

УДК 550.344

Р. М. ПАК

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, вул. Героїв Майдану, 32, Львів, 79012, Україна, тел. +38(032)2584426, ел. пошта: gpak@ukr.net

## МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВОГО ПОЛЯ, ЗБУДЖЕНОГО ГЛИБИННИМ АБО ПОВЕРХНЕВИМ ДЖЕРЕЛОМ У ГОРИЗОНТАЛЬНО-ШАРУВАТОМУ ПІВПРОСТОРИ

<https://doi.org/10.23939/jgd2017.01.114>

**Мета.** Метою роботи є проведення математичного моделювання процесів збудження і поширення сейсмічного хвильового поля у горизонтально-шаруватому ізотропному пружному півпросторі; узагальнення отриманих результатів на випадок поглинаючих середовищ; числова реалізація розробленої методики розрахунку сейсмічних хвиль, збуджених точковим джерелом у вигляді простої сили (яка залежить від часу) у горизонтально-шаруватому середовищі з поглинанням; побудова стійких алгоритмів і програм для числових розрахунків синтетичних сейсмограм; проведення обчислювальних експериментів для верифікації результатів. **Методика.** Методика передбачає введення первинних хвильових полів, збуджених простою силою на поверхні або всередині горизонтально-шаруватого ізотропного пружного півпростору з поглинанням. Вона ґрунтується на використанні інтегралів Бесселя–Мелліна, матричного методу Томсона–Хаскелла та його модифікацій. **Результати.** Розроблено ефективний і стійкий метод обчислення синтетичних сейсмограм для багатозарового горизонтально-шаруватого ізотропного середовища з поглинанням. Метод враховує наявність вільної поверхні, наявність точкового джерела у вигляді простої сили, розміщеного на поверхні або всередині півпростору, інтерференційні явища, пов'язані з тонкошаруватістю. Для підвищення стійкості розрахунку хвильового поля зроблено перехід від характеристичних матриць четвертого порядку до матриць шостого порядку. Проведено моделювання явища резонансу в горизонтально-шаруватому півпросторі, причиною якого є наявність верхнього шару знижених швидкостей. **Наукова новизна.** За допомогою введення первинних хвильових полів, використовуючи матричний метод, розроблено чисельно-аналітичний підхід до моделювання хвиль у горизонтально-шаруватих ізотропних неідеально пружних середовищах. Побудовано алгоритми і програми для розрахунку синтетичних сейсмограм на вільній поверхні таких середовищ. Ці програми дають змогу досліджувати вплив зміни параметрів середовища і джерела у вигляді зосередженої довільно спрямованої сили на синтетичні сейсмограми. **Практична значущість.** Практичне значення розробленої методики полягає у можливості, як аналітично, так і чисельно досліджувати хвильові процеси, що протікають у шаруватих середовищах. Побудований алгоритм розрахунку сейсмічного хвильового поля у горизонтально-шаруватому півпросторі можна використати для розроблення методики обчислення хвильового поля, породженого зсувною дислокацією, для розроблення способів виявлення механізму і визначення параметрів вогнищ землетрусів.

*Ключові слова:* математичне моделювання; сейсмічне хвильове поле; метод Томсона–Хаскелла; горизонтально-шарувате середовище; сейсмічна добротність; точкова сила; синтетична сейсмограма; локальний резонанс.

### *Вступ*

Математичне моделювання хвильових полів є ефективним інструментом, що використовується, зокрема, для побудови сейсмічних зображень середовища, інверсії сейсмічних даних для визначення параметрів вогнищ землетрусів, проектування систем спостережень, для теоретичних досліджень хвильових процесів.

Оброблення та інтерпретація сейсмічних даних з метою визначення параметрів середовища або джерела ґрунтується на використанні зареєстрованого хвильового поля та ітераційного процесу уточнення, на кожному етапі якого розв'язується пряма задача. Пряма задача (синтез хвильового поля) розв'язується за допомогою математичного моделювання. 3D-моделювання вимагає значних

ресурсів машинного часу і великого об'єму оперативної пам'яті, оскільки параметри середовища можуть змінюватися у всіх напрямках. Тому ці методи складно використовувати для розв'язування обернених задач, оскільки для цього необхідний багаторазовий синтез хвильового поля. Крім того, цими універсальними методами можна розраховувати лише повні хвильові поля, а в багатьох випадках бажано мати певну визначену частину цього поля. Тому синтез хвильового поля матричним методом, як і раніше, широко використовують. Він володіє унікальними властивостями. Це, зокрема, врахування ефектів анізотропії, поглинання, наявності вільної поверхні та криволінійних меж поділу, можливість задавати довільні типи джерел, отримувати частини хви-

льового поля, що містять потрібні типи хвиль. Крім цього, матричний метод дуже часто використовується для інверсії тензора сейсмічного моменту. Однак під час безпосередньої комп'ютерної реалізації методу потрібно знаходити суми зростаючих і спадних експонент, що призводить до втрати точності обчислень [Молотков, 1984].

Було запропоновано низку методів усунення цього недоліку [Cormier, 2007]. Наприклад, використання мінорів замість пропагаторів [Dunkin, 1965], перехід до матриць вищого порядку, застосування рекурсивних формул розрахунку мінорів з урахуванням різної поведінки експонент залежно від хвильового числа [Abo-Zena, 1979], рекурсивний алгоритм для обчислення матриць відбиття і матриць заломлення на кожній межі [Kennett, 1983]. Рекурсивний алгоритм є складовою методу відбиття [Müller, 1985, Chapman, 2003, Pelet *et. al.*, 2008], і методу дискретного хвильового числа [Bouchon, 2003].

У зв'язку з цим залишається необхідність розроблення методів математичного моделювання, які б дали змогу швидко і точно розраховувати всі компоненти хвильових полів, генерованих джерелами різних типів. У цій статті запропоновано методику математичного моделювання хвильового поля на вільній поверхні горизонтально-шаруватого півпростору від точкового джерела. У ній підхід, описаний у монографії [Молотков, 1984], узагальнено для випадку простої сили, прикладеної у довільній точці середовища за наявності поглинання. У статті наведено також результати випробування алгоритму та програми для обчислення сейсмограм, розроблених на основі методики.

### Мета

Метою роботи є проведення математичного моделювання процесів збудження і поширення сейсмічного хвильового поля у горизонтально-шаруватому ізотропному пружному півпросторі; узагальнення отриманих результатів на випадок поглинаючих середовищ; числова реалізація розробленої методики розрахунку сейсмічних хвиль, збуджених точковим джерелом у вигляді простої сили (яка залежить від часу) у горизонтально-шаруватому середовищі з поглинанням; побудова стійких алгоритмів і програм для числових розрахунків синтетичних сейсмограм; проведення обчислювальних експериментів для верифікації результатів.

### Методика

Методика передбачає введення первинних хвильових полів, збуджених простою силою на поверхні або всередині горизонтально-шаруватого ізотропного пружного півпростору з поглинанням. Вона ґрунтується на використанні інтегралів Бесселя–Мелліна, матричного методу Томсона–Хаскелла та його модифікацій.

## Результати

### Постановка задачі

Розглянемо в циліндричній системі координат  $(r, \varphi, z)$  горизонтально-шаруватий півпростір, який складається із  $(n+1)$ -го однорідних, ізотропних, лінійно-пружних шарів з плоскими межами поділу. Початок системи координат розміщено на вільній поверхні цього середовища, а вісь  $Oz$  спрямовано вниз у напрямку шарів. Припустимо, що на межах шарів, які характеризуються товщиною, густиною, швидкостями поширення поздовжніх і поперечних хвиль  $h_i, \rho_i, v_{Pi}, v_{Si}$  відповідно  $(i=1, 2, \mathbf{K}, n+1)$ , виконуються умови жорсткого контакту. Для  $(n+1)$ -го шару вважається, що  $h_{n+1} = +\infty$ . Нехай у довільному шарі у момент часу  $t=0$  починає діяти точкове джерело у вигляді зосередженої сили  $\mathbf{f}(t) = (f_r(t), f_\varphi(t), f_z(t))^T$ . Цей шар розділимо уявно горизонтальною межею, що проходить через точку прикладання сили. Так, утворимо два шари, верхній з яких матиме номер  $s$ , а нижній –  $s+1$ . Тоді джерело знаходитиметься на  $s$ -й межі в точці  $\mathbf{r} = (0, 0, z_s)$ .

Поширення пружних хвиль у кожному шарі описується диференціальним рівнянням [Акі, Richards, 2002]

$$\rho_i \mathfrak{L}_i = (\lambda_i + \mu_i) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_i) - \mu_i \nabla^2 \mathbf{u}_i, \quad (1)$$

у якому  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)$  – вектор переміщення,  $\rho_i$  – густина,  $\lambda_i$  та  $\mu_i$  – параметри Ламе для  $i$ -го шару. Припускається, що інтенсивність джерела  $\mathbf{f}(t)$  для  $t < 0$  перетворюється на нуль, і тому хвильове поле, що утворюється, повинно задовольняти нульові початкові умови:

$$\mathfrak{L}_i(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (2)$$

Хвильове поле також повинно задовольняти крайові умови:

$$\mathbf{u}_i|_{z=H_i} = \mathbf{u}_{i+1}|_{z=H_i}, \quad \tau_{zli}|_{z=H_i} = \tau_{zli+1}|_{z=H_i},$$

$$\mathbf{r} \neq (0, 0, z_s), \quad (i=1, 2, \mathbf{K}, n);$$

$$\tau_{zl}|_{z=0} = 0;$$

$$[\tau_{zl}]|_{z=z_s} = -\frac{f_l(t) \delta(r)}{2\pi r}. \quad (3)$$

Передбачено заданою умову випромінювання: хвилі з півпростору не повертаються. Символом  $[\tau_{zl}]$  позначено стрибок  $\tau_{zl}(z_s+0) - \tau_{zl}(z_s-0)$  функції  $\tau_{zl}(\mathbf{r}, t)$  для  $z = z_s, l = \{r, \varphi, z\}$ . У формулах (3) літерою  $\tau$  з індексами позначено елементи тензора напружень для певного шару,

$H_i$  – відстань від вільної поверхні до нижньої межі  $i$ -го шару,  $\delta(r)$  – функція Дірака.

Для рівняння (1) існують потенціали поля переміщень  $\phi_i, \Psi_i, \chi_i$ , [Aki, Richards, 2002], які пов'язані з компонентами вектора переміщення та елементами тензора напружень формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \nabla \cdot \phi_i + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{k} \Psi_i) + \nabla \times \mathbf{k} \chi_i, \\ \tau_{rzi} &= \mu_i \left( 2\phi_{i,rz} + 2\Psi_{i,zzr} + \frac{\chi_{i,\varphi z}}{r} - \frac{\Psi_{i,ttz}}{v_{Si}^2} \right), \\ \tau_{z\varphi i} &= \frac{\mu_i}{r} \left[ 2\phi_{i,z\varphi} + 2\Psi_{i,zz\varphi} - r\chi_{i,rz} - \frac{\Psi_{i,tt\varphi}}{v_{Si}^2} \right], \\ \tau_{zzi} &= \frac{\lambda_i \phi_{i,tt}}{v_{pi}^2} + 2\mu_i \left( \phi_{i,zz} + \Psi_{i,zzz} - \frac{\Psi_{i,ttz}}{v_{Si}^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Ці потенціали задовольняють хвильові рівняння:

$$\Delta \phi_i = v_{pi}^2 \Delta \phi_i, \quad \Delta \Psi_i = v_{Si}^2 \Delta \Psi_i, \quad \Delta \chi_i = v_{Si}^2 \Delta \chi_i. \quad (5)$$

Введемо перетворення

$$Y = \Xi(\tilde{Y}) = -\frac{1}{4\pi\rho} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \tilde{Y} \exp(kt\eta) d\eta, \quad (6)$$

де  $j = \sqrt{-1}$ , і запишемо співвідношення для зображень потенціалів прямих (первинних) хвиль P, SV і SH, збуджених заданим джерелом у шарі з номером  $s$ , відповідно  $\tilde{\phi}_s^u, \tilde{\Psi}_s^u, \tilde{\chi}_s^u$ , і в шарі з номером  $s+1$ :  $\tilde{\phi}_{s+1}^d, \tilde{\Psi}_{s+1}^d, \tilde{\chi}_{s+1}^d$ . Для цього використаємо зображення потенціалів для однорідного ізотропного середовища, отриманих в статті [Роганов, Пак, 2013]. З огляду на те, що точкове джерело знаходиться у шарі з номером  $s$ , одержимо:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_s^u &= J_1(kr) F_r(k\eta) X_s^{(1)+} e^{k\alpha_s(z-H_{s-1})} + \\ &+ J_0(kr) F_z(k\eta) X_s^{(2)+} e^{k\alpha_s(z-H_{s-1})}, \\ \tilde{\phi}_{s+1}^d &= J_1(kr) F_r(k\eta) X_{s+1}^{(1)-} e^{k\alpha_{s+1}(H_s-z)} + \\ &+ J_0(kr) F_z(k\eta) X_{s+1}^{(2)-} e^{k\alpha_{s+1}(H_s-z)}, \\ \tilde{\Psi}_s^u &= k^{-1} J_1(kr) F_r(k\eta) Y_s^{(1)+} e^{k\beta_s(z-H_{s-1})} + \\ &+ k^{-1} J_0(kr) F_z(k\eta) Y_s^{(2)+} e^{k\beta_s(z-H_{s-1})}, \\ \tilde{\Psi}_{s+1}^d &= k^{-1} J_1(kr) F_r(k\eta) Y_{s+1}^{(1)-} e^{k\beta_{s+1}(H_s-z)} + \\ &+ k^{-1} J_0(kr) F_z(k\eta) Y_{s+1}^{(2)-} e^{k\beta_{s+1}(H_s-z)}, \\ \tilde{\chi}_s^u &= J_1(kr) F_\varphi(k\eta) Z_s^+ e^{k\beta_s(z-H_{s-1})}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\chi}_{s+1}^d = J_1(kr) F_\varphi(k\eta) Z_{s+1}^- e^{k\beta_{s+1}(H_s-z)}, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} X_s^{(1)+} &= \frac{e^{-k\alpha_s h_s}}{\alpha_s \eta^2}, \quad X_s^{(2)+} = -\frac{e^{-k\alpha_s h_s}}{\eta^2}, \\ X_{s+1}^{(1)-} &= \frac{1}{\alpha_{s+1} \eta^2}, \quad X_{s+1}^{(2)-} = \frac{1}{\eta^2}, \\ Y_s^{(1)+} &= -\frac{e^{-k\beta_s h_s}}{\eta^2}, \quad Y_s^{(2)+} = \frac{e^{-k\beta_s h_s}}{\beta_s \eta^2}, \\ Y_{s+1}^{(1)-} &= \frac{1}{\eta^2}, \quad Y_{s+1}^{(2)-} = \frac{1}{\beta_{s+1} \eta^2}, \\ Z_s^+ &= \frac{(\beta_s^2 - 1) e^{-k\beta_s h_s}}{\beta_s \eta^2}, \\ Z_{s+1}^- &= \frac{(\beta_{s+1}^2 - 1) e^{-k\beta_{s+1} h_s}}{\beta_{s+1} \eta^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

У формулах (7) і (8)  $\alpha_s = \sqrt{1 + \eta^2 / v_{S_s}^2}$ ,  $\beta_s = \sqrt{1 + \eta^2 / v_{P_s}^2}$ ,  $H_s = z_s$ ,  $J_0(kr)$ ,  $J_1(kr)$  – функції Бесселя порядку 0 і 1,  $F_r(k\eta)$ ,  $F_\varphi(k\eta)$ ,  $F_z(k\eta)$  – зображення функцій відповідно  $f_r(t)$ ,  $f_\varphi(t)$ ,  $f_z(t)$  інтегралом Лапласа  $F(k\eta) = \int_0^\infty f(t) \exp(-k\eta t) dt$ . З метою скорочення виразів, у подальшому записуватимемо ці функції без аргументів.

### Представлення розв'язку на основі методу Томсона–Хаскелла

В умовах неоднорідного півпростору енергія первинних хвиль перерозподіляється. Тому розв'язок хвильових рівнянь (5) для кожного шару середовища слід шукати, з урахуванням початкових умов (2), у формі розв'язків (7) для однорідного простору:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i &= J_1 X_i^{(1)} F_r + J_0 X_i^{(2)} F_z, \\ \tilde{\Psi}_i &= k^{-1} J_1 Y_i^{(1)} F_r + k^{-1} J_0 Y_i^{(2)} F_z, \\ \tilde{\chi}_i &= J_1 Z_i F_\varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} X_i^{(1)} &= X_i^{(1)+} e^{k(z-H_{i-1})\alpha_i} + X_i^{(1)-} e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_i}, \\ X_i^{(2)} &= X_i^{(2)+} e^{k(z-H_{i-1})\alpha_i} + X_i^{(2)-} e^{k(H_{i-1}-z)\alpha_i}, \end{aligned}$$

$$Y_i^{(1)} = Y_i^{(1)+} e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} + Y_i^{(1)-} e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i},$$

$$Y_i^{(2)} = Y_i^{(2)+} e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} + Y_i^{(2)-} e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i},$$

$$Z_i = Z_i^+ e^{k(z-H_{i-1})\beta_i} + Z_i^- e^{k(H_{i-1}-z)\beta_i}.$$

Ці формули містять величини (амплітуди потенціалів)  $X_i^{(1)+}$ ,  $X_i^{(2)+}$ ,  $Y_i^{(1)+}$ ,  $Y_i^{(2)+}$ ,  $Z_i^+$ , які описують хвилі в  $i$ -ому шарі, що поширюються вгору (у протилежному до осі  $Oz$  напрямку) та  $X_i^{(1)-}$ ,  $X_i^{(2)-}$ ,  $Y_i^{(1)-}$ ,  $Y_i^{(2)-}$ ,  $Z_i^-$ , які описують хвилі, що поширюються вниз (у напрямку осі  $Oz$ ). Ці амплітуди потенціалів є функціями змінних  $k$  і  $\eta$ .

Підставимо співвідношення (9) у (6), після чого отримані потенціали  $\Phi_i$ ,  $\Psi_i$ ,  $\chi_i$  підставимо у формули (4) і отримаємо вирази для компонентів вектора переміщення та елементів тензора напружень у кожному шарі:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ri} &= k^2 J_0 U_{ri}^{(1)} F_r - k^2 J_1 U_{ri}^{(2)} F_z - \\ &\quad - \frac{k}{r} J_1 (U_{ri}^{(2)} + U_{\phi i}) F_r, \\ \tilde{u}_{\phi i} &= -k^2 J_0 U_{\phi i} F_\phi + \frac{k}{r} J_1 (U_{ri}^{(1)} + U_{\phi i}) F_\phi, \\ \tilde{u}_{zi} &= k^3 J_1 U_{zi}^{(1)} F_r + k^3 J_0 U_{zi}^{(2)} F_z, \\ \tilde{\tau}_{rzi} &= k^3 J_0 T_{rzi}^{(1)} F_r - k^3 J_1 T_{rzi}^{(2)} F_z - \\ &\quad - \frac{k^2}{r} J_1 (T_{rzi}^{(1)} + T_{z\phi i}) F_\phi, \\ \tilde{\tau}_{z\phi i} &= -k^3 J_0 T_{z\phi i} F_\phi + \frac{k^2}{r} J_1 (T_{rzi}^{(1)} + T_{z\phi i}) F_\phi, \\ \tilde{\tau}_{zzi} &= k^3 J_1 T_{zzi}^{(1)} F_r + k^3 J_0 T_{zzi}^{(2)} F_z. \end{aligned} \quad (10)$$

Вирази для функцій  $U_{ri}^{(1)}$ ,  $U_{ri}^{(2)}$ ,  $U_{\phi i}$ ,  $U_{zi}^{(1)}$ ,  $U_{zi}^{(2)}$ ,  $T_{rzi}^{(1)}$ ,  $T_{rzi}^{(2)}$ ,  $T_{z\phi i}$ ,  $T_{zzi}^{(1)}$ ,  $T_{zzi}^{(2)}$  запишемо у вигляді матричних рівнянь:

$$\mathbf{W}_i^{(1)}(H_i) = \mathbf{A}_i \mathbf{L}_i \mathbf{Z}_i^{(1)}, \quad \mathbf{W}_i^{(2)}(H_i) = \mathbf{A}_i \mathbf{L}_i \mathbf{Z}_i^{(2)},$$

$$\mathbf{W}_i^*(H_i) = \mathbf{A}_i^* \mathbf{L}_i^* \mathbf{Z}_i^*, \quad (11)$$

$$\mathbf{W}_{i+1}^{(1)}(H_i) = \mathbf{A}_{i+1} \mathbf{Z}_{i+1}^{(1)}, \quad \mathbf{W}_{i+1}^{(2)}(H_i) = \mathbf{A}_{i+1} \mathbf{Z}_{i+1}^{(2)},$$

$$\mathbf{W}_{i+1}^*(H_i) = \mathbf{A}_{i+1}^* \mathbf{Z}_{i+1}^*, \quad (12)$$

де

$$\mathbf{W}_i^{(1)} = (U_{ri}^{(1)}, U_{zi}^{(1)}, T_{rzi}^{(1)}, T_{zzi}^{(1)})^T,$$

$$\mathbf{W}_i^{(2)} = (U_{ri}^{(2)}, U_{zi}^{(2)}, T_{rzi}^{(2)}, T_{zzi}^{(2)})^T,$$

$$\mathbf{W}_i^* = (U_{\phi i}, T_{z\phi i})^T,$$

$$\mathbf{Z}_i^{(1)} = (X_i^{(1)+}, X_i^{(1)-}, Y_i^{(1)+}, Y_i^{(1)-})^T,$$

$$\mathbf{Z}_i^{(2)} = (X_i^{(2)+}, X_i^{(2)-}, Y_i^{(2)+}, Y_i^{(2)-})^T,$$

$$\mathbf{Z}_i^* = (Z_i^+, Z_i^-)^T,$$

$$\mathbf{A}_i^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu_i \beta_i & -\mu_i \beta_i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_i^* = \begin{pmatrix} e^{k\beta_i h_i} & 0 \\ 0 & e^{-k\beta_i h_i} \end{pmatrix}.$$

Матриці  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{L}_i$  наведено у роботі [Молотков, 1984]. Співвідношення (8) також запишемо у вигляді компонент векторів:

$$\mathbf{Z}_s^{(1)} = \frac{1}{\eta^2} \begin{pmatrix} e^{-k\alpha_s h_s} \\ \alpha_s \\ 0, -e^{-k\beta_s h_s}, 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Z}_{s+1}^{(1)} = \frac{1}{\eta^2} \begin{pmatrix} 0, \frac{1}{\alpha_{s+1}}, 0, 1 \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Z}_s^{(2)} = \frac{1}{\eta^2} \begin{pmatrix} -e^{-k\alpha_s h_s}, 0, \frac{e^{-k\beta_s h_s}}{\beta_s}, 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Z}_{s+1}^{(2)} = \frac{1}{\eta^2} \begin{pmatrix} 0, 1, 0, \frac{1}{\beta_{s+1}} \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Z}_s^* = \frac{1}{\eta^2} \begin{pmatrix} \beta_s^2 - 1 \\ \beta_s \\ e^{-k\beta_s h_s}, 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{Z}_{s+1}^* = \frac{1}{\eta^2} \begin{pmatrix} 0, \beta_{s+1}^2 - 1 \\ \beta_{s+1} \end{pmatrix}^T.$$

Для розгляду процесів відбиття і проходження на границях шарів використовуватимемо матричний метод, згідно з яким встановимо вирази для матриць, що характеризують шари і півпростір. Для цього кожному середовищу і кожній границі розділу ставиться у відповідність (на рівні підінтегральних функцій інтегралів Мелліна) характеристична матриця, а врахування процесу поширення хвиль проводиться шляхом добутку таких матриць у певному порядку. Цей підхід, що відповідає методу Томсона-Хасскела і описаний у монографії [Молотков, 1984].

Розглянемо перші рівності з формул (11) і (12). Використовуючи умови ідеального контакту

між шарами,  $\mathbf{W}_{i+1}^{(1)}(H_i) = \mathbf{W}_i^{(1)}(H_i)$ , і враховуючи, що хвильове поле в шарах  $s$  і  $s+1$  є сумою прямої хвилі від джерела і хвиль, утворених взаємодією прямої хвилі з середовищем над джерелом і під ним, отримаємо:

$$\mathbf{Z}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{D}_{s+1}^{n+1} \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{D} \mathbf{W}_1^{(1)}(0), \quad (13)$$

де  $\mathbf{W}_1^{(1)}(0) = (U_{r0}^{(1)}, U_{z0}^{(1)}, 0, 0)^T$  – вектор-стовпець функцій-зображень переміщень і напружень на вільній поверхні,

$$\mathbf{S}^{(1)} = (s_p^{(1)}) = \frac{1}{\eta^2} \left( -\frac{1}{\alpha_s}, \frac{1}{\alpha_s}, 1, 1 \right)^T. \quad \text{Згідно з}$$

умовою випромінювання

$$\mathbf{Z}_{n+1}^{(1)} = (0, X_{n+1}^{(1)-}, 0, Y_{n+1}^{(1)-})^T, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \mathbf{C}_n \mathbf{K} \mathbf{C}_1,$$

$$\mathbf{D}_{s+1}^{n+1} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \mathbf{C}_n \mathbf{K} \mathbf{C}_{s+2} \mathbf{A}_{s+1} \mathbf{L}_{s+1},$$

( $\mathbf{C}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{L}_i \mathbf{A}_i^{-1}$  – матриця шару). Матриці

$\mathbf{D} = (d_{lp})$  і  $\mathbf{D}_{s+1}^{n+1} = (d_{lp}^s)$  є характеристичними матрицями (для хвиль P і SV) всього середовища і середовища під джерелом відповідно.

З матричного рівняння (13) отримаємо

$$U_{r0}^{(1)} = \sum_{p=1}^4 \frac{d_{12} d_{3p}^s - d_{32} d_{1p}^s}{d_{32} d_{11} - d_{31} d_{12}} s_p^{(1)},$$

$$U_{z0}^{(1)} = \sum_{p=1}^4 \frac{d_{31} d_{1p}^s - d_{11} d_{3p}^s}{d_{32} d_{11} - d_{31} d_{12}} s_p^{(1)}. \quad (14)$$

Розглянувши другі рівності з формул (11) і (12), і провівши аналогічні перетворення, отримаємо

$$U_{r0}^{(2)} = \sum_{p=1}^4 \frac{d_{12} d_{3p}^s - d_{32} d_{1p}^s}{d_{32} d_{11} - d_{31} d_{12}} s_p^{(2)},$$

$$U_{z0}^{(2)} = \sum_{p=1}^4 \frac{d_{31} d_{1p}^s - d_{11} d_{3p}^s}{d_{32} d_{11} - d_{31} d_{12}} s_p^{(2)}, \quad (15)$$

де  $s_p^{(2)}$  – елементи вектор-стовпця

$$\mathbf{S}^{(2)} = \frac{1}{\eta^2} \left( 1, 1, -\frac{1}{\beta_s}, \frac{1}{\beta_s} \right)^T.$$

Для опису поширення хвиль SH, на основі третіх рівностей з формул (11) і (12) отримаємо співвідношення

$$\mathbf{Z}_{n+1}^* = \mathbf{D}_{s+1}^{n+1*} \mathbf{S}^* + \mathbf{D}^* \mathbf{W}_1^*(0), \quad (16)$$

де  $\mathbf{D}_{s+1}^{n+1*} = \mathbf{A}_{n+1}^{*-1} \mathbf{C}_n^* \mathbf{K} \mathbf{C}_{s+2}^* \mathbf{A}_{s+1}^* \mathbf{L}_{s+1}^*$ ,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}_{n+1}^{*-1} \mathbf{C}_n^* \mathbf{K} \mathbf{C}_1^*, \quad (\mathbf{C}_i^* = \mathbf{A}_i^* \mathbf{L}_i^* \mathbf{A}_i^{*-1}),$$

$$\mathbf{S}^* = \frac{\beta_s^2 - 1}{\beta_s \eta^2} (-1, 1)^T, \quad \mathbf{W}_1^*(0) = (U_{\varphi 0}, T_{z\varphi 0})^T,$$

$$\mathbf{Z}_{n+1}^* = (0, Z_{n+1}^-)^T. \quad \text{Матриці} \quad \mathbf{D}^* = (d_{lp}^*) \quad \text{і}$$

$\mathbf{D}_{s+1}^{*n+1} = (d_{lp}^{*s})$  є характеристичними матрицями (для хвиль SH) всього середовища і середовища під джерелом відповідно. З матричного рівняння (16) отримаємо

$$U_{\varphi 0} = -\sum_{p=1}^4 \frac{d_{1p}^{*s}}{d_{11}^*} s_p^*. \quad (17)$$

Якщо джерело знаходиться на глибині  $z_s > \sum_{i=1}^n h_i$  (всередині півпростору), то  $\mathbf{D}_{s+1}^{n+1}$  і

$\mathbf{D}_{s+1}^{*n+1}$  будуть одиничними матрицями 4-го і 2-го порядку відповідно.

Описана обчислювальна схема, що ґрунтується на підході Томсона–Хаскелла, для випадку хвиль P-SV приводить до значних похибок на високих частотах області граничних кутів поширення хвиль. Першою причиною цього є погана обумовленість матриці  $\mathbf{D}$ , внаслідок чого відбувається зменшення точності під час

обчислення мінора  $D_{12}^{13} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix}$ , який є

знаменником виразів (14), (15) [Молотков, 1984].

Другою причиною числової нестійкості є спосіб обчислення чисельників виразів (14) і (15). Щоб це показати, запишемо характеристичну матрицю всього середовища  $\mathbf{D}$  у вигляді добутку характеристичних матриць середовища під джерелом  $\mathbf{D}_{s+1}^{n+1}$  і над джерелом  $\mathbf{D}_1^s$ , тобто  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{s+1}^{n+1} \mathbf{D}_1^s$ . Тоді, виразивши у функціях (14) і (15) елементи матриці  $\mathbf{D}$  через елементи  $d_{lp}^1$  матриці  $\mathbf{D}_1^s$  і через елементи  $d_{lp}^s$  матриці  $\mathbf{D}_{s+1}^{n+1}$ , отримаємо

$$U_{r0}^{(1)} = \sum_{p=1}^4 \frac{a_{rp}}{D_{12}^{13}} s_p^{(1)}, \quad U_{z0}^{(1)} = \sum_{p=1}^4 \frac{a_{zp}}{D_{12}^{13}} s_p^{(1)},$$

$$U_{r0}^{(2)} = \sum_{p=1}^4 \frac{a_{rp}}{D_{12}^{13}} s_p^{(2)}, \quad U_{z0}^{(2)} = \sum_{p=1}^4 \frac{a_{zp}}{D_{12}^{13}} s_p^{(2)}, \quad (18)$$

де

$$a_{r1} = -d_{22}^1 D_{12}^{s13} - d_{32}^1 D_{13}^{s13} - d_{42}^1 D_{14}^{s13},$$

$$\begin{aligned}
 a_{z1} &= d_{21}^1 D_{12}^{s13} + d_{31}^1 D_{13}^{s13} + d_{41}^1 D_{14}^{s13}, \\
 a_{r2} &= d_{12}^1 D_{12}^{s13} - d_{32}^1 D_{23}^{s13} - d_{42}^1 D_{24}^{s13}, \\
 a_{z2} &= -d_{11}^1 D_{12}^{s13} + d_{31}^1 D_{23}^{s13} + d_{41}^1 D_{24}^{s13}, \\
 a_{r3} &= d_{12}^1 D_{13}^{s13} + d_{22}^1 D_{23}^{s13} - d_{42}^1 D_{34}^{s13}, \\
 a_{z3} &= -d_{11}^1 D_{13}^{s13} - d_{21}^1 D_{23}^{s13} + d_{41}^1 D_{34}^{s13}, \\
 a_{r4} &= d_{12}^1 D_{14}^{s13} + d_{22}^1 D_{24}^{s13} + d_{32}^1 D_{34}^{s13}, \\
 a_{z4} &= -d_{11}^1 D_{14}^{s13} - d_{21}^1 D_{24}^{s13} - d_{31}^1 D_{34}^{s13},
 \end{aligned}$$

$$D_{lp}^{s ik} = \begin{vmatrix} d_{il}^s & d_{ip}^s \\ d_{kl}^s & d_{kp}^s \end{vmatrix} - \text{мінори матриці } \mathbf{D}_{s+1}^{n+1}.$$

Під час обчислення мінорів  $D_{12}^{13}$  і  $D_{lp}^{s ik}$  віднімаються великі, але приблизно однакові числа і результат може виявитись за межами розрядної сітки обчислювальної машини, або після віднімання може залишитись дуже мало достовірних цифр. Ці недоліки методу Томсона–Хаскелла можна усунути, ввівши інші алгоритми обчислення мінорів.

#### Методика підвищення числової стійкості

Кожній матриці 4-го порядку  $\mathbf{F}$  можна поставити у відповідність матрицю 6-го порядку  $\tilde{\mathbf{F}}$ :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} F_{13}^{13} & F_{24}^{13} & F_{14}^{13} & F_{23}^{13} & F_{12}^{13} & F_{34}^{13} \\ F_{13}^{24} & F_{24}^{24} & F_{14}^{24} & F_{23}^{24} & F_{12}^{24} & F_{34}^{24} \\ F_{13}^{14} & F_{24}^{14} & F_{14}^{14} & F_{23}^{14} & F_{12}^{14} & F_{34}^{14} \\ F_{13}^{23} & F_{24}^{23} & F_{14}^{23} & F_{23}^{23} & F_{12}^{23} & F_{34}^{23} \\ F_{13}^{12} & F_{24}^{12} & F_{14}^{12} & F_{23}^{12} & F_{12}^{12} & F_{34}^{12} \\ F_{13}^{34} & F_{24}^{34} & F_{14}^{34} & F_{23}^{34} & F_{12}^{34} & F_{34}^{34} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

елементами якої є мінори 2-го порядку матриці  $\mathbf{F}$ . За правилом (19) для матриць  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{C}$  утворимо мінорні матриці  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$ . Далі, використаємо теорему: якщо для будь-яких матриць четвертого порядку  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , і  $\mathbf{C}$ , для яких  $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ , побудувати матриці  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}$ , і  $\tilde{\mathbf{C}}$  за формулою (19), то матиме місце рівність  $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{C}}$  [Молотков, 1984]. Отже, отримаємо:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{A}}_{n+1}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_n \mathbf{K} \tilde{\mathbf{C}}_1, \quad (20a)$$

( $\tilde{\mathbf{C}}_i = \tilde{\mathbf{A}}_i \tilde{\mathbf{L}}_i \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1}$  – матриця  $i$ -го шару),

$$\tilde{\mathbf{D}}_{s+1}^{n+1} = \tilde{\mathbf{A}}_{n+1}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_n \mathbf{K} \tilde{\mathbf{C}}_s \tilde{\mathbf{A}}_s. \quad (20б)$$

Замінивши у формулах (18) мінори відповідними елементами матриць (20a) та (20б), одержимо:

$$\begin{aligned}
 U_{r0}^{(1)} &= \sum_{p=1}^4 \frac{a_{rp}}{\tilde{d}_{15}} s_p^{(1)}, \quad U_{z0}^{(1)} = \sum_{p=1}^4 \frac{a_{zp}}{\tilde{d}_{15}} s_p^{(1)}, \\
 U_{r0}^{(2)} &= \sum_{p=1}^4 \frac{a_{rp}}{\tilde{d}_{15}} s_p^{(2)}, \quad U_{z0}^{(2)} = \sum_{p=1}^4 \frac{a_{zp}}{\tilde{d}_{15}} s_p^{(2)}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 a_{r1} &= -d_{22}^1 \tilde{d}_{15}^s - d_{32}^1 \tilde{d}_{11}^s - d_{42}^1 \tilde{d}_{13}^s, \\
 a_{z1} &= d_{21}^1 \tilde{d}_{15}^s + d_{31}^1 \tilde{d}_{11}^s + d_{41}^1 \tilde{d}_{13}^s, \\
 a_{r2} &= d_{12}^1 \tilde{d}_{15}^s - d_{32}^1 \tilde{d}_{14}^s - d_{42}^1 \tilde{d}_{12}^s, \\
 a_{z2} &= -d_{11}^1 \tilde{d}_{15}^s + d_{31}^1 \tilde{d}_{14}^s + d_{41}^1 \tilde{d}_{12}^s, \\
 a_{r3} &= d_{12}^1 \tilde{d}_{11}^s + d_{22}^1 \tilde{d}_{14}^s - d_{42}^1 \tilde{d}_{16}^s, \\
 a_{z3} &= -d_{11}^1 \tilde{d}_{11}^s - d_{21}^1 \tilde{d}_{14}^s + d_{41}^1 \tilde{d}_{16}^s, \\
 a_{r4} &= d_{12}^1 \tilde{d}_{13}^s + d_{22}^1 \tilde{d}_{12}^s + d_{32}^1 \tilde{d}_{16}^s, \\
 a_{z4} &= -d_{11}^1 \tilde{d}_{13}^s - d_{21}^1 \tilde{d}_{12}^s - d_{31}^1 \tilde{d}_{16}^s.
 \end{aligned}$$

Щоб отримати явні вирази для компонент переміщень на вільній поверхні, необхідно підставити формули (21) в (10), а потім отримані вирази підставити в перетворення (6).

Для врахування поглинання задамо комплексні швидкості хвиль Р і S типу, припускаючи, що добротність  $Q$  не залежить від частоти  $\omega$ . Для моделі середовища з постійним  $Q$  комплексні швидкості визначаються за формулою [Aki, Richards, 2002]

$$v(\omega) = v_0 \left( 1 + \frac{1}{\pi Q} \ln \frac{\omega}{2\pi} \right) \left( 1 - \frac{j}{2Q} \right)^{-1},$$

де  $v_0$  – задана швидкість,  $Q$  – добротність середовища. Значення добротності можуть бути різними для хвиль різного типу.

#### Випадок поверхневого джерела

Нехай на вільній поверхні горизонтально-шаруватого середовища  $z=0$  у початку координат прикладено вертикальну точкову силу  $\mathbf{f}(t) = (0, 0, f_z(t))^T$ . Оскільки сила є паралельною до осі  $Oz$ , то утворене хвильове поле повинно задовольняти для  $z=0$  граничним умовам

$$\tau_{zz}|_{z=0} = -\frac{f_z(t)\delta(r)}{2\pi r}, \quad \tau_{rz}|_{z=0} = 0. \quad (22)$$

Інтенсивність джерела  $f_z(t)$  для  $t < 0$  перетворюється на нуль, тому хвильове поле задовольняє нульові початкові умови (2).

Розглянувши другі рівності у співвідношеннях (11) і (12), і, враховуючи умови ідеального контакту між шарами та граничні умови (22), отримаємо

$$\mathbf{Z}_{n+1}^{(2)} = \mathbf{D}\mathbf{W}_1^{(2)}(0), \quad (23)$$

де  $\mathbf{Z}_{n+1}^{(2)} = (0, X_{n+1}^{(2)-}, 0, Y_{n+1}^{(2)-})^T$ ,

$$\mathbf{W}_1^{(2)}(0) = (U_{r0}^{(2)}, U_{z0}^{(2)}, 0, T_{zz0}^{(2)})^T, \quad T_{zz0}^{(2)} = -\frac{1}{2\pi k}.$$

З матричного рівняння (23) отримаємо

$$\begin{aligned} U_{r0}^{(2)} &= \frac{d_{12}d_{34} - d_{32}d_{14}}{d_{32}d_{11} - d_{31}d_{12}} T_{zz}^{(0)}, \\ U_{z0}^{(2)} &= \frac{d_{31}d_{14} - d_{11}d_{34}}{d_{32}d_{11} - d_{31}d_{12}} T_{zz}^{(0)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Замінивши у формулах (24) мінори відповідними елементами матриць (20а) та (20б), одержимо:

$$U_{r0}^{(2)} = \frac{\tilde{d}_{12}}{\tilde{d}_{15}} T_{zz}^{(0)}, \quad U_{z0}^{(2)} = -\frac{\tilde{d}_{13}}{\tilde{d}_{15}} T_{zz}^{(0)}. \quad (25)$$

Щоб отримати явні вирази для компонент переміщень на вільній поверхні, необхідно підставити формули (25) в (10), а потім отримані вирази підставити в перетворення (6).

### Моделювання ефекту локального резонансу

Розроблена методика дає можливість отримати повне хвильове поле типу P-SV або SH, враховуючи багаторазові, обмінні, дифраговані та інші хвилі, а також поверхневі хвилі.

Алгоритм розрахунку синтетичних сейсмограм застосовано для моделювання локального резонансного ефекту на земній поверхні. Це явище може спостерігатися під час землетрусів (наприклад, землетрус у Латур (Індія) в 1993 р. [Baumbach *et al.*, 1994]), і повинне враховуватися під час проектування інженерних споруд. Для будівель, чії власні частоти розташовані в локальних резонансних смугах, можливі небезпечні сейсмічні наслідки.

Для розрахунку синтетичних сейсмограм розглянемо просту, але реалістичну модель середовища (табл. 1) [Baumbach *et al.*, 1994]. У цій моделі низькошвидкісний шар ґрунту товщиною 5 м розташований на базальтовому високошвидкісному шарі товщиною 300 м. Точкове джерело у вигляді сили, розміщене на глибині 3 км у гранітному півпросторі. Параметри джерела:

інтенсивність джерела  $\mathbf{f}_0 = (0.5, 0.2, 0.5) \times 10^{12}$  Н, часова залежність описується функцією  $1/\tau \sin^3(\pi t / \tau)$ , якщо  $0 \leq t \leq \tau$ , інакше 0, де  $\tau = 50$  мс.

**Модель горизонтально-шаруватого середовища**  
**Model of horizontally-layered medium**

Номер шару або півпростору	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$v_p$ , м/с	$v_s$ , м/с	$Q_p$	$Q_s$	$h$ , м
1	1300	1200	200	80	20	5
2	2500	4500	2600	500	220	300
3	2700	6000	3500	800	270	$\infty$

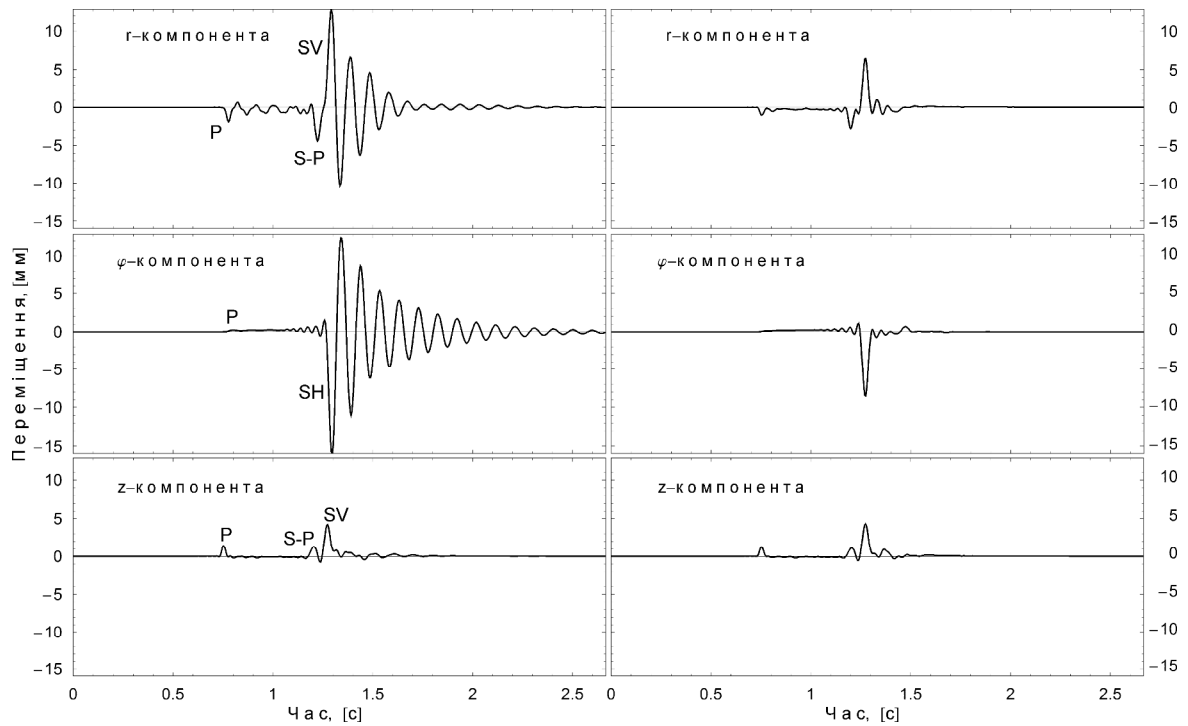
На рис. 1 ліворуч наведено синтетичні сейсмограми, розраховані на епіцентральної віддалі 3 км для моделі середовища з табл. 1, і праворуч для іншої моделі середовища, в якій верхній м'який шар відсутній, а перший шар товщиною 305 м має ті самі властивості, що і другий шар з табл. 1. З малюнка видно, що наявність шару м'якого ґрунту приводить до значного посилення горизонтальних коливань, причому коливання, викликані S-хвилями майже гармонічні. На тангенціальній компоненті наявна Р-хвиля слабкої інтенсивності, зумовлена хвильовим полем у ближній зоні.

Значні амплітуди коливань на горизонтальних компонентах у порівнянні з вертикальною компонентою пояснюються великою відмінністю значень швидкостей хвиль у шарі базальту і у м'якому шарі, через що поперечні хвилі у шарі ґрунту поширюються майже вертикально.

На рис. 2 наведено амплітудні спектри синтетичних сейсмограм. Значення їхніх горизонтальних компонент на резонансній частоті 10.5 Гц (за наявності м'якого шару) в кілька разів більші від відповідних компонент за відсутності м'якого шару. Водночас наявність або відсутність шару знижених швидкостей слабо впливає на вертикальну складову коливань. Так, низькошвидкісний верхній шар ґрунту може бути причиною локальних ефектів підсилення коливань.

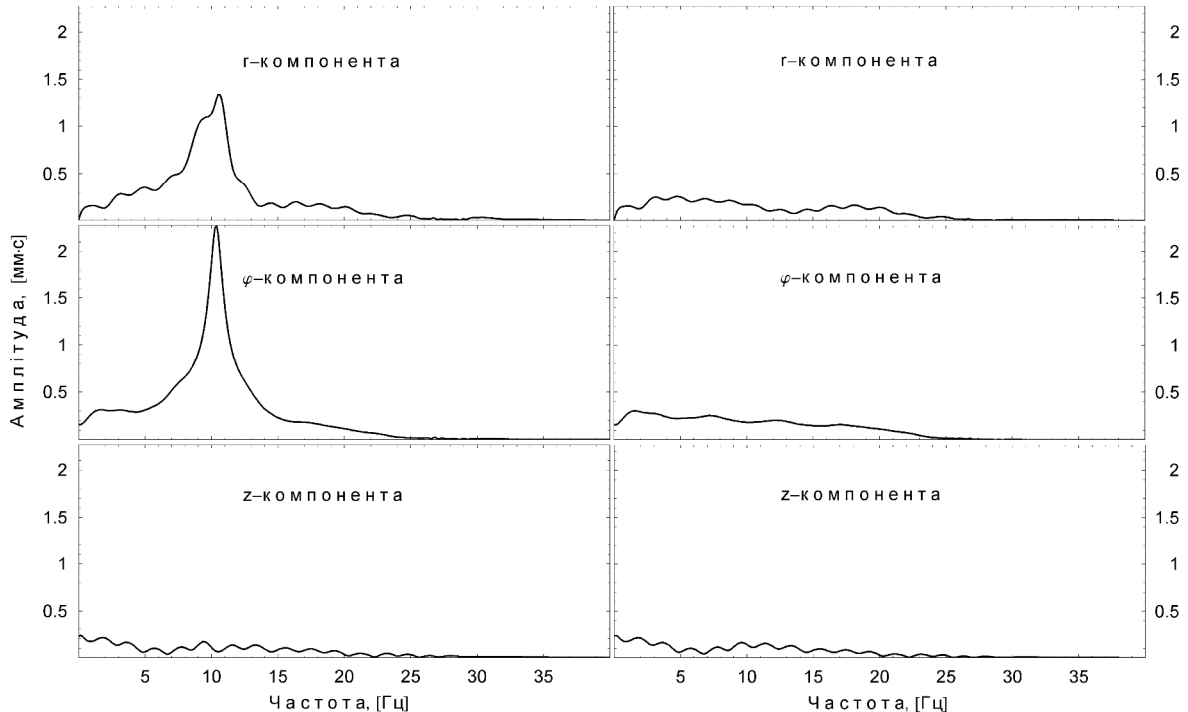
### Наукова новизна

За допомогою введення первинних хвильових полів, використовуючи матричний метод, розроблено чисельно-аналітичний підхід до моделювання хвиль у горизонтально-шаруватих ізотропних неідеально пружних середовищах. Побудовано алгоритми і програми для розрахунку синтетичних сейсмограм на вільній поверхні таких середовищ. Ці програми дають змогу досліджувати вплив зміни параметрів середовища і джерела у вигляді зосередженої довільно спрямованої сили на синтетичні сейсмограми.



**Рис. 1.** Порівняння синтетичних сейсмограм для моделі середовища з м'яким шаром на поверхні (ліворуч) і без м'якого шару (праворуч)

**Fig. 1.** Synthetic seismograms for model (table 1) with the soft-soil layer on the surface (left), compared with the reference seismograms (right) computed for model without the soil layer



**Рис. 2.** Амплітудні спектри синтетичних сейсмограм, показаних на рис. 1 для імпульсного джерела, якщо  $\tau \rightarrow 0$

**Fig. 2.** Amplitude spectra of the synthetic seismograms as shown in fig. 1, but for an impulse source  $\tau \rightarrow 0$



**Практична значущість**

Практичне значення розробленої методики полягає у можливості, як аналітично, так і чисельно досліджувати хвильові процеси, що протікають у шаруватих середовищах. Побудований алгоритм розрахунку сейсмічного хвильового поля у горизонтально-шаруватому півпросторі можна використати для розроблення методики обчислення хвильового поля, породженого зсувною дислокацією, для розроблення способів виявлення механізму і визначення параметрів вогнищ землетрусів.

Запропонований алгоритм розрахунку синтетичних сейсмограм можна використати для визначення резонансної частоти і коефіцієнта підсилення коливань ґрунту.

**Висновки**

На основі матричного методу Томсона-Хаскелла розроблено ефективний і стійкий метод обчислення сейсмічного хвильового поля для багат шарового горизонтально-шаруватого ізотропного середовища з поглинанням. Метод враховує наявність вільної поверхні, наявність точкового джерела у вигляді простої сили, інтерференційні явища, пов'язані з тонкошаруватістю. Для підвищення стійкості розрахунку хвильового поля зроблено перехід від характеристичних матриць четвертого порядку до матриць шостого порядку. Результати продемонстровано на прикладі моделювання явища резонансу в горизонтально-шаруватому середовищі, пов'язаного з наявністю верхнього шару з нижених швидкостей.

**Список літератури**

Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых, упругих и жидких средах / Л. А. Молотков. – Л. : Наука, 1984. – 201 с.  
 Роганов Ю. В. Представление потенциалов от точечных источников для однородной изотропной среды в виде интегралов Бесселя-

Меллина / Ю. В. Роганов, Р. М. Пак // Геофіз. журнал. – 2013. – Т. 35, № 2. – С. 163–167.  
 Abo-Zena A. Dispersion function computations for unlimited frequency values / A. Abo-Zena // Geophys. J. Roy Astron. Soc. – 1979. – Vol. 58. – P. 91–105.  
 Aki K. Quantitative Seismology, Second Ed. / K. Aki, P. G. Richards. – Sausalito: University Science Books, 2002. – 700 p.  
 Baumbach M. Study of the foreshocks and aftershocks of the intraplate Latur earthquake of September 30, 1993, India / M. Baumbach, H. Grosset, H. G. Schmidt, A. Paulat, A. Rietbrock, C. V. Ramakrishna Rao, P. Solomon Raju, D. Starkar, Mohan Indra // Latur Earthquake, H. K. Gupta (Editor). – Memoir of the Geological Society of India 35, 1994. – P. 33–63.  
 Bouchon M. A. Review of the discrete wavenumber method / M. A. Bouchon // Pure and Applied Geophysics. – 2003. – Vol. 160. – P. 445–465.  
 Chapman C. H. Yet another elastic plane-wave, layer-matrix algorithm / C. H. Chapman // Geophys. J. Int. – 2003. – Vol. 154. – P. 212–223.  
 Cormier V. F. Theory and observations – forward modeling/synthetic body wave seismograms / V. F. Cormier // Treatise on Geophysics. – 2007. – Vol. 1. – P. 157–189.  
 Dunkin I. W. Computation of modal solution in layered elastic media at high frequencies / I. W. Dunkin // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1965. – Vol. 55. – P. 335–358.  
 Kennett B. L. N. Seismic Wave Propagation in Stratified Media / B. L. N. Kennett. – New York : Cambridge University Press, 1983. – 342 p.  
 Kennett B. L. N. The seismic wavefield. Introduction and theoretical development. Vol. 1 / B.L.N. Kennett. – New York : Cambridge University Press, – 2001. – 370 p.  
 Müller G. The reflectivity method: a tutorial / G. Müller // J. Geophys. – 1985. – Vol. 58. – P. 153–174.  
 Pei D. H. Improvements on computation of phase velocity of Rayleigh wave based on the generalized R/T coefficient method / D. H. Pei, J. N. Louie, S. K. Pullammanappallil // Bull. Seismol. Soc. Am. – 2008. – Vol. 98. – P. 280–287.

Р. М. ПАК

Национальная академия сухопутных войск имени гетмана Петра Сагайдачного, ул. Героев Майдана, 32, Львов, 79012, Украина, тел. +38(032)2584426, эл. почта: rpak@ukr.net

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ, ВОЗБУЖДЕННОГО ГЛУБИННЫМ ИЛИ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИСТОЧНИКОМ В ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

**Цель.** Целью работы является проведение математического моделирования процессов возмущения и распространения сейсмического волнового поля в горизонтально-слоистом изотропном упругом полупространстве; обобщение полученных результатов на случай поглощающих сред; числовая реализация разработанной методики расчета сейсмических волн в горизонтально-слоистой среде с поглощением, возмущенных точечным источником в виде простой силы, которая зависит от времени; построение устойчивых алгоритмов и программ для численных расчетов синтетических сейсмограмм; проведение вычислительных экспериментов для верификации результатов. **Методика.** Методика

включает введение первичных волновых полей, возмущенных простой силой на поверхности или внутри горизонтально-слоистого изотропного упругого полупространства с поглощением. Она основывается на использовании интегралов Бесселя–Меллина, матричного метода Томсона–Хаскелла и его модификаций. **Результаты.** Разработан эффективный и устойчивый метод вычисления синтетических сейсмограмм для многослойной горизонтально-слоистой изотропной среды с поглощением. Метод учитывает наличие свободной поверхности, наличие точечного источника в виде простой силы, размещенного на поверхности или внутри полупространства, интерференционные явления, связанные с тонкослоистостью. Для повышения устойчивости расчета волнового поля сделано переход от характеристических матриц четвертого порядка к матрицам шестого порядка. Проведено моделирование явления резонанса в горизонтально-слоистом полупространстве, причиной которого является наличие верхнего слоя пониженных скоростей. **Научная новизна.** Вводя первичные волновые поля, возмущенные простой силой на поверхности или внутри горизонтально-слоистого полупространства, разработан численно-аналитический подход к моделированию волн в горизонтально-слоистых изотропных неидеально упругих средах. Построены алгоритмы и программы для расчета синтетических сейсмограмм на свободной поверхности таких сред. **Практическая значимость.** Практическое значение разработанной методики заключается в возможности как аналитически, так и численно исследовать волновые процессы, протекающие в слоистых средах. Расчет синтетических сейсмограмм и выделения на них различных типов волн позволяет анализировать и точнее интерпретировать волновую картину, регистрируемую во время сейсмических наблюдений.

*Ключевые слова:* математическое моделирование; сейсмическое волновое поле; метод Томсона–Хаскелла; горизонтально-слоистая среда; сейсмическая добротность; точечная сила; синтетическая сейсмограмма; локальный резонанс.

R. PAK

Hetman Petro Sahaidachny National Army Academy, 32, Heroes of Maidan Str., Lviv, 79012, Ukraine, tel. +38(032)2584426, e-mail: rpak@ukr.net

#### MODELING OF WAVE FIELD, WHICH HAS BEEN EXCITED OF DEEP OR SUPERFICIAL SOURCE IN HORIZONTALLY LAYERED HALF-SPACE

**Purpose.** The aim is to conduct mathematical modeling of disturbances and seismic wave field propagation in horizontally layered isotropic elastic half-space; summarizing the results obtained in the case of absorbing media; numerical implementation of the method of calculation of seismic waves in horizontally layered medium with absorption, perturbed point source in a simple force that depends on time; build sustainable programs and algorithms for numerical calculations for synthetic seismograms; and conducting numerical experiments for verification of results. **Methodology.** The method comprises administering primary wave fields, perturbed idle power on or within horizontally layered isotropic elastic half-space with absorption. It is based on the use of integrals Besselya-Mellin, matrix Thomson-Haskell method and its modifications. **Results.** The effective and sustainable method of calculating synthetic seismograms for stratified horizontally layered isotropic medium with absorption was carried out. The method takes into account the availability of the free surface, the presence of a point source in a simple force placed on or within half-space interference phenomena associated with tonkosharuvatystyu. To increase the stability calculation of the wave field the transition was made from the characteristic matrix of fourth order matrix to sixth order. The modeling of the phenomenon of resonance in horizontal layered half-space was caused by the presence of low speeds in the upper layer. **Originality.** After entering primary wave field perturbations idle power on or within the horizontally-layered half-space, the developed numerical and analytical approach to modeling of waves in horizontally layered isotropic elastic media was imperfect. Algorithms and software were used for the calculation of synthetic seismograms at the free surface of environments. **Practical significance.** The practical significance of the developed method is the ability to analytically and numerically explore the wave processes occurring in layered media. The calculation of synthetic seismograms and allocating them to different types of waves allow analysis and accurate interpretation of the wave pattern that is recorded during seismic observations.

*Key words:* mathematical modeling; seismic wave-field; Thomson-Haskell method; horizontally-layered medium; quality factor; point force; synthetic seismogram; local resonance effect.

#### REFERENCES

Molotkov L. A. *Matrichnyy metod v teorii rasprostraneniya voln v sloistyykh, uprugikh i zhidkikh sredakh* [Matrix method in the theory of wave propagation in layered, elastic and liquid media]. *Leningrad, Nauka*, 1984, 201 p.

- Roganov Yu. V., Pak R. M. *Predstavlenie potentsiala ot tochechnykh istochnikov dlya odnorodnoy izotropnoy sredy v vide integralov Besselya-Mellina* [Representation of potentials of point sources for the homogeneous isotropic medium as Bessel-Mellin integrals]. *Geofizicheskij zhurnal* [Geophysical Journal], 2013, vol. 35, no. 2, pp. 163–167.
- Abo-Zena A. Dispersion function computations for unlimited frequency values. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 1979, vol. 58, pp. 91–105.
- Aki K., Richards P. *Quantitative Seismology*, Second Ed. Sausalito, *University Science Books*, 2002, 700 p.
- Baumbach M., Grosset H., Schmidt H. G., Paulat A., Rietbrock A., Ramakrishna Rao C. V., Solomon Raju P., Starkar D., Indra Mohan. Study of the foreshocks and aftershocks of the intraplate Latur earthquake of September 30, 1993, India. Latur Earthquake, H. K. Gupta (Editor). *Memoir of the Geological Society of India* 35, 1994, pp. 33–63.
- Bouchon M. A. Review of the discrete wavenumber method. *Pure and Applied Geophysics*, 2003, vol. 160, pp. 445–465.
- Chapman C. H. Yet another elastic plane-wave, layer-matrix algorithm. *Geophysical Journal International*, 2003, vol. 154, pp. 212–223.
- Cormier V. F. Theory and observations – forward modeling/synthetic body wave seismograms. *Treatise on Geophysics*, 2007, vol. 1, pp. 157–189.
- Dunkin I. W. Computation of modal solution in layered elastic media at high frequencies. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1965, vol. 55, pp. 335–358.
- Kennett B. L. N. *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*. *Cambridge University Press*, 1983, 342 p.
- Kennett B. L. N. The seismic wavefield. Introduction and theoretical development. Vol. 1. *Cambridge University Press*, 2001, 370 p.
- Müller G. The reflectivity method: a tutorial. *Journal Geophysical*, 1985, vol. 58, pp. 153–174.
- Pei D. H., Louie J. N., Pullammanappallil S. K. Improvements on computation of phase velocity of Rayleigh wave based on the generalized R/T coefficient method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 2008, vol. 98, pp. 280–287.

Надійшла 04.03.2017 р.