УДК 537.311.33

К.К. Товстюк
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра напівпровідникової електроніки

ТЕОРІЯ СИМЕТРИЧНИХ ГРУП У БАГАТОЧАСТКОВИХ ЗАДАЧАХ

K.K. Tovstyuk
Lviv Polytechnic National University, Semiconductor electronics dept.

THEORY OF SYMMETRIC GROUP INTO MANY-PARTICLE PROBLEMS

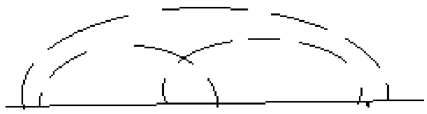
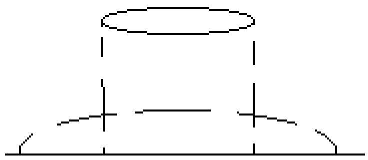
Проаналізовано подвійні перестановки, за допомогою яких зображається ряд теорії збурення електрон-фононної взаємодії для гамільтоніана Фреліха за умови збереження кількості часток. Доведено, що подвійні перестановки задовольняють чотири постулати теорії груп, а, отже, можуть бути проаналізовані за допомогою відомих у математиці методів цієї теорії.

The double permutations, as we showed before, can satisfactory subscribe the perturbation theory in electron – phonon interaction for Frelich Hamoltonian, on the condition of particle conservation. Here we prove that such double permutations satisfy 4 postulates of the group theory, hence they can be analyzed by the means of theory of group.

Вступ. Застосування теорії груп перестановок у багаточасткових задачах виглядає з одного боку природним. Дійсно, запис багаточасткової системи невзаємодіючих ферміонів вимагає врахування знака – а, саме, парності чи непарності перестановки у цій підсистемі. З іншого боку він є дещо безперспективним, оскільки фізично кожний акт зіткнення частинок супроводжується збереженням імпульсу, чого сама по собі перестановка не враховує. Однак у [1, 2] створено подвійну перестановку для міжелектронної взаємодії, з якої випливають закони збереження імпульсу. Пізніше у [3] подвійна перестановка була узагальнена для електрон-фононної взаємодії. Іншими словами, існує механізм зівставлення певної (будь-якої) діаграми Фейнмана та подвійної перестановки, причому правила відбору (закони збереження імпульсу) будуть однаковими. Зауважимо, що таке зображення є гомоморфним. У таблиці наведено приклад подвійних перестановок, діаграм Фейнмана з аналогічними правилами відбору та відповідними їм аналітичними виразами.

Звичайно, зображення віртуальних актів взаємодії за допомогою перестановок втрачає свою образність порівняно із діаграмами Фейнмана, однак має перспективу використання добре розробленої математиками теорії груп. Та, щоб її застосувати, необхідно довести, що саме записані нами об'єкти, утворюють групу. Це ми й реалізуємо у цій роботі.

Подвійна перестановка, діаграма Фейнмана з аналогічними правилами відбору та відповідні аналітичні вирази

$P_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1' & 2'\\ & 2' & 3' & 1'\\ & 3' & 0 & 1\end{pmatrix}$	
$-i(G_k^0)^2\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}V^2(k-k_1)V^2(k_1-k_2)V^2(k_2-k_3)(G^0_{k1})^2G^0_{k2}G^0_{k3}G^0_{k1+k2-k3}D^0_{k-k1}D^0_{k1'k2}D^0_{k2-k3}$	
$P_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 3' & 1' & 2'\\ & 2' & 3' & 1'\\ & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$	
$i(G_k^0)^2\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}V^2(k-k_1)(V^2(k_1-k_2))^2(G^0_{k1})^2G^0_{k2}G^0_{k3}G^0_{k1+k2-k3}(D^0_{k1-k12})^2D^0_{k-k1}$	

Групові постулати та подвійні перестановки

1. Як відомо, наприклад із [4], сукупність елементів P_1, P_2, …, P_n утворює групу, якщо визначено закон їх множення, іншими словами, правило, за яким парі елементів P_1, P_2 ставиться у відповідність елемент P_3, який належить до тієї самої сукупності.

Зауважимо, що кожна подвійна перестановка містить у собі дві перестановки: електронну, яка описує усереднення операторів породження та знищення у системі ферміонів, та фононну – у системі бозонів. Кожен з цих елементів сам по собі є членом своєї групи перестановок, де визначено закон множення. Це необхідно врахувати у правилі множення подвійних перестановок. Наприклад, 1 елемент таблиці – подвійна перестановка P_1 містить у собі об’єднання фононних операторів за перестановкою

$$P_{11}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \tag{1}$$

та електронних –

$$P_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1' & 2 & 2' & 3 & 3'\\ 2 & 3 & 1 & 1' & 3' & 2' & 0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Аналогічно, P_2 об’єднує

$$P_{21}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}; \tag{3}$$

$$P_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1' & 2 & 2' & 3 & 3'\\ 2 & 3' & 1 & 1' & 3 & 2' & 0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Визначимо правила множення подвійних перестановок.

Нехай

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ j_0 & j_1 & \dots & j_n \\ & i'_1 & \dots & i'_n \\ & j_{i1'} & \dots & j_{in'} \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \alpha = i_1 & \dots & \beta = j_0 & \dots & \eta = i_n \\ l_0 & l_\alpha & \dots & l_\beta & \dots & l_\eta \\ & \gamma' & \dots & \mu' & \dots & \xi' = j'_1 \\ & l_{\gamma'} & \dots & l_{\mu'} & \dots & l_{\xi'} \end{pmatrix}; \tag{6}$$

$$RS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \\ l_\beta & l_{\xi'} & \dots \\ & \gamma' & \dots \\ & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Тобто при побудові основних рядків (першого та третього) добутку, ми нехтуємо штрихами у третьому рядку другої перестановки, і множимо основні рядки за правилами множення звичайної перестановки. Після цього цифри третього рядка добутку штрихуємо і будуємо допоміжні рядки добутку, як у звичайній перестановці. Наприклад,

$$P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1' & 2' & 1 & 3 \\ & 3' & 1' & 2' \\ & 2 & 3' & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

2. Добуток операторів підлягає асоціативному закону

$$(TR)S = T(RS). \tag{9}$$

Доведемо, що визначений (5) – (7) добуток задовольняє (9).

Нехай у загальному випадку

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \\ j_0 & \dots & \dots \\ & i'_1 & \dots \\ & \dots & \dots \end{pmatrix}; \tag{10}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \alpha = i_1 & \dots & \beta = j_0 \\ l_0 & \dots & l_\alpha & \dots & l_\beta \\ & \dots & n'_\alpha & \dots & n'_\beta \\ & \dots & l_{n\alpha'} & \dots & l_{n\beta'} \end{pmatrix}; \tag{11}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a = n_\alpha & \dots & b = l_\beta \\ m_0 & \dots & m_\alpha & \dots & m_b \\ & \dots & k'_\alpha & \dots & k'_b \\ & \dots & m_{k\alpha'} & \dots & m_{k\beta'} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Визначимо за правилами (5) – (7) добутки

$$TR = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \\ l_\beta & \dots & \dots \\ & n'_\alpha & \dots \\ & \dots & \dots \end{pmatrix} \qquad RS = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \alpha & \dots & \beta \\ & \dots & \dots & \dots & m_b \\ & \dots & k'_a & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{13}$$

та

$$(TR)S = T(RS) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \\ m_b & \dots & \dots \\ & k'_a & \dots \\ & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Вираз (14) доводить виконання постулату другої теорії груп.

3. Існування одиничного елемента E, такого, що для будь-якого елемента групи G, виконується

$$\mathrm{EG} = \mathrm{GE}. \tag{15}$$

Дійсно для перестановки

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ 0 & 1 & \dots & n \\ & 1' & \dots & n' \\ & 1' & \dots & n' \end{pmatrix} \tag{16}$$

справедливо, за (5) – (7)

$$TE = ET = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots \\ j_0 & \dots & \dots \\ & i'_1 & \dots \\ & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{17}$$

4. Для кожного елемента P з множини G існує обернений P^{-1}:

$$P*P^{-1} = P^{-1}*P = E. \tag{18}$$

Для доведення цього постулату визначимо елемент обернений до T

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & i_1 & \dots & i_n = j_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \dots & 1' & \dots & n' \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Зазначимо, що T^{-1} повинен також належати цій множині, оскільки

$$(i_1, i_2, \dots i_n) \in (1, 2, \dots n);$$

$$(j_0, \dots j'_n) \in (0, 1, 1', 2, 2', \dots, n').$$

Використовуючи правила множення елементів (5) – (7), переконуємося у справедливості (19).

Висновки. Теорія груп набула широкого використання у фізиці твердого тіла. Розгляд якнайможливіших усереднень у багаточастковій взаємодії за теорією збурення проводиться за допомогою діаграм Фейнмана, що визначають закони збереження імпульсу у кожному одиничному акті взаємодії. Використання подвійної перестановки дає можливість також врахувати ці закони. Використання подвійних перестановок програє в образності діаграмам, де ми практично бачимо кожний момент зіткнення. До недоліків методу можна також віднести і гомоморфізм – зображення однієї діаграми рядом перестановок, що веде до зростання кількості об'єктів дослідження. Ми довели, що подвійні перестановки утворюють групу, на відміну від діаграм. А, отже, уся розроблена математиками алгебра (розбиття на класи, подання, факторизація тощо) може бути використана саме у такому підході. Окрім того, використання перестановок створює можливість автоматизації процедури дослідження ряду теорії збурення.

1. Олексеева М.Ф., Товстюк К.Д. // Теор. и мат. Физика. 1976. – 27. Р. 383–391. 2. Олексеева М.Ф., Товстюк К.Д. // Теор. и мат. Физика, 1976. – 21. – Р. 222–223. 3. Данилевич-Товстюк К.К. Новый метод определения полной функции Грина для электрон-фотонного взаимодействия: Препринт. – Киев, 1979. – 13 с. 4. Каплан И.Г. Симметрия многоэлектронных систем. – М., 1969. – 407 с.

УДК 621.315

В. М. Фітьо
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра лазерної техніки та оптоелектронних систем

СПЕКТР ПРОПУСКАННЯ СИСТЕМИ ҐРАТОК БРЕГГА НА ОПТИЧНОМУ ВОЛОКНІ

V. M. Fitio
Lviv Polytechnic National University "Lviv Polytechnic",
laser technique and optoelectronics systems dept.

SPECTRUM OF TRANSPARENCY OF THE SYSTEM GRATING BRAGG ON AN OPTICAL FIBER

Проаналізовано спектральну залежність пропускання оптичного волокна з системою двох і чотирьох ґраток. Показано, що на системі чотирьох ґраток можна побудувати інтерферометр з розділенням 0,1 пм.

The spectral dependence of a transparency of an optical fiber with the system of two and four gratings is analyzed. On the system of four gratings it is possible to construct an interferometer with resolution 0,1 pm is shown.

Вступ. Для волоконнооптичних ліній зв'язку найбільш придатні є одномодові оптичні волокна [1, 2], причому мінімальне поглинання таких волокон спостерігається на довжині хвилі 1,55 мкм. Тому дослідження спектра випромінювання напівпровідникових лазерів в діапазоні довжин хвиль 1,55±0,001 мкм є актуальною проблемою. Очевидно, що вимірювання можна здійснити за допомогою інтерферометра Фабрі–Перо, який являє собою два паралельно розміщені інтерференційні дзеркала з коефіцієнтами відбивання по інтенсивності близьких до одиниці. Останнім часом в рекламних проспектах з'явились повідом-