УДК 528.2/.3:551.24

ОЦІНЮВАННЯ ТРИВИМІРНИХ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ПОЛІВ ЗЕМЛІ МЕТОДАМИ ПРОЕКТИВНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ДИЛАТАЦІЙНІ ПОЛЯ ЗЕМЛІ

О. Тадєєв
Національний університет водного господарства та природокористування

Ключові слова: деформаційний аналіз, дилатація, відображення простору, ріманові багатовиди, метричний тензор простору

Постановка проблеми

Дослідження, подані у цій статті, спрямовані на розкриття основ аналізу тривимірних деформаційних полів методами проективно-диференціальної геометрії за даними GNSS-моніторингу фізичної поверхні Землі.

Мета і напрям досліджень відповідають резолюціям Міжнародної асоціації геодезії у межах діяльності підкомісії 3.2 “Деформації земної кори” комісії 3 “Обертання Землі та геодинаміка”. Пріоритетними напрямами діяльності підкомісії означено, зокрема, координацію підходів, розроблення методів та інноваційних алгоритмів опрацювання результатів спостережень, аналізу та інтерпретації деформаційних полів, дослідження деформацій земної кори усіх масштабів від глобальної тектоніки плит до локальних деформацій [25].

Аналіз досліджень та невирішені частини загальної проблеми

Більшість сучасних досліджень проблеми зводяться до числового вираження рухів та деформацій тими чи іншими показниками і вкладаються у межі глобальних тектонічних (кінематичних) моделей Землі. В основу створення моделей покладено теорію тектоніки плит – новітню мобілістичну тектонічну концепцію взаємних переміщень літосферних плит як абсолютно твердих сферичних сегментів літосфери за умови сталого радіуса Землі. Залежно від походження вхідних даних, використаних для створення моделей, їх поділяють на два види – геологічні та геодезичні.

Класичними прикладами першого виду є моделі, що ідентифікуються як NUVEL-1 [19] та NUVEL-1A [20]. Деталізованішими і точнішими моделями є версії PB2002 [18], MORVEL [21] та NNR-MORVEL56 [16]. Крім окреслювання геометричних форм та географічної прив’язки літосферних плит, моделі встановлюють відносні показники їхніх горизонтальних кутових швидкостей руху та обертання і лінійних швидкостей, які виражені у декартовій системі координат. Як показують дані різнобічного геолого-геофізичного моніторингу Землі, такі показники з хронологічного погляду є довготривалими (віковими) і виражені мірами геологічного масштабу часу. Поряд із вказаними заслуговує на увагу ще один різновид геологічних моделей – дилатаційна [5, 6]. Покладена в її основу оригінальна концепція підтверджена тими самими геолого-геофізичними даними і спрямована на поглиблення пізнання еволюції Землі як загалом, так і у контексті взаємодії літосферних плит. За умови підтвердження дилатаційних процесів тими чи іншими показниками з погляду деформаційного аналізу означена модель могла б гармонійно доповнити офіційно визнані геологічні моделі. Такі показники здатні забезпечити результати моніторингу Землі методами супутникової геодезії. Загалом, застосовування геодезичних даних для створення геологічних моделей було доволі обмеженим, найбільшою мірою – у NUVEL-1 та NUVEL-1A. Але вже під час розроблення, наприклад, моделей MORVEL та NNR-MORVEL56 використано увесь спектр результатів дистанційного моніторингу Землі методами супутникової геодезії, накопичених на момент їх верифікації. Як наслідок, складовою частиною останніх моделей є набір швидкостей GEODVEL [17]. Тому ці моделі часто називають геолого-геодезичними.

Числові характеристики рухів земної поверхні, визначені методами супутникової геодезії протягом останніх майже 25 років, дають змогу точніше подати тенденції взаємних переміщень літосферних плит, ніж це передають глобальні геологічні моделі. Крім того, вони здатні передавати і прогнозувати поточні короткострокові рухи плит, а також виражати закономірності їх внутрішнього деформування, спричиненого дією регіональних та локальних тектонічних процесів. Останній фактор порушує гіпотезу абсолютної жорсткості основних літосферних плит, але, разом з тим, розкриває об’єктивні перспективи геодезичних методів щодо виділення за їхніми даними мікроплит з показниками відносних рухів вищих числових порядків або аномальними особливостями їх просторового розподілу. Такі перспективи реалізовано в тектонічних моделях Землі другого виду – геодезичних. Вони виражають абсолютні показники руху плит у земній системі відліку ITRS.

У міру накопичування результатів спостережень методами супутникової геодезії у відліковій системі ITRS та їх узгодження з відомими на той час геологічними моделями почали створювати розрахункові емпіричні моделі руху плит суто геодезичного походження. До них зараховують, наприклад, моделі REVEL [30], GSRM-1 [27] та її оновлену версію GSRM v.2.1 [26], згадану вже GEODVEL [17], а також ITRF2008-PMM [14]. Остання модель нарівні з GSRM v.2.1 сьогодні найточніше виражає абсолютні показники руху основних плит. Розрахункова точність ITRF2008-PMM оцінюється на рівні 0,3 мм/рік, тоді як такий самий показник, наприклад, для геолого-геодезичної моделі MORVEL становить 0,67 мм/рік. Такі показники досягаються здебільшого за рахунок підвищення точності результатів безперервного геодезичного моніторингу Землі GNSS-методом.

Деформаційний аналіз значною мірою сприяє поглибленню пізнання сучасних тектонічних процесів. Однак цей апарат повноцінно застосовують лише у моделях типу GSRM. Тут використано підхід, в основу якого покладено гіпотезу сферичності Землі. Цим досягається узгодженість з тектонічною концепцією взаємних переміщень літосферних плит як абсолютно твердих сферичних сегментів літосфери і вмотивовується використання вхідними даними координат станцій у локальній сферичній системі l, j, r. Останні одержано перетвореннями координат із системи ITRS. Суть використовуваної методики розкрито, наприклад, у статтях [29, 28] тощо. Автори фактично оцінюють горизонтальні деформації поверхні, віднесені до геосфери, і свідомо нехтують вертикальними рухами Землі. Зате вважають беззаперечним позитивом пропонованого розв'язку можливість оцінювати вектор обертання досліджуваної локальної поверхні навколо умовного полюса, який фіксує координата r, і пов'язують його із жорстким обертанням Землі навколо вектора Ейлера. За цієї обставини оцінки деформації автори визнають просторовими.

Інші згадані вище моделі апарат деформаційного аналізу не використовує, хоча опосередковано необхідність його залучення підтверджена навіть у наведених вище дослідницьких роботах. Якщо виділити результати дослідження рухів тільки у межах Євразійської плити, то, наприклад, згідно з [14], північно-західна частина Європейського континенту в наближених межах Скандинавського півострова має власні, відмінні від решти території, закономірності рухів та деформацій. Інші тенденції спостерігаються у Середземноморському басейні континенту [21]. А за гіпотезою [17] Євразійська плита взагалі має бути розділена на дві незалежних частини вздовж Уральського хребта. Оцінювання рухів лише показниками швидкостей лінійних переміщень GNSS-станцій чи горизонтальних кутових швидкостей обертання недостатнє для офіційного підтвердження цих гіпотез і поділу Євразійської плити на мікроплити. Показовими з цього приводу є результати прямих досліджень, подані у статті [15]: використовуючи апарат деформаційного аналізу, автори виділяють у Середземноморському басейні в межах Євразійської незалежну Адріатичну мікроплиту.

Власне бачення та аналіз сучасного стану використання деформаційного аналізу для потреб геодинаміки подано у статті [12]. Переважна більшість досліджень спрямована на оцінювання горизонтальної складової деформаційних полів. Такий підхід до вирішення проблеми став наслідком масового використання як вхідних даних нещодавно єдино доступних результатів повторних спостережень класичних геодезичних планових мереж, які сьогодні практично вже втратили актуальність. Натомість нові значно ширші перспективи мають дані GNSS-моніторингу координат станцій у системі ITRS. Але це зумовлює переосмислення традиційних підходів до деформаційного аналізу в зв'язку з необхідністю створення моделей, адекватних системі ITRS, стосовно спроможності повноцінного оцінювання тривимірних деформаційних полів. Пропонується у такому контексті вирішувати проблему з позицій теорії диференціального подання перетворень образів простору з використанням методів проективно-диференціальної (метричної) геометрії [1, 13]. За гіпотези геофізичного походження цих перетворень вони ототожнюються з деформацією Землі як області простору. Тоді, використовуючи тривимірний метричний тензор простору і різні міри деформації, розкривають перспективи її описування різними за змістом числовими характеристиками. Беручи до уваги усталену практику деформаційного аналізу, такі характеристики поділили на три групи: 1) головні лінійні деформації – показники зміни форми у заданому напрямі; 2) показники кутових спотворень; 3) дилатація – показники зміни об'єму Землі чи площі частини її поверхні зі збереженням загальної форми.

Постановка завдання

Ґрунтуючись на теорії диференціального подання перетворень образів простору, у цій частині досліджень зосередимось на перспективах оцінювання дилатаційних полів Землі різних масштабів і пошуку розв'язків за вхідними даними у системі ITRS. Спробуємо подати результати розв'язків у такій загальній формі, яка забезпечувала б вираження закономірностей дилатації нелінійного характеру.

Виклад основного матеріалу досліджень

Нехай замкненою неперервною областю перетворення (відображення) Δ є Земля як просторове тіло планетарного масштабу і координати $x_i = X_i^1$, $y_i = X_i^2$, $z_i = X_i^3$ точок M_i $(i = \overrightarrow{1, N})$ відповідають умовам параметризації Землі системою ITRS. Точки M_i – GNSS-станції, розташовані на її фізичній поверхні. Умовні позначення $\left(X^1, X^2, X^3\right)$ тотожні (x, y, z) і вводяться виключно з метою компактного подання наступних проміжних і кінцевих результатів розв'язку завдання. Якщо координати $x_i' = X_i'^1$, $y_i' = X_i'^2$, $z_i' = X_i'^3$ задають положення точок M_i', які внаслідок деформації є відображенням M_i, визначають собою перетворену область Δ' і вона зберегла властивості замкненої неперервної області, то відображення Δ на Δ' завжди можна виразити аналітично рівняннями

$$\left.\begin{aligned} X'^1 &= u(X^1, X^2, X^3) \\ X'^2 &= v(X^1, X^2, X^3) \\ X'^3 &= w(X^1, X^2, X^3) \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Загальна теорія відображень накладає на базові функції перетворення (1) умови гомеоморфізму: однозначність, неперервність та диференційованість (відмінність від нуля якобіана), однак не обмежує їхні аналітичні форми. Це дає змогу описувати перетворення будь-якими гладкими чи кусково-гладкими функціями, визначеними за переміщеннями $X_i'^k - X_i^k$ (x^k) вздовж у певний спосіб параметрично заданої кривої. Стосовно поставленого завдання це забезпечує перспективу передавання у межах функціональної моделі (1) нелінійних перетворень. Важливо також, що координати X_i^k точок M_i можна задати в довільній тривимірній системі.

На попередніх етапах досліджень встановлено: у сформульованій постановці розв’язок задачі досягається на основі властивостей перетворень ріманового простору R_n у формі його елементарних чи складних дифеоморфних багатовидів – пари неізотропних багатовидів однакової розмірності n, які зазнають взаємно однозначного неперервно диференційованого перетворення класу $n-1$. Такі перетворення визначають клас гладких чи кусково-гладких функцій, які передають це перетворення: C^{n-1}. Використовуваний математичний апарат – методи проективно-диференціальної геометрії та прийоми описування змін ріманової метрики дифеоморфних багатовидів. Прийняте рішення аргументоване основами тензорного аналізу в середовищі ріманового простору [7].

З огляду на постановку завдання як складний багатовид доцільно використати евклідовий простір E_3, який дотичний до кожної заданої точки ріманового простору R_3 у формі локальних тривимірних координатних базисів у декартовій системі. Тоді тензорне поле з рімановою метрикою, коефіцієнти якої визначає функціональна модель (1), трансформується у геометричне зображення тензорів дотичного евклідового простору з відповідною його метрикою. Отже, для розв’язання задачі необхідне лише дотримання умов достатньо гладкої зміни ріманової метрики з переходом від точки до точки, що, власне, повинно забезпечуватись адекватно побудованою моделлю (1) і неперервною диференційованістю її базових функцій.

Система координат X^k ($k=\overline{1,3}$), в якій задано положення точок M_i області Δ, – прямокутна декартова й ототожнюється з системою ITRS. У такій системі метрику простору визначає інваріантна диференціальна квадратична форма (в позначеннях суми за Ейнштейном)

$$ds^2 = d_{ij} dX^i dX^j, \qquad (2)$$

за якою ідентифікується лінійний елемент області Δ. Внаслідок ортогональності осей координат метричні коефіцієнти d_{ij} такі, що

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Метрична форма деформованої області Δ' асоціюється з лінійним елементом ds', який є відображенням ds:

$$ds'^2 = e_{ij} dX^i dX^j. \qquad (3)$$

Метричні коефіцієнти e_{ij} генерують симетричну матрицю, яка називається основним метричним двовалентним тензором перетворення (деформації) області простору:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Алгоритм розкриття коефіцієнтів:

$$e_{11} = \left(\frac{\partial u}{\partial X^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X^1}\right)^2;$$

$$e_{22} = \left(\frac{\partial u}{\partial X^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X^2}\right)^2;$$

$$e_{33} = \left(\frac{\partial u}{\partial X^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X^3}\right)^2;$$

$$e_{12} = \frac{\partial u}{\partial X^1}\frac{\partial u}{\partial X^2} + \frac{\partial v}{\partial X^1}\frac{\partial v}{\partial X^2} + \frac{\partial w}{\partial X^1}\frac{\partial w}{\partial X^2};$$

$$e_{23} = \frac{\partial u}{\partial X^2}\frac{\partial u}{\partial X^3} + \frac{\partial v}{\partial X^2}\frac{\partial v}{\partial X^3} + \frac{\partial w}{\partial X^2}\frac{\partial w}{\partial X^3};$$

$$e_{13} = \frac{\partial u}{\partial X^1}\frac{\partial u}{\partial X^3} + \frac{\partial v}{\partial X^1}\frac{\partial v}{\partial X^3} + \frac{\partial w}{\partial X^1}\frac{\partial w}{\partial X^3}. \qquad (5)$$

Об’єм всякої замкненої неперервної області простору завжди визначає детермінант тензора, складеного з метричних коефіцієнтів у системі координат цього простору [2, 8]. З урахуванням цього елемент dV об’єму області Δ $dV = \sqrt{d}\, dX^1 dX^2 dX^3$. Але детермінант квадратичної форми (2) $d = \det d_{ij} = 1$, тому $dV = dX^1 dX^2 dX^3$. Елемент dV' об’єму області Δ' $dV' = \sqrt{e} dX^1 dX^2 dX^3$, де $e = \det e_{ij}$ – детермінант квадратичної форми (3). Відношення

$$\frac{dV'}{dV} = \sqrt{e} \qquad (6)$$

виражає зміну об’єму області простору. Величину $q_{абс} = \sqrt{e}$ називають абсолютним коефіцієнтом об’ємного розширення. Як детермінант тензора e_{ij} (6) – абсолютний інваріант. У розгорнутому вигляді

$$\frac{dV'^2}{dV^2} = q_{абс}^2 = e_{11}e_{22}e_{33} + 2e_{12}e_{13}e_{23} - -e_{11}e_{23}^2 - e_{22}e_{13}^2 - e_{33}e_{12}^2. \qquad (7)$$

З урахуванням інваріанта e можна побудувати й інші інваріанти тензора e_{ij}. Беручи до уваги міру деформації

$$ds'^2 - ds^2 = \left(e_{ij} - d_{ij}\right) dX^i dX^j \qquad (8)$$

і віднімаючи від e_{ij} тензор з постійними коефіцієнтами $l\, d_{ij}$ (l – довільна стала), одержимо інваріант перетворення $\det\left(e_{ij} - l\, d_{ij}\right)$. Якщо розгорнути детермінант і згрупувати члени з однаковими степенями відносно l, одержимо кубічний багаточлен

$$\det\left(e_{ij} - l\, d_{ij}\right) = -l^3 + I_1 l^2 - I_2 l + I_3, \qquad (9)$$

де в розгорнутому вигляді інваріанти

$$I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}\,, \tag{10}$$

$$I_2 = e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33} - e_{12}^2 - e_{13}^2 - e_{23}^2\,, \tag{11}$$

$$I_3 = e_{11}e_{22}e_{33} + 2e_{12}e_{13}e_{23} - e_{11}e_{23}^2 - e_{22}e_{13}^2 - e_{33}e_{12}^2\,. \tag{12}$$

Звернемо увагу на тотожність формул (7) та (12): інваріант I_3 асоціюється з абсолютним коефіцієнтом об’ємного розширення.

За аналогією з (8) використаємо іншу міру деформації:

$$dV'^2 - dV^2 = \det\left(e_{ij} - d_{ij}\right)\left(dX^1 dX^2 dX^3\right)^2. \tag{13}$$

Якщо скласти відношення $\dfrac{dV'^2 - dV^2}{dV^2}$, одержимо той самий кубічний багаточлен (9) з інваріантами (10) – (12). Отже, детермінант (9) виражає зміну об’єму області на одиницю об’єму – відносний коефіцієнт $q_{відн}$ об’ємного розширення області Δ (якщо $l=1$):

$$\frac{dV'^2 - dV^2}{dV^2} = q_{відн}^2 = e_{11} + e_{22} + e_{33} - e_{11}e_{22} -$$
$$-e_{11}e_{33} - e_{22}e_{33} + e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2 + e_{11}e_{22}e_{33} +$$
$$+2e_{12}e_{13}e_{23} - e_{11}e_{23}^2 - e_{22}e_{13}^2 - e_{33}e_{12}^2 - 1\,. \tag{14}$$

Наведені результати тотожні із розв’язками задач нелінійної теорії деформації, які розкрито, наприклад, у [4, 8, 24]. Тут розглядаються й інші підходи до вираження показників дилатації. Вартий уваги підхід, оснований на використанні міри деформації (8). Відношення

$$\frac{ds'^2 - ds^2}{ds^2} = \left(e_{ij} - d_{ij}\right)\frac{dX^i}{ds}\frac{dX^j}{ds} = m^2$$

дає змогу виразити коефіцієнт (або модуль, масштаб) відносного розширення m у довільному напрямі, який задають величини $\dfrac{dX^k}{ds} = \cos h^k$ – напрямні косинуси кутів h^k, утворених лінійним елементом з його проекціями на осі координат ($k = \overline{1,3}$). Розв’язок системи рівнянь $\dfrac{d\left(m^2\right)}{dh^k} = 0$ задає однозначну єдино можливу тріаду напрямів, які зберігають ортогональність після деформації та вказують екстремальні деформації простору. Їх виражають коефіцієнтами відносних розширень m_{ext}^k і зараховують до групи головних лінійних деформацій. Добутком m_{ext}^k також розкривають абсолютний та відносний коефіцієнти об’ємного розширення у формулах (7) та (14).

Екстремальні розширення можна зорієнтувати в геоцентричній полярній системі відносно площин екватора X^1OX^2 та нульового меридіана X^1OX^3. Орієнтування напрямів геоцентричними широтою j і довготою l видається доцільнішим порівняно з таким самим за кутами h^k з огляду на усталену практику використання полярних координат у геодезії. Замінюючи напрямні косинуси добутками $\dfrac{dX^1}{ds} = \cos j\,\cos l$, $\dfrac{dX^2}{ds} = \cos j\,\sin l$, $\dfrac{dX^3}{ds} = \sin j$, для тріади головних ортогональних напрямів $(l_0 + 90^0, j_0, j_0 + 90^0)$ одержимо коефіцієнти відповідних екстремальних розширень $\left(m_{12\min}^2, m_{\max}^2, m_{\min}^2\right)$ ($m_{12\min}^2$ виражає мінімальне розширення в площині екватора у напрямі $l_0 + 90^0$):

$$m_{12\min}^2 = \frac{1}{2}\left(e_{11} + e_{22} - g\right);$$

$$m_{\max}^2 = \frac{1}{4}\left(e_{11} + e_{22} + 2e_{33} + g + \sqrt{\left(e_{11} + e_{22} - 2e_{33} + g\right)^2 + \frac{8}{g}\left(e_{13}^2\left(g + e_{11} - e_{22}\right) + e_{23}^2\left(g + e_{22} - e_{11}\right) + 8e_{12}e_{13}e_{23}\right)}\right);$$

$$m_{\min}^2 = \frac{1}{4}\left(e_{11} + e_{22} + 2e_{33} + g - \sqrt{\left(e_{11} + e_{22} - 2e_{33} + g\right)^2 + \frac{8}{g}\left(e_{13}^2\left(g + e_{11} - e_{22}\right) + e_{23}^2\left(g + e_{22} - e_{11}\right) + 8e_{12}e_{13}e_{23}\right)}\right),$$

де $g = \sqrt{\left(e_{11} - e_{22}\right)^2 + 4e_{12}^2}$ – максимальний зсув у площині екватора. Добуток поданих тут коефіцієнтів дає змогу одержати формули вираження абсолютних та відносних показників дилатації такого вигляду:

$$q_{абс}^2 = e_{11}e_{22}e_{33} - e_{33}e_{12}^2 +$$
$$+\frac{1}{2g}\Big(2e_{12}e_{13}e_{23}\left(g - e_{11} - e_{22}\right) - e_{11}e_{23}^2\left(g - e_{11}\right) -$$
$$-e_{22}e_{13}^2\left(g - e_{22}\right) + \left(e_{13}^2 + e_{23}^2\right)\left(2e_{12}^2 - e_{11}e_{22}\right)\Big); \tag{15}$$

$$q_{відн}^2 = e_{11} + e_{22} + e_{33} - e_{11}e_{22} - e_{11}e_{33} - e_{22}e_{33} +$$
$$+e_{12}^2 + e_{11}e_{22}e_{33} - e_{33}e_{12}^2 + \frac{1}{2g}\Big(2e_{12}e_{13}e_{23}\left(g + 2 -\right.$$
$$\left.-e_{11} - e_{22}\right) - e_{11}e_{23}^2\left(g + 1 - e_{11}\right) - e_{22}e_{13}^2\left(g + 1 -\right.$$
$$\left.-e_{22}\right) + e_{13}^2\left(g + e_{11}\left(1 - e_{22}\right) + 2e_{12}^2\right) +$$
$$+e_{23}^2\left(g + e_{22}\left(1 - e_{11}\right) + 2e_{12}^2\right)\Big) - 1\,. \tag{16}$$

Подані результати розв’язку призначені для вираження кінцевих деформацій будь-якого нелінійного характеру, який здатні передати гомеоморфні функціональні моделі (1). Для описування малих деформацій у всіх формулах достатньо обмежитись лише малими величинами першого порядку. Таке наближення практично допустиме з урахуванням найпростішої лінійної форми теорії пружності, об’єктом вивчення якої є нескінченно малі центроафінні перетворення просторових тіл. Такі перетворення розглядаються у метриці афінного простору – тривіального не лише стосовно ріманового, а й навіть евклідового. Носієм інформації про деформування областей такого простору є двовалентний тензор, який іменується афінором. Він є наслідком лінійного перетворення координат, матриця якого збігається з матрицею компонент афінора. Для такого перетворення детермінант теж розкривають, нехтуючи малими величинами другого і вищих порядків, але внаслідок цього ним є лише слід афінора. Тоді детермінант, як числовий показник зміни об'єму всякого тіла, ототожнюється з інваріантом (10): $I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}$. Такі аргументи почерпнуто з [7]. Зауважимо, що для оцінювання дилатації у практиці деформаційного аналізу для потреб геодинаміки використовують якраз вираження (10). Але останнє є наслідком лише "локальної лінійної апроксимації фактичної нелінійної деформації в будь-якій точці" [22]. Тому як факт констатуємо: наближене вираження дилатації інваріантом I_1 недопустиме, за винятком апріорі підтвердженого лінійного характеру деформації. Спроби використання для цього моделі (1) з нелінійними базовими функціями чи їх подальшої лінеаризації лише ускладнюють задачу, але аж ніяк не забезпечують у підсумку очікуваного від такої моделі адекватного ефекту. Адже у детерміністичних відношеннях "функція–тензор" на засадах класичної лінійної теорії пружності наявна не сама функція, яка виражає деформацію, а лише її локальне лінійне наближення у нескінченно малому масштабі. Таке наближення і визначає структуру тензора (афінора) і пов'язаних з ним інваріантів лінійної деформації. Загалом ефект вираження нелінійної деформації в частині оцінювання дилатації здатні забезпечити подані вище результати.

Якщо розглядати сфери практичного застосування одержаних результатів, то висновок однозначний – це оцінювання глобального дилатаційного поля Землі, віднесеного не до тієї чи іншої модельної, а до топографічної поверхні. Однак визначення ефективних, надійних та незміщених оцінок обтяжене умовою достатнього покриття GNSS-станціями поверхні Землі як просторового тіла щонайменше у масштабі півкулі. Ця умова породжує проблему, пов'язану з координуванням Землі у межах Світового океану. Теоретично її можна було б вирішити побудовою гріда, наприклад, у формі сферичних чи еліпсоїдальних чотирикутників або трикутників, якщо залучити метод тріангуляції Делоне, з подальшою екстраполяцією переміщень у їх вершини відносно станцій на материковій та острівній частинах. Такий прийом застосовується у дослідницькій практиці (див., наприклад, [3]). Але точність екстраполяції на великі віддалі буде низькою, тому, ймовірно, втрачає сенс ідея вираження нелінійних деформацій у планетарному масштабі. Втім, окреслена проблема потребує всебічного обговорення та детального вивчення і все ще залишається невирішеною.

Поданий результат розв'язання задачі одержано за умови, що область перетворення параметризована декартовою прямокутною системою координат. Така параметризація зумовлена походженням вхідних геодезичних даних, одержаних GNSS-методом у системі ITRS як частковому випадку прямокутної декартової. Беручи до уваги інваріантність основної квадратичної форми простору щодо вибору систем координат у дифеоморфних багатовидах, тотожний результат розв'язання буде отримано й у будь-якій іншій тривимірній системі, навіть криволінійній, скажімо, у традиційних для геодезії сферичній чи еліпсоїдальній. Варто підкреслити, що з погляду ріманової геометрії такі тривимірні параметризації, як і декартова у дотичному евклідовому просторі, застосовуються для категорії багатовидів, які називаються складними. Для прикладу можна взяти сферичну систему координат. Оскільки положення точки у просторі однозначне незалежно від системи координат, якою він параметризується, відповідно однозначним має бути і взаємозв'язок між різними системами. Для прямокутної декартової та сферичної такий зв'язок виражає загальновідоме перетворення

$$X^1 = x^1 \sin x^2 \cos x^3,$$
$$X^2 = x^1 \sin x^2 \sin x^3,$$
$$X^3 = x^1 \cos x^2, \qquad (17)$$

де x^k – сферичні координати точки. Лінійний елемент простору в декартових координатах виражає формула (2). Оскільки $dX^i = \dfrac{\partial X^i}{\partial x^a} dx^a$ ($a = \overline{1,3}$), то в сферичних координатах $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, де $g_{ij} = \dfrac{\partial X^a}{\partial x^i}\dfrac{\partial X^a}{\partial x^j}$ – симетричний коваріантний тензор перетворення у заданій точці, в коефіцієнтах якого враховано зв'язки (17).

Останній приклад дає підстави стверджувати, що, виконуючи моделювання глобального поля дилатації Землі, немає змісту розглядати складні багатовиди з будь-якою іншою параметризацією, крім декартової. Адже координати GNSS-станцій, як вхідні дані моделі, виражені саме в цій системі і перетворення типу (17) лише ускладнюють розв'язання задачі. Система координат, якою параметризований багатовид, ніяк не впливатиме на оцінки поля дилатації, оскільки перетворення систем закладено в структуру тензора у точці й тензорного поля загалом. Виняток можуть становити випадки, коли модель (1) побудована на основі базових функцій гармонічного типу, наприклад, з використанням рядів сферичних функцій, якими традиційно оперують у моделюванні гравітаційного та інших силових полів Землі. Такий виняток виправданий перспективою сумісної інтерпретації цих полів та деформаційного поля Землі у межах однієї функціональної моделі.

Якщо подані вище результати загалом і останній висновок зокрема стосуються побудови глобальної дилатаційної моделі Землі, то у зовсім іншій постановці потрібно формулювати задачу за потреби створення моделей регіонального (наприклад, для окремих літосферних плит) і тим більше локального масштабів. Аргументації цього твердження тривіальні. Формулами (7), (14) чи (15), (16) виражаються коефіцієнти об'ємних розширень області простору. Якщо такою областю безвідносно до всієї Землі вважати, скажімо, літосферну плиту, то для визначення коефіцієнтів потрібно координувати усю її поверхню, що апріорі неможливо. Отже, задача визначення коефіцієнтів об'ємних розширень окремої плити позбавлена логічного змісту. GNSS-методом можна вимірювати лише фізичну поверхню Землі, тому розв'язок задачі оцінювання регіональних дилатаційних полів потрібно розглядати у контексті дотичних поверхонь ріманового простору. Це потребує анотації деяких додаткових теоретичних формулювань.

Загалом будь-яка криволінійна поверхня, зокрема площина, як поверхня нульової кривини, є багатовидом R_m простору R_n. Елементарна m-вимірна поверхня у n-вимірному багатовиді – це множина точок, заданих параметричними рівняннями $X^i = X^i\left(u^1, \mathbf{K}, u^m\right)$. $i = \overline{1, N}$; $u^1, \mathbf{K}, u^m$ – незалежні параметри поверхні (координати), які змінюються у області Δ_u багатовиду R_m. Завжди $m = \overline{1, n-1}$. Якщо елементарний багатовид R_m параметризований системою координат $u^1, \mathbf{K}, u^m$, то у формі неперервно диференційованих перетворень класу $m-1$ допускається заміна його іншим дифеоморфним багатовидом, а область Δ_u здатна гомеоморфно відображатись на відповідну їй область Δ'_u. Таке відображення можуть передавати гладкі чи кусково-гладкі функції класу C^{m-1}. Під час відображення точка області Δ_u зазнає нескінченно малого переміщення вздовж дуги ds, тому $ds^2 = g_{ij} dX^i dX^j$, де g_{ij} – тензор відображення. Враховуючи, що $dX^i = \frac{\partial X^i}{\partial u^a} du^a$, $dX^j = \frac{\partial X^j}{\partial u^b} du^b$, диференціал дуги $ds^2 = G_{ab}\, du^a\, du^b$, де $G_{ab} = g_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial u^a} \frac{\partial X^j}{\partial u^b}$. G_{ab} – метричний тензор поверхні, якщо тільки $\det G_{ab} \neq 0$ і $G_{ab} = G_{ba}$, тобто поверхня неізотропна. В коефіцієнтах тензора G_{ab} враховано перетворення криволінійних координат $u^1, \mathbf{K}, u^m$ багатовиду R_m в просторові координати ріманового простору R_n. Отже, поверхня R_m у просторі R_n сама є рімановим простором [2, 7].

З огляду на подальше практичне застосування поданих теоретичних формулювань, потрібно констатувати, що не всяку криволінійну поверхню можна розглядати як елементарну. Наприклад, сфера і рівною мірою еліпсоїд, як моделі Землі, загалом є складними тривимірними багатовидами, тому підлягають описуванню як дотичні тривимірні простори в R_3 з відповідними наслідками, які вже розглянуто раніше з метою моделювання глобальних деформаційних полів. "Елементарним багатовидом є лише поверхня півсфери (чи "півеліпсоїда"), і то не враховуючи екваторіальний переріз" [7]. Останньою обставиною мотивують застосування наведених теоретичних формулювань для моделювання деформаційних полів регіонального масштабу.

Найпростіший приклад реалізації такого моделювання дає теорія поверхонь у звичайному евклідовому просторі E_3 [1]. На поверхні, яка параметризована системою криволінійних координат u, v, виникає перша основна квадратична форма, яка виражає квадрат диференціала дуги

$$ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du dv + H(u,v)\,dv^2. \quad (18)$$

Отже, поверхню можна вважати двовимірним рімановим простором з метричною квадратичною формою (18) і метричним тензором $G_{11} = E(u,v)$, $G_{12} = G_{21} = F(u,v)$, $G_{22} = H(u,v)$. Ріманова геометрія, породжена на поверхні квадратичною формою (18) у дотичному евклідовому просторі E_3, в [1] називається внутрішньою геометрією поверхні. За термінологією [23] поверхню називають "вкладеною у евклідовий простір", а засіб побудови метричного тензора – "внутрішнім моделюванням".

Використання останніх теоретичних викладень дає змогу оцінювати регіональні чи локальні деформаційні поля Землі лише в їхній горизонтальній складовій частині. Це зумовлює описування полів дилатації абсолютними чи відносними показниками зміни площ областей, які належать двовимірним дифеоморфним багатовидам. Таку основу ми використовували раніше, і це дало змогу досягти розв'язків задачі у типових геодезичних системах координат, якими параметризують поверхні у межах різних моделей Землі. Так, у статті [11] подано результати розв'язку в сферичній геоцентричній системі, у статті [9] – в геодезичній (еліпсоїдальній). Для оцінювання деформацій локального масштабу достатньо використати результати розв'язання задачі на площині в прямокутній системі, наприклад, у проекції Гаусса–Крюгера. Такі результати викладено у статті [10]. Хоча зазначені розв'язки й одержано незалежно, проте вони не можуть претендувати на первинність і наукову новизну, оскільки подібні раніше вже застосовувались в дослідницькій практиці. Наприклад, автори [29] та інші послідовники цього напряму у своїх дослідженнях використовували локальну сферичну систему координат. Дослідження [23] та інші однотипні з ними основані на використанні еліпсоїдальної системи. Однак власні одержані результати вирізняються серед вказаних тим, що подані в узагальнювальній уніфікованій формі, яка здатна виражати деформації будь-якого характеру, тоді як інші означені під час формування тензора передбачають лінеаризацію базових функцій координат u, v. З цього погляду власні результати мають безсумнівну практичну значущість для геодинамічних досліджень.

Важлива ремарка: "якщо поверхня параметризована тією чи іншою системою координат, то відповідні їй координатні лінії цілком належать цій поверхні" [2]. Отже, метричний тензор і оцінки деформації, які з нього випливають, стосуватимуться тільки цієї поверхні. Якщо таку обставину розглядати у контексті вирішуваного завдання, то треба врахувати, що у разі внутрішнього моделювання оцінки деформації будуть віднесені не до топографічної поверхні, як у своїх дослідженнях стверджують автори [23], а до модельної поверхні

Землі, у системі координат якої задано вхідні геодезичні дані. Як правило, це геосфера чи земний еліпсоїд обертання. Реалізувати параметризацію топографічної поверхні можна лише у межах складного ріманового багатовиду в формі дотичного тривимірного евклідового простору, як подано вище. Сьогодні як елементарний двовимірний багатовид неможливо використати навіть таке найкраще наближення топографічної поверхні, як геоїд, оскільки ця поверхня не підлягає параметризації жодною з традиційних геодезичних систем координат.

Висновки

У поданій тут частині досліджень сформульовано перспективи використання даних GNSS-моніторингу фізичної поверхні Землі для оцінювання її дилатаційних полів різних масштабів. Розв’язання завдання досягнуто методами проективно-диференціальної (метричної) геометрії на основі теорії диференціального подання перетворень образів ріманового простору у формі його дифеоморфних багатовидів. На цій основі обґрунтовано перспективи подання деформаційних полів нелінійними функціональними моделями. Одержано такі результати:

1. Встановлено аналітичні вираження коефіцієнтів абсолютних і відносних об’ємних розширень як показників дилатації Землі глобального масштабу. Результат розв’язання здобуто на засадах параметризації складних ріманових багатовидів декартовою системою у дотичному тривимірному евклідовому просторі. В такій постановці оцінювання глобального дилатаційного поля досягається прямим використанням просторових геоцентричних координат GNSS-станцій як вхідних даних розв’язування задачі. Оцінки стосуються топографічної поверхні Землі.

2. Обґрунтовано вираження показників дилатаційних полів Землі регіонального та локального масштабів. Їх передають коефіцієнти зміни площ оцінюваних частин земної поверхні. Такий результат досягається параметризацією елементарних ріманових багатовидів криволінійними системами координат як дотичних двовимірних поверхонь. Тоді оцінювання дилатаційних полів здійснюється або за апріорі перетвореними просторовими геоцентричними координатами станцій на криволінійні (сферичну чи еліпсоїдальну) системи, або й прямим використанням просторових координат. В останньому випадку алгоритм перетворення закладено в структуру метричного тензора як геометричного образу багатовиду в рімановому просторі. За будь-яких умов оцінки дилатаційних полів стосуватимуться лише вибраної модельної криволінійної поверхні.

За умови належного покриття Землі GNSS-станціями й адекватно побудованої функціональної моделі перетворень їхніх координат одержані результати розв’язків спроможні забезпечити ефективні надійні оцінки дилатаційних полів Землі. Беручи до уваги ще й здатність передавати нелінійні ефекти деформаційних процесів, інформативний потенціал пропонованих розв’язків значно вищий порівняно з традиційно використовуваними. Пропоновані методи моделювання можуть стати додатковим засобом пізнання еволюції багатьох геодинамічних явищ у межах сучасних тектонічних моделей Землі і, тим більше, згаданої раніше дилатаційної. Описування дилатації тими чи іншими оцінками у будь-якому їх масштабі здатне підтвердити дилатаційну концепцію [5, 6] чи, рівною мірою, поставити її під сумнів у разі неналежного вираження явища числовими показниками.

Література

1. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1, 2 / В. Ф. Каган. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1947–1948. – 919 с.
2. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / А. Дж. Мак-Коннел; пер. с англ. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 411 с.
3. Марченко О. Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики / О. Марченко, К. Третяк, А. Кульчицький та ін. – Львів: Львівська політехніка, 2012. – 308 с.
4. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 211 с.
5. Огаджанов В. А. Дилатационная модель Земли и геотектоника / В. А. Огаджанов // Вестник Воронежского университета. Геология. – 2001. – Вып. 11. – С. 23–33.
6. Огаджанов В. А. Концепция геофизических исследований, основанная на явлении дилатации горных пород / В. А. Огаджанов // Геофизика. – 1998. – № 4. – С. 10–13.
7. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М.: Наука, 1967. – 667 с.
8. Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред / И. С. Сокольников; пер. с англ. – М.: Наука, 1971. – 376 с.
9. Тадєєв О. Оцінювання деформацій земної поверхні за даними в геодезичних криволінійних системах координат / О. Тадєєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2015. – Вип. І (29). – С. 48–52.
10. Тадєєв О. А. Оцінювання деформацій земної поверхні з позицій теорії квазіконформних відображень / О. А. Тадєєв // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2013. – Вип. 78. – С. 140–145.
11. Тадєєв О. Оцінювання деформацій земної поверхні, редукованої на геосферу / О. Тадєєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2013. – Вип. ІІ (26). – С. 46–52.
12. Тадєєв О. А. Проблеми та перспективи оцінювання деформаційних полів Землі за геодезичними даними / О. А. Тадєєв // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2015. – Вип. 82. – С. 73–94.
13. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия / С.П. Фиников. – М.–Л.: ОНТИ, 1937. – 265 с.
14. Altamini Z. ITRF2008 plate motion model / Z. Altamini, L. Metivier, X. Collilieux // Journal of Geophysical Research. – 2012. – Vol. 117 (B7), No. B07402. – 14 p. doi: 10.1029/2011JB008930

15. Altiner Y. Present-day tectonics in and around the Adria plate inferred from GPS measurements / Y. Altiner, Z. Bacic, T. Basic et al. // Dilek Y., Pavlides S. (Eds.), Postcollisional tectonics and magnetism in the Mediterranean region and Asia. – Geological Society of America Special Paper 409, 2006. – P. 43–55.
16. Argus D. F. Geologically current motion of 56 plates relative to the no-net-rotation reference frame / D. F. Argus, R. G. Gordon, C. DeMets // Geochemistry, Geophysics, Geosystems. – 2011. – Vol. 12 (11), №. Q11001. – 13 p. doi: 10.1029/2011GC003751
17. Argus D. F. The angular velocities of the plates and the velocity of Earths centre from space geodesy / D. F. Argus, R. G. Gordon, M. B. Heflin et al. // Geophysical Journal International. – 2010. – Vol. 180 (3). – P. 913–960. doi: 10.1111/j.1365-246X.2009.04463.x
18. Bird P. An updated digital model of plate boundaries / P. Bird // Geochemistry, Geophysics, Geosystems. – 2003. – Vol. 4 (3), №. 1027. – 52 p. doi:10.1029/2001GC000252
19. DeMets C. Current plate motions / C. DeMets, R. G. Gordon, D. F. Argus et al. // Geophysical Journal International. – 1990. – Vol. 101 (2). – P. 425–478. doi: 10.1111/j.1365-246X.1990.tb06579.x
20. DeMets C. Effect of recent revisions to the geomagnetic reversal time scale on estimates of current plate motions / C. DeMets, R. G. Gordon, D. F. Argus et al. // Geophysical Research Letters. – 1994. – Vol. 21 (20). – P. 2191–2194. doi: 10.1029/94GL02118
21. DeMets C. Geologically current plate motions / C. DeMets, R. G. Gordon, D. F. Argus // Geophysical Journal International. – 2010. – Vol. 181 (1). – P. 1–80. doi: 10.1111/j.1365-246X.2009.04491.x
22. Dermanis A. A study of the invariance of deformation parameters from a geodetic point of view / A. Dermanis // Kontadakis M. E., Kaltsikis C., Spatalas S., Tokmakidis K., Tziavos I. N. (Eds.). The apple of knowledge. Volume in honor of prof. D. Arabelos. – Publ. of the school of rural & surveying engineering, Aristotle university of Thessaloniki, 2010. – P. 43–66. – http://der.topo.auth.gr/DERMANIS/ENGLISH/ Publication_ ENG.html
23. Grafarend E. W. Intrinsic deformation analysis of the Earths surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies: present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets) / E. W. Grafarend, B. Voosoghi // Journal of Geodesy. – 2003. – Vol. 77. – P. 303–326.
24. Hjelmstad K. D. Fundamentals of structural mechanics / K. D. Hjelmstad. – New York: Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997. – 480 p.
25. International Association of Geodesy. – http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/handbook_2012/333_Commission_3.pdf
26. Kremer C. A geodetic plate motion and Global Strain Rate Model / C. Kremer, G. Blewitt, E. C. Klein // Geochemistry, Geophysics, Geosystems. – 2014. – Vol. 15 (10). – P. 3849–3889. doi: 10.1002/2014GC005407
27. Kremer C. An integrated global model of present-day plate motions and plate boundary deformation / C. Kremer, W. E. Holt, A. J. Haines // Geophysical Journal International. – 2003. – Vol. 154 (1). – P. 8–34. doi:10.1046/j.1365-246X.2003.01917.x
28. Kreemer C. Geodetic constraints on contemporary deformation in the northern Walker Lane: 2. Velocity and strain rate tensor analysis / C. Kreemer, G. Blewitt, W. C. Hammond // Oldow J. S., Cashman P. H. (Eds.), Late Cenozoic structure and evolution of the Great Basin – Sierra Nevada transition. – Geological Society of America Special Paper 447, 2009. – P. 17–31.
29. Savage J. C. Strain accumulation and rotation in the Eastern California Shear Zone / J. C. Savage, W. Gan, J. L. Svarc // Journal of Geophysical Research. – 2001. – Vol. 106(B10). – P. 21995–22007.
30. Sella G. F. REVEL: A model for recent plate velocities from space geodesy / G. F. Sella, T. H. Dixon, A. Mao // Journal of Geophysical Research. – 2002. – Vol. 107 (B4), №. 2081. – 30 p. doi: 10.1029/2000JB000033

Оцінювання тривимірних деформаційних полів Землі методами проективно-диференціальної геометрії. Дилатаційні поля Землі

О. Тадєєв

Подано результати розв’язків задачі оцінювання тривимірних деформаційних полів Землі різних масштабів у частині вираження дилатації. Розв’язання досягнуто методами проективно-диференціальної геометрії на основі теорії диференціального подання перетворень образів простору.

Оценивание трехмерных деформационных полей Земли методами проективно-дифференциальной геометрии. Дилатационные поля Земли

А. Тадеев

Представлены результаты решений задачи оценивания трехмерных деформационных полей Земли различных масштабов в части выражения дилатации. Решения осуществлены методами проективно-дифференциальной геометрии на основе теории дифференциального представления преобразований образов пространства.

Estimating three-dimensional earth deformation fields by methods of the projective differential geometry. Earth dilatation fields

O. Tadyeyev

Paper reports the task solutions results of estimating three-dimensional earth deformation fields of different scales in part on expression of the dilatation. Solutions achieved by methods of the projective differential geometry based on a theory of the differential representation of space images mapping.