

ОЦІНЮВАННЯ ВПЛИВУ ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ПОХИБОК НА ТОЧНІСТЬ ВІДТВОРЕННЯ ПРОСТОРОВОГО РОЗПОДІЛУ ПРОВІДНОСТІ

© Михайло Дорожовець, 2002

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра “Інформаційно-вимірювальна техніка”,
Львів, вул. С. Бандери, 12, 79013, Україна,
Жешувська політехніка, кафедра “Метрологія та вимірювальні системи”,
Жешув, вул. В.Поля, 2, 35-959, Польща

Проаналізовано складові інструментальних похибок відтворення образу провідності томографічним методом. Показано, що реконструктивний алгоритм найбільше підсилює адитивні систематичні та випадкові похибки результатів вимірювань електродних величин, а мультиплікативні похибки не підсилюються алгоритмом.

Проанализированы составляющие инструментальной погрешности реконструкции образа проводимости томографическим методом. Показано, что реконструкционный алгоритм в наибольшей степени усиливает аддитивные систематические и случайные погрешности результатов измерения электродных величин, а мультипликативные погрешности не усиливаются алгоритмом.

In the article the components of the instrumental errors of the conductivity image reconstruction by the tomographic method are analyzed. It is shown that the additive systematic and random errors of the measuring results are maximally amplified by the reconstruction algorithm, but multiplicative errors are not amplified by the algorithm.

1. Вступ

Вплив інструментальних похибок на точність відтворення образу просторового розподілу провідності томографічним методом найповніше може бути врахований відповідною кореляційною матрицею [1 – 3]

$$\mathbf{K}_g = M [\Delta \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{g}^T] = \mathbf{REC} \cdot \mathbf{K}_M \cdot \mathbf{REC}^T, \quad (1)$$

де $\Delta \mathbf{g}$ – вектор інструментальних похибок відтворення провідності; $\Delta \mathbf{M}_x$ – вектор похибок результатів вимірювань; $\mathbf{K}_M = M [\Delta \mathbf{M}_x \cdot \Delta \mathbf{M}_x^T]$ – їх кореляційна матриця.

Здебільшого цю матрицю знаходять за умови наявності лише випадкових адитивних похибок вимірювань [4 – 6]; найчастіше припускається відсутність їх взаємної кореляції. Тобто приймають найпростішу модель похибок вимірювань. На практиці така модель є далеко не адекватною, оскільки при томографічних вимірюваннях необхідно враховувати також адитивні систематичні та мультиплікативні похибки, які загалом можуть бути різними в кожному з результатів вимірювань. Тому для належного апріорного оцінювання характеристик інструментальних похибок відтворення просторового розподілу провідності, необхідно аналізувати ці похибки, залежно від використовуваних способу та методики вимірювань і наявних при вимірюваннях основних факторів похибок [1 – 3].

2. Моделі інструментальних похибок для різних методик вимірювань

У томографії провідності об'єкт дослідження збуджують зовнішньою електричною величиною і вимірюють реакції об'єкта на це збудження. Тому загалом слід розглядати дві окремі складові інструментальної похибки: похибку Δ_ϕ формування (генерування) зондувальної величини та похибку $\Delta_{\text{вим}}$ вимірювання вихідних електродних величин [1,2]

$$\Delta_{\text{інстр}} = \Delta_\phi + \Delta_{\text{вим}}. \quad (2)$$

Оскільки при зондуванні об'єкта струмом I_0 вимірюють різниці потенціалів, яка становлять $U_{xi} = I_0 R_{xi}$, а при збудженні потенціалом U_0 вимірюють електродні струми, значення яких $I_{xi} = U_0 G_{xi}$ (де R_{xi} , G_{xi} – еквівалентні опори чи провідності об'єкта), то похибка зміни зондувального струму δ_{I_0} , чи потенціалу δ_{U_0} , спричинить мультиплікативну зміну i -го результату вимірювання, тобто $\Delta_{\phi i} = \delta_{0i} M_{xi}$. При одному джерелі збудження і невеликих часових інтервалах (до кількох секунд) обігу всіх ракурсів зондування відносно похибку джерела можна вважати сталою ($\delta_{\phi 0} = \text{const}$) для всіх результатів вимірювань. Тому відповідно ця складова кореляційної матриці (1) може бути розрахована за виразом

$$\mathbf{K}_\phi = \sigma_{\phi 0}^2 \mathbf{g}_x \mathbf{g}_x^T, \quad (3)$$

де $\sigma_{\phi 0}^2$ – дисперсія відносної похибки зондувальної величини.

Як бачимо з (3), вплив похибки формування зондувальної величини на похибки відтворення провідності лінійний, тобто похибка зондування у декілька десятих часток відсотка спричиняє таку саму похибку значення провідності. Тому така мультиплікативна похибка не є критичною щодо забезпечення належної точності визначення просторового розподілу провідності. При потенціаловому збудженні об’єкта, зокрема за схемою еквіпотенціальних електродів, існує ще одна складова похибки формування, що зумовлена неідеальними параметрами використовуваних операційних підсилювачів для забезпечення еквіпотенціальності електродів [1, 2].

Похибку i -го результату вимірювань в загальному випадку можна подати моделлю з трьох основних складових: адитивної випадкової $\Delta_{a,v,i}$, адитивної систематичної $\Delta_{a,c,i}$ та систематичної мультиплікативної $\delta_{m,c,i} M_{x,i}$

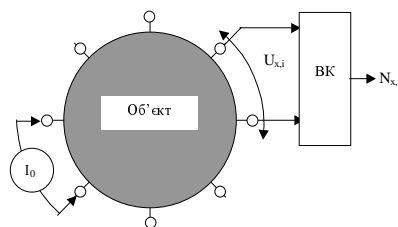
$$\Delta_{\text{вим},i} = \Delta_{a,v,i} + \Delta_{a,c,i} + \delta_{m,c,i} M_{x,i}. \quad (4)$$

Здійснюючи повну циклічну зміну ракурсу зондування об’єкта і, вимірюючи в кожному ракурсі значення всіх можливих електродних величин, кожен результат отримуємо двічі. Перший раз $N_{x,i,j}$ для i -го ракурсу зондування та j -ї вимірювальної проекції, а другий раз $N_{x,i}$ навпаки – для j -го ракурсу зондування та i -ї вимірювальної проекції. Значення результату отримуємо як середнє відповідної пари результатів. Завдяки такому способу отримання результатів відповідні складові похибок можуть усереднюватися.

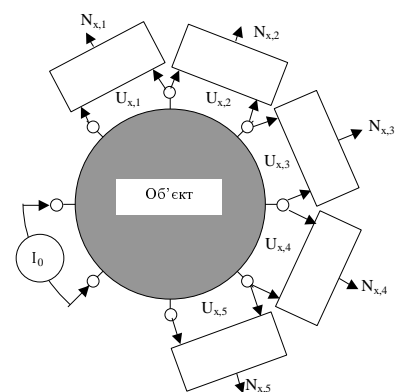
Випадкова складова у (4) спричинена швидкозмінними шумовими процесами засобів вимірювань, а також ефектами квантування у цифрових результатах, тому випадкові похибки окремих результатів можна трактувати як статистично незалежні зі сталою – дисперсія $\sigma_{a,v,i}^2 = \text{const}$. Враховуючи це, складову кореляційної матриці, зумовлену впливом випадкових похибок результатів вимірювань, можна подати у вигляді добутку половини дисперсії (враховано усереднення двох результатів) на одиничну діагональну матрицю \mathbf{I}

$$\mathbf{K}_{a,v} = (\sigma_{a,v}^2 / 2) \cdot \mathbf{REC} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{REC}. \quad (5)$$

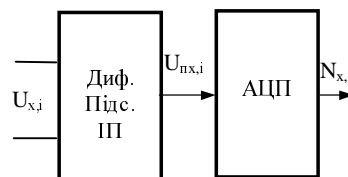
Вплив систематичної адитивної похибки залежить від методики збирання вимірювальної інформації. Загалом застосовують дві методики: послідовне (рис. 1, а) чи паралельне (рис. 1, б) вимірювання електродних величин певного ракурсу зондування. В першому випадку застосовується один централізований вимірювальний канал (ВК), що загалом складається з послідовного сполучення різницевого інструментального підсилювача (ІП) та АЦП (рис. 1, в). Для кожного ракурсу зондування вимірювальний канал почергово підключається до відповідних електродів. У другому випадку для певного ракурсу зондування вимірюють електродні величини паралельно, застосовуючи відповідну кількість вимірювальних каналів.



а



б



в

Рис. 1. Послідовні (а) та паралельні (б) вимірювання електродних величин. Вимірювальний канал (в)

При застосуванні одного вимірювального каналу його стала адитивна систематична похибка $\Delta_{a,c,BK}$, що спричинена відповідними похибками ІП ($\Delta_{a,c,IP}$) та АЦП ($\Delta_{a,c,ACP}$), буде присутньою у всіх без винятку результатах вимірювань. Тому відповідна складова кореляційної матриці (1) може бути описана виразом

$$\mathbf{K}_{a,c,BK} = \sigma_{a,c,BK}^2 [\mathbf{REC} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{REC}^T], \quad (6)$$

де $\sigma_{a,c,BK}^2 = \sigma_{a,c,IP}^2 + \sigma_{a,c,ACP}^2 / K_{IP}^2$ – дисперсія адитивної систематичної похибки вимірювального каналу, K_{IP} – коефіцієнт підсилення ІП; \mathbf{E} – квадратна матриця, розмір якої дорівнює кількості результатів вимірювань, а всі її елементи дорівнюють 1.

Очевидно, що стала систематична мультиплікативна похибка вимірювального каналу, подібно як похибка зондувальної величини, спричиняє складову кореляційної матриці виду (3) з дисперсією відносної мультиплікативної похибки вимірювального каналу $\sigma_{m,BK}^2 = \sigma_{m,IP}^2 + \sigma_{m,ACP}^2$.

Інакше впливають похибки вимірювальних каналів при паралельному вимірюванні електродних величин (рис.1,б). В цьому випадку кожен канал містить іншу систематичну похибку, однак для різних ракурсів зондування похибка каналу повторюється у всіх результатах вимірювань певного електрода чи пари електродів, тобто маємо справу з блочним впливом систематичних похибок, як показано у таблиці. Для прикладу восьмиелектродної системи зі струмовим збудженням усі можливі результати вимірювань різниць потенціалів показані у таблиці. Там також враховано, що у кожному ракурсі три різниці потенціалів між електродами, що прилягають до збуджуючих, не вимірюють, а для решти номінально маємо рівність кожної із симетричних пар результатів $U_{ij} = U_{ji}$.

Сукупність всіх результатів вимірювань для 8-електродного об'єкта.

Пари ел-дів	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-0
0-1			$U_{0,2}$	$U_{0,3}$	$U_{0,4}$	$U_{0,5}$	$U_{0,6}$	
1-2				$U_{1,3}$	$U_{1,4}$	$U_{1,5}$	$U_{1,6}$	$U_{1,7}$
2-3	$U_{2,0}$				$U_{2,4}$	$U_{2,5}$	$U_{2,6}$	$U_{2,7}$
3-4	$U_{3,0}$	$U_{3,1}$				$U_{3,5}$	$U_{3,6}$	$U_{3,7}$
4-5	$U_{4,0}$	$U_{4,1}$	$U_{4,2}$				$U_{4,6}$	$U_{4,7}$
5-6	$U_{5,0}$	$U_{5,1}$	$U_{5,2}$	$U_{5,3}$				$U_{5,7}$
6-7	$U_{6,0}$	$U_{6,1}$	$U_{6,2}$	$U_{6,3}$	$U_{6,4}$			
7-0		$U_{7,1}$	$U_{7,2}$	$U_{7,3}$	$U_{7,4}$	$U_{7,5}$		

Оскільки тут також кожен результат вимірювання формуємо як середнє значення двох результатів, отриманих у протилежних вимірюваннях, то відбувається усереднення систематичних похибок різних каналів. Для однотипних вимірювальних каналів характеристики їх систематичних похибок є однаковими, і кореляційна матриця від впливу цих похибок може бути подана у вигляді

$$\mathbf{K}_{a,c,MBK} = \sigma_{a,c,BK}^2 \cdot \mathbf{REC} \cdot \mathbf{k}_u \cdot \mathbf{REC}^T, \quad (7)$$

де \mathbf{k}_u – нормована кореляційна матриця, елементи якої виражаються через глобальні (i,j) та локальні (n_1, n_2) номери результатів вимірювань таблиці.

Мультиплікативні похибки паралельних вимірювальних каналів на результати впливають аналогічно. Враховуючи взаємну залежність цих похибок, що складову кореляційної матриці (1) можна записати у вигляді

$$\mathbf{K}_{m,MBK} = \sigma_{m,BK}^2 \cdot \mathbf{REC} \cdot \mathbf{diag}(\mathbf{U}_x) \cdot \mathbf{k}_u \cdot \mathbf{diag}(\mathbf{U}_x) \cdot \mathbf{REC}^T, \quad (8)$$

де $\mathbf{diag}(\mathbf{U}_x)$ – діагональна матриця, елементи якої дорівнюють елементам вектора результатів вимірювань \mathbf{U}_x .

Отже, залежно від форми впливу похибок вимірювання на похибки відтворення провідності можна виділити 5 типових похибок, спричинених: 1) мультиплікативними систематичними факторами, однаковими у всіх результатах вимірювань (3); 2) адитивними випадковими факторами, однакової інтенсивності і статистично незалежними у всіх результатах вимірювань (5); 3) адитивними систематичними факторами, однаковими у всіх результатах вимірювань (6); 4) адитивними систематичними факторами, однаковими лише у певних групах результатів вимірювань (7) (назвемо їх блочними похибками); 5) однаковими лише у певних групах результатів вимірювань мультиплікативними систематичними похибками (8) (блочними мультиплікативними похибками).

Використовуючи отримані вирази при відомих характеристиках факторів похибок вимірювальних засобів, можна оцінити кореляційну матрицю інструментальних похибок відтворення елементів провідності. Діагональні елементи розрахованої кореляційної матриці, очевидно, є оцінками дисперсій похибок шуканих провідностей.

3. Оцінювання інструментальних похибок

На підставі загального аналізу виразів (3), (5) – (8) спочатку якісно оцінимо вплив окремих факторів інструментальних похибок. Зокрема, враховуючи, що у (5) $\mathbf{REC} \cong \mathbf{HES}^{-1} \mathbf{J}^T = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J}^T$ (точною рівністю є за від-

сутності регуляризації), то $\mathbf{REC} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{REC}^T = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} = \mathbf{HES}^{-1}$. Оскільки елементи оберненого гесіана \mathbf{HES}^{-1} обернено пропорційні до квадрата чутливості вимірюваних величин до зміни провідності елементів, то гесіан може набувати достатньо великих значень. З цього випливає, що випадкові складові похибки вимірювань електродних величин є основним джерелом нестабільності відтворюваного образу розподілу провідності.

Оскільки значення елементів $PE_{k,l} = \sum J_{i,k} \sum J_{i,l}$ матричного добутку $\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ в (6) (член $\mathbf{REC} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{REC}^T = \mathbf{HES}^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{HES}^{-1}$) внаслідок взаємного усереднення при додаванні елементів якобіана є значно меншими за значення елементів $PI_{k,l} = \sum J_{i,k} J_{i,l}$ матричного добутку (а для діагональних – суми квадратів) $\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$ елементів якобіана, як у виразі (5), то вплив сталих у всіх результатах вимірювань систематичних адитивних похибок слід очікувати меншим, ніж випадкових похибок. Зауважимо що, однак, рівень впливу сталих систематичних похибок у (6) також визначається рівнем оберненого гесіана \mathbf{HES}^{-1} .

Вплив однакових лише для певних груп результатів вимірювань адитивних (7) та мультиплікативних (8) блочних похибок залежить від властивостей матриць \mathbf{k}_m . Загалом ці матриці займають проміжне положення між діагональною одиничною \mathbf{I} (враховує вплив взаємно статистично незалежних випадкових похибок) та повністю заповненою одиничною матрицею \mathbf{E} (враховує вплив усіх однакових систематичних похибок). Тому для багатоканальних вимірювальних схем слід очікувати погіршення стабільності відтворення провідності, що виникає внаслідок ефекту рандомізації систематичних похибок окремих каналів.

Для кількісного апріорного оцінювання впливу зазначених складових похибок введемо коефіцієнт впливу цієї складової інструментальної похибки на похибку відтворюваної провідності як квадратний корінь відношення дисперсій похибок відтворених значень елементів (із номером ne) провідності (діагональний член кореляційної матриці $K_q(ne, ne)$) до дисперсії D_q відповідної q -ї складової інструментальної похибки

$$kp_{q,ne} = \sqrt{\frac{K_q(ne, ne)}{D_q}} \cdot \frac{M_n}{g_n} =$$

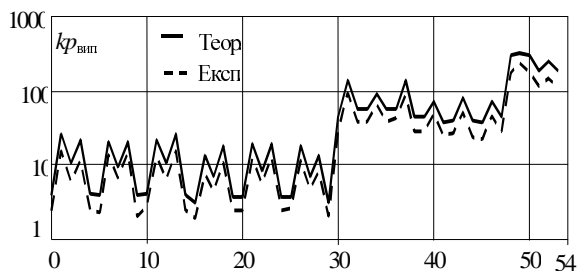
$$= \frac{M_n}{g_n} \sqrt{(\mathbf{REC} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{REC}^T)_{ne,ne}} \cdot \quad (9)$$

де матриці $\mathbf{V}=\mathbf{I}$ – для випадкових адитивних похибок; $\mathbf{V}=\mathbf{E}$ – для сталих у всіх результатах систематичних адитивних похибок; $\mathbf{V}=\mathbf{k}_u$ ($\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_e$) – для блочних систематичних адитивних похибок.

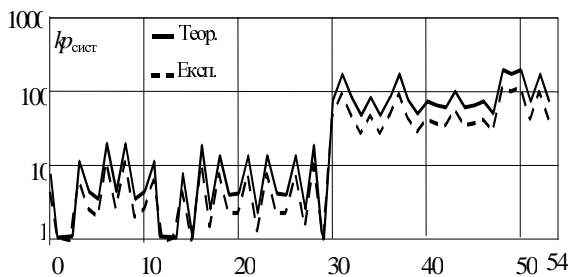
Значення цього коефіцієнта залежать від номера елемента в апроксимаційній схемі провідностей i , для того, щоб на його значення не впливали масштаби значень провідності та вимірюваних величин, цей коефіцієнт пронормований до відповідних діапазонів g_n – провідності та M_n – результатів вимірювань.

Аналізуючи залежності на рис. 2, бачимо, що при 54 елементах апроксимації очікуване підсилення випадкових адитивних похибок для зовнішнього шару апроксимаційних елементів становить $\approx 2-10$, для внутрішнього шару елементів воно у межах $\approx 30-90$, а максимальне підсилення впливу адитивних похибок для елементів центральної зони значно перевищує ≈ 100 (рис. 2, а). При 96 апроксимаційних елементах (вони розташовані у чотирьох шарах) підсилення випадкових похибок відтворення в напрямку від зовнішніх до внутрішніх шарів елементів має приблизно таку саму тенденцію і для елементів внутрішнього шару підсилення становить ≈ 1000 (рис. 2, б). Що ж стосується впливу систематичних адитивних похибок, то, як бачимо з рис. 2, вони спричиняють у декілька раз менші похибки відтворення, ніж випадкові похибки, однак залежність від просторової глибини розміщення елементів зберігається.

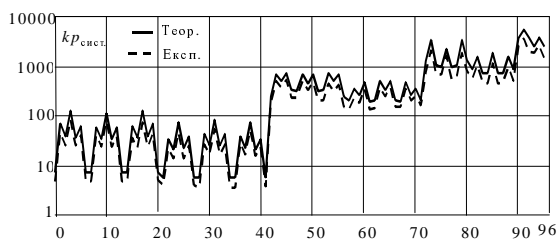
На цих рисунках показані також експериментальні оцінки коефіцієнтів підсилення похибок, знайдені імітаційним моделюванням. Були сформовані набори по 100 реалізації похибок вимірювань (з нормальним та рівномірним розподілами), за результатами яких були відтворені образи розподілу провідності і далі – відповідні реалізації похибок відтворення образів та їх числові характеристики. На рис. 2 показано відношення стандартних відхилень похибок відтворення провідності елемента до стандартного відхилення похибки результатів первинних вимірювань. Як бачимо, теоретичні оцінки, знайдені безпосередньо з кореляційних матриць, добре узгоджуються з експериментальними оцінками, знайденими за результатами відтворення образів, з використанням спотворених похибками результатів вимірювань.



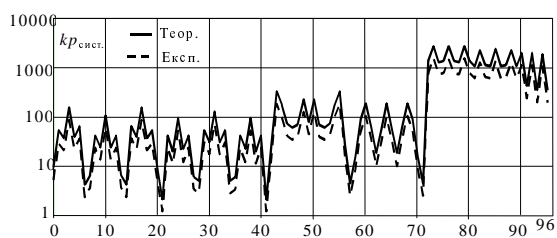
а



б



в



г

Рис. 2. Оцінки коефіцієнтів підсилення інструментальних похибок: адитивних випадкових для $n_{el}=54$ (а) та $n_{el}=96$ (в) і адитивних систематичних для $n_{el}=54$ (б) і $n_{el}=96$ (г). Модель розподілу: 100% стрибок провідності на половині суміжних елементів

На підставі теоретичного апріорного оцінювання можна зробити висновок про загалом високі вимоги щодо адитивних параметрів засобів: низький рівень випад-

кових похибок (шумів) та вхідних зміщень (систематичних складових), висока роздільна здатність використовуваних АЦП, високий рівень послаблення завод.

Якщо пронумерувати (ззовні до середини) шари апроксимаційних елементів як p , то у першому наближенні коефіцієнт підсилення похибок може бути описаний показниковою функцією виду

$$k_p(p) \cong k^{p-1}, \quad (10)$$

де k – початкове значення коефіцієнта підсилення.

4. Висновки

- Кореляційна матриця похибок відтворення образу залежить від характеру складової похибки вимірювання та способу вимірювань. При багатоканальному вимірюванні існує блочна кореляція систематичних похибок.

- Мультиплікативні похибки практично не підсилюються реконструктивним алгоритмом.

- Адитивні (систематичні та випадкові) похибки вимірювань спричиняють радикальне зростання похибок відтворення елементів в напрямку до внутрішніх шарів об'єкта, що вимагає використання засобів вимірювальної техніки з малим рівнем адитивних похибок та високим послабленням шумів та завод.

- Очікувані оцінки коефіцієнтів підсилення складових інструментальних похибок з достатньою точністю можна знайти, використовуючи характеристики матриць, що описують реконструктивний алгоритм.

1. Дорожовець М.М. Математична модель інструментальної похибки вимірювальної системи томографії електричної провідності. // Вісник ДУ "Львівська політехніка". 2000. № 389. С. 9–17.
2. Dorożowiec M. Analiza błędów instrumentalnego przy odtwarzaniu konduktywności metodą tomograficzną. Materiały XXXII Międzynarodowej Konferencji Metrologów. MKM'2000. Rzeszów-Jawor. 2000. T.1. S.251-256.
3. Dorożovets M., Kowalczyk A., Stadnyk B. Measurement of a temperature non-uniformity using resistance tomography method. Proceedings of 8th International Symposium on Temperature and Thermal Measurements in Industry and Science: Tempmeko-2001. 19-21 June 2001, Berlin, Germany. 2002, Volume 2. P.969–973.
4. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л., 1985.
5. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. К., 1984.
6. Грановский В.А., Сиряя Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Л., 1990.