

## Комбінована МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПРИСТРОЇВ

© Мадай В.С., Шегедин О.І., 2007

**Розглянуто особливості моделювання електромагнітних пристроїв та дослідження режимів їх роботи. Розроблено комбіновану математичну модель для розрахунку перехідних та усталених процесів на основі поєднання методів теорії електромагнітних кіл і методів теорії електромагнітного поля, що дає змогу визначати просторово-часовий розподіл векторів напруженості магнітного поля і магнітної індукції.**

**Features of mathematical modeling and analysis of electromagnetic devices are considered. Combined mathematical model to calculate transient and steady-state regimes based on methods of electromagnetic circuits and electromagnetic field theory is developed. Proposed model makes it possible to evaluate time-space distribution of magnetic field tension and magnetic induction vectors.**

**Вступ.** Сьогодні під час побудови й аналізу режимів електромагнітних пристроїв (ЕМП) набувають поширення методи математичного моделювання, що дозволяють з достатнім ступенем вірогідності прогнозувати їхні експлуатаційні (портативність, енергоощадність) параметри. До ЕМП належать пристрої, які складаються з  $n$  заструмлених обмоток і магнітопроводу з повітряним проміжком. Розмаїття ЕМП вимагає побудови в кожному конкретному випадку специфічних математичних моделей, які повинні відповідати таким вимогам:

- адекватність відображення електромагнітних процесів та універсальність щодо режимів;
- простота математичного обґрунтування моделі;
- зв'язок з основною частиною схеми через струми і напруги під час роботи ЕМП у складі системи.

**Аналіз останніх досліджень.** Відомі математичні моделі ЕМП [1, 2] ґрунтуються на теорії електромагнітного поля та теорії електромагнітних кіл і скеровані на визначення інтегральних параметрів – тягових зусиль, струмів обмоток, тоді як під час проектування цих пристроїв важливими є диференціальні параметри – просторово-часовий розподіл векторів напруженості магнітного поля і магнітної індукції. Комбіновані методи моделювання режимів ЕМП дають змогу використовувати позитивні властивості як колових, так і польових моделей. У таких моделях частина пристрою описується векторними рівняннями електромагнітного поля у вузлах дискретної сітки, яка накриває вибрану розрахункову область, інша – рівняннями електромагнітних кіл (зокрема з розподіленими параметрами). Така математична модель, доповнена початковими і граничними умовами, дає надійніші результати при мінімальній кількості диференціальних рівнянь, що описують конструкцію, і, одночасно, забезпечить високу точність розрахунку параметрів магнітного поля.

**Виклад основного матеріалу.** Розроблено напівпольову математичну модель для розрахунку перехідних та усталених процесів в ЕМП на основі поєднання методів теорії електромагнітних кіл і методів теорії електромагнітного поля. Методи теорії електромагнітного поля застосовуються лише для опису фізичних процесів у вибраній розрахунковій області, що складається з частини магнітопроводу і повітряного проміжку. Фізичні процеси в решті конструкції і обмотці ЕМП описуються рівняннями електромагнітного кола.

Основне диференціальне рівняння для розрахунку електромагнітного поля в основній частині магнітопроводу, записане стосовно векторного потенціала в нелінійному анізотропному середовищі має вигляд [3]

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\Gamma^{-1} \nabla \times (\mathbf{N} \nabla \times \mathbf{A}), \quad (1)$$

де  $\mathbf{A}$  – векторний потенціал електромагнітного поля,  $\Gamma$  – матриця статичних електропровідностей,  $\mathbf{N}$  – матриця обернених магнітних проникностей, компоненти якої визначаються параметрами середовища.

Запишемо векторне рівняння (1) у циліндричній системі координат і з метою спрощення подальшого викладу розглянемо випадок, коли  $\mathbf{A}$  має лише один просторовий компонент

$$A = \alpha_0 A. \quad (2)$$

У такому разі отримаємо

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} + v \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + v \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} A + v \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} v A \right], \quad (3)$$

де  $A$  – аксіальний компонент векторного потенціалу електромагнітного поля;  $\gamma$  – електропровідність середовища в аксіальному напрямі;  $v$  – обернена магнітна проникність (релактивність) середовища;  $r, z$  – просторові координати.

Рівнянням (3) описується електромагнітне поле у феромагнітних зонах ЕМП. У повітряному проміжку рівняння (3) спрощується

$$0 = v_0 \left( \left( \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) - \frac{A}{r^2} \right), \quad (4)$$

де  $v_0$  – релактивність повітря.

Під час математичного моделювання практичних задач електродинаміки система рівнянь (3), (4) повністю описує електромагнітний процес в кусково-однорідних зонах, що складаються з магнітопроводів, струмопроводів, діелектриків.

Для отримання однозначного розв'язку диференціальних рівнянь (3), (4) необхідно задати початкові і граничні умови. Початкові умови задають значення функції у початковий момент часу  $t=0$ . Граничні умови задаються на границі замкнутого простору  $S$  ("+" і "-"), усередині якого шукається розв'язок диференціальних рівнянь. Гранична умова для рівняння (1) електромагнітного поля має вигляд

$$A^+ = A^-; \quad v^+ \frac{\partial A^+}{\partial n} = v^- \frac{\partial A^-}{\partial n}, \quad (5)$$

де  $\frac{\partial}{\partial n}$  – нормальна похідна.

За просторовим розподілом поля вектора  $\mathbf{A}$  визначаємо поле вектора магнітної індукції  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (6)$$

Рівняння (6) у циліндричній системі координат має вигляд

$$B_r = \left( \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} \right); \quad B_z = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad (7)$$

а модуль вектора магнітної індукції  $B$  знаходимо так:

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_z^2}. \quad (8)$$

Магнітну напругу  $V$  на границі області інтегрування знаходимо з виразу

$$V = v_0 \int_0^z B_z(r, t) dz. \quad (9)$$

За просторовим розподілом модуля вектора магнітної індукції  $B$  та характеристикою намагнічування матеріалу  $B=B(H)$  знаходимо значення оберненої магнітної проникності (релактивності)  $\nu$  в зонах з феромагнітним середовищем.

Решту конструкції ЕМП подамо як зосереджений магнітний опір. Остаточну розрахункову схему показано на рис. 1.

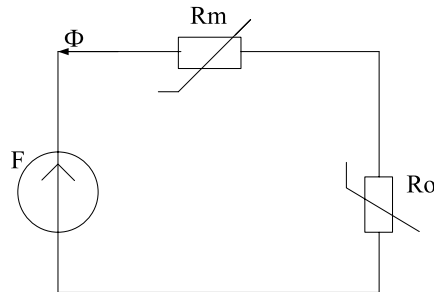


Рис. 1. Розрахункова схема пристрою

Тут магнітний опір  $R_0$  еквівалентує простір, що складається з частини магнітопроводу і повітряного проміжку. Реакцією цієї ділянки на дію потоку  $\Phi$  є магнітна напруга  $V$ . Решту конструкції ЕМП подамо як зосереджений опір  $R_m$ . Розрахунок магнітного опору  $R_m$  здійснюється методами теорії кіл для скінченних ділянок простору, що мають форму циліндрів і паралелепіпедів, з урахуванням залежностей  $B=B(H)$  для відповідних елементів

$$R_m^{(n)} = \frac{1}{\mu^{(n)}} \cdot \frac{l}{S}, \quad (10)$$

де  $n$  – номер ділянки апроксимації кривої  $B=B(H)$ ;  $l$ ,  $S$  – довжина і переріз елемента електромагніту.

Диференціальне рівняння котушки намагнічування має вигляд

$$\frac{d\Psi}{dt} = u - ri, \quad (11)$$

де  $\Psi$ ,  $u$ ,  $i$  – повне потокозчеплення, напруга та струм котушки;  $r$  – резистивний опір котушки.

Струм котушки знаходимо з рівняння магнітного кола (рис. 1)

$$i = (V + R_m \Phi) / w, \quad (12)$$

де  $w$  – кількість витків.

Система рівнянь (3)–(12) утворює комбіновану математичну модель ЕМП. За результатами чисельної реалізації виразів (3), (4) знаходимо розв'язок рівняння квазістационарного електромагнітного поля на кожному часовому кроці, відтак згідно з (7), (8) обчислюємо компоненти і модуль вектора магнітної індукції. Значення оберненої магнітної проникності феромагнетика, використовуємо під час розрахунку магнітного опору ділянок магнітопроводу (10) та наступному часовому кроці чисельного інтегрування рівнянь (3), (4).

Запропонований алгоритм дозволяє обчислити магнітні параметри ЕМП, а саме їхній просторовий і часовий розподіл. Істотно зазначити, що запропонована модель працює в режимі заданої напруги, що є характерним для більшості ЕМП.

На підставі запропонованого алгоритму створена цифрова модель ЕМП постійного струму. Розроблена програма складається з таких блоків:

- вибору кроку ( $\Delta r$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta t$ ) і побудови прямокутної сітки, що накриває вибрану область інтегрування;
- формування та розв'язку системи алгебраїчних рівнянь, що реалізує метод скінченних різниць;

- інтегрування системи диференціальних рівнянь за часом;
- обчислення магнітних параметрів і струму намагнічувальної обмотки.

Об'єктом моделювання є суцільний електромагніт броньового типу з циліндричним корпусом і ярком. Конструкцію електромагніту показано на рис. 2. Тут котушка 4 охоплена ззовні нерухомим ярмом магнітопроводу 2, а рухомий яркір 1 і робочий повітряний проміжок 3 знаходяться всередині котушки.

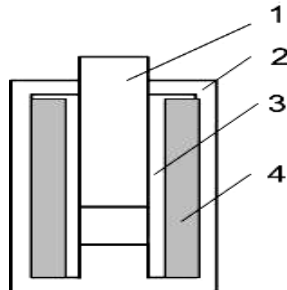


Рис. 2. Броньований електромагніт із циліндричним ярком і корпусом

На рис. 3 зображено результати розрахунку динамічної характеристики електромагніту за таких вхідних даних:  $U = 200$  В,  $R = 6,2$  Ом,  $w = 200$ .

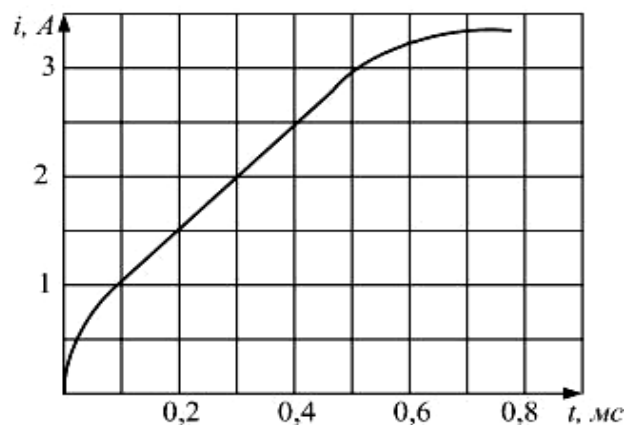


Рис. 3. Розподіл магнітної індукції за перерізом ярка

**Висновки.** 1. Розроблена і реалізована математична модель дозволяє здійснювати якісний і кількісний аналіз параметрів електромагнітного поля в електромагнітних пристроях у перехідному і усталеному режимах. 2. Комп'ютерне симулювання дає змогу оптимізувати конструктивні параметри електромагнітного пристрою, що забезпечує підвищення їх експлуатаційних параметрів.

1. Нейман Л.Р., Демирчан К.С. Теоретические основы электротехники. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 416 с. 2. Шегедин О.І., Мадай В.С. Математичне моделювання магнітних систем з постійними магнітами // Proceedings 7-st International Modelling School. – Alushta (Ukraine), 2002. – 109 р. 3. Чабан В. Й. Математичне моделювання електромагнітних процесів. – К.: НМК ВО, 1992. – 323 с.