УДК 621.3.011.7

А.Ф. Верлань[1], О.О. Ситник[2], К.М. Ключка[2]
[1]Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ
[2]Черкаський державний технологічний університет

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ АНАЛІЗУ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто можливість дослідження параметричних систем із застосуванням інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду. Особливістю є те, що пропонується така форма інтегрального рівняння, яке визначає не невідомий відгук, а деякий еквівалентний вхідний сигнал.

Possibility of research of the time-varying systems with the use Volterra integral equations of the second kind are considered. That is a feature, that such form of integral equation which determines a not unknown response is offered, and some equivalent entrance signal.

Постановка проблеми. Однією з основних математичних моделей опису та розрахунку перехідних процесів в електричних колах [1−3] є система диференціальних рівнянь вигляду

$$A(x)\dot{x} = f(t,x),\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

де $\dot{x}$ − вектор змінних стану, компонентами якого є величини струмів і напруг відповідно індуктивних та ємнісних елементів схеми, початкові значення яких є відомими; $A(x)$ − деяка матриця, що визначається структурою досліджуваного електричного кола та значеннями його параметрів; $f(t,x)$ − вектор діючих джерел ЕРС та струму.

Проте можливості цього класу математичних моделей також обмежені насамперед у разі дослідження нестаціонарних електричних ланцюгів, ланцюгів з розподіленими параметрами, під час розв’язанні деяких обернених задач.

Подальшим розвитком теорії та моделювання динаміки електричних кіл є застосування методу інтегральних рівнянь [4], що є сукупністю прийомів визначення інтегральних математичних співвідношень між відомими початковими даними і визначуваними параметрами електричного ланцюга, а також способів еквівалентних перетворень отриманих рівнянь і точного або наближеного їх рішення.

Способи отримання інтегральних рівнянь в задачах динаміки електричних кіл. ***Інтегральний варіант класичного методу*.** Для отримання інтегрального варіанта моделі лінійного електричного кола використовуються відомі закономірності, що зв’язують фізичні величини основних елементів електричних кіл, подібно до того, як це робиться у разі складання диференціального рівняння. Так, описуючи лінійні елементи C і L, використовують інтегральні залежності:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(s)ds,\ i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(s)ds. \tag{2}$$

Аналогічні залежності справедливі для нелінійного C-елемента із заданою характеристикою $q = f(u)$ або $u = F(q)$ $(f^{-1} = F)$ і динамічною ємністю $C(u)$

$$q(t) = \int_0^t i(s)ds,\ u(t) = F\left(\int_0^t i(s)ds\right), \tag{3}$$

а також для нелінійного L-елемента з характеристикою $\psi = f(i)$ чи $i = F(\psi)$ і динамічною індуктивністю $L(i)$

$$\psi(t) = \int_0^t u(s)ds,\ i(t) = F\left(\int_0^t u(s)ds\right). \tag{4}$$

Подібні залежності використовуються і за наявності взаємних індуктивностей.

Інтегральний варіант класичного методу полягає в тому, що за законами Кірхгофа та з використанням вищенаведених інтегральних співвідношень складається система інтегродиференціальних рівнянь і шляхом інтегрування отримується система інтегральних рівнянь.

Наприклад, для паралельного rLC контуру інтегральне рівняння має вигляд

$$Cu_C(t)+\int_0^t\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{L}(t-\tau)\right]u_C(\tau)d\tau=U_0\,. \tag{5}$$

Метод Пухова. У роботі [5] запропонований інший метод отримання інтегральних рівнянь електричних кіл (метод Пухова), заснований на поняттях перехідних опорів і провідностей пасивних і активних двополюсників.

Цей метод являє собою фундаментальні положення для складання інтегральних моделей ланцюгів довільного вигляду як стаціонарних, так і нестаціонарних та нелінійних, внаслідок введення поняття закону Ома-Дюамеля. Для активного двополюсника з постійними параметрами зв'язок між струмом та напругою на його полюсах можливо записати у вигляді інтегрального рівняння

$$\int_0^t i(s)ds=\int_0^t y(t-s)\left[u(s)-\bar{u}(s)\right]ds=\int_0^t y(s)\left[u(t-s)-\bar{u}(t-s)\right]ds \tag{6}$$

чи рівняння

$$\int_0^t u(s)ds=\int_0^t z(t-s)\left[i(s)-\bar{i}(s)\right]ds=\int_0^t z(s)\left[i(t-s)-\bar{i}(t-s)\right]ds\,. \tag{7}$$

У цих рівняннях $y(t)$, $z(t)$ − перехідна провідність та перехідний опір відповідно щодо одиничної напруги та одиничного струму; $\bar{u}(t)$, $\bar{i}(t)$ − напруга холостого ходу та струм короткого замикання двополюсника; s − змінна інтегрування.

Вирази (6) і (7) являють собою модифіковані інтеграли Дюамеля та при постійних $y(t)$ і $z(t)$ переходять у звичайний закон Ома. Тому існує твердження, що для двополюсника з постійними параметрами існує закон Ома-Дюамеля, математичним виразом якого є рівняння (6) і (7) і які визначають в загальному випадку зв'язок між струмом та напругою на полюсах двополюсника.

Спосіб отримання інтегральних рівнянь для нелінійних кіл з використанням операторного методу. Розрахункові операції, властиві нелінійній задачі, можуть виявитися достатньо громіздкими. Розв'язання такої задачі може бути полегшено, якщо ці операції будуть віднесені тільки до нелінійної частини схеми [6].

У кожному контурі багатоконтурної схеми з лінійними та нелінійними елементами можливо представити різницю суми ЕРС та спадів напруг на нелінійних елементах у вигляді деякої напруги, що діє на лінійну частину контуру і тим самим нелінійність задачі зарахувати до нелінійної залежності цієї напруги від струму і виділити лінійну частину задачі, до якої можливо застосовувати методи розрахунку лінійних кіл.

Для отримання розв'язання сформульованої способом задачі може бути використаний операторний метод. В цьому випадку зображення напруги, що діє на лінійну частину контуру, отримується як різниця зображень заданих ЕРС та зображень спадів напруг на нелінійних елементах, що є невідомими. В цьому випадку розв'язання нелінійних задач може бути зведено до розв'язання інтегрального рівняння, в якому лінійна частина задачі визначає відому функцію від часу, а під знак інтеграла попадають тільки нелінійні частини характеристик. Отримані інтегральні рівняння можуть бути розв'язані відомими математичними методами.

Отримання інтегральних рівнянь методом "розщеплювання". Розвитком вищенаведених методів є методика опису довільного ланцюга по частинах, коли будь-яка лінійна підсхема представляється інтегральними рівняннями з ядрами, перехідними характеристиками ділянок (або ваговими функціями), які можуть бути визначені аналітично. Аналогом такої методики розділення і опису ланцюга є еквівалентне перетворення диференціальних рівнянь в інтегральні, яке може бути назване "методом розщеплювання" оператора рівняння на лінійну і нелінійну частини з подальшим розв'язанням лінійної частини як самостійного рівняння [7].

Задача досліджень. Виконаний аналіз вказує на необхідність подальших досліджень застосування методу інтегральних рівнянь для аналізу різноманітних електричних кіл, а зокрема і кіл, що містять елементи зі змінними параметрами.

Виклад основного матеріалу. Основною метою цієї роботи є дослідження перехідних процесів у лінійних системах із змінними параметрами, використовуваних в електротехніці та радіотехніці.

Суть вивчення перехідних процесів зводиться до знаходження відгуку лінійної системи на зовнішню дію $f(t)$, які зв’язані звичайним диференціальним рівнянням

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n}+...+a_1(t)\frac{dy}{dt}+a_0(t)y=f(t), \tag{8}$$

де t − час; $a_k(t)$ − змінні в часі коефіцієнти, визначені параметрами системи, k = 0, 1, 2,..., n; n − порядок системи, причому n = 1, 2, 3 ...

Для системи із змінними параметрами не існує єдиного способу знаходження загального розв’язання рівняння за довільного закону зміни коефіцієнтів рівняння.

В даній роботі пропонується замінити звичайне диференціальне рівняння системи із змінними параметрами інтегральним рівнянням Вольтерри другого роду, що дозволяє розв’язати цю задачу. Крім того, на відміну від відомих методів застосування інтегральних рівнянь, пропонується така форма інтегрального рівняння нестаціонарної системи, яке визначає не невідомий відгук, а деякий еквівалентний вхідний сигнал $u(t)$. Сам відгук $y(t)$ визначається остаточно інтегралом суперпозиції

$$y(t)=\int_0^t u(t)g(t,t)dt .$$

Основною особливістю пропонованого рівняння є та обставина, що підінтегральна функція представлена добутком невідомої функції $u(t)$ на наперед відоме ядро $g(t,t)$, що залежить тільки від коефіцієнтів $a_k(t)$ початкового рівняння системи (8). У цьому випадку процедура знаходження відгуку $y(t)$ спрощується для багатьох параметричних систем, особливо з декількома змінними параметрами.

Основою для побудови інтегрального методу слугує метод послідовних наближень розв’язку звичайного лінійного диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами.

Представляючи змінні коефіцієнти $a_k(t)$ у вигляді

$$a_k(t)=a_k+b_k(t), k=1,2,...,n-1,$$

де a_k − постійні коефіцієнти; $\beta_k(t)$ − задані функції часу, перепишемо рівняння (8) в такій формі:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{d^k y}{dt^k}=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1} b_k(t)\frac{d^k y}{dt^k}. \tag{9}$$

Рівняння (9) називатимемо *канонічним* для параметричної системи. Надалі воно вважається основним під час їх вивчення.

Знайдемо розв’язок рівняння (9) методом послідовних наближень. Розглянемо замість рівняння (9) таку систему, що складається з $m+1$ диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами a_k :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{d^k y_0}{dt^k}=f(t) \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{d^k y_i}{dt^k}=-\sum_{k=0}^{n-1} b_k(t)\frac{d^k y_{i-1}}{dt^k}=f_i(t),\ i=1,2,...,m, \tag{11}$$

розв’язки якої $y_0(t),\ y_i(t)$ повинні задовольняти початкові умови:

$$y_0^{(k)}(0)=y^{(k)}(0), \tag{12}$$

$$y_i^{(k)}(0)=0. \tag{13}$$

Рівняння (10) описує процеси в так званій *нульовій системі*. Це − лінійна система з постійними параметрами a_k, що отримується з параметричної в припущенні, що $b_k(t)=0$.

Неважко показати, що сума

$$S_m(t)=\sum_{i=1}^{m} y_i(t) \tag{14}$$

представляє послідовні наближення відгуку $y(t)$ параметричної системи, причому відмінності між ними зменшуються із зростанням m. Отже, сума $S_m(t)$ при $m\to\infty$ представляє невідомий відгук $y(t)$ параметричної системи

$$y(t)=S(t)=\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t). \tag{15}$$

Цей розв'язок єдиний, оскільки функції $y_i(t)$ за заданих початкових умов дають єдиний розв'язок кожного з рівнянь (11).

Знаходження відгуку параметричної системи на основі операторного методу. Від рівняння (11) для оригіналів можна перейти до рівняння для операторних зображень

$$N(p)Y_i(p)=F_i(p). \tag{16}$$

Зображення відгуку матиме вигляд

$$Y_i(p)=\frac{1}{p}H_0(p)F_i(p),$$

де $H_0(p)=\dfrac{p}{N(p)}$.

У просторі часу отримаємо

$$y_i(t)=\int_0^t f_i(x)h_0(t-x)dx\ ,\ i\ge 1. \tag{17}$$

У виразі (17) функція $h_0(t)$ є оригіналом від зображення $H_0(p)$ і називається *нульовою імпульсною реакцією*.

Розв'язок $y_0(t)$ рівняння (10) відрізняється від (17) лише тим, що необхідно врахувати ненульові початкові умови. Скориставшись відомими правилами операторного числення, отримаємо

$$y_0(t)=y_{0c}(t)+\int_0^t f(x)h_0(t-x)dx\ , \tag{18}$$

де $y_{0c}(t)$ − розв'язок однорідного рівняння, що отримується з (10) при $f(t)\equiv 0$ і може бути записаний з використанням введеної нульової імпульсної реакції $h_0(t)$ або іншим способом. Нульова імпульсна реакція $h_0(t)$ − відгук нульової системи на зовнішню дію $f(t)$ у вигляді одиничного імпульсу $d(t)$. Використання нульової імпульсної реакції дозволяє отримати просту формулу для обчислення похідних $y^{(k)}(t)$ шляхом диференціювання по параметру t виразу (17)

$$\frac{d^k y_i}{dt^k}=\int_0^t f_i(x)\left.\frac{d^k h_0}{dt^k}\right|_{t=t-x} dx\ , \tag{19}$$

$$k=0,1,2,\ldots,n-1,$$

що необхідно при обчисленні зовнішніх дій $f_i(t)$ в (11). Змінюючи тут порядок підсумовування і інтегрування, отримаємо

$$f_i(t)=-\int_0^t g(t,x)f_{i-1}(x)dx\ ,\ i\ge 2, \tag{20}$$

де

$$g(t,x) = g(t,t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(t) \frac{d^k h_0}{dt_k}\bigg|_{t=t-t} . \tag{21}$$

Співвідношення (20) представляє зовнішні дії $f_i(t)$ у вигляді інтегральної залежності від двох функцій: функції дії $f_{i-1}(t)$ з меншим номером і вагової функції $g(t,t)$, що визначається всіма змінними коефіцієнтами $b_k(t)$ і нульовою імпульсною реакцією $h_0(t-t)$. Очевидно, що вагова *параметрична функція системи* $g(t,t)$ може бути заздалегідь знайдена, що стандартизує процес обчислення послідовності функцій $f_i(t)$. Тільки при визначенні першої функції $f_1(t)$ згідно з (11) необхідно знайти похідні $y_0^{(k)}(t)$. Параметрична вагова функція $g(t,t)$ залежить від двох змінних t та t і має сенс тільки при $t \ge t$. При $t \le t$ її потрібно вважати такою, що дорівнює нулю разом з нульовою імпульсною реакцією $h_0(t-t)$ і похідними $h_0^{(k)}(t-t)$.

Інтегральне рівняння параметричної системи. Застосування методу послідовних наближень вимагає для обчислення $y_i(t)$ подвійного інтегрування згідно з (17) і (20). На підставі властивостей функцій $f_i(t)$ можна представити відгук $y(t)$ у компактнішому вигляді.

Скориставшись формулами (15) і (17) отримаємо такий вираз

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t f_i(\xi) h_0(t-\xi) d\xi .$$

Можна показати, що послідовність функцій $f_i(t)$ становить абсолютно і рівномірно збіжний ряд, тому допустимо змінити порядок підсумовування і інтегрування

$$y(t) = y_0(t) + \int_0^t u(x) h_0(t-\xi) d\xi , \tag{22}$$

де

$$u(\xi) = u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \quad . \tag{23}$$

Підставляючи в (23) вираз (20) і змінюючи порядок підсумовування і інтегрування, отримаємо

$$\upsilon(t) = f_1(t) - \int_0^t g(t,\xi) \sum_{i=2}^{\infty} f_{i-1}(x) d\xi .$$

Замінимо тут індекс підсумовування i на $i-1$ і з урахуванням (23) одержимо

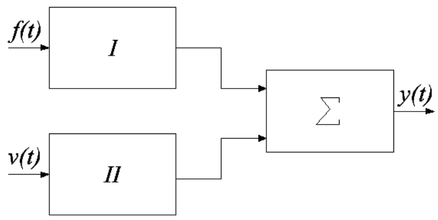
$$\upsilon(t) = f_1(t) - \int_0^t g(t,\xi) \upsilon(\xi) d\xi , \tag{24}$$

де $f_1(t)$ визначається з (11) при $i=1$.

Формули (18), (22) і (24) надають повний розв’язок диференціального рівняння (5) параметричної системи. Згідно з (22) він складається з суми нульового розв’язку $y_0(t)$, що задовольняє початкові умови задачі і залежного від зовнішньої дії $f(t)$ і реакції нульової системи з постійними параметрами на функцію $u(t)$. Остання, своєю чергою, визначається розв’язком інтегрального рівняння Вольтерри другого роду (24) з ядром $g(t,x)$, залежним від всіх змінних коефіцієнтів $b_k(t)$, і нульової імпульсної реакції $h_0(t)$.

Отже, виявляється, що зміна параметрів лінійної системи рівносильна включенню на її вході додаткового сигналу $u(t)$, форма якого визначається інтегральним рівнянням (24). Назвемо $u(t)$ *еквівалентним вхідним сигналом*. Рівняння (24) складене не для самого відгуку $y(t)$ параметричної системи, а для еквівалентного вхідного сигналу $u(t)$. Завдяки цьому вдалося отримати рівняння, в якому підінтегральна функція визначається тільки добутком ядра $g(t,x)$ на невідому функцію $u(x)$ і не залежить від похідних $v^{(k)}(\xi)$. Крім того, співвідношення (22) і (24) дають спосіб знаходження відгуку $y(t)$ для будь-якої параметричної системи (з нульовими і ненульовими початковими умовами). Назвемо рівняння (24) *інтегральним рівнянням параметричної системи*.

Висновки. У цій роботі вдалося встановити в загальній формі у вигляді рівняння (24) залежність еквівалентного вхідного сигналу $u(t)$ від всіх змінних параметрів $b_k(t)$ і від початкових умов $y^{(k)}(0)$ які, зокрема, визначають $f_1(t)$. Отримані співвідношення дозволяють побудувати модель параметричної системи у вигляді двох систем *I* і *II* з постійними параметрами, що мають однакову імпульсну реакцію $h_0(t)$, і суматора Σ (рисунок), причому система *I* збуджується сигналом $f(t)$ і має початкові умови $y^{(k)}(0) \neq 0$, а на вході системи *II* з нульовими початковими умовами діє еквівалентний вхідний сигнал $u(t)$.



Модель параметричної системи

Очевидно, в запропонованому методі дослідження параметричних систем всі труднощі переносяться на знаходження розв’язку інтегрального рівняння (24). Він може бути знайдений як сума послідовних наближень (23) або іншими методами теорії інтегральних рівнянь [4]. Після того, як еквівалентний вхідний, сигнал $u(t)$ визначений, досліджують параметричну систему за відомими методами теорії кіл з постійними параметрами.

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. − М.: Высш. шк., 1961. – 198 с. 2. Пухов Г.Е. Дифференциальный анализ электрических цепей. − К.: Наук. думка, 1982. – 196 с. 3. Демирчян К.С., Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. − М.: Высш.шк., 1988. – 79 с. 4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы − К.: Наук. думка, 1988. – 23 с. 5. Пухов Г.Е. Интегральные методы расчета электрических цепей // Теоретическая электротехника. – 1966, – № 2. – С. 5–14. 6. Гинзбург М.М. Получение интегральных уравнений для нелинейных цепей с применением операторного метода // Электричество. – 1960. – № 5. – С. 17–22. 7. Верлань А.Ф. Метод интегральных уравнений в задаче описания и расчета электрических цепей // Электронное моделирование. – 1983. – № 5. – С. 8–12.