

$$D(e_0^2) = 2 \cdot K_p^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_0^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (|H_1(v)| \cdot |H_1(f-v)|)^2 dv \times \left( \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Theta)}{\pi \cdot f \cdot \Theta} \right)_{df}^2, \quad (17)$$

$$\times \left( \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Theta)}{\pi \cdot f \cdot \Theta} \right)_{df}^2 \quad (14)$$

де  $\Theta$  – час усереднення,  $v$  – частота.

Аналогічно отримано вирази для неінформативного шумового сигналу  $e_1(t)$

$$[M(e_1^2)]^2 = K_p^2 \cdot S_1^2 \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(f)|^2 df \right)^2 \quad (15)$$

$$D(e_1^2) = 2 \cdot K_p^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (|H_1(v)| \cdot |H_1(f-v)|)^2 dv \times \left( \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Theta)}{\pi \cdot f \cdot \Theta} \right)_{df}^2 \quad (16)$$

та статистично незалежних шумових сигналів

$$D(e_0 \cdot e_1) = 2 \cdot K_p^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_0^2 \cdot S_1^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (|H_1(v)| \cdot |H_1(f-v)|)^2 dv \times$$

де  $S_1$  – спектральна густина потужності шумової напруги каналу підсилювача.

Отже, одержано аналітичні вирази, які дають змогу оцінити методичну похибку, пов'язану з шумовою природою корисного сигналу, інструментальні похибки вимірювання температури та оцінено доцільність застосування одноканального підсилювача для створення ШТ.

1. Саватеев А.В. Шумовая термометрия. – Л., 1987.  
2. Микитин І.П., Стадник Б.І., Дорожовець М.М. Математична модель шумового термометра на основі кореляційного підсилювача // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2000. – №57. 3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. М., 1969. 4. Сибберг У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. Ч.2: М., 1988. 5. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М., 1974.

УДК 621.1

## ВРАХУВАННЯ КОМПОНЕНТИ ВИПРОМІНЮВАННЯ ПРИ РОЗРАХУНКУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ БАГАТОШАРОВИХ СТРУКТУР

© Тарас Винник, 2002

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра “Метрологія, стандартизація та сертифікація”, вул. С.Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

*Розглянуто підхід до моделювання розподілу температури у багатошарових структурах при врахуванні компоненти випромінювання. Розв'язок для температурного поля шукається через числову апроксимацію в часі і поданий у вигляді часткових сум двократного ряду, які характеризують просторовий розподіл температури для певного моменту часу. При врахуванні випромінювальної компоненти температурне поле наближається сплайнами. Порівняно результати моделювання з врахуванням компоненти випромінювання та без нього.*

*Рассмотрен подход к моделированию распределения температуры в многослойных структурах с учетом компоненты излучения. Решение о температурном поле ищется числовой аппроксимацией во времени и представлено в виде частичных сум двукратного ряда, которые характеризуют пространственное распределение температур в определенный момент времени. При учете компонент излучения температурное поле приближается сплайнами. Произведено сравнение результатов моделирования с учетом компоненты излучения и без него.*

*The approach to modeling temperature in multi-layer structures including radiation components is considered. The solution for a temperature field is performed through numerical approximation in time, and is represented in the form of partial sums of a 2-multiple series, which characterize temperature distribution in space at defined time. While taking components of radiation into consideration, temperature field is approximated with splines. The comparison of simulation results with and without radiation components is carried out.*

У [1] сформульовані рівняння для визначення реальної температури при конвективному теплообміні з довкіллям на верхній та нижній грані за наявності

джерел тепловиділення на верхній грані за умови врахування теплового випромінювання та конвективного теплообміну. Задача розглядалася при нульо-

вих крайових значеннях температури. Для малих температур довкілля, наприклад, (<100К), різниця в результатах моделювання при нульових та ненульових крайових умовах невідчутна, але для великих температур (близько 300 °С) вона стає помітнішою.

На верхній грані процеси теплообміну показані на рис. 1.

На верхній грані

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} + \alpha(T - T_0) \Big|_{z=0} + \varepsilon(T) \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_0^4) = Q(x, y, t) \tag{1}$$

де  $T$  – абсолютне значення температури структури;  $T_0$  – абсолютне значення температури довкілля;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності, який приймаємо за константу, хоча в загальному випадку він є функцією від

координат та температури;  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну з довкіллям, тут приймається сталим;  $Q(x, y, t)$  – функція густини розподілу теплового навантаження.

Відповідно до скоректованої формули аналітичне наближення

$$-\lambda \frac{\partial T_n}{\partial z} \Big|_{z=0} + \alpha(T_n - T_0) \Big|_{z=0} = Q(x, y, t) - \varepsilon(T_{n-1}) \cdot \sigma \cdot (T_{n-1}^4 - T_0^4) \tag{2}$$

де  $T_n = T(x, y, 0, t_n)$ ,  $t_n = n \cdot \tau$  – час.

На нижній грані:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} + \alpha(T - T_0) \Big|_{z=0} + \varepsilon(T) \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_0^4) = 0 \tag{3}$$

і відповідне аналітичне наближення:

$$\lambda \frac{\partial T_n}{\partial z} \Big|_{z=0} + \alpha(T_n - T_0) \Big|_{z=0} = -\varepsilon(T_{n-1}) \cdot \sigma \cdot (T_{n-1}^4 - T_0^4) \tag{4}$$

Спираючись на вказані умови, запишемо систему рівнянь для визначення реальної температури:

$$\begin{pmatrix} \lambda^{(1)}\gamma_{kl}^{(1)} + \alpha^{(1)} & -\lambda^{(1)}\gamma_{kl}^{(1)} + \alpha^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -e^{-\gamma_{kl}^{(1)}h_1} & e^{\gamma_{kl}^{(1)}h_1} & \frac{\lambda^{(2)}\gamma_{kl}^{(2)}}{\lambda^{(1)}\gamma_{kl}^{(1)}} & -\frac{\lambda^{(2)}\gamma_{kl}^{(2)}}{\lambda^{(1)}\gamma_{kl}^{(1)}} & 0 & \dots & 0 \\ e^{-\gamma_{kl}^{(1)}h_1} & e^{\gamma_{kl}^{(1)}h_1} & -1 & -1 & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -e^{-\gamma_{kl}^{(N-1)}h_{N-1}} & e^{\gamma_{kl}^{(N-1)}h_{N-1}} & \frac{\lambda^{(N)}\gamma_{kl}^{(N)}}{\lambda^{(N-1)}\gamma_{kl}^{(N-1)}} & -\frac{\lambda^{(N)}\gamma_{kl}^{(N)}}{\lambda^{(N-1)}\gamma_{kl}^{(N-1)}} \\ 0 & \dots & 0 & e^{-\gamma_{kl}^{(N-1)}h_{N-1}} & e^{\gamma_{kl}^{(N-1)}h_{N-1}} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (-\lambda^{(N)}\gamma_{kl}^{(N)} + \alpha^{(N)})e^{-\gamma_{kl}^{(N)}h_N} & (\lambda^{(N)}\gamma_{kl}^{(N)} + \alpha^{(N)})e^{\gamma_{kl}^{(N)}h_N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{kl}^1 \\ B_{kl}^1 \\ \vdots \\ A_{kl}^N \\ B_{kl}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{kl} + \lambda^{(1)}R_{kl}^{(1)}(0) - \alpha^{(1)}R_{kl}^{(1)}(0) - (Z_{kl}(0) - Z_{kl}^*(0))\varepsilon_{kl} \\ \frac{\lambda^{(2)}R_{kl}^{(2)}(0)}{\lambda^{(1)}\gamma_{kl}^{(1)}} - \frac{R_{kl}^{(1)}(h_1)}{\gamma_{kl}^{(1)}} \\ R_{kl}^{(2)}(0) - R_{kl}^{(1)}(h_1) \\ \vdots \\ \frac{\lambda^{(N)}R_{kl}^{(N)}(0)}{\lambda^{(N-1)}\gamma_{kl}^{(N-1)}} - \frac{R_{kl}^{(N-1)}(h_{N-1})}{\gamma_{kl}^{(N-1)}} \\ R_{kl}^{(N)}(0) - R_{kl}^{(N-1)}(h_N) \\ -\lambda^{(N)}R_{kl}^{(N)}(h_N) - \alpha^{(N)}R_{kl}^{(N)}(h_N) - (Z_{kl}(h_N) - Z_{kl}^*(h_N))\varepsilon_{kl} \end{pmatrix} \tag{5}$$

де  $Z_{kl}^*(H_N), Z_{kl}^*(0)$  – коефіцієнти розкладу 4 ступеня температури в двократний ряд Фур'є по координатах  $x, y$ . Розв'язок такої системи аналогічний розв'язку в [1] за винятком визначення коефіцієнтів розкладу випромінювальної компоненти на верхній та нижній гранях, що розглянемо тепер. Метод числового знаходження значень інтегралів при обчисленні коефіцієнтів  $Z_{kl}^*(H_N), Z_{kl}^*(0)$  неефективний, бо кількість операцій, необхідна для розв'язання задачі, унеможливає знаходження розв'язку прийнятної точності. Тому зроблені такі наближення: обчислюється значення температури на  $i$ -му часовому шарі, здійснюється 2-вимірна сплайн-апроксимація. Це дає змогу

отримати температурне поле не тільки як часткову суму ряду, а також через сукупність поліноміальних представлень. Далі випромінювальна здатність як функція температури теж може бути апроксимована сплайнами, на цей раз одновимірними, а отже

$$\varepsilon(T(x, y, z_i, t)) = \varepsilon \left( \begin{matrix} \vec{x} \\ x \\ \vec{y} \end{matrix} A_{ij} \vec{y} \right) = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} \vec{x} \\ x \\ \vec{y} \end{pmatrix} A_{ij} \vec{y} \\ \begin{pmatrix} \vec{x} \\ x \\ \vec{y} \end{pmatrix}^2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

де  $x_i, y_j$  – координати одного з кутів прямокутника, на якому визначений сплайн.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ x - x_i \\ (x - x_i)^2 \\ (x - x_i)^3 \end{bmatrix}, A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij00} & a_{ij01} & a_{ij02} & a_{ij03} \\ a_{ij10} & a_{ij11} & a_{ij12} & a_{ij13} \\ a_{ij20} & a_{ij21} & a_{ij22} & a_{ij23} \\ a_{ij30} & a_{ij31} & a_{ij32} & a_{ij33} \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ y - y_j \\ (y - y_j)^2 \\ (y - y_j)^3 \end{bmatrix}$$

$$\iint x^T A_{ij} y \cdot F_x(kx) \cdot F_y(ky) dx dy = \begin{bmatrix} \int F_x(kx) dx \\ \int x F_x(kx) dx \\ \int x^2 F_x(kx) dx \\ \int x^3 F_x(kx) dx \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} \int F_y(ky) dy \\ \int y F_y(ky) dy \\ \int y^2 F_y(ky) dy \\ \int y^3 F_y(ky) dy \end{bmatrix} \quad (7)$$

де  $F_x, F_y = \cos(...), \sin(...)$ .

Після аналітичного наближення коефіцієнти  $Z^*_{kl}(H_N), Z^*_{kl}(0)$  можуть бути знайдені аналітично як сума визначених інтегралів виду:

Очевидно, вказане наближення не є ідеальним, але слід зазначити, що  $\mathcal{E}$  – експериментально визначена функція, і точне значення визначити неможливо.

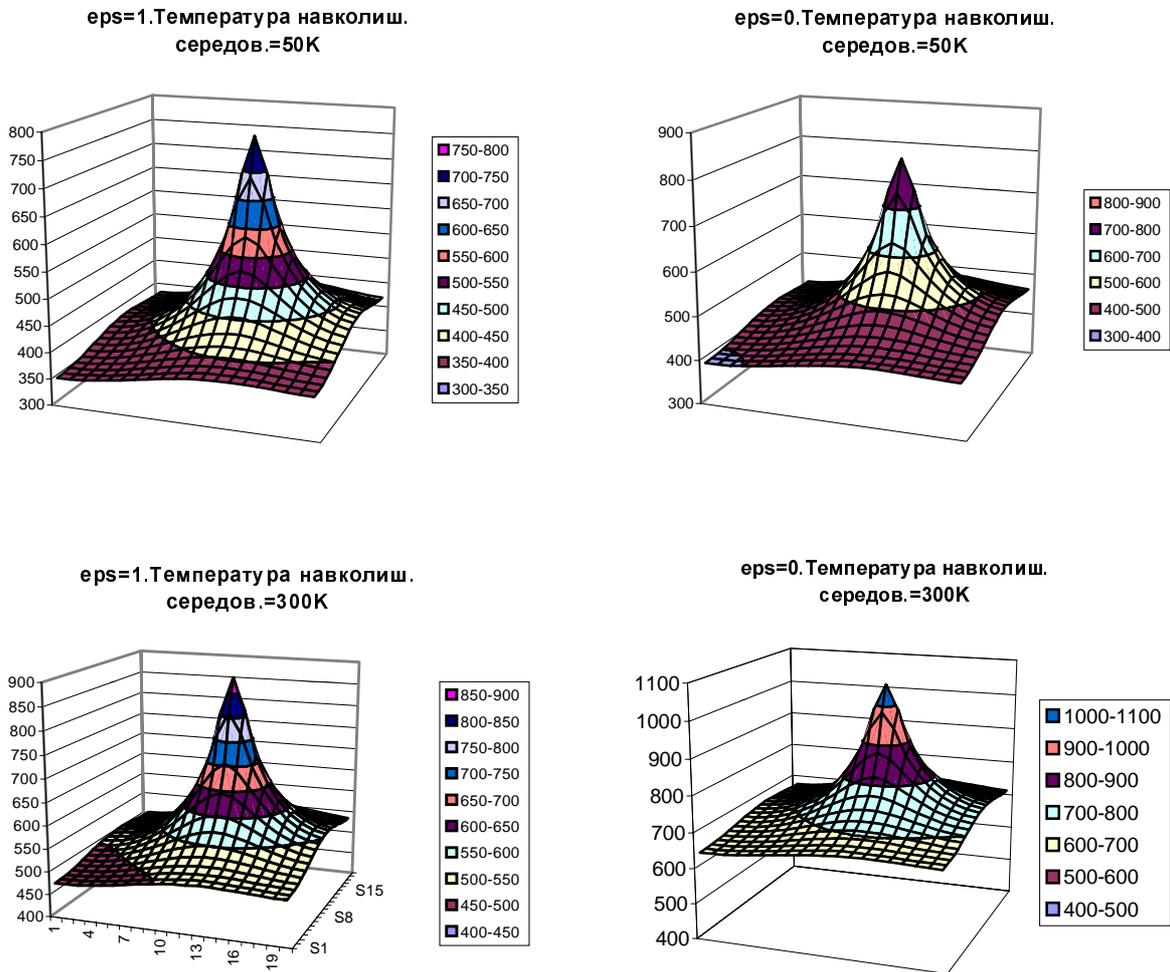


Рис. 1. Розподіли температур

Звернемось до результатів моделювання. На рис. 1 показані розподіли температур при різних значеннях випромінювальної здатності та температурі навколишнього середовища (НС) за таких умов:  $\lambda=100$ ,  $\alpha=10$ ,  $\frac{\rho c}{\lambda}=1e4$ , потужність джерела випромінювання  $1e6 \text{ Вт/м}^2$ , верхній лівий кут джерела має координати (0.05,0,05), правий нижній – (0.06,0,06). Структура має розміри: довжина – 0,1 м, ширина – 0,1 м, висота – 1 мм. Як видно з діаграм, максимальна температура залежить не тільки від випромінювальної здатності, а також від температури НС. Так різниця між максимальною температурою структури та НС при  $\epsilon=0$  для обох випадків  $=757 \text{ К}$ . Якщо  $\epsilon=1$ , різниця не є однаковою і становить  $713 \text{ К}$  і  $584 \text{ К}$  відповідно для температур 50 та  $300 \text{ К}$ .

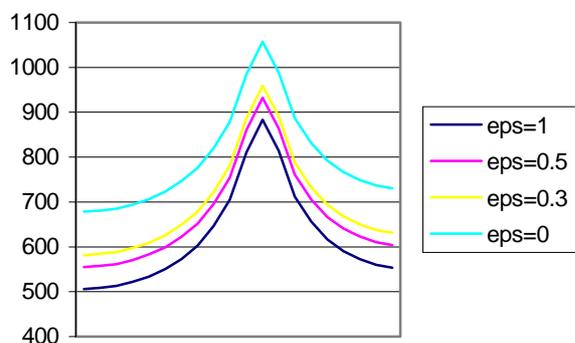


Рис. 2. Залежність температури від випромінювальної здатності.  $T_{\text{навк. середовища}}=300 \text{ К}$

На рис. 2 показана серія графіків залежності температури від координати  $x$  ( $y=0.055 \text{ м}$ ,  $z=0.0001 \text{ м}$ ) при різних випромінювальних здатностях  $\epsilon$ . Максимальна відносна похибка при  $\epsilon=1$  та 0 відповідно, становить 25%, середня 10%. При подальшому підвищенні потужності джерела чи температури НС ця похибка зростає, причому нелінійно.

Розглянемо наближення температурного поля за допомогою сплайнів. Це наближення дає можливість визначити локальні дефекти в структурі за допомогою механізму кореляції. Детальніше: теоретично розраховане поле апроксимується за допомогою певного наближення функціями з класу двічі неперервно диференційованих, наприклад, 2-вимірними сплайнами 3-порядку (СП3). За допомогою пірометра сканується поверхня реальної структури. За отриманим табличним значенням будується наближення, здійснене тими самими функціями. Для виявлення локальних дефектів тепер достатньо прокорелювати ці наближення.

1. Винник Т., Засименко В., Федасюк Д. Розрахунок температурного поля багатошарових структур з тепловими джерелами на поверхні // Вимірвальна техніка та метрологія, № 58, 2001 р.  
 2. Gisela Engeln – Müller; Fritzy Reutter: Numerik Algorithmen, VDI VERLAG GmbH, 1996.  
 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М, 1979.