# ГЕОДЕЗІЯ

УДК 550.831:528.11:519.281

П. Д. ДВУЛІТ[1], Й. В. ДЖУНЬ[2*]

[1] Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна, ел. пошта: dvupet@ukr.net.
[2*] Кафедра математичного моделювання, Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. С. Дем’янчука, вул. С. Дем’янчука, 4, Рівне, 33027, Україна, ел. пошта: iosif-june@rambler.ru.

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ НЕКЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ДЛЯ АБСОЛЮТНИХ ВИМІРЮВАНЬ ГАЛІЛЕЄВОГО ПРИСКОРЕННЯ

https://doi.org/10.23939/jgd2017.01.007

**Метою** дослідження є розроблення способу апостеріорного контролю за стабільністю умов спостережень за сучасних високоточних абсолютних вимірів прискорення вільного падіння Землі на основі методів некласичної теорії похибок (НТП). Вказані виміри виконують у складній метрологічній ситуації, яка безперервно порушується під впливом різних причин: трендами частотного спектру і енергії мікросейм, геологічними, атмосферними, припливними та іншими космічними факторами, неконтрольованими ефектами місця спостережень, можливими збоями в роботі гравіметра тощо. Засобами такого контролю необхідно добиватись отримання таких розподілів похибок спостережень, які забезпечують ефективні, чи, принаймні, середньоарифметичні оцінки галілеєвого прискорення. **Методика** досягнення цієї мети забезпечується алгоритмами НТП, які розроблені з метою контролю за формою емпіричних розподілів похибок високоточних багаторазових спостережень великих обсягів на основі принципів теорії перевірки гіпотез Неймана–Пірсона. **Основним результатом** дослідження є розроблення способу діагностики метрологічної ситуації під час виконання спостережень, на основі методів НТП. Ці методи ґрунтуються на використанні апостеріорних оцінок статистичних кумулянт форми емпіричних розподілів похибок із подальшим застосуванням $\chi^2$-критерію для контролю значущості її відхилень від встановлених норм. Згідно з принципами НТП такими нормами є закони: Гаусса або Пірсона–Джеффріса, оскільки саме вони забезпечують несингулярність вагової функції спостережень, отже і можливість оцінок при математичній обробці спостережень. **Наукова новизна:** вперше задіяні процедури НТП для вдосконалення проведення сучасних абсолютних високоточних спостережень галілеєвого прискорення, які виконуються за складних метрологічних умов за одночасної необхідності врахування ряду нестаціонарних джерел систематичних похибок. **Практична значущість** дослідження полягає в розробленні алгоритму контролю форми емпіричного розподілу похибок з метою вдосконалення проведення високоточних балістичних вимірів галілеєвого прискорення на основі аксіоматики НТП. Вивчення причин відхилень розподілів похибок від нормального закону давно вже стало необхідним елементом теорії точності виробництва і контролю за стабільністю роботи різноманітних агрегатів. Впровадження таких підходів, започаткованих ще А. М. Колмогоровим і його школою, і найповніше реалізованих у НТП, давно покладено в основу стратегії, що забезпечує метрологічну грамотність процесу вимірів і способи підвищення їхньої точності.

*Ключові слова:* абсолютні балістичні виміри галілеєвого прискорення; закони: Гаусса, Пірсона–Джеффріса; некласична теорія похибок.

### *Вступ*

Високоточні балістичні виміри галілеєвого прискорення виконуються в умовах, які не є постійними, а суттєво змінюються залежно від різних причин. За таких умов спостережень і за наявності різноманітних нестаціонарних джерел систематичних похибок дуже важливо провадити апостеріорний контроль стабільності метрологічної ситуації. Одним із методів такого контролю, як відмітив ще К. Пірсон [Pearson K., 1902], є вивчення форми генерального розподілу похибок спостережень. Згідно з класичними уявленнями, якщо форма розподілу цих похибок неістотно відрізняється від закону Гаусса, то це свідчить, що результати спостережень є некорельованими, тобто, ці похибки є суто випадковими і не містять якусь інформацію. Якщо ж форма розподілу похибок істотно відрізняється від закону Гаусса, наприклад, є асиметричною чи плосковершинною, то це свідчить про розладнання інструмента спостережень чи про дію неврахованих систематичних похибок. Проте, з часом, як це зазначено в НТП [Джунь Й. В., 2015], класичні уявлення зазнали істотної еволюції, на що ми детально звернемо увагу під час обґрунтування методики нашого дослідження.

### *Мета*

Розроблення способу апостеріорного контролю за стабільністю умов спостережень за сучасних високоточних абсолютних вимірів прискорення вільного падіння Землі на основі методів некласичної теорії похибок (НТП). Вказані виміри виконуються в складній метрологічній ситуації, яка безперервно порушується під впливом різних причин: трендами частотного спектру та енергії мікросейм геологічними, атмосферними, температурними, припливними та іншими космічними факторами, неконтрольованими ефектами місця спостережень, можливими збоями в роботі гравіметра, тощо. Засобами такого контролю необхідно добиватись отримання таких розподілів похибок спостережень, які забезпечують ефективні, чи, принаймні, середньоарифметичні оцінки галілеєвого прискорення.

### *Методика*

К. Ф. Гаусс у знаменитій роботі [Gaus K. F., 1809] під час обґрунтування методу найменших квадратів (МНК) так визначив основну умову, яка забезпечує коректність середньої арифметичної *a*, як оцінки за результатами спостереження $x_i$, які мають щільність розподілу $y = f(x)$;

$$-\frac{y'}{J_i y} = \text{const} \;, \tag{1}$$

де $\vartheta_i = x_i - a$ – похибки спостережень.

Легко доказати, що умова (1) виконується тоді і лише тоді, коли $y$ має форму нормального розподілу.

Т е о р е м а: Однорідними можна вважати лише нормально розподілені виміри, оскільки лише за такого розподілу вони мають однакові ваги і можуть осереднюватись.

Докажемо цю теорему, скориставшись диференціальною формою сімейства кривих Пірсона [Bolshev L. N., Smirnov N. V., 1983];

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x + c_1}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2}, \tag{2}$$

де

$$c_0 = \left\{ s^2 \left(4b_2 - 3b_1\right) \right\} / b;$$

$$c_1 = \left\{ s\sqrt{b_1\left(b_2 + 3\right)} \right\} / b; \tag{3}$$

$$c_2 = \left(2b_2 - 3b_1 - 6\right) / b;$$

$$b = 2\left(5b_2 - 6b_1 - 9\right); \tag{4}$$

$$s^2 = m_2;$$

$$b_1 = m_3^2 / m_2^3;$$

$$m_r = \int_{l_2}^{l_2} x^r f(x) dx; \tag{5}$$

$$r = 2, 3, 4, \ldots;$$

$$m_0 = 1;\; m_1 = a = 0;\; x = J;$$

Значення $l_2$ і $l_2$ (5) є нижньою і верхньою границями розмаху похибок спостережень.

Для закону Гаусса $\left(b_1 = 0, b_2 = 3\right)$ маємо:

$$c_0 = s^2;\; c_1 = 0;\; c_2 = 0. \tag{6}$$

Підставляючи значення (6) в (2), отримуємо:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{J}{s^2}. \tag{7}$$

За умови (7) формула (1) набуває вигляду

$$-\frac{y'}{J y} = -\frac{1}{J} * -\frac{J}{s^2} = \frac{1}{s^2} = \text{const}. \tag{8}$$

Теорема доказана, звідси і випливає принцип найбільшої ваги, головний у МНК.

Формула (2) дає також можливість переконатись, що умова (1) не виконується за будь-якого іншого, окрім нормального, розподілу.

Тому за класичних уявлень про похибки, є три гіпотези:

1) нормальний закон є адекватним дійсному розподілу похибок спостережень;

2) середнє арифметичне є найкращою оцінкою досліджуваної величини;

3) СКП є найкращою оцінкою точності вимірів, є взаємно еквівалентним: будь-яка одна з цих гіпотез передбачає негайне виконання двох інших.

Якщо нормальний закон є неадекватним дійсному розподілу похибок, тобто є неприйнятним, то це означає неприйнятність використання:

– середнього арифметичного;

– СКП як оцінки точності спостережень;

– неприйнятність оцінки похибок середнього: $s / \sqrt{n}$, чи побудови для нього довірчих інтервалів.

Протягом тривалого часу і експериментатори, і теоретики по-своєму були впевнені в справедливості закону похибок. Відоме класичне зауваження Ліппмана з цього приводу, яке цитує Пуанкаре: "експериментатори думають про закон похибок як про математичну теорему, математики вважають, що це експериментальний факт" [Cramer H., 1946; Stigler S. M., 1975]. Статистичний досвід показує, що в реальності розподіли похибок спостережень часто є приблизно нормальними.

Виникає питання саме коли часто? На нього дав відповідь знаменитий кембриджський професор Г. Джеффріс у роботі [Jeffreys H., 1940]. У підрозділі 5.7 цієї роботи "Дослідження Нормального закону" він показав, що при обсягах багатократних вимірювань, $n < 500$, як правило, нормальний закон є адекватним, оскільки в цьому разі зазвичай важко довести відхилення дійсних розподілів від нього. В роботі [Dzhun I. V., 2015] визначено нижню межу для мінімального обсягу вибірки, яка забезпечує статистичну значущість висновків МНК: $n > 30$, тобто, для класичних обсягів вибірок:

$$30 < n < 500. \qquad (9)$$

За модель ймовірнісного хаосу можна приймати саме закон Гаусса. Якщо випадкові похибки спостережень справді підкоряються цьому закону, то з класичного погляду це і є найбільш бажана ситуація, яка свідчить про те, що в похибках $J_i$, вже не можна виявити якусь ще інформацію ні про корельовані похибки, ні про що інше. Як бачимо, висновки, які ґрунтуються на класичній теорії похибок, показують наскільки є важливою процедура перевірки нормальності навіть тоді, коли ми працюємо в межах класичних обсягів вибірок (9). Але і до цього часу деякі дослідники вважають, що відхиленнями від Гауссової моделі можна ігнорувати. Вони вважають, що статистичні процедури, оптимальні за нормальної моделі, будуть приблизно такими і у разі відхилень від моделі. На превеликий жаль, виявилось, що такі сподівання абсолютно не мають жодного підґрунтя: навіть незначні відхилення від нормальності породжують ефекти в рази сильніші, ніж це передбачали більшість математиків [Tukey J. W., 1950, 1962, 1965; Hampel F. R., Ronchetti E. M., Rousseeuw P. J., Stahel W. A., 1985].

Можна назвати дві основні особливості відхилень дійсних розподілів похибок від нормальності:

– надлишок $J_i > 3s$ і малих похибок близьких до нуля;

– зменшена кількість похибок $J_i$, за значень, близьких до $s$ .

Про це відомо було вже Ф. В. Бесселю, але свідомо ним ігнорувалось [Bessel F. W., 1818; Bessel F. W., Baeyer J. J., 1838]. Пізніше і інші видатні математики і статистики такі як [Newcomb S., 1886; Pearson K., 1902; Student, 1927], аналізуючи вибірки високої якості, приходили до висновку, що дійсні розподіли мають більш підняті і більш довгі, ніж у закона Гаусса “хвости”. (Такі приклади можна знайти в роботах [Sheffe H., 1959; Romanowski M., Green E., 1965; Romanowski M., 1970; Dzhun I. V., 1974]).

Найбільший прорив на шляху отримання адекватніших і універсальніших ймовірнісних параметричних моделей у теорії помилок здійснив Г. Джеффріс під час дослідження розподілів похибок великих обсягів. У видатному дослідженні [Jeffreys H., 1939] він проаналізував 9 вибірок. Із них 6 рядів даних, обсягом приблизно в 500 спостережень, взятих з роботи [Pearson K., 1902] і два ряди широтних спостережень у Грінвічі обсягом 4540 і 4810 спостережень. Джеффріс виявив, що 7 із 9 розподілів похибок мають довгі “хвости” і лише два ряди мають короткі, у яких виявилась істотна серіальна кореляція даних (які вважались незалежними). Він зробив висновок, що саме ця кореляція спотворює стандартну похибку і довірчі інтервали, тобто близькість великих вибірок до нормальності не є причиною для заспокоєння, а є причиною значних підозр. Ретельно дослідивши усі ряди, Джеффріс прийшов до висновку, що для великих вибірок ($n > 500$) необхідно приймати зовсім іншу ймовірнісну модель випадкових, незалежних похибок $J_i$, а саме таку:

$$y = c\left[1+\frac{0.5}{M}\left(\frac{x-l}{s}\right)^2\right]^{-m}, \qquad (10)$$

де $c = \left[\sqrt{2(m-0.5)} * s * B\left(m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}$;

$B(z, w)$ – бета функція; $M = (m-0.5)^3 m^{-2}$.

Розподіл (10), який Джеффріс отримав за допомогою певних перетворень класичної кривої Пірсона VII типу, він знову таки скромно назвав кривою Пірсона VII типу. Але загальновідома класична крива Пірсона VII типу не зовсім ідентична кривій (10). Річ у тім, що Джеффріс класичну криву Пірсона VII типу перебудував для потреб теорії похибок так, щоб форма (10) мала, як і закон Гаусса, діагональну інформаційну матрицю, оскільки відомо, що незалежність оцінок $a$ і дисперсії можливе тільки для нормальної генеральної сукупності [Geary R. C., 1936; Lukacs E. A., 1942]. Така властивість у класичної кривої Пірсона VII типу відсутня. Тому, щоб уникнути плутанини, криву (10) слушно назвати розподілом Пірсона–Джеффріса VII типу (законом Пірсона–Джеффріса) (скорочено ***PJVII***-розподілом)

Фактично форма (10) є узагальненням розподілів Гаусса і Стьюдента; при $m = \infty$ – (10) є розподілом Гаусса: при $m < \infty$ – (10) є $t$-розподілом для дискретних значень ступенів свободи $\nu = 2m - 1$.

Джеффріс у [Jeffreys H., 1939] прийшов до такого висновку: якщо похибки спостережень $J_i$ за $n > 500$ є ідеально випадковими, тобто у значеннях $J_i$ немає жодної іншої інформації (впливом найнеприємніших систематичних похибок можна знехтувати), тоді параметр $m$ форми (10) має бути в таких межах:

$$3 < m < 5, \qquad (11)$$

тобто $m$ є ключовим параметром закону Пірсона–Джеффріса.

Як бачимо, ці межі є досить далекими від $m = \infty$, яке відповідає закону Гаусса.

П. Хьюбер (усне повідомлення) [Hampel F. R., Ronchetti E. M., Rousseeuw P. J., Stahel W. A., 1985, п. 1.26], пересуває ліву границю в (11) до $m = 2$, що цілком є допустимим для випадкових похибок з флуктуацією їх дисперсії [Dzhun I. V., 2012]. Головне, щоб розподіл випадкових похибок не мав $m > 5$, оскільки така ситуація свідчить про спотворення експерименту неврахованими впливами систематичних корельованих похибок, чи інших небажаних факторів. Так як для закону Гаусса $m = \infty$, то це означає, що нормальність похибок при обсягах вибірок $n > 500$ є приводом для серйозних підозр щодо якості вимірів на предмет неврахованих і спотворюючих закон розподілу систематичних впливів.

Саме такі уявлення про похибки багаторазових спостережень великих обсягів, започатковані Г. Джеффрісом, є найбільшим еволюційним проривом у теорії похибок і є суттю сучасних уявлень про їхні розподіли в еру великих вибірок.

Важливість вивчення форми розподілу похибок, тим більше для великих вибірок, вже давно підкреслювали в своїх працях [Newcomb S., 1886; Pearson K., 1902; Edgeworth F. Y., 1905; Student, 1927] та інші дослідники. Проте, лише тільки Джеффріс чітко визначив мету і конкретний напрямок зусиль дослідників, які бажають мати коректні, метрологічно досконалі розподіли для великих вибірок.

***Результати***

Для реалізації розглянутого способу апостеріорного контролю за стабільністю умов спостережень під час високоточних вимірів галілеєвого прискорення ми скористались спостереженнями на трьох пунктах високоточної гравіметричної опорної мережі Польщі: Борова Гора, Юзефослав і Ксьонж, які люб'язно передані авторам гравіметристами Варшавської політехніки. Для кожного пункту спостережень отримано емпіричні розподіли похибок з частотами $n_i$, обчислені для кожного інтервалу, теоретичні частоти за Гауссом $n'_i$ і взято різниці частот $n_i - n'_i$ (табл.).

Якими же насправді є розподіли похибок спостережень на цих пунктах з погляду класичної теорії похибок і з погляду принципів, що становлять основу некласичної теорії похибок [Dzhun I. V., 2015].

*Таблиця*

**Емпіричні розподіли похибок абсолютних, балістичних вимірювань галілеєвого прискорення на пунктах Борова Гора, Юзефослав і Ксьонж (Польща)**

| № з/п | Борова гора, $g = 981250156.16$ | | | | Юзефослав, $g = 98113794.20$ | | | | Ксьонж, $g = 981057046,61$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Інтер-вали | Час-тоти $n_i$ | Гауссові частоти $n'_i$ | $n_i - n'_i$ | Інтер-вали | Час-тоти $n_i$ | Гауссові частоти $n'_i$ | $n_i - n'_i$ | Інтер-вали | Час-тоти $n_i$ | Гауссові частоти $n'_i$ | $n_i - n'_i$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1 | 36,1–39,3 | 3 | 1,03 | +1,97 | 770,2–774,1 | 4 | 4,32 | –0,32 | 37,3–38,8 | 8 | 8,40 | –0,40 |
| 2 | 39,3–42,6 | 4 | 5,23 | –1,23 | 774,1–777,9 | 12 | 12,08 | –0,08 | 38,8–40,3 | 20 | 18,68 | +1,32 |
| 3 | 42,6–45,9 | 22 | 18,88 | +3,12 | 777,9–781,7 | 28 | 28,06 | –0,06 | 40,3–41,7 | 38 | 32,44 | +5,56 |
| 4 | 45,9–49,1 | 43 | 47,85 | –4,85 | 781,7–785,5 | 69 | 53,54 | +15,46 | 41,7–43,2 | 65 | 56,41 | +8,59 |
| 5 | 49,1–52,4 | 92 | 96,75 | –4,75 | 785,5–789,3 | 77 | 83,95 | –6,95 | 43,2–44,6 | 83 | 73,73 | +9,27 |
| 6 | 52,4–55,7 | 138 | 134,62 | +3,38 | 789,3–793,1 | 103 | 108,14 | –5,14 | 44,6–46,1 | 84 | 95,94 | –11,84 |
| 7 | 55,7–59,0 | 140 | 142,16 | –2,16 | 793,1–796,9 | 107 | 114,45 | –7,45 | 46,1–47,6 | 85 | 101,31 | –16,31 |
| 8 | 59,0–62,2 | 110 | 106,04 | +3,96 | 796,9–800,7 | 99 | 99,32 | –0,32 | 47,6–49,0 | 82 | 85,87 | –3,87 |
| 9 | 62,2–65,5 | 67 | 62,00 | +5,00 | 800,7–804,5 | 74 | 71,17 | +2,83 | 49,0–50,5 | 79 | 72,45 | +6,55 |
| 10 | 65,5–68,8 | 27 | 25,56 | +1,44 | 804,5–808,3 | 45 | 41,79 | +3,21 | 50,5–52,0 | 49 | 48,87 | +0,13 |
| 11 | 68,8–72,0 | 1 | 9,67 | –5,67 | 808,3–812,1 | 21 | 20,16 | +0,84 | 52,0–53,4 | 36 | 26,80 | +9,20 |
| 12 | 72,0–75,3 | 1 | 9,67 | –5,67 | 812,1–815,9 | 8 | 7,99 | +0,01 | 53,4–54,9 | 13 | 14,69 | –1,69 |
| 13 | 75,3–78,6 | 2 | 9,67 | –5,67 | 815,9–819,7 | 3 | 2,60 | +0,40 | 54,9–56,4 | 8 | 6,33 | +1,67 |

Найкращими з погляду метрологічної ситуації, яка склалась на пункті спостережень і яка досить наочно описується емпіричним законом розподілу, є виміри на пункті Юзефослав. Ці спостереження краще, ніж на інших двох пунктах вписуються в нормальний закон. Ймовірність того, що ці спостереження є вибіркою із нормальної генеральної сукупності, є найбільшою і становить $P_{c^2}$ = 79,36 %. Деяка плосковершинність вершини розподілу свідчить про наявність малих, корельованих систематичних похибок у результатах спостережень, проте ця плосковершинність не є системною. Середнє арифметичне, оцінку його точності і СКП можна вважати ефективними і спроможними оцінками. Коректність застосування класичних процедур обробки даних на цьому пункті не викликає сумнівів, оскільки значення $\chi^2$ = 6,250 для цього емпіричного розподілу міститься далеко зліва від критичного $c^2_{0,01}$ = = 23,2.

Цілком спроможною є метрологічна ситуація, що склалась на пункті Ксьонж. Ймовірність того, що ці спостереження є нормальними досить висока: $P_{c^2}$ = 52,80 %, що свідчить про допустимість отриманих оцінок галілеєвого прискорення і його точності.

Найгіршою, але також цілком допустимою є метрологічна ситуація на пункті вимірів Борова Гора. Ймовірність того, що спостереження на цьому пункті є вибірками з нормальної генеральної сукупності, на перший погляд, є досить непоганою і становить $P_{c^2}$ = 31,38 %. Три нижні інтервали цього розподілу в табл. об’єднані в один, всього інтервалів – 11, обчислене значення критерію $\chi^2$ = 9,373. Але що насторожує в цьому емпіричному розподілі – є проблема з “хвостами”. Саме два крайні інтервали – лівий і правий становили 75 % навантаження на значення $\chi^2$-тесту. Об’єднання трьох правих інтервалів під час обчислення $\chi^2$-критерію для цього розподілу зроблено для того, щоб не сильно хвилювати виконавців цих високоточних і надзвичайно важливих спостережень. Проте, якщо розряди не об’єднувати, то значення $P_{c^2}$ = 1,4 %, а значення $\chi^2$ = = 22,38. Воно менше від критичного $c^2_{0,01}$ = 23,2, але близьке до нього. Це означає, що реально цей розподіл можна признати нормальним з деякою натяжкою. Якщо б на цьому пункті обсяг вибірки був значно більший ніж $n$ = 650, то ця ненормальність з хвостами проявилась би сповна.

Отримані результати спостережень галілеєвого прискорення на пунктах Юзефослав, Ксьонж і Борова Гора з погляду НТП свідчать про те, що процедура вилучення систематичних із результатів спостережень є все ще неповною, недосконалою, оскільки ґрунтується на класичних уявленнях про похибки спостережень. Як показано і доведено в [Джунь, 2015], ці уявлення є цілком адекватними, але за обсягів спостережень $n$ у межах $30 \le n \le 500$. За обсягів вимірювань $n > 500$, як свідчить статистичний досвід, нормальний закон розподілу похибок і практично, і теоретично є неспроможним. За великих обсягів вибірок випадкові, незалежні похибки вимірювань підкоряються розподілу Пірсона–Джеффріса (10), основною характеристикою якого є показник його степеня $m$, який залежить від величини додатного ексцесу розподілу похибок. Границям (11) для $m$, за цілком некорельованих похибок, відповідають ексцеси:

$$6 \ge \varepsilon \ge 1{,}2. \qquad (12)$$

Це випливає з теорії кембриджського професора Г. Джеффріса і висновків НТП.

Ексцеси розподілів спостережень у Юзефославі, Ксьонжі і Боровій Горі є досить далекими від цих границь. А це є приводом для значної стурбованості, оскільки близькість великих вибірок до закону Гаусса свідчить про те, що система вилучення систематичних похибок із результатів спостережень є неповною. Нормальність розподілу похибок, якщо $n > 500$ свідчить про наявність не вилучених систематичних похибках у результатах спостережень.

***Наукова новизна і практична значущість***

У статті вперше застосовано методи НТП для вдосконалення сучасних абсолютних високоточних спостережень прискорення вільного падіння Землі. Ці спостереження виконуються в складній метрологічній ситуації і потребують врахування низки нестаціонарних джерел систематичних похибок. Згідно з висновками НТП спостереження з обсягами вимірів $n > 500$ вважаються досконалими не тоді, коли їхні похибки є гауссовими, а тоді, коли вони підкоряються розподілу Пірсона–Джеффріса з ексцесами, які відповідають нормі (12).

Практична значущість дослідження полягає в створенні на основі методів НТП доказової бази, яка демонструє важливість постійного вивчення форми емпіричного розподілу похибок, як засобу контролю за метрологічною ситуацією під час високоточних вимірів галілеєвого прискорення при обсягах вибірок $n > 500$.

Доведення емпіричних розподілів похибок такого обсягу до ідеалу НТП: розподілу Пірсона–Джеффріса з ексцесами (12) шляхом використання все досконаліших методів вилучення систематичних похибок – у цьому полягає суть стратегії вдосконалення абсолютних високоточних вимірів гравітаційного прискорення. Доведення розподілів великих обсягів лише до закону Гаусса, як це показують проаналізовані нами спостереження – це лише половина шляху.

### *Висновки*

1. Згідно з аксіоматикою НТП результати високоточних абсолютних вимірів галілеєвого прискорення на пунктах Юзефослав, Ксяк і Борова Гора слід зарахувати до категорії допустимих оцінок, але не до таких, за яких дією систематичних похибок можна знехтувати, оскільки ексцеси похибок спостережень, на цих пунктах далекі від норми (12), започатковано Г. Джеффрісом [Jeffreys H., 1939].

2. Високоточні абсолютні балістичні виміри галілеєвого прискорення, що виконані гравіметром ГАБЛ, практично є ідеальними, і не мають суттєвих систематичних похибок, оскільки підкоряються розподілу Пірсона–Джеффріса з $m = 6{,}67 \pm 1{,}37$ [Dzhun I. V., 1983], тобто, фактично відповідають нормі (11). Суть стратегії вдосконалення високоточних абсолютних балістичних вимірів галілеєвого прискорення полягає в доведенні розподілів їхніх похибок до норм (10) і (11).

3. Не слід недооцінювати наявність істотних відхилень дійсних розподілів похибок абсолютних вимірювань від закону Пірсона–Джеффріса з нормою (11), оскільки саме ця норма є свідченням того, що дія значущих систематичних похибок повністю вилучена, а всі інші не враховані систематичні похибки не мають істотної дії і їх можна зарахувати до шумового поля, інакше кажучи, при вибірках багаторазових спостережень обсягом $n > 500$, саме норми (10) і (11) забезпечують отримання ефективних оцінок шуканих величин. Нормальність вибірок за $n > 500$ означає лише те, що вагова функція таких спостережень є не виродженою і допускає оцінку, залишаючи похибки корельованими.

Цією корельованістю можна знехтувати лише за умов, коли емпіричні розподіли мають характер джеффрісових похибок (10) з показником степеня $m$ у межах (11). Цього можна досягти за допомогою глибшого вивчення різних джерел систематичних похибок і їх вилучення із результатів спостережень. За обсягів вибірок $n > 500$, як свідчать висновки НТП [Dzhun I. V., 2015], нормальність похибок не є нормою, а приводом значної стурбованості щодо наявності в спостереженнях систематичних похибок, які ще не виявлені і які жорстко тримають емпіричні розподіли похибок в обіймах нормальності.

Якими впливами зумовлені систематичні похибки на цих пунктах спостережень – впливом Місяця, енергією мікросейм, тиском атмосфери чи її температурою, особливостями місця спостережень – належить ще виявити. Гравіметристів, які виконують ці спостереження, чекає попереду наполеглива цілеспрямована робота з метою виявлення причин, які спотворюють реальний розподіл з тим, щоб привести його форму до ідеалу (10), а ексцес до меж (12). Вивчення цих впливів може скласти тему значного дослідження, адже абсолютні виміри $g$ стають усе більше розповсюдженими і необхідними. Авторам цих спостережень необхідно ознайомитись з методами НТО в роботах [Dzhun I. V., 1983, 2015], а також з фундаментальними працями [Jeffreys H., 1939, 1940, §5.7].

### Список літератури

Большев Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.

Бородачев Н. А. Основные вопросы теории точности производства / Бородачев Н. А.; под ред. А. Н. Колмогорова. – Москва; Л. : Изд. АН СССР. 1950. – 360 с.

Джунь И. В. Анализ параллельных широтных наблюдений, выполненных по общей программе: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: спец. 01.03.01 "Астрометрия и небесная механика" / И. В. Джунь. – К. : Институт математики АН УССР, 1974. – 19 с.

Джунь И. В. Особенность закона распределения результатов баллистических измерений ускорения силы тяжести / И. В. Джунь, Г. П. Арнаутов, Ю. Ф. Стусь, С. Н. Щеглов // Повторные гравиметрические наблюдения. – Изд. МГК при Президиуме АН СССР и НПО "Нефтегеофизика". – М., 1984. – С. 87 – 100.

Джунь И. В. Неклассическая теория погрешностей измерений / И. В. Джунь. – Ровно : Естеро, 2015. – 168 с.

Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М. : Мир, 1975. – 648 с.

Шеффе Г. Дисперсионный анализ / пер. с англ.; Г. Шеффе. – М. : Физматгиз, 1963. – 628 с.

Bessel F. W. Fundamenta Astronomiae. Konigsberg: Nicolovius, 1818.

Bessel F. W., Baeyer J. J. Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit Preussischen und Russischen Dreieckskettеn. – Druckerei der Koniglichen Akademie der Weissenschaften. Berlin, 1838 – Reprinted in part in: Abhandlungen von F. W. Bessel. Vol. 3 / Ed. by R. Engelmann. Leipzig: W. Engelmann, 1876. – P. 62–138.

Dzhun I. V. Method for diagnostics of mathematical models in theoretical Astronomy and Astrometry. Kinematics and Physics of Celestial Bodies. – New York: Allerton Press, Inc., 2011. – Vol. 27, No. 5. – P. 260–264.

Dzhun I. V. What are the differences "Observation-Calculation" bound to be during modern experiments in Astrometry / Kinematics and Physics of Celestial Bodies. – New York : Allerton Press, Inc., 2012, – Vol. 28, No. 1. – P. 70–78.

Edgeworth F. Y. The law of errors. Proceeding of the Cambridge Philosophical Society. – 1905. – Vol. 20, No. 36.

Gauss C. F. Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium. – Hamburgi, 1809.

Geary R. C. Distribution of Student's ratio for non-normal samples. Journal of the Royal Statistical Society, 1936. – Suppl. 3.

Hampel F. R., Ronchetti E. M., Rousseeuw P. J., Stahel W. A. Robust Statistics. The approach based on influence functions. – New York : John Wiley & Sons. 1986. – 488 p.

Jeffreys H. The law of errors in the Greenwich variation of latitude observations. Mon. Not. of the RAS, 1939, – Vol. 99, No. 9. – P. 703–709.

Jeffreys H. Theory of probability. Sec. Eddition. – Oxford, 1940. – 468 p.

Lukacs E. A. A characterization of the normal distribution. Annals of Mathematical Statistics, 1942. – Vol. 13, No. 91.

Newcomb S. Generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best result. Amer. J. Math. 1986, No. 1/14. – P. 1–249.

Pearson K. On the mathematical theory of errors of judgment with special reference to the personal equation // Philosophical Transactions of the Royal Sosiety of London. Ser. A., 1902. – Vol. 198. – P. 253–296.

Poincare H. Calcus des probabilities. Paris: 1912 (2 ed).

Romanowski M., Green E. Practical applications of the modified normal distribution. – Bull. Geodesique, 1965. – Vol. 76. – P. 1–20.

Romanowski M. The theory of random errors based on the concept of modulated normal distributions. Ottawa: National Research Council of Canada (NRC-11432), Division Phys., 1970.

Stigler S. M. Contribution to the discussion of the meeting of Robust Statistics. – In: Proceedings of the 40$^{th}$ Session of the ISI, Warsaw. – Bull. Int. Statist. Inst., 1975. – Vol. XLVI, book 1. – P. 383–384.

Student. Errors of routine analysis. – Biometrika, 1927. – Vol. 19. – P. 151–164.

Tukey J. W. A Survey of sampling from contaminated distributions. – In: Contributions to Probability and Statistics / Ed. by I. Olkin. Stanford: Stanford Univ. Press, 1960. – P. 448–485.

Tukey J. W. The Future of data analysis. – Ann. Math. Statist., 1962. – Vol. 33. – P. 1–67.

Tukey J. W. Data analysis and the frontiers of Geophysics. // Science. – 1965. – Vol. 148. No. 3675. – P. 1283–1289.

П. Д. ДВУЛИТ[1], И. В. ДЖУНЬ[2*]

[1] Кафедра высшей геодезии и астрономии, Национальный университет "Львовская политехника", ул. С. Бандеры, 12, Львов,Украина, 79013, эл. почта: dvupet@ukr.net.

[2*] Кафедра математического моделирования, Международный экономико-гуманитарный университет им. акад. С. Демьянчука, ул. С. Демьянчука, 4, Ровно, Украина, 33027, эл. почта: iosif-june@rambler.ru.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ НЕКЛАСИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ АБСОЛЮТНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ ГАЛИЛЕЕВОГО УСКОРЕНИЯ

**Цель** исследования – разработка способа апостериорного контроля за стабильностью условий наблюдений при современных высокоточных абсолютных измерениях ускорения силы тяжести Земли на основе методов неклассической теории ошибок (НТО). Указанные измерения осуществляются в сложной метрологической ситуации, которая непрерывно нарушается под влиянием различных причин: трендами частотного спектра и энергии микросейм, геологическими, атмосферными, приливными и другими космическими факторами, неконтролируемыми эффектами места наблюдений, возможными сбоями в работе гравиметра, и пр. Посредством такого контроля необходимо добиваться получения таких распределений погрешностей наблюдений, которые обеспечивают эффективные, или, по крайней мере, допустимые среднеарифметические оценки галилеевого ускорения. **Методика** достижения этой цели обеспечивается алгоритмами НТО, которые разработаны с целью контроля за формой эмпирических распределений погрешностей высокоточных многократных наблюдений больших объемов на основе принципов теории проверки гипотез Неймана-Пирсона. **Основным результатом** исследования есть разработка способа диагностики метрологической ситуации, которая была при выполнении наблюдений, на основе методов НТО. Эти методы основаны на использовании апостериорных оценок статистических кумулянт формы эмпирических распределений погрешностей с дальнейшим применением критерия $\chi^2$ для контроля значимости её отклонений от установленных норм. В соответствии с принципами НТО такими нормами являются законы: Гаусса или Пирсона-Джеффриса, так как именно они обеспечивают несингулярность весовой функции наблюдений, следовательно и возможность оценок, при математической обработке наблюдений. **Научная новизна**: впервые задействованы процедуры НТО для усовершенствования проведения современных абсолютных высокоточных наблюдений галилеевого ускорения, которые выполняются в сложных метрологических условиях при одновременной необходимости учета ряда нестационарных источников систематических ошибок. **Практическая значимость** исследования состоит в разработке алгоритма контроля формы эмпирического распределения погрешностей с целью усовершенствования проведения высокоточных баллистических измерений галилеевого ускорения на основе аксиоматики НТО. Изучение причин отклонения распределений ошибок от нормального закона давно уже является необходимым элементом теории точности производства и контроля за стабильностью работы всевозможных агрегатов. Внедрение таких подходов, начатых еще А. Н. Колмогоровым и его школой, уже давно лежит в основе стратегии, которая обеспечивает метрологическую грамотность процесса измерений и пути повышения их точности.

*Ключевые слова*: абсолютные баллистические измерения галилеевого ускорения; законы: Гаусса, Пирсона-Джеффриса; неклассическая теория ошибок.

P. DVULIT[1], I. DZHUN[2*]

[1] Department of Higher Geodesy and Astronomy of Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandera Str., Lviv, Ukraine, 79013, e-mail: dvupet@ukr.net.
[2*] Department of Mathematical Modeling, International University of Economics and Humanities named after Academician S. Demianchuk, 4, S. Demianchuk Str., Rivne, Ukraine, 33027, e-mail: iosif-june@rambler.ru.

## APPLICATION OF METHODS OF THE NON-CLASSICAL ERROR THEORY IN ABSOLUTE MEASUREMENTS OF GALILEAN ACCELERATION

**The aim** of this research is to develop a method for a posteriori control over the stability of observation conditions in modern high-precise absolute measurements of the acceleration of the Earth's gravity on the basis of methods of the non-classical error theory (NET). These measurements are carried out in a complicated metrological situation, which is continuously broken under the influence of various causes: trends of the frequency spectrum and energy of microseisms, geological, atmospheric, tidal and other space factors, including uncontrolled effects of the place of observation and possible malfunctions in the work of the gravimeter. Through such control, it is necessary to obtain such distributions of observation errors that provide effective, or, at least, admissible arithmetic mean estimates of the Galilean acceleration. **The methodology** of achieving this aim is provided by the NET algorithms, which are created to control the form of empirical distributions of errors of high-precise multiple large-scale observations based on the principles of the Neumann-Pearson hypothesis testing theory. **The basic result** of the study is the development of a method for diagnosing the metrological situation, which was in the course of observing, on the basis of the NET methods. These methods are based on the use of the posteriori estimates of statistical cumulates in the form of empirical distributions of errors with the further application of the $\chi^2$-criterion to control the significance of its deviations from the established norms. In accordance with the principles of the NET, such norms are the laws of: Gauss or Pearson-Jeffreys, since they provide the non-singularity of the weight function of observations, and therefore the possibility of estimates, in the mathematical processing of observations. **The scientific novelty of this investigation:** the NET procedures are used for the first time to improve the current absolute high-precise observations of Galilean acceleration, which are performed in complicated metrological conditions, simultaneously taking into account the number of non-stationary sources of systemic errors. **Practical significance of the study:** the development of an algorithm for controlling the form of the empirical distribution of errors in order to improve the realization of high-precise ballistic measurements of Galilean acceleration based on the axiomatics of the NET. The study of the reasons for the deviation of distribution of errors from the normal law has long been a necessary element of the theory of production accuracy and control over the stability of the operation of various aggregates. The introduction of such approaches, started by Kolmogorov and his school, has long been at the heart of the strategy, which ensures metrological literacy of the measurement process and ways of improving their accuracy.

*Key words:* absolute ballistic measurements of Galilean acceleration; Laws: Gauss, Pearson-Jeffreys; Nonclassical error theory.

## REFERENCES

Bolshev L. N., Smirnov N. V. *Tablitsy matematicheskoy statistiki* [Tables of mathematical Statistics]. Moscow: *Nauka*, 1983, 416 p.

Borodachev N. A. *Osovnyie voprosy teorii tochnosti proizvodstva.* [The main questions of the theory of production accuracy]. *Pod red.* A. N. Kolmogorova. Moscow– Leningrad: *Izd. AN SSSR.* 1950, 360 p.

Dzhun I. V. *Analiz parallelnyih shirotnyih nablyudeniy, vypolnennyh po obschey programme* [Analysis of parallel latitudinal observations performed under the general program:]*: avtoref. dis... na soiskanie uch. stepeni kand. fiz. – matem. nauk: spets*. 01.03.01 "*Astrometriya i nebesnaya mehanika*" ["Astrometry and Celestial Mechanics"]. Kyiv: *Institut matematiki AN USSR*, 1974, 19 p.

Dzhun I. V., Arnautov G. P., Stus Yu. F., Scheglov S. N. *Osobennost zakona raspredeleniya rezultatov ballisticheskih izmereniy uskoreniya silyi tyazhesti* [A feature of the distribution law of the results of ballistic measurements of acceleration due to the gravity]. *Povtornyie gravimetricheskie nablyudeniya* [Repeated Gravimetric Observations]. *Izd. MGK pri Prezidiume AN SSSR i NPO "Neftegeofizika"*. Moscow: 1984, pp. 87–100.

Dzhun I. V. *Neklassichnaya teoriya pogreshnostey izmereniy* [The nonclassical error theory of measurements]. Rovno: Estero, 2015, 168 p.
Kramer G. *Matematichiskie metody statistiki* [Mathematical methods of Statistics]. Moscow: *Mir*, 1975, 648 p.
Sheffe G. *Dispersionnyi analiz. Per. s angl*. [Dispersion analysis]. Moscow: *Fizmatgiz*, 1963, 628 p.
Bessel F. W. Fundamenta Astronomiae. Konigsberg: Nicolovius, 1818.
Bessel F. W., Baeyer J. J. Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit Preussischen und Russischen Dreiecksketten. Druckerei der Koniglichen Akademie der Weissenschaften. Berlin, 1838. Reprinted in part in: Abhandlungen von F. W. Bessel. Vol. 3. Ed. by R. Engelmann. Leipzig: W. Engelmann, 1876, pp. 62–138.
Dzhun I. V. Method for diagnostics of mathematical models in theoretical Astronomy and Astrometry. Kinematics and Physics of Celestial Bodies. New York: Allerton Press, Inc., 2011, Vol. 27, no. 5, pp. 260–264.
Dzhun I. V. What are the differences “Observation-Calculation” bound to be during modern experiments in Astrometry. Kinematics and Physics of Celestial Bodies. New York: Allerton Press, Inc., 2012, Vol. 28, no. 1. pp. 70–78.
Edgeworth F. Y. The Law of Errors. Proceeding of the Cambridge Philosophical Society. 1905, Vol. 20, no. 36.
Gauss C. F. Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium. Hamburgi: 1809.
Geary R. C. Distribution of Student’s ratio for non-normal samples. Journal of the Royal Statistical Society, 1936. Suppl. 3.
Hampel F. R., Ronchetti E. M., Rousseeuw P. J., Stahel W. A. Robust Statistics. The approach based on influence functions. New York: John Wiley & Sons. 1986, 488 p.
Jeffreys H. The Law of Errors in the Greenwich Variation of Latitude Observations. Mon. Not. of the RAS, 1939, Vol. 99, no. 9, pp. 703–709.
Jeffreys H. Theory of Probability. Sec. Eddition. Oxford: 1940, 468 p.
Lukacs E. A. A characterization of the normal distribution. Annals of Mathematical Statistics, 1942, Vol. 13, no. 91.
Newcomb S. Generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best Result. Amer. J. Math. 1986, no.1/14, pp: 1–249.
Pearson K. On the mathematical theory of errors of judgment with special reference to the personal equation. Philosophical Transactions of the Royal Sosiety of London. Ser. A., 1902, Vol. 198, pp/ 253–296.
Poincare H. Calcus des probabilities. Paris: 1912 (2 ed).
Romanowski M., Green E. Practical applications of the modified normal distribution. Bull. Geodesique, 1965, Vol. 76, pp. 1–20.
Romanowski M. The Theory of Random Errors based on the Concept of Modulated Normal Distributions. Ottawa: National Research Council of Canada (NRC-11432), Division Phys., 1970.
Stigler S. M. Contribution to the discussion of the meeting of Robust Statistics. In: Proceedings of the 40$^{th}$ Session of the ISI, Warsaw. Bull. Int. Statist. Inst., 1975, Vol. XLVI, book 1, pp. 383–384.
Student. Errors of Routine Analysis. Biometrika, 1927, Vol. 19, pp. 151–164.
Tukey J. W. A Survey of Sampling from Contaminated Distributions. In: Contributions to Probability and Statistics. Ed. by I. Olkin. Stanford: Stanford Univ. Press, 1960, pp. 448–485.
Tukey J. W. The future of data analysis. – Ann. Math. Statist., 1962, Vol. 33, pp. 1–67.
Tukey J. W. Data analysis and the frontiers of Geophysics. Science, 1965, Vol. 148. No. 3675, pp. 1283–1289.

Надійшла 12.05.2017 р.