *– число з умови* **2**.

Підсумком усіх попередніх міркувань є подана нижче теорема, яка є основним результатом статті.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **1** *і* **2**. *Тоді для рівняння* (1) *існує ФРЗК* Z*, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^kZ(t,x;\tau,\xi)|\le C(B(t,\tau))^{-M-M_{k0}}E_c^d(t,\tau,x,\xi),$$

$$|SZ(t,x;\tau,\xi)|\le C(B(t,\tau))^{-M-1}E_c^d(t,\tau,x,\xi),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

$$k:=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^n,\ \ |k_1|+2|k_2|\le2.$$

Висновки

У статті запропоновано умови на коефіцієнти ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з однією групою змінних виродження, яке має ще виродження на початковій гіперплощині, за яких новою модифікацією звичайного методу Леві побудовано ФРЗК та одержано його оцінки. Ці результати і методика їх отримання знайдуть застосування для побудови й дослідження ФРЗК для загальніших рівнянь, а також для встановлення коректної розв'язності та інтегрального зображення розв'язків задачі Коші.

Література

[1] *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України. – 1994. – № 6. – С. 7–11.

[2] *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині // Доп. АН України. – 1998. – № 12. – С. 7–12.

[3] *Мединський І. П.* Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням // Вісн. Держ. ун-ту „Львів. політехніка". Сер. Прикл. математика. – 1998. – № 337. – С. 133–136.

[4] *Мединський І. П.* Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. Держ. ун-ту „Львів. політехніка". Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 298–307.

[5] *Березан Л. П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. – 1999. – Вип. 46. – С. 13–18.

[6] *Ivasyshen S. D. Medynsky I. P.* Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane // Мат. студії. – 2000. – 13, № 1. – С. 33–46.

[7] *Мединський І. П.* Про апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Вісн. Нац. у-ту „Львів. політехніка". Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 185–194.

[8] *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика – 2000. – Вип. 76. – С. 5–10.

[9] *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 3. – С. 15–24.

[10] *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – 152. – 390 p.

[11] *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. АН України. – 1996. – № 10. – С. 11–16.

[12] *Івасишен С. Д., Возняк О. Г.* Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 2. – С. 13–19.

[13] *Ivashyshen S. D., Voznyak O. G.* On fundamental solutions of the Cauchy problem for a class of degenerate parabolic equations // J. Math. Sci. – 99 (2000). – No 5. P. 1533–1540.

[14] *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Однозначна розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь з узагальненими початковими даними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 4. – С. 27–39.

[15] *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – 2, № 2–3. – С. 27–41.

[16] *Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині // Буков. мат. журн. – 2015. – 3, № 3–4. – С. 43–51.

[17] *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2016. – 13, № 1. – С. 108–155.

ON FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ULTRA-PARABOLIC KOLMOGOROV TYPE EQUATION WITH TWO GROUPS OF SPATIAL VARIABLES AND WITH DEGENERATION ON THE INITIAL HYPERPLANE

O. G. Voznyak[a], S. D. Ivasyshen[b, c], I. P. Medynsky[d]

[a]*Ternopil National Economical University*
11, Lvivska Str., 46004, Ternopil, Ukraine
[b]*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine*
3-b, Naukova Str., 79060, Lviv, Ukraine
[c]*National Technical University of Ukraine "KPI"*
37, Prosp. Peremohy, 03056, Kyiv, Ukraine
[d]*Lviv Polytechnic National University*
12, S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The fundamental solution of the Cauchy problem for a degenerate Kolmogorov type equation with coefficients depend on two groups of spatial variables and with degenerations on the initial hyperplane is constructed and investigated. Exact estimates of the fundamental solution and its derivatives are obtained.

Key words: fundamental solution of the Cauchy problem, degeneration on the initial hyperplane, volumetric potential, parametrecs, Levi metod.

2000 MSC: 35E20

UDK: 517.956.4