

МЕТРОЛОГІЯ І СТАНДАРТИЗАЦІЯ

УДК 621.317

АНАЛІЗ СУМІСНОГО ВПЛИВУ МЕТОДИЧНОЇ ТА ІНСТРУМЕНТАЛЬНОЇ ПОХИБОК ТОМОГРАФІЇ ПРОВІДНОСТІ

© Михайло Дорожовець, Адам Ковальчик, 2002

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра “Інформаційно-вимірювальна техніка”,
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна,

Жешувська політехніка, кафедра “Метрологія та вимірювальні системи”, Жешув, вул. В.Поля, 2, 35-959, Польща

Досліджена залежність сумарної похибки відтворення провідності від кількості апроксимаційних елементів та рівня інструментальних похибок вимірювання електродних величин. Показано, що для заданого рівня інструментальної похибки існує оптимальна кількість апроксимаційних елементів, для якої досягається мінімум сумарної похибки.

Исследована зависимость суммарной погрешности восстановления проводимости от количества аппроксимирующих элементов и уровня инструментальных погрешностей измерения электродных величин.

Показано, что для заданного уровня инструментальных погрешностей существует оптимальное количество аппроксимирующих элементов, при котором получается минимум суммарной погрешности.

In the article the dependence of the resultant error conductivity reconstruction from the quantity of approximating elements and the level of the instrument errors in the measurement of electrode values is investigated. It is shown that for the assigned level of the instrument errors there is an optimum of approximating elements quantity, for which the value of resultant error becomes minimum.

1. Вступ. Томографічне відтворення просторового розподілу електричної провідності супроводжується декількома видами похибок, насамперед це методичні похибки апроксимації, інструментальні похибки вимірювань електродних величин та реконструкції образу [1]. Очевидно, що для покращання образу просторового розподілу електричної провідності, зокрема, збільшення його роздільної здатності, передовсім необхідно зменшувати методичну похибку апроксимації, тобто необхідно збільшувати кількість апроксимаційних елементів і, як наслідок, збільшувати кількість незалежних результатів вимірювань. Останнє викликає необхідність збільшення кількості вимірювальних електродів. Однак, як було показано у [2, 3], збільшення кількості вимірювальних електродів спричиняє відповідне зменшення значень вимірюваних міжелектродних величин. В результаті це веде до радикального збільшення впливу адитивних (як систематичних, так і випадкових) інструментальних похибок вимірювання цих величин [4 – 7]. Отже, маємо

справу з двома протилежними тенденціями щодо характеру залежності похибок відтвореного образу від збільшення кількості результатів (вимірювальних електродів): інструментальна похибка зростає, а похибка апроксимації зменшується. Тому виникає задача погодження кількості апроксимаційних елементів та вимірювальних електродів, виходячи з умови отримання мінімальної сумарної похибки відтворення образу провідності.

2. Характеристики апроксимаційних схем методом скінченних елементів. При використанні $n_{e,apr}$ просторових елементів апроксимації відносна до площі досліджуваного середовища роздільна здатність відтворення провідності становить

$$\delta_{resol} \geq \alpha_1 / n_{e,apr}, \quad (1)$$

де $\alpha_1 \approx 1$ – коефіцієнт, що враховує просторову неоднорідність апроксимаційних елементів. Тобто для отримання роздільної здатності близько 1 % кількість апроксимаційних елементів має бути 100. Своєю

чергою, кількість елементів апроксимації не може перевищувати кількість M одержуваних незалежних результатів вимірювань, яка пропорційна до квадрата кількості вимірювальних електродів n_{el}

$$n_{e,apr} \leq \alpha_2 M = \alpha_2 n_{el} [n_{el} - 1(3)]/2 \cong \alpha_2 n_{el}^2/2, \quad (2)$$

де α_2 – коефіцієнт, який залежить від структури апроксимаційної схеми і визначається відношенням максимально можливої кількості апроксимаційних елементів до фактично використовуваної. При застосуванні повністю компактною апроксимації (фактична кількість елементів дорівнює максимально можливій) $\alpha_2=1$, натомість при застосуванні апроксимаційної схеми (рис. 1) з квазіоптимальними трикутними елементами $\alpha_2 \approx 3$.

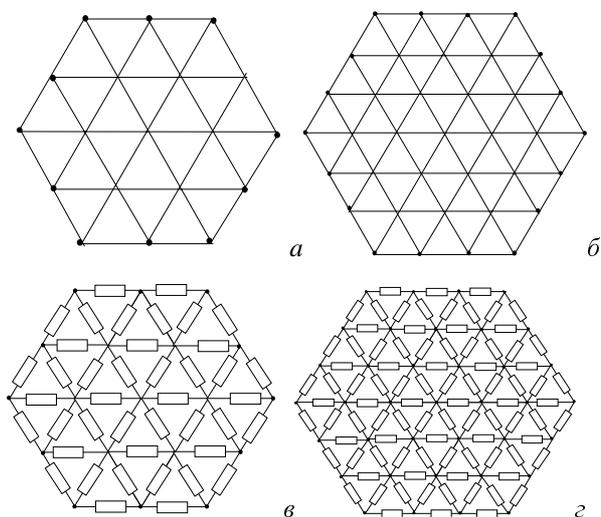


Рис. 1. Апроксимація 24 (а) та 54 (б) оптимальними трикутними елементами та відповідні їм схеми з 42 (в) і 90 (г) з дискретних елементів

Така апроксимаційна схема має p шарів (відносно центра об'єкта) апроксимаційних елементів. Зокрема, схема на рис. 1, а має два шари ($p=2$), а схема на рис. 1, б має три шари ($p=3$). Параметри схем однозначно виражаються через кількість шарів:

– кількість вимірювальних електродів

$$n_{el} = 6p; \quad (3)$$

– кількість апроксимаційних трикутників

$$n_{e,apr} = 6p^2; \quad (4)$$

– кількість дискретних елементів

$$m_{d,el} = 3p(3p+1). \quad (5)$$

3. Сумісний вплив апроксимаційної та інструментальної похибок. З іншого боку, у [4] показано, що зі збільшенням кількості шарів апроксимаційних елементів різко зростає підсилення впливу адитивної інструментальної похибки γ_{instr} , яке достатньо точно можна описати залежністю

$$k_p(p) \cong k^{p-1}, \quad (6)$$

де k – множник підсилення впливу адитивних похибок при збільшенні на один шар елементів апроксимації. Загалом цей множник залежить від номера шару елементів в апроксимаційній схемі (вплив інструментальних адитивних похибок на похибки відтворення елементів у внутрішніх шарах значно більший, ніж на похибки елементів середніх та зовнішніх шарів). Це пояснюється поганим прониканням струму у внутрішні шари об'єкта. Для оптимальних апроксимаційних схем похибка відтворення провідності кожного наступного (глибшого) шару спричиняється зростанням похибки приблизно у 10 разів, тобто $k \approx 10$.

Тоді, враховуючи складові (1) та (6), за умови (2) – (5) оцінку сумарної похибки (від обмеження просторової роздільності відтворюваного образу та впливу інструментальної похибки) можна записати у вигляді

$$\delta_{\Sigma} \cong 2\alpha_1/\alpha_2 n_{el}^2 + \gamma_{instr} k^{p-1}. \quad (7)$$

Для регулярних, рівномірних за площею елементів апроксимації значення коефіцієнта $\alpha_1=1$, тому останній вираз набуває вигляду

$$\delta_{\Sigma} \cong 1/6p^2 + \gamma_{instr} k^{p-1}. \quad (8)$$

Для значень граничних адитивних похибок вимірювань $\gamma_{instr}=0.1\%$, 0.01% , 0.001% та 0.0001% , а також для значення множника підсилення $k \approx 10$ на рис. 2 показані залежності (8). Як видно з (8) та рис. 2, для відповідних значень γ_{instr} та k сумарна похибка досягає мінімуму при певному (оптимальному) значенні кількості шарів елементів апроксимації (p_{opt}). Знайдемо ці значення, взявши спочатку похідну від (5) по p і прирівнявши її до нуля

$$-1/3p^3 + \gamma_0 \ln(k) k^{p-1} = 0 \text{ або}$$

$$3\gamma_0 \ln(k) p^3 k^{p-1} = 1. \quad (9)$$

Логарифмуючи останній вираз, отримуємо умову екстремуму

$$\ln(C) + 3\ln(p) + (p-1)\ln(k) = 0, \text{ де } C = 3\gamma_{instr} \ln(k). \quad (10)$$

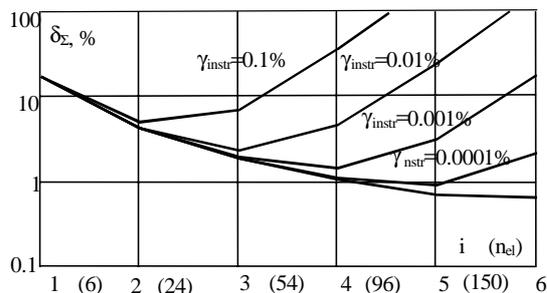


Рис. 2. Залежності сумарної похибки від кількості шарів схеми апроксимації (кількості апроксимаційних елементів) та похибки вимірювань

Оскільки при великій кількості апроксимаційних шарів вплив інструментальних похибок зростає експоненційно, то на практиці застосовують апроксимаційні схеми з обмеженою кількістю шарів елементів, типово від 2...3 до 5...6. Тому оптимум кількості шарів апроксимації будемо шукати для вказаного діапазону. Використовуючи параболічну інтерполяцію функції $\ln(p) \approx b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2$ (де $b_0 = \ln(3) - 2\ln(2)$; $b_1 = (8\ln(2) - 3\ln(3))/4$; $b_2 = (\ln(3) - 2\ln(2))/8$ – коефіцієнти інтерполяції), оптимальні значення кількості шарів з (10) можна знайти за виразом

$$p_{opt} = \text{round} \left[\frac{\sqrt{\frac{4[\ln(3\gamma_{instr}\ln(k)) - \ln(k) - 3b_0]3b_2}{(3b_1 + \ln(k))^2 + 1} - 1}}{6b_2/(3b_1 + \ln(k))} \right]. \quad (11)$$

Для вказаних вище значень граничних адитивних похибок вимірювань γ_{instr} оптимальна кількість шарів апроксимації становить $p_{opt}(0.1\%)=2$, $p_{opt}(0.01\%)=3$, $p_{opt}(0.001\%)=4$, $p_{opt}(0.0001\%)=5$, яким відповідають вимірювальні схеми з 12, 18, 24, 30 вимірювальними електродами, відповідно, та кількістю апроксимаційних елементів 24, 54, 96, 150, відповідно.

З отриманих результатів видно, що якщо хочемо відтворювати просторовий розподіл провідності (з урахуванням просторової роздільної здатності) з похибкою до $\approx 5\%$ (на центральних апроксимаційних елементах), то електродні величини треба вимірювати з похибкою до $\approx 0.1\%$, далі для одержання похибки відтворення до $\approx 2\%$ похибка вимірювань має бути приблизно $\approx 0.01\%$, і т. д. Для кожного двократного зменшення похибки відтворення центральних елементів похибка вимірювань має зменшуватися приблизно на порядок. Очевидно, що якщо не орієнтуватися на найгірший випадок, тобто на максимальну можливу похибку відтворення центральних елементів, а для

оцінювання якості відтворення образу використовувати певну усереднену за площею характеристику похибки, наприклад, середнє чи середньоквадратичне за площею значення похибки, то вимоги щодо точності засобів вимірювань істотно послаблюються. Зокрема, для розглянутих вище схем з 24, 54 та 96 апроксимаційними елементами, орієнтуючись на середньоквадратичне за площею значення похибки відтворення образу, підсилення систематичних адитивних похибок становить приблизно – 6, 80, 1100 (замість максимально можливих значень 11, 215 та 3900, відповідно). Тобто в цьому випадку вимоги до точності засобів зменшуються зі збільшенням кількості елементів апроксимації.

4. Висновки

- Похибки апроксимації та вимірювань електричних величин протилежно впливають на точність реконструкції образу провідності.
- Внаслідок різкого зростання впливу інструментальної похибки недоцільно застосовувати апроксимації з великою кількістю апроксимаційних елементів, оскільки сумарна похибка образу в цьому випадку обмежена знизу значенням першої. Крім того, збільшення елементів апроксимації спричиняє збільшення часу відтворення образу, тобто призводить до зростання впливу динамічної похибки.

1. Дорожовець М.М. Математичні проблеми реконструкції образів в технічній томографії // Вимірювальна техніка та метрологія. Львів. – 1998. – Вип.53. – С. 113-121. 2. Дорожовець М., Ковальчик А. Дослідження вимірювальних схем в томографії провідності // Технічні вісті. Львів. 2001/1(12),2(13), С. 65-70. 3. Dorożowiec M., Kowalczyk A. Badania schematów dualnych pomiaru sygnałów czujników wieloelektrodowych w tomografii impedancyjnej. XI sympozjum Modelowanie i symulacja systemów pomiarowych. Materiały sympozjum. Krynica, 17-21 września, 2001. S.113 – 120. 4. Дорожовець М.М. Оцінювання впливу інструментальних похибок на точність відтворення просторового розподілу провідності. // Вимірювальна техніка та метрологія. Львів, – 2002. – Вип.56. 5. Дорожовець М.М. Математична модель інструментальної похибки вимірювальної системи томографії електричної провідності. // Вісник ДУ "Львівська політехніка", 2000 р. N389. С. 9-17. 6. Dorożowiec M. Analiza błędu instrumentalnego przy odtwarzaniu konduktywności metodą tomograficzną. Materiały XXXII Międzuczelnianą Konferencji Metrologów. MKM'2000. Rzeszów-Jawor. 2000. T.1. S.251-256. 7. Dorozhovets M., Kowalczyk A., Stadnyk B. Measurement of a temperature non-uniformity using resistance tomography method. Proceedings of 8th International Symposium on Temperature and Thermal Measurements in Industry and Science: Tempmeko-2001. 19-21 June 2001, Berlin, Germany. 2002, Volume 2, P.969 – 973.