формули Ньютона, що визначає зону притягання усталеного процесу. Численні результати симуляції підтвердили високу надійність і точність запропонованого методу аналізу. До речі, це єдиний з усіх відомих методів розв'язання цієї задачі, що дає змогу одержувати результат з наперед заданою точністю. Методи позачасової області – метод гармонічного балансу, метод колокації – такої можливости не мають. Крім того, вони значно складніші й вимагають побудови достатньо складних комп'ютерних проґрам.

Ще одна дуже важлива перевага запропонованого методу – можливість розрахунку не тільки усталених процесів, але й перехідних. Для цього достатньо спрямувати значення періоду T до безмежності.

Використано вхідні дані: $r_S = 7$ Ом; $r_f = 5$ Ом; $l_S = 0{,}0121$ Гн$^{-1}$; $l_R = 0{,}2325$ Гн$^{-1}$; $C_S = 63{,}69$ мкФ; $u_f = 14$ В; $\omega = 314$ с$^{-1}$; крива намагнечування:

$$\psi_m = \begin{cases} 0,0216 i_m + 1,964 - 2,154 \exp(-0,258 i_m), \ if\ i_m > 2; \\ 0,365,\ if\ i_m \le 2. \end{cases}$$

УДК 621.313

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ ЧУТЛИВОСТІ ДО ПОЧАТКОВИХ УМОВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

© Леонід Білий, 2002

Дніпропетровський державний технічний університет залізничного транспорту (львівський факультет), Львів

Пропонується метод побудови моделі чутливості до початкових умов розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь вимірювальних систем.

Предлагается метод построения модели чувствительности к начальным условиям решения нелинейных дифференциальных уравнений измерительных систем.

The method of build-up of model of parametric sensitivity to the starting condutions of a solution of the nonlinear differential equations is offered.

Модель чутливості до початкових умов широко застосовується в задачах пошуку періодичних розв'язків нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що описують різноманітні технічні системи, наприклад, електромеханічні, вимірювальні, автоматики, комп'ютерні тощо. Ці рівняння можуть бути достатньо складні, а відомі математичні методи побудови відповідних моделей не можна застосувати внаслідок їх складності.

Основним компонентом моделі чутливості є матриця монодромії і важкість аналізу пов'язана саме з її визначенням. Запропоновано* знаходити її у вигляді добутку двох інших матриць. Ми всесторонньо дослідили цю ідею й з успіхом використали в практичних розрахунках. На підставі цього пропонується аналогічний підхід при дослідженні вимірювальних систем, бо величини, які підлягають вимірюванню, найчастіше є усталеними значеннями фізичних вимірюваних параметрів.

Диференціальні рівняння вимірювальних системи запишемо в загальному вигляді

$$\frac{dx}{dt} = A(x)\cdot\left(x + B(t)\right), \qquad (1)$$

де x – вектор змінних; $A(x)$ – матриця коефіцієнтів; $B(t)$ – вектор вільних членів (збурюючих сигналів системи).

Вектор початкових умов диференціального рівняння (1) позначимо $x(0)$. Система (1) при заданих початкових умовах $x(0)$ становить задачу Коші для диференціальних рівнянь.

Як зазначалося раніше, нас цікавить усталений (періодичний) процес системи. У такому разі на рівняння (1) накладається додаткова умова періодичності

$$F\left(x(0)\right) = x(0) - x\left(x(0), T\right) = 0\,, \qquad (2)$$

де T – період.

Тепер вектор початкових умов належить до невідомих. Його одержуємо внаслідок розв'язання

* *Чабан В.Й., Билый Л.А. К расчету периодических режимов электроэнергетических устройств // Техническая электродинамика. – 1982. – №1. – С. 73-77.*

трансцендентного рівняння (2). Для цього найбільшою мірою підходить метод ньютонівських ітерацій

$$x(0)^{k+1} = x(0)^k - \left[F^{'}\left(x(0)^k\right)\right]^{-1} \cdot F\left(x(0)^k\right), \qquad (3)$$

де $F^{'}\left(x(0)\right)$ – матриця Якобі системи, яку знайдемо після диференціювання (2) по $x(0)$:

$$F^{'}\left(x(0)\right) = 1 - \Phi(T), \qquad (4)$$

де матриця монодромії

$$\Phi(t) = \partial x(T) / \partial x(0). \qquad (5)$$

Класична теорія її знаходження приводить до рівняння першої варіації, яке отримаємо диференціюванням (1) по $x(0)$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{\partial A(x)}{\partial x}\left(x + B(t)\right) + A(x)\right)\Phi. \qquad (6)$$

Оскільки матриця $A(x)$ може бути достатньо складною (а вона така і є в практичних задачах), то рівняннями (6) не можна скористатися при організації ітераційного процесу (3).

Необхідно знайти вектор інших змінних, які б однозначно визначалися через x, а їх диференціальні рівняння були значно простіші від (1). Позначимо вектор нових змінних через y.

Змінні x і y повинні бути функціонально зв'язані: наприклад, якщо x визначає струм, то y – потокозчеплення; якщо x визначає напруги конденсаторів, то y – їх заряди; якщо x є переміщення, то y – імпульси тощо. Запишемо функціональну залежність між y і x у вигляді

$$y = A(x)^{-1} x. \qquad (7)$$

Основна вимога полягає в тому, щоб права частина додаткових рівнянь лінійно залежала від x

$$\frac{dy}{dt} = Cx + D(t). \qquad (8)$$

Диференціювання (7) по $x(0)$ дасть

$$\Phi = A \cdot \Sigma, \qquad (9)$$

де

$$\Sigma = \partial y / \partial x(0). \qquad (10)$$

Як бачимо, матриця монодромії (9) є добутком матриці коефіцієнтів рівняння (1) і матриці чутливості до початкових умов додаткового рівняння (8).

Матриця (10) визначається з рівняння першої варіації, отриманого диференціюванням (8) по $x(0)$

$$\frac{d\Sigma}{dx(0)} = C \cdot \Phi. \qquad (11)$$

На кожному кроці ітерації формули (3) сумісному інтегруванню підлягає система диференціальних рівнянь (1), (11). Це і є шукана модель чутливості до початкових умов.