

З.А. Стоцько, Б.І. Сокіл\*, Д.П. Котлярова, В.Г. Топільницький  
Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра електронного машинобудування,  
\*кафедра теоретичної механіки

## ДИНАМІКА СИПКОВОГО СЕРЕДОВИЩА У ВІБРАЦІЙНОМУ СЕПАРАТОРІ

© Стоцько З.А., Сокіл Б.І. \*, Котлярова Д.П., Топільницький В.Г., 2008

**На основі математичної моделі руху сипкого середовища вздовж сита вібраційного сепаратора проаналізовано вплив характеристик середовища на основні параметри руху у нерезонансному та резонансному випадках.**

**On the base of the mathematical model of the movement of loose environment belong the working area of the vibratory separators the analysis in resonance and not resonance cases influence of characteristic of environment on the main parameters of movement is investigated.**

**1. Актуальність тематики досліджень.** Сепарація сумішей є невід’ємною частиною процесів первинного оброблення (у харчовій промисловості – розділення, фільтрація, адгезія; вугільно-рудній промисловості – збагачення). Для цього процесу застосовують вібраційні сепаратори. Їх перевагою є значна енергоощадність одночасно з високою продуктивністю. Вібросепаратори відрізняються простотою конструкції та широким діапазоном частоти та амплітуди коливання, що гарантує найточнішу гранулометрію при дрібному та грубому сортуванні. Саме амплітудно-частотні характеристики мають значний вплив на якість сепарації, тому потребують дослідження і визначення оптимальних їх значень для процесу сепарації сипкого середовища залежно від його гранулометрії.

**2. Постановка задачі дослідження.** У харчовій промисловості широке застосування отримали зарезонансні вібраційні сепаратори. У конструктивному відношенні зарезонансні вібросепаратори складніші від інерційних та електромагнітних сепараторів. Проте вони характеризуються рядом експлуатаційних переваг – високою якістю сепарації, низькою енергоємністю, експлуатаційною надійністю, відсутністю динамічних навантажень на фундамент, що забезпечує їм широкий спектр застосування [5]. З іншого боку, під час резонансу в системі проходять значні динамічні навантаження. У разі тривалої роботи установки на резонансній частоті є небезпека швидкої її поломки.

Завданням роботи є дослідження нерезонансного та резонансного випадків руху сипкого середовища при його сепарації з метою підвищення експлуатаційної надійності вібросепаратора. У зв’язку з цим актуальною задачею є розроблення математичної моделі руху сипкого середовища в робочому контейнері, що пропонується розглянути на основі вібросепаратора. На рис. 1 показано схему вібраційного сепаратора. Ексцентрик 5 надає корпусу 1 зворотно-поступального руху вздовж напрямних роликів 6. При сепарації неоднорідних фракцій сипке середовище 2, що рухається вздовж сита 4, моделюють як нашарування плоских балок [4]. За умови вібрації сита і стінок вібросепаратора, які обмежують суміш, що сепарується, силові імпульси від поверхні сита

передаються вглиб суміші і поступово зменшуються за рахунок розсіювання енергії. Шари сипкого середовища рухаються один відносно іншого, внаслідок чого відбуваються розрихлення та зміна об'єму сипкого середовища в напрямку до вільної поверхні сита. Так виникають умови для сортування, тобто напрямленого переміщення фракцій, що відрізняються своїми властивостями, до різних частин робочої поверхні вібросепаратора. При пошаровому русі виникає самосортування фракцій у шарі завдяки тому, що частинки, які відрізняються меншими розмірами та більшою густиною, переміщуються донизу, а частинки з протилежними властивостями піднімаються у верхні шари [5]. Внаслідок цього фізико-механічні характеристики середовища змінюються за довжиною сита і є різними на різних ситах. Тому значною перевагою для сепарації сипкого неоднорідного середовища є наявність в сепараторах декількох сит [4]. Це сприяє якіснішому розділенню сипкого середовища за розмірами.

Досліджуючи динаміку частинок неоднорідного сипкого середовища, пропонується їх розглядати як нашарування плоских пружно-пластичних балок, товщина яких значно менша від ширини і які контактують з стінками контейнера вібросепаратора як пружно або шарнірно закріплені балки [3–4].

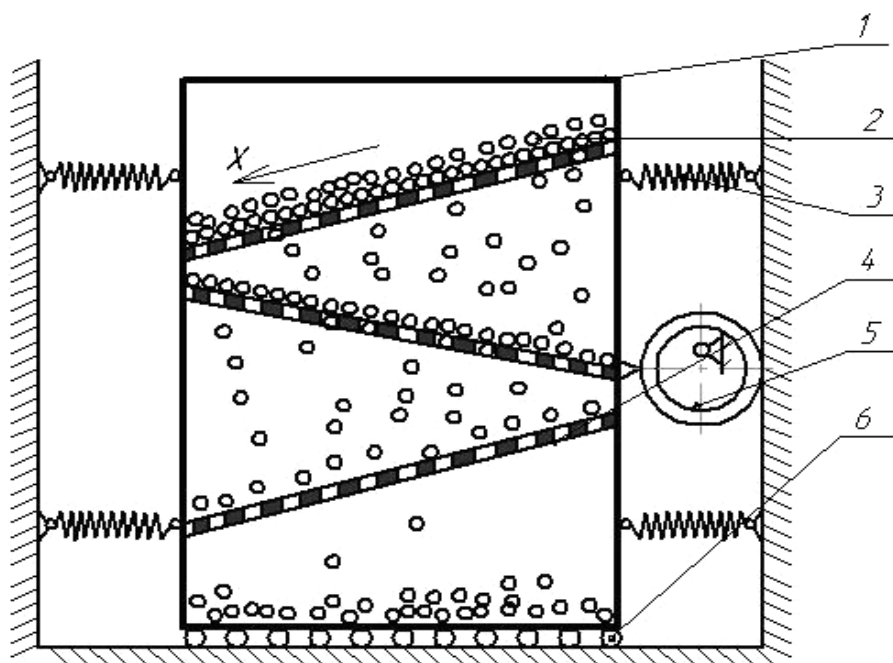


Рис. 1. Розрахункова схема вібраційного сепаратора для розділення сипкого матеріалу

**3. Побудова математичної моделі руху сипкого середовища.** З врахуванням вищевказаного, диференціальне рівняння руху середовища має вигляд [4]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon f \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \theta \right) + \frac{\partial \alpha^2(x)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

де  $\alpha^2(x) = \frac{E}{S\rho} \sqrt{1 + kx^n}$  – повільнозмінна функція, яка враховує зміну фізико-механічних характеристик сипкого середовища вздовж сита [4];  $\rho$  – густина середовища;  $S$  – площа поперечного

перерізу елементарного шару завантаження,  $\theta = \mu t$  – фаза коливань робочого контейнера вібросепаратора;  $\mu$  – частота коливань контейнера вібросепаратора;  $t$  – час сепарації;  $x$  – координата довільного поперечного перерізу шару сипкого середовища;  $u(x;t)$  – переміщення довільного поперечного перерізу сипкого середовища вздовж осі  $x$ ;  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  – відносна деформація шару завантаження та пришвидшення шару завантаження;  $V$  – швидкість переміщення шару сипкого середовища вздовж сита;  $E$  – модуль пружності сипкого середовища;  $f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \theta\right)$  – деяка функція, що описує нелінійні і періодичні сили середовища;  $\varepsilon$  – малий параметр.

Враховуючи, що швидкість руху частинок середовища при його сепарації мала і зміна фізико-механічних характеристик середовища вздовж довжини сита є незначною, для запису дослідного рівняння (1) можна використати асимптотичний метод нелінійної механіки [2]. З цією метою подамо його у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \alpha^2(x)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \varepsilon f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \theta\right). \quad (2)$$

Одночастотні розв'язки незбуреного рівняння (2) набудуть вигляду:

$$u = a(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi(t) \quad (3)$$

де  $\psi = \omega t + \varphi$ ,  $a, \psi$  – відповідно амплітуда та частота коливань шару завантаження;  $l$  – довжина деки вібросепаратора;  $k = 1, 2, 3, 4, \dots, \eta$ .

З рівняння (3) невідомі функції  $a(t), \psi(t)$  визначаються диференціальними рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \varepsilon \frac{d\alpha^2(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dV}{dt} + \varepsilon f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \theta\right) \right] \times \\ & \times \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \psi d\theta d\psi dx \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = & \omega + \frac{1}{2\pi a \omega} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \varepsilon \frac{d\alpha^2(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dV}{dt} + \varepsilon f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \theta\right) \right] \times \\ & \times \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi d\theta d\psi dx \end{aligned}$$

Як відомо з [6–7], у нерезонансному випадку вплив частоти зовнішнього збурення для нелінійних механічних систем на амплітудно-частотні характеристики сепаруючої поверхні істотно не впливає. Тому  $a(t)$  і  $\psi(t)$  можна визначити з рівнянь (4).

Зокрема для випадку  $f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \theta\right) = k_1 u_x^3 + k_2 u_t^3 + H \sin \theta$ , розв'язки залежностей

для вищевказаного випадку матимуть такий вигляд:

$$\frac{da}{dt} = \frac{15a \cdot \varepsilon \cdot l}{256\kappa\pi} \kappa_2 a^2 \omega \quad (5)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{1}{4\omega} (V^2 l \left(\frac{\kappa\pi}{l}\right)^2 - \frac{3\varepsilon}{16} a^2 \left(\frac{\kappa\pi}{l}\right)^3) l^2 + \varepsilon \int_0^l \frac{n\kappa}{2\sqrt{1+kx^n}} \frac{ES}{\rho} \frac{\kappa\pi}{l} x^{n-1} \cos\left(\frac{2\kappa\pi}{l} x dx\right),$$

де  $H$  – значення збурювальної сили; коефіцієнти  $k_1, k_2$  – коефіцієнти, які характеризують нелінійні пружні властивості середовища і сили внутрішнього тертя.

Нижче на рис. 2 представлено закон зміни частоти коливання сипкого середовища залежно від швидкості його руху вздовж сита у вібросепараторі за різних амплітуд коливання сипкого середовища при нерезонансному випадку.

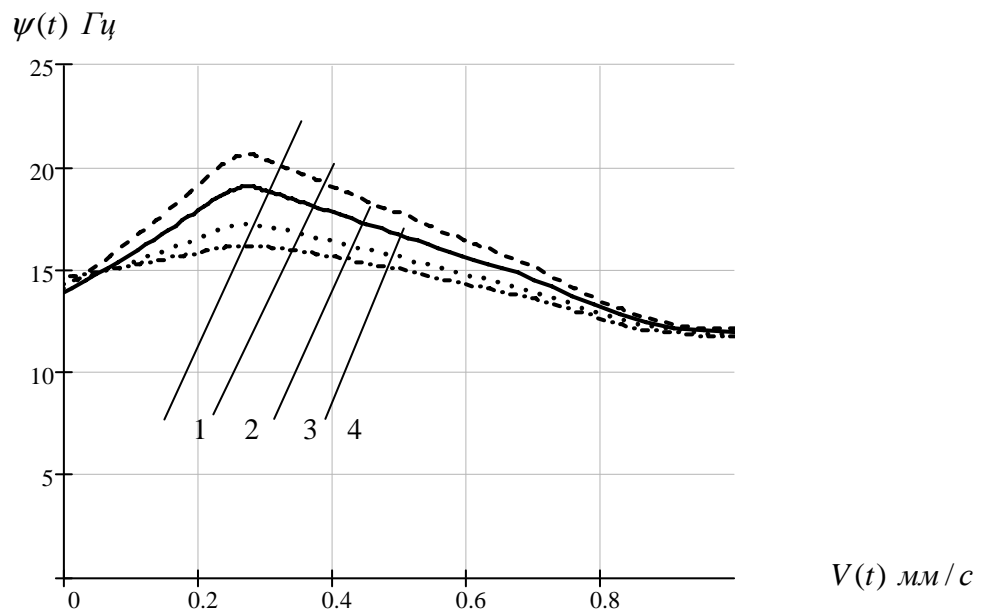


Рис. 2. Графік залежності частоти коливань сипкого середовища від швидкості його руху при різних значеннях амплітуди  $a$ :  
 1)  $a = 0,4$  см ; 2)  $a = 0,8$  см ; 3)  $a = 0,6$  см ; 4)  $a = 0,2$  см  
 $l = 120$  мм ;  $S = 60$  мм ;  $\rho = 1,254$  г / см<sup>3</sup> ;  $E = 3,1$  МПа

Амплітудно-частотні характеристики коливань системи у резонансному істотно залежать від фази зовнішнього збурення. Введемо у рівняння (4) різницю фаз  $\psi = \varphi - \theta$ , і для випадку головного резонансу  $\mu \approx \omega$  отримаємо рівняння відносно амплітуди та різниці фаз коливань.

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^l \int_0^{2\pi} \varepsilon \frac{d\alpha^2(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dV}{dt} + \mathcal{E}f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \theta\right) \times \sin \frac{\kappa\pi}{l} x \sin(\gamma + \theta) d\theta dx \quad (6)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \omega + \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^l \int_0^{2\pi} \varepsilon \frac{d\alpha^2(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dV}{dt} + \mathcal{E}f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \theta\right) \times \sin \frac{\kappa\pi}{l} x \cos(\gamma + \theta) d\theta dx$$

Вважаючи, що при проходженні резонансу частота зовнішнього збурення:  $\mu = (\omega + 2) - 0,4t$  (що відповідає швидкому проходженню через резонанс), розв'язками рівняння (4) буде:

$$\frac{da}{dt} = \frac{15a \cdot \varepsilon \cdot l}{256\kappa\pi} \kappa_2 a^2 \omega + \frac{H}{\omega} \cos \gamma \quad (7)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega + \frac{1}{4\omega} (V^2 l \left(\frac{\kappa\pi}{l}\right)^2 - \frac{3\varepsilon}{16} a^2 \left(\frac{\kappa\pi}{l}\right)^3) l^2 + \varepsilon \int_0^l \frac{n\kappa}{2\sqrt{1+kx^n}} \frac{ES}{\rho} \frac{\kappa\pi}{l} x^{n-1} \cos\left(\frac{2\kappa\pi}{l} x dx\right) - \frac{H}{a\omega} \sin \gamma$$

Нижче на рис. 3. наведено закон зміни в часі амплітуди при проходженні через резонанс.

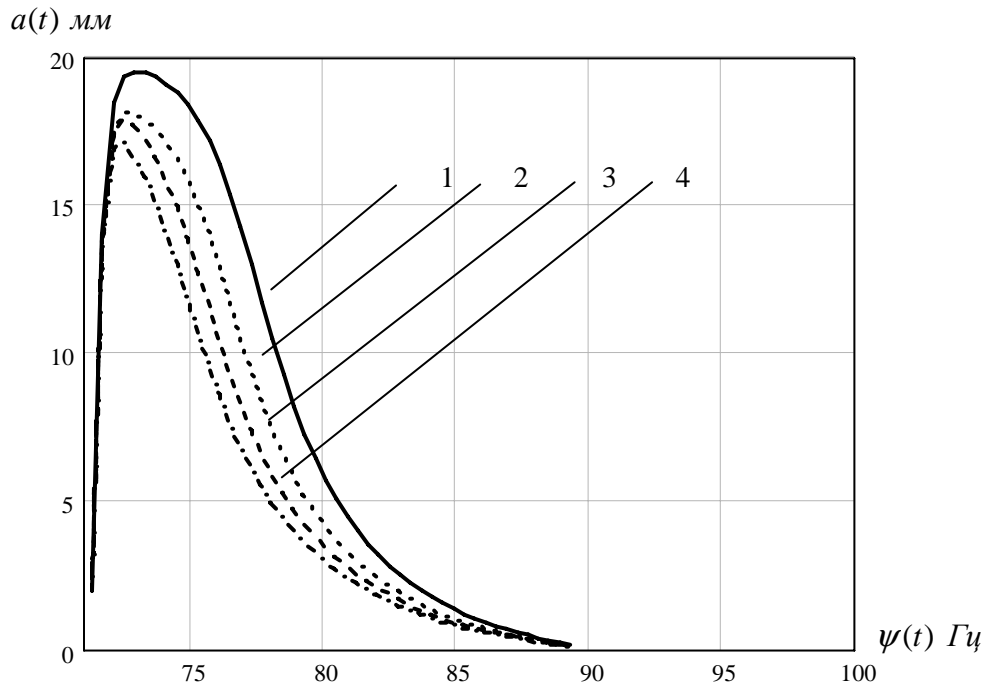


Рис. 3. Закон зміни амплітуди коливання сипкого середовища при проходженні через резонанс залежно від зміни швидкості руху сипкого середовища:

1)  $V = 1 \text{ мм/с}$  ; 2)  $V = 4 \text{ мм/с}$  ; 3)  $V = 6 \text{ мм/с}$  ; 4)  $V = 10 \text{ мм/с}$

$l = 120 \text{ мм}$  ;  $S = 60 \text{ мм}$  ;  $\rho = 1,254 \text{ г/см}^3$  ;  $E = 3,1 \text{ МПа}$

З графічних залежностей видно:

1. У нерезонансному випадку швидкість руху  $V_{mm}/c$  та амплітуда  $a$  см коливань сипкого середовища впливає на власну частоту коливань середовища, причому із збільшенням величини  $V$  та зменшенням величини  $a$  при вищевказаних параметрах сипкого середовища частота спадає, що призводить до зменшення швидкості сепарації.

2. Що стосується резонансної зони, то процес сепарації покращується завдяки зростанню амплітуди коливання сипкого середовища. Зростання швидкості руху середовища від 1 до 10 см/с спричиняє ріст амплітуди на 10 %.

Отже, запропонована модель вібраційного сепаратора дає змогу описувати рух сипкого середовища як для резонансного, так і для нерезонансного випадків, дослідити вплив різних параметрів на амплітуду коливань середовища, оптимізувати технологічний процес сепарації з метою покращання результатів обробки сипкого середовища.

*1. Боголюбов Н.И., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М., 1974. 2. Митропольский Ю.А., Моисеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К., 1976. 3. Стоцько З.А., Сокіл Б.І., Топільницький В.Г. Динаміка робочого середовища вібраційних машин об'ємної обробки // Автоматизація виробничих процесів і виробництв в машинобудуванні та приладобудуванні. – 2000. – С. 26–32. 4. Стоцько З.А., Сокіл Б.І., Топільницький В.Г. Котлярова Д.П. Дослідження впливу технологічних і фізико-механічних параметрів сипкого середовища на процес його сепарації // Науковий вісник НЛТУУ. – 2007. – С. 158–163. 5. Гончаревич И.Ф., Урьев Н.Б., Телейник М.А. Вибрационная техника в пищевой промышленности. – М., 1977. – 278 с. 6. Топільницький В.Г. Моделирование руху шару середовища робочого контейнера вібраційної машини об'ємної обробки виробів // Автоматизація виробничих процесів і виробництв в машинобудуванні та приладобудуванні. – 2000. – С. 105–110. 7. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М., 1956.*