

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМ. Я.С.ПІДСТРИГАЧА
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

**СОБКО
ВАЛЕНТИНА ГРИГОРІВНА**

УДК 621.532.3.004.17:681.142:622.691.24:536.12

ДИСЕРТАЦІЯ

**ЧИСЛОВО-АНАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕНОСУ
НА БАЗІ БІОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи
05 «Технічні науки»

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело


В.Г.Собко

Науковий керівник
П'янило Ярослав Данилович
доктор технічних наук, с.н.с.

Ідентичність всіх примірників дисертації

ЗАСВІДЧУЮ:

Вчений секретар спеціального вченої ради


/Р. А. Бунь/

Львів – 2018

АНОТАЦІЯ

Собко В.Г. Числово-аналітичні моделі процесів масопереносу на базі біортогональних многочленів. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – “Математичне моделювання та обчислювальні методи”. – Національний університет “Львівська політехніка”, Міністерство освіти і науки України, Львів, 2018.

Розв’язано актуальну наукову задачу - розроблення адаптивних аналітико-числових математичних моделей руху газу в трубопроводах та природних пористих утвореннях, які відповідають практичним завданням оптимізації поточкорозподілу газу за критеріями раціонального споживання та розробка адаптивних методів розрахунку цих моделей, орієнтованих на використання апріорної інформації про шукані розв’язки.

Відзначено актуальність дисертаційної роботи, зроблено огляд літератури за темою дисертації, окреслено її місце у розв’язанні науково-прикладних задач газової динаміки в газотранспортних мережах. Показана необхідність побудови уточнених аналітико-числових адаптивних математичних моделей процесів масопереносу та формулювання відповідних крайових задач математичної фізики, а також застосування спектральних методів до розв’язування цих задач.

На основі аналізу нових практичних задач, зокрема виявлення витоків газу та оцінки об’ємів газу розчиненого у водах, що є наявними в пластах підземних сховищ, які виникають в процесі транспортування газу, показана необхідність уточнення відомих математичних моделей процесів руху газу в технологічних об’єктах та відомих методів розв’язування відповідних крайових задач, або побудови нових для забезпечення отримання необхідної точності результатів за прийнятний час. Граничні та початкові умови будуються на базі експериментальних даних, які зазнають попередньої обробки.

Для досягнення мети в даній роботі на базі ортогональних поліномів Чебишева першого роду побудовано квазіспектральні поліноми та повні біортогональні системи. Досліджено їх властивості та знайдено розклади ортогональних поліномів Чебишева першого роду та їх похідних через квазіспектральні та біортогональні функції, а також знайдено подання рядів Фур'є-Чебишева через біортогональні розклади.

Вперше побудовано квазіспектральні та біортогональні поліноми, описано алгоритми їх побудови, досліджено їх властивості. Знайдено коефіцієнти нев'язки τ_1 та τ_2 для рівняння, що описує квазіспектральну задачу у випадку інтегрального оператора окремо для парних та непарних поліномів, а також $\bar{\tau}_1$ та $\bar{\tau}_2$ у випадку диференціального оператора.

Вперше створено нові аналітично-наближені та наближені методи для розв'язування газодинамічних задач у базисі біортогональних поліномів. Вивчено вплив параметрів методів, зокрема порядку часткової суми, розрядної сітки та похибки обчислення на точність отриманих розв'язків. Методи апробовані на модельній задачі типу теплопровідності.

Вперше досліджено спосіб розв'язування задач математичної фізики методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів, проведено порівняльний аналіз для різних вхідних параметрів.

На базі розробленого методу побудовано адаптивні алгоритми розрахунку режимних параметрів транспорту газу з метою мінімізації енергетичних ресурсів та оптимізації роботи ГТС за різними критеріями.

Обґрунтовано ефективність розвинених алгоритмів та застосування побудованих біортогональних поліномів для розв'язування задач математичної фізики, зокрема, задач газогідродинаміки:

- отримані біортогональні поліноми $V_i^{n+i}(x)$, $i = 1, \dots, n$ такі, що при знаходженні розв'язків наведених задач, саме у вигляді суми ряду по знайдених біортогональних функціях дістанемо діагональну матрицю для знаходження невідомих коефіцієнтів ряду, з якої відразу ж отримуємо невідомі величини

(при знаходженні розв'язків цих же задач у вигляді рядів Фур'є-Чебишева дістаємо трикутну матрицю, а у випадку степеневих рядів - дводіагональну матрицю; у цих випадках для знаходження невідомих коефіцієнтів потрібно виконати більше арифметичних операцій, затратити більше часу, а, отже, накопичити більшу машинну похибку; у випадку використання степеневих рядів, цей метод має меншу збіжність у порівнянні з описаними двома іншими методами);

- отримані біортогональні поліноми $V_i^{n+\bar{i}}(x)$ володіють властивостями: $V_i^{n+\bar{i}}(\pm 1) = 0$, що дає змогу відразу ж з крайових умов знаходити невідомі два коефіцієнти;

- побудовані квазіспектральні поліноми є похідними першого порядку від біортогональних многочленів (ця властивість є дуже важливою, при диференціюванні функції представленої у вигляді суми ряду через біортогональні поліноми чи інтегруванні функції представленої у вигляді суми ряду через квазіспектральні поліноми; коефіцієнти при цьому залишаються незмінними, а лише змінюються функції при них, які є відомими);

- слід зазначити, що саме при застосуванні знайдених біортогональних многочленів до розв'язування поставлених задач позитивним є те, що параметри: $\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2i-1+\bar{i}}$, $\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n$, $N_{2i-\bar{i}}^n$, $\tau_{2i-1+\bar{i}}^n$, які входять в одержані розв'язки, можуть бути обчислені з довільною точністю і знайдені з алгоритму побудови біортогональних функцій (для довільного натурального числа n можна побудувати бази даних із значеннями цих параметрів і використовувати їх під час обчислення розв'язку, що теж економить час).

На базі побудованих біортогональних базисів розроблені методи та відповідні алгоритми для розв'язування крайових задач, якими описують багато фізичних процесів, зокрема масопереносу вуглеводнів в трубопроводах та пористих природних середовищах.

Досліджено спосіб розв'язування задач методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів. Знайдено наближено-аналітичні та наближені розв'язки задач масопереносу.

Спосіб вирішення апробовано як на прикладах розкладу відомих функцій, так і на модельних задачах, розв'язки яких відомі в аналітичному вигляді. Це зроблено з метою вивчення ефективності методу та впливу його параметрів на точність та адекватність шуканого розв'язку. Оскільки задачі такого типу є некоректними за Тихоновим, то дослідження такого типу є актуальними, оскільки дозволяють будувати регуляризуючі алгоритми. Зауважимо, суттєвий вклад в побудову регуляризуючих алгоритмів вносить апріорна інформація про процес, що вивчається, яка достатньо просто враховується в побудованому методі.

Обґрунтовано переваги та доцільність застосування методу розділення змінних в базисі біортогональних функцій, необхідність при розв'язуванні задач математичної фізики. Відомо, що однією з позитивних сторін цього методу є те, що якщо ряд по одній системі функцій є повільно збіжний, то по іншій – швидкозбіжний. Для наближено-аналітичної та наближеної моделей описані загальні схеми розв'язування крайових задач в базисі біортогональних многочленів.

Для підтвердження теоретичних викладок проведено відповідні числові експерименти. Подано алгоритми знаходження квазіспектральних та біортогональних функцій, що були використані в роботі. Сформульовано задачі на власні значення оператора проектування. Побудовано рекурентну формулу для знаходження характеристичного поліному для знаходження власних значень описаного оператора та проведено їх оцінку. Описано формулювання квазіспектральних та спряжених квазіспектральних задач. Розроблено алгоритми побудови квазіспектральних поліномів та біортогональних поліномів.

Побудовано рекурентну формулу для коефіцієнтів розкладу многочленів Чебишева та їх похідних в ряд за біортогональними функціями. Знайдено

рекурентні формули для коефіцієнтів розкладу многочленів Чебишева в ряд за квазіспектральними та біортогональними функціями. Подано поліноми Чебишева та їх другі похідні через квазіортогональні функції. Подано ряди Фур'є-Чебишева через біортогональні розклади.

Проаналізовано вплив різного роду похибок на обчислювальний процес – методу, вхідних даних та машинної. Результати проведених обчислювальних експериментів впливу параметрів методів, зокрема порядку часткової суми, розрядної сітки та похибки обчислення на точність отриманого розв'язку подано у вигляді таблиць та рисунків.

В даній роботі, на базі побудованих біортогональних поліномів, запропоновано метод розв'язування задач математичної фізики, зокрема для розрахунку нестационарного руху газу в трубопроводах. Досліджено спосіб розв'язування задачі методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів. Знайдено аналітично-наближений та наближений розв'язки задачі у вигляді суми ряду біортогональних та квазіспектральних поліномів. Проведений порівняльний аналіз між отриманими наближеним та аналітично-наближеним розв'язками.

Відомо, що майже у всіх пластах підземних сховищ газу є наявною вода, в якій розчиняється певна кількість газу. Очевидно, що процес розчинності газу в значній мірі залежить від тиску. Тому задача розподілу тиску у водах пластів ПСГ є актуальною. У зв'язку з чим у дисертаційній роботі досліджено розподілу тиску у воді в складних пористих середовищах. Побудовано наближено-аналітичну модель розподілу тиску у воді.

Отримані в роботі результати з моделювання процесів газогідродинаміки добре узгоджуються (з достатньою для практики точністю) з відомими в літературі та результатами натурних експериментів.

Побудовані в роботі методи розв'язування крайових задач можуть бути використані і в інших галузях.

Ключові слова: математична модель, нестационарний процес, спектральний метод, похибка обчислення, рух газу в трубопроводі, природне пористе середовище, біортогональні поліноми, адаптивний метод.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Pyanylo Ya. Methods of finding distribution of pressure in the pipeline / Ya.Pyanylo, V. Sobko // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2016. – Vol. 3, No. 2. – P. 199–207.
2. Pyanylo Ya. The pressure distribution in water in the complex porous environments investigat / Ya. Pjanylo, V. Sobko, O. Bratash // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2017. – Vol. 4, No. 2. – P. 187–196.
3. П'янило Я. Д. Побудова та дослідження біортогональних поліномів на базі многочленів Чебишева / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2013. – Вип. 11. – С. 135-141.
4. Собко В. Г. Побудова та дослідження алгоритму розв'язування задач математичної фізики за допомогою біортогональних поліномів / В.Г.Собко // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. – 2015. – Вип.4. – С.176-180.
5. П'янило Я. Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів / Я.П'янило, В. Собко // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. – 2014. – Вип. 19. – С. 146-156.
6. П'янило Я. Дослідження стійкості спектрального методу визначення розподілу тиску вздовж трубопроводу в нестационарному випадку в базисі біортогональних поліномів / Я. П'янило, В. Собко // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. – 2016. – Вип. 24. – С. 86-92.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. П'янило Я. Д. Оптимальні квадратурні формули в базисах квазіортогональних многочленів / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко // V Всеукр. наук. конф. “Нелінійні проблеми аналізу” присвяченої пам'яті професора Васишина Б. В. (19-22 вересня 2013 р.): Тези доп. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 62-63.
2. П'янило Я. Д. Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів / Я.Д.П'янило, В.Г. Собко // XIII Міжнар. наук.-техн. конф. “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів” (7-9 листопада 2014 р.): Матер. конф. – Кременчук, 2014. – С. 48-49.
3. П'янило Я. Д. Застосування біортогональних розкладів для рішення рівнянь параболічного типу / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко // Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (19-22 лютого 2015 р.): Матер. конф. – Рівне, 2015. – С. 138.
4. П'янило Я. Д. Застосування квазіортогональних поліномів в задачах обробки цифрової інформації та математичного моделювання / Я.Д.П'янило, В. Г. Собко, Г. М. П'янило // XI Міжнар. наук. конф. “Моделювання та інформаційні технології у фізичному вихованні і спорті” (12-15 травня 2015 р.): Матер. XI Міжнар. наук. конф. – Львів – Харків: Львів. держ. ун-т фіз. культури, Харк. нац. пед. ун-т ім. Г.С.Сковороди. – Харків: «ОВС», 2015. – С. 88-92.
5. Лянце Г.Т. Апроксимація функцій ортогональними та біортогональними рядами / Г.Т. Лянце, В.Г. Собко, Г.М. П'янило // IV наук.-техн. конф. “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації” (28-30 вересня 2016 р.): Матер. IV наук.-техн. конф.– Львів: ФМІ, 2016. – С. 72-75.
6. П'янило Я. Д. Використання спектральних розкладів в задачах математичної фізики / Я. Д. П'янило, Г. Т. Лянце, Г. М. П'янило,

- О.Б.Браташ, В. Г. Собко // XXII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (5-7 жовтня 2016 р.): Зб. наук. праць. – Львів: ЛНУ, 2016. – С. 165-168.
7. П’янило Я., Методи розв’язування крайових задач з використанням дробових похідних за часом / Я. П’янило, Г. П’янило, О. Браташ, В. Собко // Міжнар. наук.-практ. конф. “Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання” (15-20 травня 2017 р.): матеріали конференції. – Івано-Франківськ, 2017. – С. 418-421.

ABSTRACT

Sobko V. G. Numerical-analytical models of the mass transfer processes on the biorthogonal polynomials basis. – On the rights of manuscript.

The dissertation of the degree of the technical sciences candidate for the speciality 01.05.02 – “Mathematical modeling and computational methods”. – Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2018.

The actual scientific problem – the development of adaptive analytical-numerical mathematical models of gas motion in the pipelines and in the natural porous formations, which correspond to the practical tasks of the gas distribution optimization according to the criteria of rational consumption and the development of adaptive methods of calculation of these models which are oriented to use apriori information about the desired solutions, is solved.

The actuality of the dissertation work is noted, the review of the literature on the theme of the dissertation is made, its place in solving scientific and applied problems of gas dynamics in gas transmission networks is outlined. The necessity of constructing of refined analytic-numerical adaptive mathematical models of processes of mass transfer and formulation of correspond boundary problems of mathematical physics and also using the spectral methods to solve these problems.

Based on the analysis of new practical problems, in particular the detection of gas leaks and the estimation of volumes of gas dissolved in the water, which is available in the layers of underground storages, which emerge during the gas transportation process, the need to refine the known mathematical models of the gas motion processes in technological objects and the known methods of corresponding boundary value problems solving or to construct new ones to provide the obtaining the required accuracy of the results during a reasonable time is shown. Limit and initial conditions are constructed on the basis of experimental data which are pre-processed.

To achieve the goal in this work the quasi-spectral polynomials and the complete biorthogonal systems are constructed on the basis of the orthogonal Chebyshev polynomials of the first kind. Their properties are researched and expansions of biorthogonal Chebyshev polynomials of the first kind and their derivatives using quasi-spectral and biorthogonal functions are found; as well as Fourier-Chebyshev series representations using biorthogonal expansions are obtained.

For the first time quasi-spectral and biorthogonal polynomials are constructed, the algorithms of their constructing are described, their properties are researched. The coefficients of discrepancy τ_1 and τ_2 for the expression which described quasi-spectral problem in the case of an integral operator separately for pair and odd polynomials and τ_1 and τ_2 in the case of an differential operator are found.

For the first time new analytically approximated and approximated methods for solving gas dynamic problems on the basis of biorthogonal polynomials are created. The methods parameters influence in particular, the order of a partial amount, bit grid and calculation error for the accuracy of the obtained solutions is studied. The methods are tested on a model problem of heat conductivity type.

For the first time the way of solving mathematical physics problems by the method of separation of variables on the biorthogonal polynomials basis is researched, the comparative analysis for different input parameters is carried out.

Based on the developed method the adaptive algorithms for regime parameters calculation of gas transport in order to minimize energy resources and to optimize the work of GTS according to different criteria are constructed.

The efficiency of developed algorithms and the application of constructed biorthogonal polynomials for solving mathematical physics problems in particular, gas hydrodynamics problems is substantiated:

- the obtained biorthogonal polynomials $V_i^{n+\bar{i}}(x)$, $i=1, \dots, n$ are such that when finding solutions of given problems exactly in the form of the sum of series on the found biorthogonal functions we will obtaine diagonal matrix for solving

the unknown coefficients of the series from which we immediately get unknown values (when finding solutions of these problems in the form of Fourier-Chebyshev series we get the triangular matrix, and in the case of power series - two-diagonal matrix; in these cases to find the unknown coefficients we need to make more arithmetic operations, spend more time, and, consequently, to accumulate a larger machine error; in the case of power series using this method has the less convergence in comparison with two other described methods);

- the obtained biorthogonal polynomials $V_i^{n+\bar{i}}(x)$ have properties: $V_i^{n+\bar{i}}(\pm 1) = 0$, which makes it possible immediately from the boundary conditions to find both unknown coefficients;
- the constructed quasi-spectral polynomials are the derivatives of the first order of biorthogonal polynomials (this property is very important, when differentiating the function which is presented in the form of series sum by the biorthogonal polynomials or when integrating which is presented in the form of series sum by the quasi-spectral polynomials; the coefficients remain unchanged herewith, and only functions for them that are known change);

it should be noted that precisely when applying the obtained biorthogonal polynomials for solving the set problems the positive thing is that the parameters:

$\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2i-1+\bar{i}}$, $\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n$, $N_{2i-\bar{i}}^n$, $\tau_{2i-1+\bar{i}}^n$ which are included in the resulting solutions can be calculated with the arbitrary accuracy and be found from the algorithm of biorthogonal functions constructing (for an arbitrary positive integer number n you can develop databases with the values of these parameters and use them during the calculating the solution which also saves time).

On the basis of the constructed biorthogonal bases, the methods and accordant algorithms for boundary problems solving, which are used to describe a lot of physical processes, in particular the mass transfer of hydrocarbons in the pipelines and porous natural media, are developed.

The way of solving problems by the method of separating variables on the biorthogonal polynomials basis is investigated. Approximate-analytical and approximate solutions of the mass transfer problems are found.

The way of solving is tested both on the examples of known functions expansion and on the model problems, the solutions of which are known in analytical form. This is done to research the method efficiency and its parameters influence on the accuracy and adequacy of the desired solution. Since the problems of such type are incorrect according to Tikhonov, then the researches of such type are actual because they allow us to construct the regularizing algorithms. Note that a priori information about the process studied, which is sufficiently simple taken into account in the constructed method, makes a significant contribution into the construction of the regularizing algorithms.

The advantages and feasibility of using the method of separation of variables on the basis of biorthogonal functions the necessity when solving the mathematical physics problems are substantiated. It is known that one of the positive aspects of this method is that if the series in one system of functions is slowly convergent, then in other system it is quickly convergent. For the approximate-analytic and approximate models the general solution schemes of boundary problems on the basis of biorthogonal polynomials are described.

To confirm the theoretical teachings the corresponding numerical experiments are carried out. The algorithms of founding the quasi-spectral and biorthogonal functions that are used in this work are presented. The problems for the eigenvalues of the design operator are formulated. The recurrent formula for finding the characteristic polynomial for finding the eigenvalues of described operator is constructed and their evaluation is carried out. The formulation of quasi-spectral and conjugated quasi-spectral problems is described. The algorithms of constructing the quasi-spectral polynomials and biorthogonal polynomials are developed.

The recurrent formula for the coefficients of expansion of Chebyshev polynomials and their derivatives in series for biorthogonal functions is constructed. The recurrent formulas for the coefficients of expansion of Chebyshev polynomials in

series for the quasi-spectral and biorthogonal functions. Chebyshev polynomials and their second derivatives using quasiorthogonal functions are presented. Chebyshev-Fourier series using biorthogonal expansions are presented.

The influence of variables errors on the computational process – of method, of input data and machine. The results of carried out computational experiments of the influence of methods parameters in particular, order of a partial sum, bit grid and computational error on the accuracy of the obtained solution is presented in the form of tables and figures.

In this work on the basis of constructed biorthogonal polynomials the method for solving problems of mathematical physics, in particular for calculating the unsteady gas flow in pipelines is proposed. The way of solving the problem by the method of separation of variables on the basis of biorthogonal polynomials is researched. The analytically approximated and approximate solutions of the problem in the form of the sum of a series of biorthogonal and quasi-spectral polynomials are obtained. The comparative analysis between the obtained approximate and analytically-approximate solutions is carried out.

It is known that in almost all layers of underground gas storage there is an available water in which a certain quantity of gas dissolves. It is obvious that the gas solubility process depends to a large extent on pressure. Therefore, the problem of pressure distribution in the waters of the UGS layers is actual. Therefore, the distribution of pressure in water in complex porous media is investigated in the dissertation. An approximate analytical model of pressure distribution in water was constructed.

The results obtained in the modeling of the processes of gas hydrodynamics are well-coordinated with (with sufficient accuracy for the practice), known in the literature and the results of field experiments.

The methods of solving the boundary value problems constructed in the work can be used in other areas as well.

Key words: mathematical model, nonstationary process, spectral method, calculation error, gas motion in pipeline, natural porous medium, biorthogonal polynomials, adaptive method.

Scientific papers, in which the main scientific results of the dissertation are published:

1. Pyanylo Ya. Methods of finding distribution of pressure in the pipeline / Ya. Pyanylo, V. Sobko // *Mathematical Modeling and Computing*, Vol. 3, No. 2, pp. 199-207 (2016). (*Index Copernicus Journals*).
2. Pyanylo Ya. The pressure distribution in water in the complex porous environments investigation / Ya. Pyanylo, V. Sobko, O. Bratash // *Mathematical Modeling and Computing*, Vol. 4, No. 2, pp. 187-196 (2017). (*Index Copernicus Journals*).
3. Pyanylo Ya. D. Constructing and researching biorthogonal polynomials on the basis of Chebyshev polynomials / Ya. D. Pyanylo, V. G. Sobko // *Applied problems of mechanics and mathematics* — 2013. – Issue 11. – P. 135-141.
4. Sobko V. G. Constructing and researching the algorithm of mathematical physics problems solving by the biorthogonal polynomials. V. G. Sobko // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv*. – 2015. Issue 4. – P.176-180.
5. Pyanylo Ya. Researching the properties of spectral expansions on the bases of orthogonal, quasi-orthogonal and biorthogonal polynomials / Ya. Pyanylo, V. Sobko // *Physico-mathematical modeling and informational technologies*. 2014. – Issue 19. – P. 146-156.
6. Pyanylo Ya. Researching the stability of the spectral method for determining pressure distribution along the pipeline in a non-stationary case on the basis of biorthogonal polynomials / Ya. Pyanylo, V. Sobko // *Physico-mathematical modeling and informational technologies*. – 2016. – Issue 24. – P. 86-92.

Scientific works certifying the testing of the dissertation materials:

1. Pyanylo Ya. D. Optimal quadratures on the bases of quasi-orthogonal polynomials / Ya. D. Pyanylo, V. G. Sobko // V All-Ukrainian scientific conference “Nonlinear analysis problems ” devoted to the memory of professor Vasylyshyn B. V. (September 19-22, 2013): Abstracts of reports – Ivano-Frankivsk, 2013. – P. 62-63.
2. Pyanylo Ya. D. Researching the properties of spectral expansions on the bases of orthogonal, quasi-orthogonal and biorthogonal polynomials / Ya. D. Pyanylo, V. G. Sobko // XIII International scientific-technical conference “Physical processes and fields of technical and biological objects” (November 7-9, 2014): Conference materials – Kremenchuk: Modeling processes in technical and biological systems and objects. 2014. – P. 48-49.
3. Pyanylo Ya. D. Using the biorthogonal expansions for solving the equations of parabolic type / Ya. D. Pyanylo, V. G. Sobko // International scientific conference “Modern problems of mathematical modeling and computational methods” (February 19-22, 2015): Conference materials – Rivne, 2015. – P. 138.
4. Pyanylo Ya. D. Using the quasi-orthogonal polynomials in problems of digital information and mathematical modeling processing / Ya. D. Pyanylo, V.G.Sobko, H. M. Pyanylo // XI International scientific conference “Modeling and informational technologies in physical education and sport” (May, 12-15, 2015): Materials of XI International scientific conference – Lviv – Kharkiv: Lviv state university of physical culture, Kharkiv national pedagogical university named after H. S. Skovoroda. — Kharkiv: «ATS», 2015. – P. 88-92.
5. Liantse H. T. Approximation of the functions by orthogonal and biortgogonal series / H. T. Liantse, V. G. Sobko, H. M. Pyanylo // IV Scientific-technical conference “Computational methods and systems of information transformation” (September 28-30, 2016): Materials of IV Scientific-technical conference.– Lviv: PhMI, 2016. – P. 72-75.

6. Pyanylo Ya. D. Using the spectral expansions at mathematical physics problems/ Ya. D. Pyanylo, H. T. Liantse, H. M. Pyanylo, V. G. Sobko // XXII All-Ukrainian scientific conference “Modern problems of applied mathematics and informatics” (October 5-7, 2016): Collection of scientific works – Lviv: LNU, 2016. – P. 165-168.
7. Pyanylo Ya. Methods of boundary problems solving using fractional time derivatives / Ya. Pyanylo, H. Pyanylo, O. Bratash, V. Sobko // International Scientific-practical conference “Informational technologies and computational modeling” (May 15-20, 2017): Materials of conference. – Ivano-Frankivsk, 2017. – P. 418-421.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	21
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ.....	30
1.1. Математичні моделі процесів масопереносу в основних технологічних об'єктах ГТС та виникаючі проблеми при їх розрахунку	30
1.2. Аналіз методів розв'язування задач математичної фізики	33
Висновки до розділу.....	37
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ. АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В БАЗИСІ БІОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ.....	38
2.1. Математичні моделі процесів масопереносу та вимоги до них.....	38
2.2. Модель 2.1. Модель процесу руху газу в трубопроводі.....	40
2.3. Модель 2.2. Знаходження розподілу тиску у воді.....	44
2.4. Загальна схема вирішення крайових задач в базисі біортогональних многочленів.....	47
2.4.1. Наближено-аналітична модель.....	47
2.4.2. Наближена модель.....	48
Висновки до розділу.....	49
РОЗДІЛ 3. ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ КВАЗІСПЕКТРАЛЬНИХ І БІОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ НА БАЗІ МНОГОЧЛЕНІВ ЧЕБИШЕВА.....	50
3.1. Оператор проектування.....	50
3.2. Власні значення оператора проектування.....	54
3.3. Формулювання квазіспектральних задач.....	56
3.3.1. Квазіспектральна задача для інтегрального оператора.....	56
3.3.2. Квазіспектральна задача для диференціального оператора.....	59
3.3.3. Спряжена квазіспектральна задача для інтегрального оператора.....	62
3.3.4. Спряжена квазіспектральна задача для диференційного оператора.....	62
3.4. Побудова квазіспектральних поліномів.....	64
3.5. Побудова біортогональних поліномів.....	69

3.6. Дослідження та властивості квазіортогональних та біортогональних функцій.....	75
3.7. Подання поліномів Чебишева через біортогональні функції.....	77
3.7.1. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів Чебишева в ряд за функціями $V_{2i}^{2s}(x)$	79
3.7.2. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу непарних многочленів Чебишева в ряд за функціями $V_{2i-1}^{2s+1}(x)$	79
3.7.3. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів Чебишева в ряд за функціями $\bar{V}_{2i}^{2s}(x)$	80
3.7.4. Рекурентна формула коефіцієнтів розкладу непарних многочленів Чебишева в ряд за функціями $\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)$	80
3.8. Представлення поліномів Чебишева через квазіортогональні функції.....	81
3.8.1. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів Чебишева в ряд за функціями $U_{2i}^{2s}(x)$	81
3.8.2. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу непарних многочленів Чебишева в ряд за функціями $U_{2i-1}^{2s-1}(x)$	82
3.8.3. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів Чебишева в ряд за функціями $\bar{U}_{2i}^{2s}(x)$	83
3.8.4. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу непарних многочленів Чебишева в ряд за функціями $\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x)$	84
3.9. Зведення рядів Фур'є-Чебишева до біортогональних розкладів.....	84
Висновки до розділу.....	85
РОЗДІЛ 4. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ БІОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТІВ.....	87
4.1. Алгоритм розв'язку модельної задачі типу теплопровідності.....	87
4.2. Моделювання процесу руху газу в трубопроводі (модель 2.1).....	97

4.2.1. Наближено-аналітична модель (I-ий спосіб).....	100
4.2.2. Наближена модель (I-й спосіб).....	104
4.2.3. Наближено-аналітична модель (II-й спосіб).....	108
4.2.4. Наближена модель (II-й спосіб).....	113
4.3. Дослідження розподілу тиску у воді в складних пористих середовищах. Наближено-аналітична модель розподілу тиску у воді (модель 2.2).....	125
Висновки до розділу.....	130
ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ.....	131
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	134
ДОДАТКИ.....	149
ДОДАТОК А. ДОВЕДЕННЯ ДОПОМІЖНИХ ТВЕРДЖЕНЬ. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ. АЛГОРИТМИ ПОБУДОВИ КВАЗИСПЕКТРАЛЬНИХ ТА БІОРТОГОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. РЕКУРЕНТНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ КОЕФІЦІЄНТІВ РОЗКЛАДУ МНОГОЧЛЕНІВ ЧЕБИШЕВА В РЯД ЗА ПОБУДОВАНИМИ ФУНКЦІЯМИ.	149
ДОДАТОК Б. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ.....	204
ДОДАТОК В. ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ.....	207

ВСТУП

Актуальність теми. З розвитком промисловості зростає необхідність у збільшенні енергоносіїв, видобуток яких потребує значних затрат. Тому їх видобуток постійно зменшується, що веде до постійного зростання вартості, в тому числі і транспортування. Параметри процесу транспортування газу визначаються з відповідних математичних моделей. У зв'язку з тим зростають вимоги і до розрахунку параметрів роботи газотранспортних систем (ГТС) та підземних сховищ газу (ПСГ).

Це вимагає побудови відповідних адаптаційних моделей та методів, які описуються крайовими задачами з диференціальними рівняннями різного типу (звичайними, в частинних похідних або в похідних дробових порядків). Для отримання розв'язків цих задач необхідно задавати початкові і крайові умови. В задачах моделювання фізичних процесів вхідні дані, як правило, задаються у довільних дискретних точках з невисокою точністю. Результатом експериментальної роботи або теоретичних досліджень часто є великі масиви числової інформації: одномірні (сигнали), двовимірні (плоскі зображення), багатовимірні (результати зондування середовищ). Такі дані підлягають обробці, метою якої може бути: видалення шуму, згладжування інформації, виявлення особливостей інформації, пошук прихованих у ній закономірностей, дослідження частотних характеристик тощо. Рівняння, якими описують реальні процеси, є, в загальному випадку, багатовимірними. Досить часто вони є двовимірними. Тому виникає необхідність, залежно від вибраного методу розв'язування відповідних задач математичної фізики, в попередній обробці вхідної цифрової інформації та побудови аналітичної залежності крайових умов.

Перспективним способом побудови такої залежності є використання ортогональних та біортогональних рядів. У літературі добре розроблені способи побудови параметричної залежності для випадку однієї змінної. У випадку багатьох змінних такі способи необхідно розробляти та досліджувати.

На цей час основними методами опрацювання числової інформації є спектральні. Спектральні методи використовують як в теоретичних дослідженнях, так і для розв'язування широкого класу задач математики і механіки. Їх суть полягає в тому, що функції, які входять у модель, подають у вигляді ортогональних рядів за вибраним базисом. Знаходження розв'язку зводиться до обчислення коефіцієнтів ортогонального ряду шуканого розв'язку. Відомо, що вибір ортогонального базису слід узгоджувати з областю визначення шуканого розв'язку. Позитивними сторонами є те, що багато ортогональних базисів достатньо добре досліджені, прості у використанні та побудовані на їх основі алгоритми розв'язування легко піддаються автоматизації. До негативних сторін можна віднести те, що сумування відповідних рядів, як правило, є некоректною задачею. Далі, не всі критерії, які ставляться до розв'язків задач, можна задовольнити застосуванням одного ортогонального базису. У зв'язку з цим для ширшого задоволення критеріїв або модифікуються існуючі базиси, або будуються нові. Одним з шляхів врахування згаданих зауважень є застосування біортогональних розкладів. На сьогодні є небагато праць, присвячених їх дослідженню, а особливо практичному використанню. Це, в основному, викликано тим, що побудова біортогональних базисів пов'язана зі значними обчислювальними труднощами і вони недостатньо вивчені.

Швидкий розвиток обчислювальної техніки дає змогу ускладнювати математичні моделі фізичних процесів, що дає можливість більш адекватно описувати процеси, які вивчаються. Тому задача розроблення ускладнених адекватних математичних моделей фізичних процесів, зокрема, моделей фізичних процесів транспортування та зберігання газу є особливо актуальною у цей час. Ускладнення моделей вимагає побудови нових або уточнення існуючих методів розв'язання відповідних задач математичної фізики.

У даній роботі побудовано квазіспектральні поліноми та повні біортогональні системи. Досліджено їх властивості та знайдено розклади ортогональних поліномів Чебишева першого роду та їх похідних через

квазіспектральні та біортогональні функції, а також знайдено подання рядів Фур'є-Чебишева через біортогональні розклади.

На базі побудованих біортогональних базисів розроблено методи та відповідні алгоритми для розв'язування крайових задач, якими описують багато фізичних процесів, зокрема масопереносу вуглеводнів у трубопроводах та пористих природних середовищах. Досліджено спосіб розв'язування задач методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів. Знайдено наближено-аналітичні та наближені розв'язки задач масопереносу.

Спосіб розв'язування апробовано як на прикладах розкладу відомих функцій, так і на модельних задачах, розв'язки яких відомі в аналітичному вигляді. Це зроблено з метою вивчення ефективності методу та впливу його параметрів на точність та адекватність шуканого розв'язку. Оскільки задачі такого типу є некоректними за Тихоновим, то дослідження такого типу є актуальними, оскільки дають змогу будувати регуляризуючі алгоритми. Причому суттєвий внесок у побудову регуляризуючих алгоритмів вносить апріорна інформація про процес, що вивчається, яка достатньо просто враховується в побудованому методі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконувалась у межах планових науково-дослідних робіт Центру математичного моделювання ІППІМ ім. Я. С. Підстригача та ПАТ “Укртрансгаз”, зокрема:

- “Нестационарні задачі фільтрації газу в неоднорідних пористих середовищах в газовому і водонапірному режимах із зосередженими джерелами і стоками” (держ. реєстр. № 0107U000356);
- “Розробка та дослідження математичних моделей процесів деформування та переносу в неоднорідних середовищах з урахуванням локальної структури та зосереджених джерел і стоків” (I кв. 2012 –IV кв. 2016);
- “Розроблення математичних моделей, методів та алгоритмів для прогнозування і оптимального керування режимами експлуатації підземних сховищ газу. Побудова методів та алгоритмів для

прогнозування і оптимального керування процесами відбору-закачування газу в підземні сховища” (держ. реєстр. № 0107U005812);

- “Розроблення підсистеми оперативного планування динамічних режимів роботи магістральних газопроводів для автоматизованого диспетчерського керування потоками газу в газотранспортній системі України” (держ. реєстр. № 0110U004141);
- “Математичне моделювання нестационарної фільтрації газу в неоднорідних пористих середовищах з рухомими границями розділу газ-вода” Розділ 1 «Побудова математичної моделі та алгоритмів дослідження фільтрації газу та рідини в неоднорідних середовищах складної форми» до договору №1 від 17 березня 2014 р. згідно з розпорядженням Президії НАН України від 05.03.2014 №142.

У цих роботах автор був виконавцем і розробив числово-аналітичні моделі процесів масопереносу на базі біортогональних многочленів.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є побудова та дослідження аналітико-числових моделей масопереносу, зокрема газу, в складних газотранспортних системах, трубопроводах та природних пористих середовищах з метою підвищення точності, ефективності та автоматизації розв’язання виниклих у сучасних умовах задач, зокрема витоків газу та оцінки газу, наявного у підшовних та законтурних водах, які наявні в пластах ПСГ.

Мета роботи обумовила необхідність розв’язання таких задач:

- побудувати та дослідити аналітико-числові моделі масопереносу в трубопроводах та пористих середовищах ГТС, з цією метою сформулювати відповідні крайові задачі математичної фізики;
- розробити алгоритми і побудувати наближено-аналітичні та наближені способи розв’язування сформульованих крайових задач методом розділення змінних з використанням спектральних представлень у базисах біортогональних многочленів;
- побудувати та дослідити квазіспектральні та біортогональні поліноми з метою розв’язування задач математичної фізики;

- дослідити ефективність біортогональних розкладів при застосуванні до математичного моделювання масопереносу в газопроводах та пористих середовищах, проаналізувати вплив похибок різного типу і гідродинамічних параметрів газу та геометричних параметрів технологічних об'єктів ГТС на кінцевий результат;
- побудовані алгоритми апробувати на реальних даних.

Об'єктом дослідження є процеси руху газу в трубопроводах, фільтрації газу в складних пористих середовищах (пластах підземних сховищ газу), біортогональні та квазіспектральні базисні функції.

Предметом дослідження є математичні моделі масопереносу в технологічних об'єктах ГТС (зокрема трубопроводах і пластах ПСГ) та аналітико-числові методи розв'язування крайових задач з використанням апріорної інформації для оптимізації процесів масопереносу.

Методи досліджень. Рух газу в технологічних об'єктах ГТС в неусталеному неізотермічному режимі описується нелінійними диференціальними рівняннями (або системами диференціальних рівнянь) у частинних похідних із змінними коефіцієнтами. Основними методами, які використовувались для розв'язування побудованих на їх основі крайових задач були числові та метод розділення змінних у базисах ортогональних функцій. У цій роботі шуканий розв'язок знаходиться методом розділення змінних в базисах біортогональних та квазіспектральних поліномів. Для цього згадані базиси спочатку побудовано та досліджено. При цьому використано методи асимптотичних розкладів, функціонального аналізу, математичного аналізу тощо.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі розв'язано завдання наукового характеру в галузі математичного моделювання та обчислювальних методів – створення адаптивних аналітико-чисельних моделей руху газу в трубопроводах, пористих середовищах, які орієнтовані на розв'язання задач оптимального керування процесом і таких на цей час важливих нових задач, які не були актуальними раніше, зокрема, незворотних втрат газу вздовж траси

транспортування, врахування процесу дифузії та оцінки кількості газу, розчиненого у воді, що наявна в пластах підземних сховищ газу при його зберіганні тощо. Побудовано методи розв'язування цих задач на основі спектральних представлень функцій у базисах біортогональних многочленів.

У процесі розв'язування вказаного завдання отримано такі нові результати:

- вперше створено нові аналітично-наближені та наближені методи розв'язування крайових задач газової динаміки в базисі біортогональних поліномів, які орієнтовані на використання апріорної інформації про процес, що аналізується, і достатньо просто враховується у цих методах, досліджено вплив параметрів методів, зокрема, порядку часткової суми, розрядної сітки та похибки обчислення на точність отриманих розв'язків;

- удосконалено адаптивні аналітико-чисельні моделі руху газу в трубопроводах, пористих середовищах з реальними крайовими даними, які базуються на заміряних дискретних даних;

- вперше на елементах базису із модифікованих поліномів Чебишева першого роду запропоновано оператор, на основі якого побудовано квазіортогональні та біортогональні базиси, причому отримані біортогональні поліноми такі, що їх похідні другого порядку виражаються через суму двох доданків, одним із яких є самі ці поліноми з деякими коефіцієнтами, а другий доданок – це похідна першого порядку многочлена Чебишева першого роду з відповідними коефіцієнтами (саме така властивість дає можливість розв'язувати системи рівнянь, які отримуємо при розв'язуванні задач математичної фізики набагато швидше та зменшує накопичення машинної похибки); побудовані квазіспектральні поліноми є похідними першого порядку від біортогональних многочленів, а ця властивість є дуже важливою, коли потрібно знайти похідну першого порядку від функції представленої у вигляді суми ряду через біортогональні поліноми чи знайти інтеграл від функції представленої у вигляді суми ряду через квазіспектральні поліноми, натомість коефіцієнти при цьому залишаються незмінними, а лише змінюються функції

при них, які є відомими, що теж зменшує час обчислення;

– вперше сформульовано пряму та спряжену квазіспектральні задачі для інтегрального та диференціального оператора, побудовано квазіспектральні та біортогональні поліноми та описано алгоритми їх побудови, досліджено їх властивості, знайдено коефіцієнти нев'язки для сформульованих задач; знайдено рекурентні формули для представлення поліномів Чебишева через біортогональні та квазіортогональні функції (при застосуванні знайдених біортогональних многочленів до розв'язування поставлених задач позитивним є те, що параметри, які входять в одержані розв'язки можуть бути обчислені з довільною точністю і знайдені з алгоритму побудови біортогональних функцій, причому для довільного натурального числа n можна побудувати бази даних із значеннями цих параметрів і використовувати їх під час обчислення розв'язку, що теж економить час).

Практичне значення отриманих результатів. У дисертаційній роботі побудовано аналітико-чисельні моделі масопереносу в технологічних об'єктах ГТС, запропоновано методи розв'язування крайових задач, які при цьому виникають. Результати досліджень дали змогу покращити ефективність розрахункових схем газотранспортних мереж стосовно зменшення часу їх числової реалізації, розв'язання нових задач, таких як виявлення незворотних втрат газу в процесі транспортування та сформулювати рекомендації щодо більш ефективної роботи підземних сховищ газу.

Результати дисертаційної роботи дали можливість:

- уточнювати оперативні режимні параметри роботи систем газотранспортних мереж для зменшення енергетичних затрат;
- оптимізувати систему підтримки прийняття рішень процесу експлуатації підземних сховищ газу, адаптувати роботу ПСГ з врахуванням величини розчиненого у пластових водах газу (використано в ДК “Укртрансгаз”);
- для прийняття адекватних управлінських рішень в умовах оперативних змін роботи ГТС побудувати алгоритми уточнення

параметрів поточкорозподілу газу.

Отримані в дисертаційній роботі результати використано при читанні спецкурсів “Задачі обробки цифрової інформації” та “Методи моделювання складних систем” для магістрів та спеціалістів з дисципліни прикладне статистичне моделювання спеціальності 6.08020 – прикладна математика Львівського національного університету імені Івана Франка.

До дисертаційної роботи додано акти про використання результатів роботи у виробництві та в навчальному процесі.

Вірогідність отриманих результатів забезпечується строгістю постановок задач та строгістю їх числового моделювання. Результати теоретичних досліджень апробовано в ході обчислювальних експериментів на модельних задачах і заміряних даних. Теоретично обґрунтовано оцінки точності та збіжності побудованих методів і алгоритмів.

Особистий внесок здобувача. У роботах, опублікованих у співавторстві, автору дисертації належать: дослідження аналітико-числової моделі масопереносу, формулювання відповідної крайової задачі, розробка алгоритму і побудова наближено-аналітичного та наближеного методів для розв’язання сформульованої задачі, побудова алгоритму програмного комплексу, проведення розрахунків та аналіз отриманих результатів [15, 80]; побудова та дослідження аналітико-числової моделі масопереносу у базисі біортогональних многочленів, формулювання відповідної крайової задачі, розробка алгоритму і побудова наближено-аналітичного методу для розв’язання сформульованої задачі, побудова алгоритму програмного комплексу, проведення розрахунків та аналіз отриманих результатів [16, 86, 87]; формулювання задачі, підготовка вхідної інформації, побудова алгоритму розрахунку, проведення розрахунків та аналіз отриманих результатів [68, 81, 89, 90, 94]; побудова та дослідження аналітико-числової моделі масопереносу, формулювання відповідної крайової задачі, розробка алгоритму і побудова наближено-аналітичного та наближеного методів для розв’язання сформульованої задачі, побудова структурної схеми розрахунку режимних параметрів та верифікація отриманих результатів [95]; формулювання

задачі, побудова алгоритму програмного комплексу, проведення розрахунків та аналіз отриманих результатів [97]. В усіх опублікованих у співавторстві працях автору належать активна участь у постановці задач та в аналізі отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень доповідалися на конференціях різного рівня, зокрема: V Всеукраїнській науковій конференції “Нелінійні проблеми аналізу”, присвяченій пам’яті професора Васишина Б.В. (Івано-Франківськ, 2013); XII Міжнародній науково-технічній конференції “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об’єктів” (Кременчук, 2014); Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (Рівне, 2015); XI Міжнародній науковій конференції “Моделювання та інформаційні технології у фізичному вихованні і спорті” (Львів, 2015); IV науковій-технічній конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”, присвяченій пам’яті професора Б.О.Попова (Львів, 2016); XXII Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики АРАМCS – 2016” (Львів, 2016); Міжнародній науково-практичній конференції “Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання” (Івано-Франківськ, 2017).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалась і обговорювалась на семінарах Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, на кафедрі механіки суцільного середовища Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Науково-дослідному інституті транспорту газу ПАТ “Укртрансгаз”, Львівському національному університеті імені Івана Франка, на кафедрі математичного моделювання Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем’янчука.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ

1.1. Математичні моделі процесів масопереносу в основних технологічних об'єктах ГТС та виникаючі проблеми при їх розрахунку

Ряд фізичних процесів описується нелінійними диференціальними рівняннями або системами нелінійних диференціальних рівнянь (звичайних або в частинних похідних) із змінними коефіцієнтами, залежними як від просторово-часових координат, так і шуканого розв'язку (прикладом є коефіцієнт стисливості газу, який залежить від тиску та температури). Так процес руху газу в трубопроводі в нестационарному ізотермічному режимі описується взаємозв'язаною системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних [19, 21-29,34,53,111,128-131]

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2) = -\rho \left(\frac{\chi v |v|}{2D} + g \frac{dh}{dx} \right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad (1.1)$$

$$p = \rho z R T,$$

де ρ , v та p – відповідно, густина, швидкість руху і тиск газу; χ – коефіцієнт гідравлічного опору; T – температура газу; h – глибина залягання труби; g – прискорення вільного падіння; D – діаметр трубопроводу; t – час; x , $x \in [0, l]$ – біжуча координата; l – довжина трубопроводу; z – коефіцієнт стисливості, який характеризує відмінність реального газу від ідеального і визначається на основі побудованих емпіричних залежностей; R – газова стала.

Фільтрація реального газу в неоднорідних пластах підземних сховищ газу в неусталеному ізотермічному режимі зводиться до задачі інтегрування рівняння [35, 66,69,75,79,83-85,88]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kh_{ef}}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{kh_{ef}}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) = 2mh_{ef} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \frac{p}{z} + 2qp_{am} \right), \quad (1.2)$$

де k , m і h_{ef} – коефіцієнти проникності, пористості та ефективна газонасичена товщина середовища, які в загальному випадку, є функціями тиску p і температури газу T ; p – тиск у точці пласту з координатами (x, y) в момент часу t ; μ – коефіцієнт динамічної в'язкості, який залежить від тиску p і температури T ; q – густина відбору газу; p_{am} – атмосферний тиск.

Крайові умови для формулювання відповідних задач математичної фізики будуються в оперативному режимі. Як правило, за початкові умови вибираються усталені процеси руху газу. Для побудови граничних умов використовуються заміряні (стосовно процесу руху газу в трубопроводі), або розраховані на базі газодинамічної ув'язки дані (останнє стосується граничних умов для дослідження газонесних або водоносних пластів).

Моделюванню процесу руху газу в різних об'єктах ГТС присвячена значна кількість як вітчизняних, так і зарубіжних авторів. Серед відомих робіт слід відзначити роботи І.А.Чарного [128, 129], С.А.Бобровського [28, 29], А.В.Александрова [21], А.П.Силаша [114], Б.И.Сиперштейна [115], С.А.Сарданашвили [111], В.Е.Селезнева [112], А.З.Миркина [71], А.С.Трофимова [123,124], И.М.Федоткина [125], J.Kralik [10], A.L.Lee [11], W.R.True [17], Э.Л.Вольского [32], Н.Н.Новицкого [76-78] та багатьох інших. В Україні моделюванням роботи ГТС займалися такі вчені: М.А.Жідкова [47, 48], Я.В.Грудз, В.Я.Грудз, Д.Ф.Тимків [53], А.Д.Тевяшев [117, 118], Я.Д.П'янило, М.Г.Притула, Н.М.Притула [79-85, 88, 91-93], А.Н.Крайко [58], В.Гавриленко [33], Ф.В.Дацюк [37-39], М.П.Химко [126,127] та інші. Згаданим вище авторам належать і методи розв'язування рівнянь газової динаміки.

Очевидно, що крайові задачі газової динаміки є частковим випадком загальної теорії крайових задач математичної фізики. Методи, які там використовуються можна використати і для вирішення задач газової динаміки. Методи розв'язування задач математичної фізики в різних областях науки

розглянуто в роботах В.І.Крилова [59], О.Н.Кочуєва [57], М.Н.Кулика [60], К.В.Логінова [64], В.Павленка [106], М.М.Пелеха [107], Н.Б.Лопуха, Я.Д.П'янила, М.Г.Притули, Н.М.Притули [65, 66, 96, 97, 100-105, 108, 110], Л.М.Журавчак [49, 50, 51], О.С.Лимарченка [12, 13], Ф.Г.Темпеля [119, 120], І.А.Чарного [128, 129], А. Walter [18], Ф.П.Васильєва [31] та інших.

Слід зауважити, що значна кількість прикладних задач математичної фізики розглядається у канонічних просторових областях, а крайові умови задаються в аналітичному вигляді. В той час як природні пористі середовища, зокрема, пласти підземних сховищ газу, мають великі просторові розміри і неканонічну форму, а крайові умови відомі в дискретних нееквідистантних точках з невеликою точністю. Аналітичний розв'язок таких задач математичної фізики, поставлених на цій основі, можна отримати тільки в окремих часткових випадках і в тому випадку, коли вхідні дискретні дані достатньо добре апроксимуються деякими аналітичними виразами. Тому для побудови їх розв'язків використовують певні наближення, які повинні бути узгоджені з вибраними модельними положеннями.

Відзначимо деякі з проблем, які виникають при розв'язанні практичних задач газової динаміки:

- вхідні дані відомі тільки в нееквідистантних точках (зокрема задачі масопереносу та фільтрації газу в підземних сховищах) з невисокою точністю;
- для адаптації математичних моделей до реальних фізичних процесів необхідно розв'язувати різного роду обернені задачі, а для цього необхідно мати певну апріорну інформацію;
- забезпечення кінцевого результату з необхідною точністю та за вказаний час, що необхідно для прийняття керівних рішень;
- нарешті, задачі такого типу розв'язуються в умовах значної невизначеності, що вимагає побудови достатньо точних та стійких методів.

1.2. Аналіз методів розв'язування задач математичної фізики

У зв'язку зі зростаючою потребою в розв'язанні багатьох практичних задач математичної фізики, механіки і ряду інших дисциплін природознавства інтенсивний розвиток набули дослідження в галузі наближених методів. Значний внесок у побудову і обґрунтування нових методів зробили багато відомих вчених, серед яких варто виділити В.Рітца, Б.Г.Гальоркіна, І.Г.Бубнова, М.М.Крилова, М.М.Боголюбова, М.Ф.Кравчука. Важливий етап у розвитку наближених методів бере початок із того часу, коли розрізнені методи стали вивчатися з єдиної точки зору. Прагнення до знаходження найкращого алгоритму для конкретної задачі призвело до систематизації пропонованих методів. Підвалини для побудови ієрархічної системи алгоритмів були закладені Л.В.Канторовичем у рамках створеної ним загальної теорії наближених методів для розв'язання операторних рівнянь. Згідно з цією теорією одним з основних критеріїв оцінки ефективності наближених методів вважається швидкість збіжності апроксимацій до шуканого розв'язку. Звідси цілком природно виникає питання про побудову оптимальних методів. Проблемами оптимізації методів розв'язання операторних рівнянь у різний час активно займалися М.О.Красносельський, М.С.Бахвалов, К.І.Бабенко, С.Г.Міхлін, В.В.Іванов, Г.М.Вайнікко, В.Л.Макаров, В.К.Задірака, В.В.Хлобистов, А.Ю.Лучка, Б.Г.Габдулхаєв, С.В.Переверзев і багато інших. Найбільш повна інформація про ці дослідження міститься в монографіях останніх двох названих авторів.

Отримані П.Л.Чебишевим результати стали основою теорії найкращого наближення функцій, вони були продовжені, розвинені і доповнені видатними ученими: Є.І.Золотарьовим, А.Н.Коркіним, А.А.Марковим, В.А.Марковим, К.А.Поссе, Н.Я.Соніним, Ю.Сохоцкім, Е.Борелем, К.Вейерштрассом, Ш.Валле-Пуссеном, Д.Джексоном і особливо С.Н.Бернштейном, який на базі чебишевських ідей розвинув новий напрямок – конструктивну теорію функцій. Значний внесок у неї внесли радянські математики В.І.Смірнов, А.Н.Колмогоров, М.В.Келдиш, Л.А.Лаврентьєв, С.М.Нікольський. Многочлени Чебишева

найменш відхиляються від нуля, зайняли виняткове становище в математиці останніх десятиліть як найважливіший засіб теоретичних і практичних досліджень.

З часів одного з найвидатніших досягнень людського генія – створення в XVII ст. І.Ньютоном і Г.Лейбніцем математичного аналізу – основним засобом представлення та обчислення функцій були степеневі ряди. Вони широко використовувалися при диференціюванні та інтегруванні функцій, а метод невизначених коефіцієнтів Р.Декарта дозволив розв'язувати з їх допомогою рівняння, в тому числі диференціальні.

Надалі Д.Бернуллі, Л.Ейлером, П.Лапласом, А.Лежандром, Ж.Фур'є, Н.І.Лобачевським, П.Діріхле, М.В.Остроградським, Г.Ламі, Ш.Ермітом, Е.Лагерром, У.Діні, Е.Шмідтом, Д.Гільбертом, А.М.Ляпуновим, В.А.Стекловим, А.Зігмундом, Г.Сеге і багатьма іншими знаменитими математиками було встановлено, що цінним способом подання та обчислення функцій є їх розклади в тригонометричні ряди і ряди по різних системах ортогональних многочленів і взагалі ортогональних функцій. У двадцятих-тридцятих роках минулого століття з'ясувалося, що серед усіх різноманітних розкладів особливе становище займають розклади функцій у ряди по многочленах Чебишева першого роду, які найменш відхиляються від нуля на відрізьку $[-1,1]$, забезпечують зазвичай більш швидку збіжність розкладів функцій у ряд по многочленах Чебишева порівняно з їх розкладами в степеневі ряди або в ряди по інших спеціальних многочленах або функціях.

У зв'язку з зазначеними властивостями розкладів функцій в ряди по многочленах Чебишева стали перетворювати часткові суми відповідних розкладів степеневих рядів в лінійні комбінації многочленів Чебишева. Це дозволило або обчислювати значення функцій при заданій точності по меншому числу доданків або підвищувати точність обчислень. Такі прийоми, запропоновані К.Ланцошем, були особливо популярні в перші роки після появи електронних обчислювальних машин. Природно виникла думка відразу отримувати безпосередньо розклади в ряди Чебишева функцій, як явно

визначених, так і таких, що є розв'язками тих чи інших, в тому числі диференціальних рівнянь.

При узагальненні класичних ортогональних многочленів на випадки двох і більше змінних виникає необхідність розглядати так звані біортогональні системи многочленів.

У 1865 р. Ш. Ерміт розглянув дві пари біортогональних систем многочленів за двома змінним, коли областями ортогональності являються вся площина або одиничне коло. Пізніше ці многочлени Ерміта були узагальнені на випадок багатьох змінних.

У 1881 р. П. Аппель ввів многочлени за двома змінними, біортогональні по трикутнику.

Многочлени Ерміта і Аппеля являються аналогами і узагальненнями класичних ортогональних многочленів на випадок двох і більше змінних, оскільки ці многочлени є власними функціями деяких лінійних диференціальних операторів в частинних похідних другого порядку.

У 1881 р. Г. Орлов розглянув деякі ортогональні поліноми за двома змінними, які визначаються аналогом формул Родріга.

У 1938 р. Д. Джексон розглянув найпростіші властивості многочленів двох змінних, ортогональних по області з довільною вагою. При цьому виявилось, що вагова функція і область ортогональності при кожному натуральному n визначають деякий простір розмірності $n + 1$ ортогональних многочленів степеня n .

У 1967 р. вийшла змістовна робота Г. Кролла і І. Шеффера, в якій були посилені і узагальнені результати Д. Джексона многочленів двох змінних, ортогональних по області. Крім того, розглянуті деякі лінійні диференціальні оператори в частинних похідних другого порядку, власними функціями яких є ортогональні по області многочлени.

Аналогічні результати отримав Г. К. Енгеліс, але він застосував інший метод дослідження і привів більш детальний перелік лінійних диференціальних

рівнянь в частинних похідних другого порядку, розв'язками яких є ортогональні поліноми двох змінних.

Істотні результати з теорії ортогональних многочленів двох змінних отримані в роботах Т. Корнвіндера, в яких розглядаються нові системи ортогональних многочленів, встановлюються нові властивості відомих систем ортогональних многочленів, велика увага приділяється зв'язку ортогональних многочленів з диференціальними рівняннями.

Спектральний метод розв'язування задач зводиться до обчислення коефіцієнтів ортогональних рядів [1, 2, 7-9], в яких подається шуканий розв'язок, і вся проблема полягає в побудові алгоритмів для обчислення коефіцієнтів цих рядів (узагальнених спектрів).

Спектральні методи розв'язування задач розвинуті в роботах Г.Сеге, С.Качмажа, П.К.Суетіна, Г.Штейгауза й інших, будуються та досліджуються ортогональні на різних проміжках многочлени та показано елементи їх застосування для розв'язання практичних задач. Відзначимо, що найбільш широко спектральні методи застосовуються в обробленні цифрової інформації. До робіт такого сорту слід віднести роботи Кулі-Тюкі, Ч.Рейдера, Б.Голда, В.В.Солодовнікова, М.Д.Єгупова, В.К.Задираки та їх учнів.

Існує ряд робіт, в яких проведено детальний аналіз застосування класичних ортогональних базисів, зокрема Фур'є, Хаара та Уолша, за різними критеріями. Основний висновок, який було зроблено – проаналізовані базиси часто задовольняють не всі критерії, які ставляться до розв'язків сформульованих задач. Це привело до того, що почали розвиватися спектральні методи в інших ортогональних базисах – Якобі, Чебишева, Лагерра, Ерміта тощо.

Розвиток сучасної обчислювальної техніки, системи сучасних технічних засобів збору, обробки та передачі даних, а також використання сучасних підходів до моделювання складних процесів дає можливість в оперативному режимі приймати і реалізовувати обґрунтовані управлінські рішення. Формулюванню та втіленню комплексу оптимізаційних задач присвячені роботи І.В.Сергієнка [113], П.Н.Дейнеки [40], И.И.Ляшка [67], А.Г.Євдокимова

[45], А.В.Єгорова [46], В.В.Скопецького, В.В.Дубровського, А.Д.Тевяшева, Б.Л.Кучика [61], М.Н.Кулика [60], Б.Л.Кучина [62], Ю.І.Максимова [70], В.А.Диткина [43,44], С.К.Митичкина [72], И.Н.Молчанова [73], М.И.Нечепуренка [74], В.С.Панкратова [98], И.Г.Тетерева [121] та інших.

Висновки до розділу

У першому розділі відзначено актуальність дисертаційної роботи, зроблено огляд літератури за темою дисертації, окреслено її місце у розв'язанні науково-прикладних задач газової динаміки в газотранспортних мережах. Показана необхідність побудови уточнених аналітико-числових адаптивних математичних моделей процесів масопереносу та формулювання відповідних крайових задач математичної фізики, а також застосування спектральних методів до розв'язування цих задач.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ. АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В БАЗИСІ БІОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

2.1. Математичні моделі процесів масопереносу та вимоги до них

Математичні моделі дають можливість досліджувати процеси різного роду не вдаючись до натурних експериментів. Очевидно, що кожна математична модель може розв'язати певний клас задач за заданих вхідних даних та за умови виконання технологічних або інших обмежень. Із зростанням вимог до вивчення фізичних процесів зростають вимоги і до відповідних математичних моделей. Все це відноситься і до моделювання масопереносу в технологічних процесах складних газотранспортних систем.

В літературі відома значна кількість математичних моделей процесу руху газу в трубопроводах різного ступеню точності та адекватності. Значно менше відомо моделей, на базі яких побудовані практично використовувані програмні комплекси розв'язання практичних задач. Як правило, при моделюванні розв'язувались прогнозовані або балансові задачі. Значно менше приділено увазі побудові математичних моделей з метою керування процесом транспорту газу.

У зв'язку із зростанням вартості енергетичних ресурсів, значної зношеності технологічних об'єктів ГТС виникає необхідність у розв'язанні нових задач, які були неактуальними раніше. Це стосується, зокрема, незворотних втрат газу вздовж траси транспортування, врахування процесу дифузії та розчинності газу в пластах підземних сховищ при його зберіганні тощо.

Очевидно, що врахування такого роду процесів вимагає значного уточнення та додаткової адаптації відповідних математичних моделей. У свою чергу, уточнення математичних моделей вимагає уточнення існуючих або

побудову нових методів розв'язання сформульованих відповідних задач математичної фізики. Відзначимо деякі з додаткових вимог.

1. Очевидно, що розв'язання крайових задач базується на заміряних дискретних даних. У зв'язку з пониженням тиску в ГТС змінюються і вхідні дані (зокрема, зменшується різниця між сусідніми замірами). З проведених досліджень відомо, що основною похибкою при розв'язуванні задач такого типу є похибка у вхідних даних. Використання числових методів (зокрема різницевих) пов'язане дискретизацією і втратою значних цифр, що приводить до збільшення похибки в кінцевих результатах. У зв'язку з цим необхідно вдосконалювати методи розв'язування крайових задач.

2. Аналіз даних замірів параметрів процесу руху газу показує, що є наявними значні незворотні втрати вздовж траси. Тому виникає задача виявлення величини витоків газу та їх місце знаходження. Кореляційний аналіз між величинами витоків газу, вхідними даними та величинами об'ємів транспортування показує, що використовувані методи не дозволяють розв'язання цієї задачі.

3. Особливе місце при транспортуванні газу, особливо в зимовий період, мають підземні сховища газу. Відомо, що в пластах майже кожного ПСГ є наявною вода. Оскільки в пластах ПСГ тиски є значними, то певна кількість газу дифундує та розчиняється у воді. До цього часу цей процес не досліджувався. Однак виникає задача оцінки величини об'ємів розчиненого та дифундованого газу. Очевидно, що при розв'язуванні цієї задачі не можуть бути використані заміряні дані, так як їх отримати нереально. Тому вони визначаються опосередковано, через інші заміряні дані, з невисокою точністю. Далі, в процесах відбирання або закачування газу тиск змінюється в незначних межах (порядку декількох десятих атмосфери за добу). Вище сказане вказує на необхідність достатньо точних методів розв'язування задач такого типу.

Відзначимо, що основним способом розв'язування задач математичної фізики є застосування числових методів в ітераційному процесі. При цьому на різних етапах застосовується процедура лінеаризації. Для розв'язання згаданих

вище задач необхідно застосовувати аналітичні або асимптотичні методи. Найбільш вживаними є застосування методів розділення змінних або інтегральних перетворень. Однак вони є некоректними за Тихоновим. Застосування асимптотичних методів вимагає, по-перше, вибір малого параметру, і, по-друге, складністю знаходження асимптотичного розкладу.

Одним із підходів до вирішення згаданих проблем є застосування методу розділення змінних у базисі біортогональних функцій. Нагадаємо, що однією з позитивних сторін цього методу є те, що якщо ряд по одній системі функцій є повільно збіжний, то по іншій – швидкозбіжний.

Біортогональну систему функцій будемо будувати на базі многочленів Чебишева. Вони є ортогональними на проміжку $[-1,1]$. На цьому ж проміжку будемо будувати і біортогональні системи функцій. Технологічні об'єкти ГТС мають довільні скінченні розміри в просторових координатах. У зв'язку з цим відповідні задачі математичної фізики, які описують процес масопереносу, необхідно звести до проміжку біортогональності лінійною заміною. Як відомо, лінійна заміна координат не змінює типу рівнянь.

2.2. Модель 2.1. Модель процесу руху газу в трубопроводі

Враховуючи рівняння стану в ізотермічному випадку математична модель руху газу в трубопроводі є система взаємопов'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\begin{cases} \frac{\partial p(y,t)}{\partial y} + \alpha_k \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2(y,t)}{2} \right) + \rho g \frac{\partial h(y,t)}{\partial y} + \frac{\chi \rho v^2(y,t)}{2D} + \frac{\partial(\rho v(y,t))}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v(y,t))}{\partial y} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p(y,t)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

де $\omega = \rho v$ - масова витрата (швидкість) газу; c - швидкість звуку в газі; α_k - коефіцієнт Коріоліса, який відповідає за характер руху газу (турбулентний чи ламінарний).

На практиці граничні умови формулюються на входах та виходах компресорних станцій. Значення їх відомі в дискретних точках. Очевидно, що для застосування аналітичних методів розв'язування крайових задач граничні умови необхідно мати в аналітичному вигляді. В праці [109] розроблені методи апроксимації функцій, заданих дискретними значеннями, за допомогою спектрального подання їх рядами за многочленами Якобі:

$$\varphi_n = \int_{-1}^1 \varpi^{(\alpha,\beta)}(x) \varphi(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx, \quad (2.2)$$

де $\varpi^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ - вагова функція для многочленів Якобі.

Якщо вхідні значення задаються в дискретній формі, тобто відомі значення $\varphi(x_j)$, $j = \overline{1, N}$, то для знаходження узагальнених спектрів можна використати квадратурні формули для обчислення інтегралів (2.2), метод найменших квадратів або ж інші способи. В деяких випадках у залежності від вхідної інформації можна вказати оптимальні в класі L_2 формули для обчислення узагальнених спектрів.

Нехай многочлени $u_n(x)$ ортогональні на проміжку $[a, b]$ з ваговою функцією і функція $\varphi(x)$ представляється ортогональним рядом за даними многочленами

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} u_n(x). \quad (2.3)$$

Тут $r_n = \int_a^b \varpi^{(\alpha,\beta)}(x) u_n^2(x) dx$ нормуючий множник. Відомо [109], що $(N+1)$ -й ортогональний многочлен має $N+1$ дійсний корінь, який належить до проміжку ортогональності. Тоді для обчислення узагальнених спектрів φ_n має місце оптимальна в L_2 квадратурна формула

$$\varphi_n \approx \sum_{j=0}^N \rho_j^2 u_n(x_j) \varphi(x_j), \quad (2.4)$$

де x_j , $j = \overline{1, N+1}$, - корені многочлена $u_{N+1}(x)$, тобто $u_{N+1}(x_j) = 0$,

$\rho_j^{-2} = \sum_{i=0}^N u_i^2(x_j)$. Для многочленів Якобі $u_n(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, формули (2.3) та

(2.4) будуть такими

$$\varphi(x) = \overline{\omega}^{(\alpha, \beta)}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (2.5)$$

$$\varphi_n \square W_N \sum_{i=1}^{N+1} \eta_{N,i} P_n^{(\alpha, \beta)}(x_i), \quad P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(x_i) = 0, \quad (2.6)$$

де позначено:

$$\eta_{N,i} = \frac{(1-x_i)^{1-\alpha} (1+x_i)^{1-\beta}}{\left[P_n^{(\alpha, \beta)}(x_i) \right]^2} \varphi(x_i),$$

$$W_N = 2^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(N+\alpha+2)\Gamma(N+\beta+2)}{(N+1)!\Gamma(N+\alpha+\beta+2)} \frac{(2N+\alpha+\beta+2)^2}{(N+\alpha+1)^2(N+\beta+1)^2},$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, N+1},$$

$$r_n = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}{N!(2N+\alpha+\beta+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}. \quad (2.7)$$

Такий підхід до апроксимації граничних умов ефективний тоді, коли в методі розділення змінних використовується базис многочленів Якобі.

Іншим шляхом побудови граничних умов є статистично-ймовірностне оброблення замірених даних і побудова ліній тренду з використанням елементарних функцій.

Як звичайно, вихідним станом на початку нестационарного процесу є стаціонарний розподіл тиску. Тому задача математичної фізики в цьому випадку полягає в наступному.

Формулювання крайової задачі. Знайти розв'язок системи (2.1) за початкового стаціонарного розподілу тиску

$$p(y, 0) = \sqrt{p_0^2 - \frac{\chi z R T}{D} \left(\frac{\rho_s q_s}{s_0} \right)^2} y \quad (2.8)$$

та граничних умов на об'ємні витрати газу

$$q_0(t) = q_{0n} + (q_0 - q_{0n})e^{-\gamma_0 t}, \quad (2.9)$$

$$q_l(t) = q_{ln} + (q_l - q_{ln})e^{-\gamma_l t}, \quad (2.10)$$

відповідно, на вході та виході трубопроводу. Параметри, що входять в рівності (2.9) та (2.10) обчислюються на основі заміряних даних відомими методами, зокрема методом найменших квадратів. Зауважимо, що такі залежності для граничних умов з достатньою для практики точністю описують заміряні дані.

У цьому випадку p_0 - значення тиску на початку трубопроводу; ρ_s , q_s - значення густини та об'ємної витрати за стандартних умов, $s_0 = \pi D^2/4$; q_0 , q_{0n} - об'ємної витрати газу у вихідному та новому стаціонарному стані течії газу і параметр γ_0 , який характеризує швидкість переходу з одного стану в інший на початку трубопроводу; q_l , q_{ln} , γ_l - аналогічні параметри в кінці трубопроводу. У разі переходу до масових швидкостей граничні умови такі:

$$\omega_0 = \omega(0, t) = \frac{\rho_s}{s_0} q_0(t), \quad \omega_L = \omega(L, t) = \frac{\rho_s}{s_0} q_l(t). \quad (2.11)$$

Є декілька способів лінеаризації, які дають змогу розв'язати сформульовану задачу і побудувати ітераційний процес розв'язку системи (2.1).

Криву $f(v) = v^2$ замінимо хордою і дотичною. Оскільки під час транспортування газу швидкість змінюється від v_1 до v_2 , то рівняння хорди й дотичної, що проходять через точки $(v_1, f(v_1))$, $(v_2, f(v_2))$, мають вигляд $\varphi_i(v) = a_{0i}v - b_{0i}$, де $i = 1$ відповідає хорді, а $i = 2$ - дотичній. У цьому випадку $a_{01} = a_{02} = v_1 + v_2$, $b_{01} = v_1 v_2$ та $b_{02} = 0,5(v_1 + v_2)^2$.

Для обчислення коефіцієнта стисливості z , який описує відмінність від реального газу від ідеального, застосовують емпіричну формулу

$$z = \frac{1}{1 + fp}, \quad (2.12)$$

де p вимірюють в атмосфера, а $f = (24 - 0.21t^{\circ}C) \cdot 10^{-4}$, $t^{\circ}C$ - температура газу за Цельсієм; R - газова стала. Аналогічно лінеаризують і залежність за тиском на підставі формули (2.12). Тому якщо ввести позначення

$$a_p = p_1(1 + fp_1) - b_p p_1, \quad d_0 = 1 - \alpha_k v_c^2 \rho_0 T_0 b_p / (p_0 T), \quad d_1 = \alpha_k v_c, \quad a_v = v_1 + v_2,$$

$$b_v = -v_1 v_2 - \frac{1}{8}(v_2 - v_1)^2, \quad d_2 = \alpha_k b_v / (2D), \quad d_3 = \frac{\rho_0 T_0}{p_0 T} b_p \left(g \frac{\delta h}{\delta x} + \frac{\lambda a_v}{2D} \right),$$

$$d_4 = \frac{\rho_0 T_0}{p_0 T} a_p \left(g \frac{\delta h}{\delta x} + \frac{\lambda a_v}{2D} \right),$$

$p \in [p_1, p_2]$, де p_1 та p_2 - межі зміни тиску, v_c - середня швидкість руху газу в трубопроводі, які приймають відомими, то вихідну систему можна записати у вигляді

$$\begin{cases} d_0 \frac{\partial p(y,t)}{\partial y} + d_1 \frac{\partial \omega(y,t)}{\partial y} + \frac{\partial \omega(y,t)}{\partial t} + d_2 \omega(y,t) + d_3 p(y,t) = -d_4, \\ \frac{\partial \omega(y,t)}{\partial y} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p(y,t)}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Іншим способом лінеаризації є наступний. Будемо вважати відомим значення швидкості в початковий момент часу v_0 . Тоді запишемо наближено рівність $v^2 \approx v_0 v$ і використаємо її в процесі розв'язування першого кроку сформульованої задачі. На другому кроці замість v_0 використовуємо знайдену швидкість на першому кроці v_1 . Ітерації проводяться до цього часу, поки різниця між двома сусідніми значеннями шуканої функції буде меншою за задану величину. На практиці такий підхід для досягнення практичної точності вимагає проведення до п'яти ітерацій.

2.3. Модель 2.2. Знаходження розподілу тиску у воді

Як було сказано вище, останнім часом виникає задача оцінки кількості газу, який може міститися у воді, яка є наявною в пластах підземних сховищ. На практиці, як правило, розрізняють два випадки наявності води в пласті: підшовну, яка міститься в основному під пластом ПСГ, та законтурну, при

якому вважається, що пласт обмежений водою збоків. При цьому тиск на зовнішньому контурі води підтримується перепадом тиску водяного стовпа. Для визначення об'єму газу, наявного у воді, необхідно знати розподіл тиску в ній. У залежності від цього тиску залежить кількість розчиненого та дифундованого газу. При цьому розподіл тиску потрібно знати досить точно і мати можливість розраховувати невеликі його зміни.

Сформулюємо задачу визначення розподілу тиску у підшовній воді, моделюючи її плоским шаром певної товщини.

Розрахунок розподілу тиску води $p(y,t)$ у плоскому безмежному середовищі товщини l визначається як розв'язок одновимірного рівняння фільтрації

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{kh_{ef}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \right) \right] = 2\alpha_g m h_{ef} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.14)$$

де k — проникність пласту, μ — динамічна в'язкість води, α_g — коефіцієнт водонасиченості, m — пористість пласту. Оскільки товщина пласту є незначною і вважається сталою. Тому перепад тиску за вздовж товщини є незначним і ним можемо знехтувати. Тоді рівняння (2.14) матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 2\alpha_g m \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Крайовими умовами будемо вважати наступні: на нижній границі шару тиск можна вважати сталим, рівним гідростатичному p_n ; на верхній границі значення тиску розраховується на основі гідравлічної ув'язки ГЗП — вибійна зона — ГВК і також вважається сталим p_v .

Початковий розподіл тиску води у водяному шарі

$$p(y,0) = \rho g (h_0 + y), \quad 0 < y < l.$$

Тут h_0 - висота стовпа води, який підтримує тиск у підшовній воді.

Розв'язок поставленої задачі є частковим випадком розв'язку більш загальної задачі.

Розглядається безмежний шар товщини l , $0 < y < l$. Значення тисків на границях рівні $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$. Початковий тиск $f(y)$.

У цьому випадку задача полягає у такому: знайти розв'язок рівняння

$$\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (0 < y < l) \quad (2.15)$$

за початкової умови

$$p(y, 0) = f(y), \quad (2.16)$$

та граничних умов

$$p(0, t) = \varphi_1(t), \quad p(l, t) = \varphi_2(t). \quad (2.17)$$

Тут $\kappa = k / (2\mu\alpha_g m)$.

Оскільки розглядається безмежний шар товщини l , $0 < y < l$, а функції, за допомогою яких ми будемо розв'язувати дану задачу визначаються на проміжку $[-1, 1]$, то зробимо заміну

$$y = \frac{l(x+1)}{2}, \quad p(y, t) = p\left(\frac{l(x+1)}{2}, t\right) = P(x, t), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 p(y, t)}{\partial y^2} = \frac{4}{l^2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}.$$

Враховуючи (2.18), рівняння (2.15) та умови (2.16), (2.17) запишемо у вигляді

$$\kappa \frac{4}{l^2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \quad (2.19)$$

$$P(x, 0) = \rho g \left(h_0 + \frac{l(x+1)}{2} \right), \quad (2.20)$$

$$P(-1, t) = \varphi_1, \quad P(1, t) = \varphi_2. \quad (2.21)$$

Розв'язки задач шукаються методом розділення змінних в базисі біортогональних многочленів, побудованих та досліджених у наступному розділі.

Розв'язки сформульованих задач знаходяться у вигляді ряду

$$P(x, t) = e^{\beta_\kappa x} \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+i} (x) G_i(t), \quad (2.22)$$

де β_k - невідомий коефіцієнт, $V_i^{n+i}(x)$ - побудовані базисні біортогональні функції, для яких справедливі певні співвідношення, а $G_i(t)$ - шукана функція, для визначення якої будуються звичайні диференціальні рівняння в залежності від вихідної задачі.

2.4. Загальна схема вирішення крайових задач в базисі біортогональних многочленів

2.4.1. Наближено-аналітична модель

1. Задачу математичної фізики, яка описує процес масопереносу, необхідно звести до проміжку біортогональності $[-1, 1]$ лінійною заміною.
2. Якщо математична модель є система взаємопов'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних, то зводимо її до диференціального рівняння в частинних похідних, виражаючи одну невідому функцію через іншу.
3. Невідому функцію, що входить у рівняння, шукаємо у вигляді добутку $W(x, t) = V(x)e^{\beta_k x}G(t)$, де невідомий коефіцієнт β_k такий, щоб множник при $V'_x(x)$ перетворювався в нуль якщо такий існує, якщо ні, то $\beta_k = 0$.
4. Підставляємо в рівняння знайдений невідомий коефіцієнт, ліву і праву частину отриманого таким чином рівняння домножимо на $e^{-\beta_k x}$.
5. В рівняння, яке отримали згідно п.4, замість добутку $V(x)G(t)$ підставимо суму $\sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+i}(x)G_i(t)$, де $V_i^{n+i}(x)$ - побудовані базисні біортогональні функції, а $G_i(t)$ - шукані функції.
6. З граничних умов, враховуючи, що $V_i(-1) = V_i(1) = 0$, знаходимо невідомі функції $G_{n+2}(t)$ та $G_{n+1}(t)$.
7. Ліву та праву частини, отриманого рівняння згідно з п.5, домножимо на $\frac{\bar{V}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $i = 1, \dots, n$ та зінтегруємо по x в межах від -1 до 1 . Враховуючи

знайдені функції з п.6, отримаємо систему з n неоднорідних лінійних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами.

8. Розв'язуючи систему, отриману в п.7, дістаємо шукані функції $G_i(t)$, $i = 1, \dots, n$. Отже, знаходимо розв'язок $W(x, t) = V(x)e^{\beta_\kappa x}G(t)$ для п.3.
9. Знаходимо іншу невідому функцію, яку виражали через уже знайдену функцію $W(x, t)$ у п.2 та знаходимо другий розв'язок системи.
10. В отриманих у п.8 та п.9 розв'язках за допомогою лінійної заміни перейдемо від проміжку біортогональності $[-1, 1]$ до проміжку розв'язання задачі.

2.4.2. Наближена модель

1. Задачу математичної фізики, яка описує процес масопереносу, необхідно звести до проміжку біортогональності $[-1, 1]$ лінійною заміною.
2. Якщо математична модель є система взаємопов'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних, то зводимо її до диференціального рівняння в частинних похідних, виражаючи одну невідому функцію через іншу.
3. Невідому функцію, що входить у рівняння, шукаємо у вигляді добутку $W(x, t) = V(x)e^{\beta_\kappa x}G(t)$, де невідомий коефіцієнт β_κ такий, щоб множник при $V'_x(x)$ перетворювався в нуль якщо такий існує, якщо ні, то $\beta_\kappa = 0$.
4. Підставляємо в рівняння знайдений невідомий коефіцієнт, ліву і праву частину отриманого таким чином рівняння домножимо на $e^{-\beta_\kappa x}$.
5. В рівняння, яке отримали згідно п.4, замість добутку $V(x)G(t)$ підставимо суму $\sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+i}(x) \sum_{j=0}^{\infty} q_{ij} L_j(t)$, де $V_i^{n+i}(x)$ - побудовані базисні біортогональні функції, $L_j(t)$ - многочлени Лагерра, q_{ij} - невідомі коефіцієнти.

6. З граничних умов, враховуючи, що $V_i(-1) = V_i(1) = 0$, знаходимо рівняння, ліві та праві частини яких домножимо на $e^{-t}L_j(t)$ та зінтегруємо по t в межах від 0 до ∞ . Отже, знайдемо невідомі коефіцієнти $q_{n+1,j}, q_{n+2,j}, j = 1, \dots, s$.
7. Ліву та праву частини, отриманого рівняння згідно з п.5, домножимо на $\frac{\bar{V}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} e^{-t}L_j(t), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, s$ та зінтегруємо по t в межах від 0 до ∞ , та по x в межах від -1 до 1 . Отримаємо $i = n$ систем, кожна з яких містить $j = s$ рівнянь та $j = s$ невідомих, з яких знайдемо решту невідомих коефіцієнтів $q_{i,j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, s$.
8. Розв'язуючи системи, отримані в п.7, дістаємо решту невідомих коефіцієнтів $q_{i,j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, s$. Отже, знаходимо розв'язок $W(x,t) = V(x)e^{\beta_\kappa x}G(t)$ для п.3.
9. Знаходимо іншу невідому функцію, яку виражали через уже знайдену функцію $W(x,t)$ у п.2 та знаходимо другий розв'язок системи.
10. В отриманих у п.8 та п.9 розв'язках за допомогою лінійної заміни перейдемо від проміжку біортогональності $[-1, 1]$ до проміжку розв'язання задачі.

Висновки до розділу

Другий розділ присвячено постановці математичних моделей процесів масопереносу та формулюванню основних вимог до них. Обґрунтовано необхідність при розв'язуванні задач математичної фізики застосування методу розділення змінних в базисі біортогональних функцій. Для наближено-аналітичної та наближеної моделей описано загальні схеми розв'язування крайових задач у базисі біортогональних многочленів.

РОЗДІЛ 3

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ КВАЗІСПЕКТРАЛЬНИХ І БІОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ НА БАЗІ МНОГОЧЛЕНІВ ЧЕБИШЕВА

3.1. Оператор проектування

Розглядаємо оператор інтегрування $L: L_{2,\varpi}[-1,1] \rightarrow L_{2,\varpi}[-1,1]$ з ваговою функцією $\varpi(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, який для $f(x) \in L_{2,\varpi}[-1,1]$ ставить у відповідність вираз

$$Lf(x) = \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} f(x_2) dx_2 = \int_{-1}^x (x-x_1) f(x_1) dx_1. \quad (3.1)$$

Відомо [52], що вираз (3.1) не має відмінних від нуля власних значень. Отже, відповідна задача про побудову власних функцій для цього оператора позбавлена сенсу. Тому, замість спектральної задачі на власні значення розглянемо відповідну квазіспектральну задачу, ґрунтуючись на властивостях інтегрального оператора (3.1) в гільбертовому просторі $L_{2,\varpi}[-1,1]$.

У просторі $L_{2,\varpi}[-1,1]$ існує поліноміальний базис, який утворюють поліноми Чебишева, а саме, кожену функцію $f = f(x) \in L_{2,\varpi}[-1,1]$ цього простору можна розвинути в ряд Фур'є-Чебишева

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k T_k, \quad T_k = T_k(x), \quad (3.2)$$

де

$$f_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad f_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (3.3)$$

причому

$$\|f\|_{\varpi}^2 = \int_{-1}^1 \varpi(x) f^2(x) dx < +\infty.$$

На елементах базису із поліномів Чебишева оператор інтегрування (3.1) приймає значення [90, 99]

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} T_k(x_2) dx_2 = \frac{T_{k+2}(x)}{4(k+1)(k+2)} - \frac{T_k(x)}{2(k-1)(k+1)} + \frac{T_{k-2}(x)}{4(k-1)(k-2)} + \frac{(-1)^{k+1} T_1(x)}{(k-1)(k+1)} + \frac{(-1)^{k+1}}{(k-2)(k+2)}, \quad k=3,4,\dots, \quad (3.4)$$

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} T_0(x_2) dx_2 = \frac{T_2(x)}{4} + T_1(x) + \frac{3}{4}, \quad (3.5)$$

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} T_1(x_2) dx_2 = \frac{T_3(x)}{24} - \frac{3T_1(x)}{8} - \frac{1}{3},$$

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} T_2(x_2) dx_2 = \frac{T_4(x)}{48} - \frac{T_2(x)}{6} - \frac{T_1(x)}{3} - \frac{3}{16}.$$

Побудуємо оператор $\pi_1^\infty L = \pi_1^\infty \int_{-1}^x \int_{-1}^{x_1} : \pi_1^\infty \int_{-1}^x \int_{-1}^{x_1}$, який переводить непарні

поліноми в непарні, а парні – в парні.

Означення 3.1. Нехай $\tilde{L}_{2,1}[-1,1]$ – повний підпростір гільбертового простору $L_{2,\varpi}[-1,1]$, всі елементи якого задовольняють інтегральне рівняння [90]

$$\int_{-1}^1 u(x) dx = 0. \quad (3.6)$$

Через $\pi_x : L_{2,\varpi}[-1,1] \rightarrow \tilde{L}_{2,1}[-1,1]$ позначимо оператор, який визначається формулою

$$\pi_x f = \pi_x(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \tilde{T}_k, \quad (3.7)$$

де f визначається формулою (3.2), $\tilde{T}_k \in \tilde{L}_{2,1}[-1,1]$.

Очевидно, що

$$(\pi_x f)(x) = f(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx. \quad (3.8)$$

Базис підпростору $\tilde{L}_{2,1}[-1,1]$ утворюють поліноми

$$\tilde{T}_{2k}(x) = T_{2k}(x) + \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}, \quad \tilde{T}_{2k-1}(x) = T_{2k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \text{ згідно формули (3.8).}$$

На елементах базису із модифікованих поліномів Чебишева $\tilde{T}_k(x) = \pi_x T_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ у підпросторі $\tilde{L}_{2,1}[-1,1]$ оператор інтегрування (3.1) приймає значення [90]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} (\pi_x T_{2k-1})(x_2) dx_2 &= \frac{T_{2k+1}(x)}{8k(2k+1)} - \frac{T_{2k-1}(x)}{4k(2k-2)} + \frac{T_{2k-3}(x)}{4(2k-2)(2k-3)} + \\ &+ \frac{T_1(x)}{2k(2k-2)} + \frac{1}{(2k-3)(2k+1)}, \quad k = 2, 3, \dots, \\ \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} (\pi_x T_{2k})(x_2) dx_2 &= \frac{T_{2k+2}(x)}{4(2k+1)(2k+2)} - \frac{T_{2k}(x)}{2(2k-1)(2k+1)} + \\ &+ \frac{T_{2k-2}(x)}{4(2k-1)(2k-2)} + \frac{T_2(x)}{4(2k+1)(2k-1)} - \frac{k^2+2}{4(k-1)(k+1)(2k+1)(2k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} (\pi_x T_0)(x_2) dx_2 = 0,$$

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} (\pi_x T_1)(x_2) dx_2 = \frac{T_3(x)}{24} - \frac{3T_1(x)}{8} - \frac{1}{3}, \quad (3.10)$$

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} (\pi_x T_2)(x_2) dx_2 = \frac{T_4(x)}{48} - \frac{T_2(x)}{12} + \frac{1}{16}.$$

Через $\pi_n^m : L_{2,\varpi}[-1,1] \rightarrow L_{2,\varpi}[-1,1]$ позначимо оператор, який для довільних цілих невід'ємних n, m ($n < m$) визначається формулою [90]

$$\pi_n^m f = \pi_n^m(f) = \sum_{k=n}^m f_k T_k, \quad (3.11)$$

і зокрема,

$$\pi_n^\infty(f) = \sum_{k=n}^{\infty} f_k T_k, \quad (3.12)$$

де f визначається формулою (3.2).

Очевидно, що

$$\left(\pi_1^\infty f\right)(x) = f(x) - \frac{T_0(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (3.13)$$

Для оператора $\pi_1^\infty L = \pi_1^\infty \int_{-1}^x \int_{-1}^{x_1} : \tilde{L}_{2,1}[-1,1] \rightarrow \tilde{L}_{2,\varpi}[-1,1]$ справедливими є

наступні формули

$$\begin{aligned} \pi_1^\infty \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} (\pi_x T_{2k-1})(x_2) dx_2 &= \frac{T_{2k+1}(x)}{4(2k)(2k+1)} - \frac{T_{2k-1}(x)}{2(2k)(2k-2)} + \\ &+ \frac{T_{2k-3}(x)}{4(2k-2)(2k-3)} + \frac{T_1(x)}{(2k)(2k-2)}, \quad k=2,3,\dots, \\ \pi_1^\infty \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} (\pi_x T_{2k})(x_2) dx_2 &= \frac{T_{2k+2}(x)}{4(2k+1)(2k+2)} - \frac{T_{2k}(x)}{2(2k-1)(2k+1)} + \\ &+ \frac{T_{2k-2}(x)}{4(2k-1)(2k-2)} + \frac{T_2(x)}{4(2k+1)(2k-1)}, \quad k=2,3,\dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\pi_1^\infty \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} (\pi_x T_0)(x_2) dx_2 = 0,$$

$$\pi_1^\infty \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} (\pi_x T_1)(x_2) dx_2 = \frac{T_3(x)}{24} - \frac{3T_1(x)}{8}, \quad (3.15)$$

$$\pi_1^\infty \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} (\pi_x T_2)(x_2) dx_2 = \frac{T_4(x)}{48} - \frac{T_2(x)}{12}.$$

Із (3.14), (3.15) випливає, що оператора $\pi_1^\infty L = \pi_1^\infty \int_{-1}^x \int_{-1}^{x_1} : \pi_1^\infty \int_{-1}^x \int_{-1}^{x_1}$ – переводить

непарні поліноми в непарні, а парні – в парні. Значення оператора

$\pi_1^\infty \int_{-1}^x \int_{-1}^{x_1} : \tilde{L}_{2,1}[-1,1] \rightarrow \tilde{L}_{2,\varpi}[-1,1]$ відрізняються від значень оператора (3.1)

доданком (нульовим) членом ряду Фур'є-Чебишева. Проте, як бачимо, спектральні властивості цих розглянутих двох операторів кардинально різні.

Оператор $\pi_1^\infty \int_{-1}^x \int_{-1}^{x_1}$ має характеристичні значення і власні функції, а спектральний радіус компактного оператора типу Вольтера $\int_{-1}^x \int_{-1}^{x_1}$ не має власних значень, відмінних від нуля, як це відомо з курсу функціонального аналізу [52].

3.2. Власні значення оператора проектування

Внаслідок дії оператора $\pi_1^\infty \int_{-1}^x \int_{-1}^{x_1} : \tilde{L}_{2,1}[-1,1] \rightarrow \tilde{L}_{2,\varpi}[-1,1]$ для непарних поліномів Чебишева із формул (3.14), (3.15) отримуємо тридіагональну матрицю з верхнім рядком, елементами якої є

$$p_{1,1} = -\frac{3}{8}, p_{1,2} = \frac{1}{4}, p_{1,k} = \frac{1}{(2k)(2k-2)}, k = 3, \dots,$$

$$p_{k-1,k} = \frac{1}{4(2k-2)(2k-3)}, k = 3, \dots, p_{k,k} = -\frac{1}{2(2k)(2k-2)}, k = 2, \dots, \quad (3.16)$$

$$p_{k,k-1} = \frac{1}{4(2k-2)(2k-1)}, k = 2, \dots,$$

а для парних поліномів Чебишева – тридіагональну матрицю з верхнім рядком, елементи якої обчислюються за формулами

$$p_{1,1} = -\frac{1}{12}, p_{1,2} = \frac{7}{120}, p_{1,k} = \frac{1}{4(2k+1)(2k-1)}, k = 3, \dots,$$

$$p_{k-1,k} = \frac{1}{4(2k-2)(2k-1)}, k = 3, \dots, p_{k,k} = -\frac{1}{2(2k+1)(2k-1)}, k = 2, \dots, \quad (3.17)$$

$$p_{k,k-1} = \frac{1}{4(2k-1)(2k)}, k = 2, \dots$$

Оскільки, у парному та непарному випадках ми отримали матриці з однаковою структурою, то і характеристичні поліном для знаходження власних значень цих двох матриць будуть співпадати.

Твердження 3.1. Характеристичний поліном для знаходження власних значень тридіагональної матриці з верхнім рядком знаходиться за допомогою рекурентних формул

$$P^0(\lambda) = 0, \quad P^1(\lambda) = (\lambda + p_{1,1}),$$

$$P^k(\lambda) = (\lambda + p_{k,k})P^{k-1}(\lambda) - p_{k,k-1}p_{k-1,k}P^{k-2}(\lambda) - (-1)^k \prod_{i=2}^k p_{i,i-1}p_{1,k}, \quad (3.18)$$

де $p_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, s$ – елементи матриці.

Доведення. Дане твердження доведемо згідно методу математичної індукції.

1. При $k=1$, за означенням визначника, отримаємо $P^1(\lambda) = (\lambda + p_{1,1})$. 2. При $k=2$, теж за означенням дістанемо $P^2(\lambda) = (\lambda + p_{1,1})(\lambda + p_{2,2}) - p_{2,1}p_{1,2} = (\lambda + p_{2,2})P^1(\lambda) - p_{2,1}p_{1,2}$. 3. При $k=3$, за означенням визначника, дістанемо $P^3(\lambda) = (\lambda + p_{1,1})(\lambda + p_{2,2})(\lambda + p_{3,3}) + p_{2,1}p_{3,2}p_{1,3} - (\lambda + p_{1,1})p_{3,2}p_{2,3} - (\lambda + p_{3,3})p_{2,1}p_{1,2} = (\lambda + p_{3,3})[(\lambda + p_{1,1})(\lambda + p_{2,2}) - p_{2,1}p_{1,2}] - (\lambda + p_{1,1})p_{3,2}p_{2,3} + p_{2,1}p_{3,2}p_{1,3} = (\lambda + p_{3,3})P^2(\lambda) - p_{3,2}p_{2,3}P^1(\lambda) + p_{2,1}p_{3,2}p_{1,3}$. 4. Індуктивно продовжуючи цей процес $n=k$ раз, отримаємо $P^k(\lambda) = (\lambda + p_{k,k})P^{k-1}(\lambda) - p_{k,k-1}p_{k-1,k}P^{k-2}(\lambda) - (-1)^k \prod_{i=2}^k p_{i,i-1}p_{1,k}$.

Твердження доведено.

Твердження 3.2. Для полінома $P^s(\lambda)$, визначеного згідно формул (3.18), степінь якого дорівнює s для матриці з елементами (3.16) при $\lambda=0$ справедливою є формула

$$P^s(0) = (-1)^s (2s+1) \prod_{i=2}^{s+1} p_{i-1,i}, \quad \text{де } p_{i-1,i} = \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)}, \quad i=2, \dots \quad (3.19)$$

Доведення твердження у Додатку А1.

Твердження 3.3. Поліном $P^s(\lambda)$, визначений згідно формул (3.18) для матриці, елементи якої обчислюються за формулами (3.16), степінь якого дорівнює s

має s дійсних, додатніх, різних коренів, які позначатимемо через λ_{2j-1}^s ,

$j=1, \dots, s$, причому, $\lambda_{\max} = \max_{\substack{1 \leq j \leq s, \\ 1 \leq s < \infty}} \lambda_{2j-1}^s = \lambda_3^2 = \frac{7\sqrt{3} + \sqrt{107}}{32\sqrt{3}}$, де λ_3^2 - корінь

полінома $P^2(\lambda)$.

Доведення твердження у Додатку А2.

Твердження 3.4. Для полінома $P^s(\lambda)$, визначеного згідно формул (3.18), степінь якого дорівнює s для матриці з елементами (3.17) при $\lambda=0$ справедливою є формула

$$P^s(0) = (-1)^s (s+1) \prod_{i=2}^{s+1} p_{i-1,i}, \text{ де } p_{i-1,i} = \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}, i=2, \dots. \quad (3.20)$$

Доведення твердження у Додатку А3.

Твердження 3.5. Поліном $P^s(\lambda)$, визначений згідно формул (3.18) для матриці, елементи якої обчислюються за формулами (3.17), степінь якого дорівнює s має s дійсних, додатніх, різних коренів, які позначатимемо через λ_{2j}^s , $j=1, \dots, s$, причому, $\lambda_{\max} = \max_{\substack{1 \leq j \leq s, \\ 1 \leq s < \infty}} \lambda_{2j}^s = \lambda_8^4 \approx 0.1013212597$, де λ_8^4 - корінь полінома $P^4(\lambda)$.

Доведення твердження у Додатку А4.

3.3. Формулювання квазіспектральних задач

3.3.1. Квазіспектральна задача для інтегрального оператора

Для заданого $n=1, 2, \dots$ знайти такі значення параметра λ , при яких рівняння

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U(x_2) dx_2 = -\lambda U(x) + \tau_1 T_{n+1}(x) + \tau_2 T_{n+2}(x) + w_0 T_0(x) \quad (3.21)$$

має ненульові поліноміальні розв'язки $U = U(x) \in \tilde{L}_{2,1}[-1,1]$ степеня $\leq n$, де τ_1 , τ_2 , w_0 деякі параметри, а $T_{n+1} = T_{n+1}(x)$ та $T_{n+2} = T_{n+2}(x)$ задані (і зафіксовані) поліноми Чебишева I-го роду степенів рівних $n+1$ та $n+2$ відповідно. [89, 94]

Застосувавши до обох частин інтегрального рівняння (3.21) оператор π_1^n дістанемо задачу на власні значення вигляду

$$\pi_1^n \left(\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U(x_2) dx_2 \right) = -\lambda (\pi_1^n U)(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (3.22)$$

$$\int_{-1}^1 \varpi^{(0,0)}(x) (\pi_1^n U)(x) dx = 0. \quad (3.23)$$

При цьому зазначимо, що застосування оператора $\pi_1^n \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1}$ до функції зводиться до застосування його окремо до парної та непарної частин. Подамо $U = U(x)$ у вигляді

$$U(x) = U_{2i-1}^{n-1}(x) + U_{2i}^n(x), \quad i = 1, \dots, s, \quad (3.24)$$

де $U_{2i}^n(x)$, $U_{2i-1}^{n-1}(x)$, відповідно, парний та непарний поліноми степеня $\leq n$, ортогональні з вагою $\varpi^{(0,0)}(x) = 1$ на $[-1, 1]$ до полінома, тотожно рівного одиниці.

Надалі для зручності викладок вважатимемо число n парним і рівним $2s$.

Твердження 3.6. Для фіксованого λ рівняння (3.21) розщеплюється на два рівняння

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i-1}^{n-1}(x) dx_2 = -\lambda U_{2i-1}^{n-1}(x) + \tau_1 T_{2s+1}(x) + \xi_0 T_0(x), \quad (3.25)$$

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i}^n(x) dx_2 = -\lambda U_{2i}^n(x) + \tau_2 T_{2s+2}(x) + \zeta_0 T_0(x), \quad (3.26)$$

відносно невідомих поліномів $U_{2i}^n(x)$ та $U_{2i-1}^{n-1}(x)$, $i = 1, \dots, s$.

Доведення. Підставимо (3.24) в (3.21) і дістанемо

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \left(U_{2i-1}^{n-1}(x_2) + U_{2i}^n(x_2) \right) dx_2 = & -\lambda \left(U_{2i-1}^{n-1}(x) + U_{2i}^n(x) \right) + \\ & + \tau_1 T_{2s+1}(x) + \tau_2 T_{2s+2}(x) + w_0 T_0(x), \end{aligned} \quad (3.27)$$

де $w_0 = \xi_0 + \zeta_0$.

Відокремлюючи парну та непарну частини в (3.27) та враховуючи формули (3.9), (3.10) дістанемо систему із двох рівнянь (3.25), (3.26). Із (3.25), (3.26) випливає рівняння (3.21), що остаточно доводить твердження.

Твердження 3.7. Для фіксованого λ рівняння (3.22) розщеплюється на два рівняння

$$\pi_1^n \left(\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i-1}^{n-1}(x_2) dx_2 \right) = -\lambda \left(\pi_1^n U_{2i-1}^{n-1} \right)(x), \quad (3.28)$$

$$\pi_1^n \left(\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i}^n(x_2) dx_2 \right) = -\lambda \left(\pi_1^n U_{2i}^n \right)(x), \quad (3.29)$$

відносно невідомих поліномів $U_{2i}^n(x)$ та $U_{2i-1}^{n-1}(x)$, $i=1, \dots, s$.

Доведення. Підставимо (3.28) та (3.29) в (3.22) і дістанемо

$$\pi_1^n \left(\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \left(U_{2i-1}^{n-1}(x_2) + U_{2i}^n(x_2) \right) dx_2 \right) = -\lambda \left(\left(\pi_1^n U_{2i-1}^{n-1} \right)(x) + \left(\pi_1^n U_{2i}^n \right)(x) \right), \quad (3.30)$$

враховуючи властивість парності-непарності оператора $\pi_1^n \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1}$ бачимо

справедливість твердження.

Твердження 3.8. Якщо рівняння (3.21) має ненульовий розв'язок $U = U(x) \in \tilde{L}_{2,1}[-1,1]$, то для параметрів ξ_0 , ζ_0 , де $w_0 = \xi_0 + \zeta_0$ мають місце подання

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i-1}^{n-1}(x_2) dx_2 dx, \quad (3.31)$$

$$\zeta_0 = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i}^n(x_2) dx_2 dx - \tau_2 \int_{-1}^1 T_{2s+1}(x) dx \right), \quad (3.32)$$

або

$$\zeta_0 = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i}^n(x_2) dx_2 dx + \frac{2\tau_2}{(2s+1)(2s+3)} \right).$$

Доведення. Зінтегрувавши обидві частини рівнянь (3.25) та (3.26) по x в межах від $x = -1$ до $x = 1$ і врахувавши умову (3.6), умову ортогональності поліномів $U_{2i-1}^{n-1}(x)$, $U_{2i}^n(x)$ з вагою $\varpi^{(0,0)}(x) = 1$ на $[-1, 1]$ до полінома, який тотожно дорівнює одиниці, дістанемо рівняння (3.31) та (3.32).

3.3.2. Квазіспектральна задача для диференціального оператора

Для заданого $n = 1, 2, \dots$ знайти такі значення параметра $\bar{\lambda}$, при яких рівняння

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\bar{\lambda}V(x) + \bar{\tau}_1 \frac{dT_{n+1}(x)}{dx} + \bar{\tau}_2 \frac{dT_{n+2}(x)}{dx} \quad (3.33)$$

має ненульові поліноміальні розв'язки $V = V(x) \in \tilde{L}_{2,0}[-1, 1]$ степеня $\leq n+1$, де $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ деякі параметри, а $T_{n+1} = T_{n+1}(x)$ та $T_{n+2} = T_{n+2}(x)$ задані (і зафіксовані) поліноми Чебишева I-го роду степенів рівних $n+1$ та $n+2$ відповідно. $\tilde{L}_{2,0}[-1, 1]$ – це такий повний підпростір функцій простору $L_{2,\varpi}[-1, 1]$ для яких виконуються умови $V(-1) = 0$ та $V(1) = 0$. [89, 94]

Твердження 3.9. При $\bar{\lambda} = 1/\lambda$, $\bar{\tau}_1 = \tau_1/\lambda$ та $\bar{\tau}_2 = \tau_2/\lambda$ рівняння (3.21), (3.33) еквівалентні між собою.

Доведення. Нехай

$$V(x) = \int_{-1}^x U(x_1) dx_1. \quad (3.34)$$

Візьмемо похідну по x від обох частин рівняння (3.34) і дістанемо

$$\frac{dV(x)}{dx} = U(x). \quad (3.35)$$

Підставимо рівності (3.34) та (3.35) в рівняння (3.21) і дістанемо

$$\int_{-1}^x V(x_1) dx_1 = -\lambda \frac{dV(x)}{dx} + \tau_1 T_{n+1}(x) + \tau_2 T_{n+2}(x) + w_0 T_0(x).$$

Візьмемо похідну по x від обох частин останнього рівняння і дістанемо

$$V(x) = -\lambda \frac{d^2V(x)}{dx^2} + \tau_1 \frac{dT_{n+1}(x)}{dx} + \tau_2 \frac{dT_{n+2}(x)}{dx}$$

або

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda}V(x) + \frac{\tau_1}{\lambda} \frac{dT_{n+1}(x)}{dx} + \frac{\tau_2}{\lambda} \frac{dT_{n+2}(x)}{dx}. \quad (3.36)$$

В рівнянні (3.36) введемо позначення, описані у твердженні 3.9, і дістанемо рівняння (3.33).

Зінтегруємо обидві частини рівняння (3.33) по x_1 в межах від $x_1 = -1$ до $x_1 = x$ дістанемо

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(x)}{dx} - \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=-1} &= -\bar{\lambda} \int_{-1}^x V(x_1) dx_1 + \\ &+ \bar{\tau}_1 (T_{n+1}(x) - T_{n+1}(-1)) + \bar{\tau}_2 (T_{n+2}(x) - T_{n+2}(-1)). \end{aligned}$$

Підставимо рівності (3.34), (3.35) в останнє рівняння і дістанемо

$$\begin{aligned} U(x) - U(-1) &= -\bar{\lambda} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U(x_2) dx_2 + \\ &+ \bar{\tau}_1 T_{n+1}(x) + \bar{\tau}_2 T_{n+2}(x) + (-\bar{\tau}_1 T_{n+1}(-1) - \bar{\tau}_2 T_{n+2}(-1)) \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U(x_2) dx_2 &= -\frac{1}{\lambda} U(x) + \\ &+ \frac{\bar{\tau}_1}{\lambda} T_{n+1}(x) + \frac{\bar{\tau}_2}{\lambda} T_{n+2}(x) + \frac{1}{\lambda} (U(-1) - \bar{\tau}_1 T_{n+1}(-1) - \bar{\tau}_2 T_{n+2}(-1)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Враховуючи рівності, описані у твердженні 3.9, із рівняння (3.37) дістанемо (3.21), де $w_0 = \lambda U(-1) - \tau_1 T_{n+1}(-1) - \tau_2 T_{n+2}(-1)$.

Твердження 3.10. Для фіксованого $\bar{\lambda}$ рівняння (3.33) розщеплюється на два рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\int_{-1}^x U_{2i}^n(x_1) dx_1 \right) = -\bar{\lambda} \int_{-1}^x U_{2i}^n(x_1) dx_1 + \bar{\tau}_2 \frac{dT_{n+2}}{dx}, \quad (3.38)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\int_{-1}^x U_{2i-1}^{n-1}(x_1) dx_1 \right) = -\bar{\lambda} \int_{-1}^x U_{2i-1}^{n-1}(x_1) dx_1 + \bar{\tau}_1 \frac{dT_{n+1}}{dx}, \quad (3.39)$$

відносно поліномів $U_{2i}^n(x)$ та $U_{2i-1}^{n-1}(x)$, $i = 1, \dots, s$.

Доведення. Підставимо (3.24) в (3.33), враховуючи (3.34), дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(\int_{-1}^x (U_{2i}^n(x_1) + U_{2i-1}^{n-1}(x_1)) dx_1 \right) = & -\bar{\lambda} \int_{-1}^x (U_{2i}^n(x_1) + U_{2i-1}^{n-1}(x_1)) dx_1 + \\ & + \bar{\tau}_1 \frac{dT_{n+1}}{dx} + \bar{\tau}_2 \frac{dT_{n+2}}{dx}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Відокремлюючи парну та непарну частини в (3.40) дістанемо систему із двох рівнянь (3.38), (3.39). Із (3.38), (3.39) випливає рівняння (3.33), що остаточно доводить твердження.

Твердження 3.11. Для фіксованого $\bar{\lambda}$ рівняння (3.33) розщеплюється на два рівняння

$$\frac{dU_{2i}^n(x)}{dx} = -\bar{\lambda} \int_{-1}^x U_{2i}^n(x_1) dx_1 + \bar{\tau}_2 \frac{dT_{n+2}}{dx}, \quad (3.41)$$

$$\frac{dU_{2i-1}^{n-1}(x)}{dx} = -\bar{\lambda} \int_{-1}^x U_{2i-1}^{n-1}(x_1) dx_1 + \bar{\tau}_1 \frac{dT_{n+1}}{dx}, \quad (3.42)$$

відносно поліномів $U_{2i}^n(x)$ та $U_{2i-1}^{n-1}(x)$, $i = 1, \dots, s$.

Доведення. Підставимо (3.24) в (3.33), враховуючи (3.35), дістанемо

$$\frac{d(U_{2i}^n(x) + U_{2i-1}^{n-1}(x))}{dx} = -\bar{\lambda} \int_{-1}^x (U_{2i}^n(x_1) + U_{2i-1}^{n-1}(x_1)) dx_1 + \bar{\tau}_1 \frac{dT_{n+1}}{dx} + \bar{\tau}_2 \frac{dT_{n+2}}{dx}. \quad (3.43)$$

Відокремлюючи парну та непарну частини в (3.43) дістанемо систему із двох рівнянь (3.41), (3.42). Із (3.41), (3.42) випливає рівняння (3.33), що остаточно доводить твердження.

Суму всіх доданків правої частини (3.21) та (3.33), крім першого, традиційно називають нев'язкою. Вибрати саме поліноми Чебишева $T_{n+1}(x)$ та $T_{n+2}(x)$ для побудови нев'язок важливо у відповідності з рекомендаціями τ -методу Ланцоша [63], або α -методу Дзядика [41]. А саме, результати Дзядика (про порядок апроксимації розв'язків інтегральних рівнянь в рівномірній чебишевській метриці) підказують нам, що при розв'язуванні інтегральних рівнянь нев'язку доцільно конструювати із поліномів Чебишева першого роду,

а при розв'язанні диференціальних рівнянь її вигідно брати у вигляді комбінації похідних поліномів Чебишева. В. Дзядик та його учні і послідовники розглядали апроксимацію в чебишевській метриці розв'язків звичайних диференційних рівнянь та їх систем, деяких інтегральних рівнянь та ін. [41], в яких систематично застосовувались результати теорії апроксимації функцій. [42, 56]

Аналогічно, коли метою є апроксимація в просторі $L_{2,\omega}[-1,1]$, то тоді нев'язку в (3.21) доцільно будувати із поліномів Чебишева першого роду, а в (3.33) – із похідних многочленів Чебишева першого роду, або, що те саме, із многочленів Чебишева другого роду. В задачах апроксимації розв'язків крайових задач використовуємо не тільки значення параметра λ (характеристичні значення), але і значення параметра τ , що відрізняє ці методи від класичних спектральних методів. [3-6, 36]

3.3.3. Спряжена квазіспектральна задача для інтегрального оператора

Для рівняння (3.21) існує спряжене квазіспектральне рівняння [94]

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \frac{\bar{U}(x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 = -\lambda \bar{U}(x) + \frac{\bar{c}_1}{2} \left(\frac{T_1(x)}{2} - \sum_{i=2}^s \frac{T_{2i-1}(x)}{2i(i-1)} - \right. \\ \left. -\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{\pi}{2} \sqrt{1-x^2} \right) + \bar{c}_1 T_{n+1}(x) + \\ \left. + \frac{\bar{c}_2}{8} \left(T_0(x) - \sum_{i=1}^s \frac{2T_{2i}(x)}{(2i+1)(2i-1)} \right) + \bar{c}_2 T_{n+2}(x). \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.3.4. Спряжена квазіспектральна задача для диференціального оператора

Нехай

$$\bar{V}(x) = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \frac{\bar{U}(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 \quad (3.45)$$

або

$$-\frac{\bar{V}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^x \frac{\bar{U}(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1. \quad (3.46)$$

Візьмемо похідну по x від обох частин рівняння (3.46) і дістанемо

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{V}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{\bar{U}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3.47)$$

Підставимо рівності (3.46) та (3.47) в рівняння (3.44) і дістанемо

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^x \frac{\bar{V}(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 &= \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{V}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right) + \frac{\bar{c}_1}{2} \left(\frac{T_1(x)}{2\sqrt{1-x^2}} - \sum_{i=2}^s \frac{T_{2i-1}(x)}{2i(i-1)\sqrt{1-x^2}} - \right. \\ &\left. -\arcsin x - \frac{\pi}{2} \right) + \bar{\tau}_1 \frac{T_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\bar{c}_2}{8} \left(\frac{T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \sum_{i=1}^s \frac{2T_{2i}(x)}{(2i+1)(2i-1)\sqrt{1-x^2}} \right) + \bar{\tau}_2 \frac{T_{n+2}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Візьмемо похідну по x від обох частин останнього рівняння і дістанемо

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\bar{V}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right) &= -\frac{1}{\lambda} \bar{V}(x) - \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{c}_1}{2} \frac{T_n(x)}{n(1-x^2)} - \frac{\bar{\tau} (s+1)T_n(x) - sT_{n+2}(x)}{\lambda (1-x^2)} - \\ &-\frac{\bar{c}_2}{8\lambda} \frac{T_{n+1}(x)}{(n+1)(1-x^2)} - \frac{\bar{\tau}_2 (n+3)T_{n+1}(x) - (n+1)T_{n+3}(x)}{\lambda 2(1-x^2)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Для фіксованого λ , кожне з рівнянь виду (3.21), (3.33), (3.44), (3.48) розщеплюється на два рівняння, парну та непарну частини відповідно

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i}^{2s}(x_2) dx_2 = -\lambda_{2i}^n U_{2i}^{2s}(x) + \tau_{2i}^n T_{n+2}(x) + w_2 T_0(x), \quad (3.49)$$

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i-1}^{2s-1}(x_2) dx_2 = -\lambda_{2i-1}^n U_{2i-1}^{2s-1}(x) + \tau_{2i-1}^n T_{n+1}(x) + w_1 T_0(x), \quad (3.50)$$

$$\frac{d^2 V_{2i}^{2s}(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} V_{2i}^{2s}(x) + \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{dT_{n+1}(x)}{dx}, \quad (3.51)$$

$$\frac{d^2 V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda_{2i}^n} V_{2i-1}^{2s+1}(x) + \frac{\tau_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n} \frac{dT_{n+2}(x)}{dx}, \quad (3.52)$$

де

$$V_{2i}^{2s}(x) = \int_{-1}^x U_{2i-1}^{2s-1}(x_1) dx_1, \quad V_{2i-1}^{2s+1}(x) = \int_{-1}^x U_{2i}^{2s}(x_1) dx_1, \quad \text{згідно формули (3.34).}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \frac{\bar{U}_{2i}^{2s}(x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 = -\lambda_{2i}^n \bar{U}_{2i}^{2s}(x) + \\ & + \frac{\bar{c}_2^{2i}}{8} \left(T_0(x) - \sum_{j=1}^s \frac{2T_{2j}(x)}{(2j+1)(2j-1)} \right) + \bar{\tau}_{2i}^n T_{n+2}(x), \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \frac{\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 = -\lambda \bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) + \\ & + \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{2} \left(\frac{T_1(x)}{2} - \sum_{j=2}^s \frac{T_{2j-1}(x)}{2j(j-1)} - \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{\pi}{2} \sqrt{1-x^2} \right) + \bar{\tau}_{2i-1}^n T_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-x^2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\bar{V}_{2i}^{2s}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -\frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} \bar{V}_{2i}^{2s}(x) - \\ & - \frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{2} \frac{T_n(x)}{n(1-x^2)} - \frac{\bar{\tau}_{2i-1}^n (s+1) T_n(x) - s T_{n+2}(x)}{\lambda_{2i-1}^n (1-x^2)}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-x^2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -\frac{1}{\lambda_{2i}^n} \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) - \frac{1}{\lambda_{2i}^n} \frac{\bar{c}_2^{2i}}{8} \frac{T_{n+1}(x)}{(n+1)(1-x^2)} - \\ & - \frac{\bar{\tau}_{2i}^n (n+3) T_{n+1}(x) - (n+1) T_{n+3}(x)}{\lambda_{2i}^n 2(1-x^2)}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

де

$$\bar{V}_{2i}^{2s}(x) = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \frac{\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1, \quad \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \frac{\bar{U}_{2i}^{2s}(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1,$$

згідно формули (3.45). [68, 94]

3.4. Побудова квазіспектральних поліномів

Твердження 3.12. Якщо

$$U_{2j}^n(x) = \sum_{i=1}^s c_{2i} \tilde{T}_{2i}(x), \quad n = 2s, \quad j = 1, \dots, s, \quad (3.57)$$

то

$$\begin{aligned} \pi_1^n \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2j}^n(x_2) dx_2 &= \sum_{i=1}^s b_{2i} c_{2i} T_2 + \\ &+ \sum_{i=2}^{s-1} \left(a_{2i-1} c_{2i-2} - (a_{2i-1} + a_{2i}) c_{2i} + a_{2i} c_{2i+2} \right) T_{2i} + \\ &+ \left(a_{2s-1} c_{2s-2} - (a_{2s-1} + a_{2s}) c_{2s} \right) T_{2s}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

де

$$a_j = \frac{1}{4j(j+1)}, \quad j = 1, \dots, \quad (3.59)$$

$$b_2 = -\frac{1}{12}, \quad b_4 = \frac{7}{120}, \quad b_{2i} = \frac{1}{4(2i+1)(2i-1)}, \quad j = 3, \dots \quad (3.60)$$

Доведення. Застосувавши формули (3.14), (3.15) для парних степенів, дістанемо

$$\begin{aligned} \pi_1^n \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2j}^n(x_2) dx_2 &= \pi_1^n \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \sum_{i=1}^s c_{2i} (\pi_x T_{2i})(x_2) dx_2 = \\ &= c_2 \left(\frac{T_4}{48} - \frac{T_2}{12} \right) + c_4 \left(\frac{T_6}{120} - \frac{T_4}{30} + \frac{7}{120} T_2 \right) + \\ &+ \sum_{i=3}^{s-1} c_{2i} \left(\frac{T_{2i+2}}{4(2i+1)(2i+2)} - \frac{T_{2i}}{2(2i+1)(2i-1)} + \frac{T_{2i-2}}{4(2i-2)(2i-1)} + \frac{T_2}{4(2i+1)(2i-1)} \right) + \\ &+ c_{2s} \left(-\frac{T_{2s}}{2(2s+1)(2s-1)} + \frac{T_{2s-2}}{4(2s-2)(2s-1)} + \frac{T_2}{4(2s+1)(2s-1)} \right). \end{aligned}$$

Зберемо коефіцієнти при однакових поліномах Чебишева в одержаній формулі і дістанемо (3.58).

Твердження 3.13. Якщо

$$U_{2j-1}^{n-1}(x) = \sum_{i=1}^s c_{2i-1} \tilde{T}_{2i-1}(x), \quad n = 2s, \quad j = 1, \dots, s, \quad (3.61)$$

то

$$\begin{aligned}
& \pi_1^n \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2j-1}^{n-1}(x_2) dx_2 = \sum_{i=1}^s b_{2i-1} c_{2i-1} T_1 + \\
& + \sum_{i=2}^{s-1} \left(a_{2i-2} c_{2i-3} - (a_{2i-2} + a_{2i-1}) c_{2i-1} + a_{2i-1} c_{2i+1} \right) T_{2i-1} + \\
& + \left(a_{2s-2} c_{2s-3} - (a_{2s-2} + a_{2s-1}) c_{2s-1} \right) T_{2s-1}, \tag{3.62}
\end{aligned}$$

де

$$b_1 = -\frac{3}{8}, \quad b_3 = \frac{1}{4}, \quad b_{2i-1} = \frac{1}{(2i)(2i-2)}, \quad j = 3, \dots, \tag{3.63}$$

а коефіцієнти a_j , $j = 1, \dots$, знаходяться за формулою (3.59).

Доведення. Застосувавши формули (3.14), (3.15) для непарних степенів, дістанемо

$$\begin{aligned}
& \pi_1^n \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2j-1}^{n-1}(x_2) dx_2 = \\
& = \pi_1^n \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \sum_{i=1}^s c_{2i+1} (\pi_x T_{2i-1})(x_2) dx_2 = c_1 \left(\frac{T_3}{24} - \frac{3T_1}{8} \right) + c_3 \left(\frac{T_5}{80} - \frac{T_3}{16} \right) + \\
& + \sum_{i=3}^{s-1} c_{2i-1} \left(\frac{T_{2i+1}}{8i(2i+1)} - \frac{T_{2i-1}}{4i(2i-2)} + \frac{T_{2i-3}}{4(2i-2)(2i-3)} + \frac{T_1}{2i(2i-2)} \right) + \\
& + c_{2s-1} \left(-\frac{T_{2s-1}}{4s(2s-2)} + \frac{T_{2s-3}}{4(2s-2)(2s-3)} + \frac{T_1}{2s(2s-2)} \right).
\end{aligned}$$

Зберемо коефіцієнти при однакових поліномах Чебишева в одержаній формулі і дістанемо (3.62).

Твердження 3.14. Якщо поліном (3.57) є розв'язком рівняння (3.29), то його коефіцієнти задовольняють систему лінійних алгебраїчних рівнянь [90]

$$\begin{aligned}
& [\lambda - b_2] c_2 + \sum_{i=2}^s b_{2i} c_{2i} = c_0, \\
& a_{2i-1} c_{2i-2} + [\lambda - (a_{2i-1} + a_{2i})] c_{2i} + a_{2i} c_{2i+2} = 0, \quad i = 2, \dots, s-1, \tag{3.64} \\
& a_{2s-1} c_{2s-2} + [\lambda - (a_{2s-1} + a_{2s})] c_{2s} = 0,
\end{aligned}$$

де $c_0 = 0$.

Доведення. Підставляючи тепер (3.58) в (3.29), дістанемо (3.64).

Знаючи значення параметра λ та коефіцієнта c_{2s} , із формул (3.64) можна послідовно обчислити всі інші коефіцієнти c_{2i} полінома (3.57), закінчуючи обчисленням коефіцієнта c_0 , який за умовою має дорівнювати нулю. Тому, обчислення c_0 за рекурентними формулами можна розглядати як обчислення значення полінома степеня s , тобто, будемо вважати $c_0 = P^s(\lambda)$ поліномом, степінь якого дорівнює s . Поліном c_0 має s різних дійсних додатних коренів λ_{2k}^{2s} , $k = 1, \dots, s$, які впорядкуємо за зростанням їх величин. Після того, як ми їх знайдемо, із рівняння (3.29) при $\lambda = \lambda_{2k}^{2s}$ дістанемо s різних поліномів $U_{2k}^n(x)$, $k = 1, \dots, s$, які є його ненульовими розв'язками.

Побудовано алгоритми, які легко реалізуються мовами програмування Fortran, C, C++, Delphi та ін. Вони призначені для формалізації процесу обчислення поліномів $U_{2k}^n(x)$ та $U_{2k-1}^{n-1}(x)$. При їх повній реалізації необхідно використати алгоритм для знаходження всіх коренів полінома $c_0 = P^s(\lambda)$. Із твердження 3.14 випливає алгоритм 3.1. (Додаток А5)

Твердження 2.15. Для кожного полінома $U_{2j}^n(x)$, $j = 1, \dots, s$, одержаного згідно алгоритму 3.1, який є розв'язком рівняння (3.29) коефіцієнт нев'язки τ_2 в (3.21), або (3.26) матиме вигляд

$$\tau_2^j = c_{2s}^j a_{2s+1}, \quad (3.65)$$

Доведення. Користуючись формулами (3.14), (3.15) для парних степенів τ_2^{2j} , $j = 1, \dots, s$ знайдемо як різницю операторів

$$\pi_1^\infty \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2j}^n(x_2) dx_2 - \pi_1^n \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2j}^n(x_2) dx_2 = c_{2s}^j a_{2s+1} T_{2s+2}(x).$$

Твердження 3.16. Якщо поліном (3.61) є розв'язком рівняння (3.28), то його коефіцієнти задовольняють систему лінійних алгебраїчних рівнянь [90]

$$[\lambda - b_1]c_1 + \sum_{i=2}^s b_{2i-1}c_{2i-1} = c_*,$$

$$a_{2i-2}c_{2i-3} + [\lambda - (a_{2i-2} + a_{2i-1})]c_{2i-1} + a_{2i-1}c_{2i+1} = 0, \quad i = 2, \dots, s-1, \quad (3.66)$$

$$a_{2s-2}c_{2s-3} + [\lambda - (a_{2s-2} + a_{2s-1})]c_{2s-1} = 0,$$

де $c_* = 0$.

Доведення. Підставляючи тепер (3.62) в (3.28), дістанемо (3.66).

Знаючи значення параметра λ та коефіцієнта c_{2s-1} , із формул (3.66) можна послідовно обчислити всі інші коефіцієнти c_{2i-1} полінома (3.61), закінчуючи обчисленням коефіцієнта c_* , який за умовою має дорівнювати нулю. Тому, обчислення c_* за рекурентними формулами можна розглядати як обчислення значення полінома степеня s , який позначимо $c_* = P^s(\lambda)$. Поліном $P^s(\lambda)$ має s різних дійсних додатних коренів λ_{2k-1}^{2s} , $k = 1, \dots, s$, які впорядкуємо за зростанням їх величин. Після того, як ми їх знайдемо, із рівняння (3.28) при $\lambda = \lambda_{2k-1}^{2s}$ дістанемо s різних поліномів $U_{2k-1}^{n-1}(x)$, $k = 1, \dots, s$, які є його ненульовими розв'язками.

Із твердження 3.16 дістаємо наступний алгоритм 3.2. (Додаток А6)

Твердження 3.17. Для кожного полінома $U_{2j-1}^{n-1}(x)$, $j = 1, \dots, s$, одержаного згідно алгоритму 3.2, який є розв'язком рівняння (3.28) коефіцієнт нев'язки τ_1 в (3.21), або (3.25) матиме вигляд

$$\tau_1^j = c_{2s-1}^j a_{2s}, \quad (3.67)$$

Доведення. Користуючись формулами (3.14), (3.15) для непарних степенів τ_1^{2j-1} , $j = 1, \dots, s$ знайдемо як різницю операторів

$$\pi_1^\infty \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2j-1}^{n-1}(x_2) dx_2 - \pi_1^n \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2j-1}^{n-1}(x_2) dx_2 = c_{2s-1}^j a_{2s} T_{2s+1}(x).$$

3.5. Побудова біортогональних поліномів

Твердження 3.18. Якщо многочлен $\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1} T_{2j-1}(x)$, $i=1, \dots, s$

такий, що $\int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i-1}^{2s-1}(x) \bar{U}_{2j-1}^{2s-1}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_{2i-1}, & i = j \end{cases}$, то його коефіцієнти \bar{c}_{2j-1}

знаходяться згідно алгоритму 3.3. [68, 80, 81, 87, 94] (Додаток А7)

Твердження 3.19. Якщо многочлен $\bar{U}_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j} T_{2j}(x)$, $i=1, \dots, s$ такий, що

$\int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i}^{2s}(x) \bar{U}_{2j}^{2s}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_{2i}, & i = j \end{cases}$, то його коефіцієнти \bar{c}_{2j} знаходяться згідно

алгоритму 3.4. [68, 80, 81, 87, 94] (Додаток А8)

Візьмемо область визначення R^n оператора диференціювання $A: R^n \rightarrow R^n$, де

$$AV(x) = \frac{d^2V(x)}{dx^2} \quad (3.68)$$

будемо називати множину алгебраїчних поліномів степеня не вище $2n+1$, які перетворюються в нуль на кінцях відрізка $[-1,1]$.

Означення 3.2. Скалярний добуток в лінійному просторі $E_{0,\varpi}[-1,1]$ визначатимемо за формулою

$$(f, \zeta) = \int_{-1}^1 \varpi(x) f(x) \zeta(x) dx, \quad (3.69)$$

де $\varpi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f(x)$ та $\zeta(x) \in E_{0,\varpi}[-1,1]$, $E_{0,\varpi}[-1,1]$ - це простір

ортогональних з вагою $\varpi(x)$ функцій, які на кінцях відрізка $[-1,1]$ перетворюються в нуль.

У просторі $E_{0,\varpi}[-1,1]$ існує поліноміальний базис

$$\int_{-1}^x (\pi_x T_1)(x_1) dx_1, \int_{-1}^x (\pi_x T_2)(x_1) dx_1, \dots, \int_{-1}^x (\pi_x T_n)(x_1) dx_1. \quad (3.70)$$

Знайдемо скалярний добуток обох частин рівняння (3.33) та базисних функцій (3.70) за формулою (3.69)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \varpi(x) \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \int_{-1}^x (\pi_x T_i)(x_1) dx_1 dx = -\bar{\lambda} \int_{-1}^1 \varpi(x) V(x) \int_{-1}^x (\pi_x T_i)(x_1) dx_1 dx + \\ & + \bar{\tau}_1 \int_{-1}^1 \varpi(x) \frac{dT_{n+1}}{dx} \int_{-1}^x (\pi_x T_i)(x_1) dx_1 dx + \bar{\tau}_2 \int_{-1}^1 \varpi(x) \frac{dT_{n+2}}{dx} \int_{-1}^x (\pi_x T_i)(x_1) dx_1 dx. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Оскільки другий та третій доданки в правій частині рівності (3.71) тотожно рівні нулеві, то дістанемо

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \int_{-1}^x (\pi_x T_i)(x_1) dx_1 dx = -\bar{\lambda} \int_{-1}^1 \varpi(x) V(x) \int_{-1}^x (\pi_x T_i)(x_1) dx_1 dx. \quad (3.72)$$

Твердження 3.20. Для фіксованого $\bar{\lambda}$ рівняння (3.72) еквівалентно двом рівнянням

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \varpi(x) \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^x U_{2j}^n(x_1) dx_1 \int_{-1}^x (\pi_x T_{2i})(x_1) dx_1 dx = \\ & = -\bar{\lambda} \int_{-1}^1 \varpi(x) \int_{-1}^x U_{2j}^n(x_1) dx_1 \int_{-1}^x (\pi_x T_{2i})(x_1) dx_1 dx, \quad i = 1, \dots, s, \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \varpi(x) \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^x U_{2j-1}^{n-1}(x_1) dx_1 \int_{-1}^x (\pi_x T_{2i-1})(x_1) dx_1 dx = \\ & = -\bar{\lambda} \int_{-1}^1 \varpi(x) \int_{-1}^x U_{2j-1}^{n-1}(x_1) dx_1 \int_{-1}^x (\pi_x T_{2i-1})(x_1) dx_1 dx, \quad i = 1, \dots, s, \end{aligned} \quad (3.74)$$

відносно поліномів $U_{2j}^n(x)$ та $U_{2j-1}^{n-1}(x)$, обчислених згідно алгоритму 3.1 та 3.2 відповідно.

Доведення. Підставимо (3.24) в (3.72), враховуючи (3.34), дістанемо

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \varpi(x) \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^x \left(U_{2j}^n(x_1) + U_{2j-1}^{n-1}(x_1) \right) dx_1 \int_{-1}^x (\pi_x T_i)(x_1) dx_1 dx = \\ & = -\bar{\lambda} \int_{-1}^1 \varpi(x) \int_{-1}^x \left(U_{2j}^n(x_1) + U_{2j-1}^{n-1}(x_1) \right) dx_1 \int_{-1}^x (\pi_x T_i)(x_1) dx_1 dx, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Відокремлюючи парну та непарну частини в (3.75) дістанемо систему із двох рівнянь (3.73), (3.74). Із (3.73), (3.74) випливає рівняння (3.54), що остаточно доводить твердження.

Твердження 3.21. Для фіксованого $\bar{\lambda}$ рівняння (3.72) еквівалентно двом рівнянням

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \varpi(x) \frac{dU_{2j}^n(x)}{dx} \int_{-1}^x (\pi_x T_{2i})(x_1) dx_1 dx = \\ & = -\bar{\lambda} \int_{-1}^1 \varpi(x) \int_{-1}^x U_{2j}^n(x_1) dx_1 \int_{-1}^x (\pi_x T_{2i})(x_1) dx_1 dx, \quad i = 1, \dots, s, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \varpi(x) \frac{dU_{2j-1}^{n-1}(x)}{dx} \int_{-1}^x (\pi_x T_{2i-1})(x_1) dx_1 dx = \\ & = -\bar{\lambda} \int_{-1}^1 \varpi(x) \int_{-1}^x U_{2j-1}^{n-1}(x_1) dx_1 \int_{-1}^x (\pi_x T_{2i-1})(x_1) dx_1 dx, \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.77)$$

відносно поліномів $U_{2j}^n(x)$ та $U_{2j-1}^{n-1}(x)$, обчислених згідно алгоритму 3.1 та 3.2 відповідно.

Доведення. Підставимо (3.24) в (3.72), враховуючи (3.35), дістанемо

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \varpi(x) \frac{d\left(U_{2j}^n(x) + U_{2j-1}^{n-1}(x)\right)}{dx} \int_{-1}^x (\pi_x T_i)(x_1) dx_1 dx = \\ & = -\bar{\lambda} \int_{-1}^1 \varpi(x) \int_{-1}^x \left(U_{2j}^n(x_1) + U_{2j-1}^{n-1}(x_1)\right) dx_1 \int_{-1}^x (\pi_x T_i)(x_1) dx_1 dx, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Відокремлюючи парну та непарну частини в (3.78) дістанемо систему із двох рівнянь (3.76), (3.77). Із (3.76), (3.77) випливає рівняння (3.72), що остаточно доводить твердження.

Твердження 3.22. Якщо многочлен

$$U_{2j}^n(x) = \sum_{i=1}^s c_{2i} (\pi_x T_{2i})(x), \quad (3.79)$$

обчислений згідно алгоритму 3.1, то (3.76) представимо у вигляді

$$A_{odd} C = -B_{odd} C \bar{\lambda}, \quad (3.80)$$

де A_{odd} – нижня трикутна матриця, елементи якої обчислюються за формулами

$$a_{i,i}^{odd} = -\frac{2i}{2i+1}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (3.81)$$

$$a_{i,j}^{odd} = \frac{4j}{(2i-1)(2i+1)}, \quad i = j+1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, s.$$

B_{odd} – симетрична матриця, елементи якої обчислюються за формулами

$$b_{1,1}^{odd} = \frac{1}{18}, \quad b_{1,2}^{odd} = b_{2,1}^{odd} = -\frac{7}{180},$$

$$b_{i,i}^{odd} = \frac{4i^2 + 3}{2(2i+1)^2(2i-1)^2}, \quad i = 2, \dots, s,$$

$$b_{i,i+1}^{odd} = b_{i+1,i}^{odd} = -\frac{4i^2 + 4i - 7}{4(2i+1)^2(2i-1)(2i+3)}, \quad i = 2, \dots, s-1, \quad (3.82)$$

$$b_{1,i}^{odd} = b_{i,1}^{odd} = -\frac{1}{6(2i-1)(2i+1)}, \quad i = 3, \dots, s,$$

$$b_{i,j}^{odd} = b_{j,i}^{odd} = \frac{1}{(2i+1)(2i-1)(2j+1)(2j-1)}, \quad i = 2, \dots, s-2, \quad j = i+2, \dots, s.$$

Доведення. В рівняння (3.76) підставимо (3.79) і дістанемо

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) \sum_{i=1}^s c_{2i} 4i \sum_{l=1}^i T_{2i-1} \sum_{j=1}^s \left(\frac{T_{2j+1}}{2(2j+1)} - \frac{T_{2j-1}}{2(2j-1)} + \frac{T_1}{(2j-1)(2j+1)} \right) dx =$$

$$= -\bar{\lambda} \int_{-1}^1 \varpi(x) \sum_{i=1}^s c_{2i} \left(\frac{T_{2i+1}}{2(2j+1)} - \frac{T_{2i-1}}{2(2j-1)} + \frac{T_1}{(2j-1)(2j+1)} \right) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^s \left(\frac{T_{2j+1}}{2(2j+1)} - \frac{T_{2j-1}}{2(2j-1)} + \frac{T_1}{(2j-1)(2j+1)} \right) dx.$$

Зінтегруємо одержану формулу і дістанемо

$$\sum_{i=1}^s c_{2i} \left(a_{i,i}^{odd} + \sum_{j=i+1}^s a_{i,j}^{odd} \right) = -\bar{\lambda} \sum_{i=1}^s c_{2i} \sum_{j=1}^s b_{i,j}^{odd},$$

де $a_{i,i}^{odd}$, $a_{i,j}^{odd}$ та $b_{i,j}^{odd}$ обчислюються за формулами (3.81) та (3.82) відповідно.

Твердження 3.23. Якщо многочлен

$$U_{2j-1}^{n-1}(x) = \sum_{i=1}^s c_{2i-1} (\pi_x T_{2i-1})(x), \quad (3.83)$$

обчислений згідно алгоритму 3.2, то (3.77) представимо у вигляді

$$A_{\text{even}} C = -B_{\text{even}} C \bar{\lambda}, \quad (3.84)$$

де A_{even} - нижня трикутна матриця, елементи якої обчислюються за формулами

$$a_{i,i}^{\text{even}} = -\frac{2i-1}{2i}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (3.85)$$

$$a_{i,j}^{\text{even}} = \frac{2(2j-1)}{(2i)(2i-2)}, \quad i = j+1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, s.$$

B_{even} - симетрична матриця, елементи якої обчислюються за формулами

$$b_{1,1}^{\text{even}} = \frac{3}{16}, \quad b_{1,2}^{\text{even}} = b_{2,1}^{\text{even}} = -\frac{1}{8},$$

$$b_{i,i}^{\text{even}} = \frac{(2i-1)^2 + 5}{2(2i)^2(2i-2)^2}, \quad i = 2, \dots, s,$$

$$b_{i,i+1}^{\text{even}} = b_{i+1,i}^{\text{even}} = -\frac{(2i-1)^2 + 2(2i-1) - 11}{4(2i)^2(2i-2)(2i+2)}, \quad i = 2, \dots, s-1, \quad (3.86)$$

$$b_{1,i}^{\text{even}} = b_{i,1}^{\text{even}} = -\frac{1}{2(2i)(2i-2)}, \quad i = 3, \dots, s,$$

$$b_{i,j}^{\text{even}} = b_{j,i}^{\text{even}} = \frac{2}{(2i)(2i-2)(2j)(2j-2)}, \quad i = 2, \dots, s-2, \quad j = i+2, \dots, s.$$

Доведення. В рівняння (3.77) підставимо (3.83) і дістанемо

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) \sum_{i=1}^s c_{2i-1} 2(2i-1) \left(\sum_{l=1}^i T_{2i-2} - \frac{T_0}{2} \right) \left[\frac{T_2}{4} - \frac{T_0}{4} + \sum_{j=2}^s \left(\frac{T_{2j}}{2(2j)} - \frac{T_{2j-2}}{2(2j-2)} + \frac{T_0}{(2j)(2j-2)} \right) \right] dx = -\bar{\lambda} \int_{-1}^1 \varpi(x) \left(c_1 \left(\frac{T_2}{4} - \frac{T_0}{4} \right) + \sum_{i=2}^s c_{2i-1} \left(\frac{T_{2i}}{2(2i)} - \frac{T_{2i-2}}{2(2i-2)} + \frac{T_0}{(2i)(2i-2)} \right) \right) \left(\frac{T_2}{4} - \frac{T_0}{4} + \right.$$

$$+ \sum_{j=2}^s \left(\frac{T_{2j}}{2(2j)} - \frac{T_{2j-2}}{2(2j-2)} + \frac{T_0}{(2j)(2j-2)} \right) dx.$$

Зінтегруємо одержану формулу і дістанемо

$$\sum_{i=1}^s c_{2i-1} \left(a_{i,i}^{even} + \sum_{j=i+1}^s a_{i,j}^{even} \right) = -\bar{\lambda} \sum_{i=1}^s c_{2i-1} \sum_{j=1}^s b_{i,j}^{even},$$

де $a_{i,i}^{even}$, $a_{i,j}^{even}$ та $b_{i,j}^{even}$ обчислюються за формулами (3.85) та (3.86) відповідно.

Ліву та праву частини формул (3.80) та (3.84) домножимо зліва на A_{odd}^{-1} та A_{even}^{-1} відповідно і дістанемо

$$C = -A_{odd}^{-1} B_{odd} C \bar{\lambda}, \quad (3.87)$$

$$C = -A_{even}^{-1} B_{even} C \bar{\lambda}, \quad (3.88)$$

де A_{odd}^{-1} та A_{even}^{-1} - обернені матриці до A_{odd} та A_{even} відповідно.

Твердження 3.24. Нехай $a_{i,j}$, $i=1,\dots,s$, $j=1,\dots,s$ - елементи деякої нижньої трикутної матриці A , тоді елементи $b_{i,j}$, $i=1,\dots,s$, $j=1,\dots,s$ оберненої матриці даній A^{-1} обчислюються за рекурентними формулами

$$b_{i,i} = \frac{1}{a_{i,i}}, \quad i=1,\dots,s,$$

$$b_{i,j} = - \sum_{q=0}^{i-j-1} \frac{b_{i,i-q} a_{i-q,j}}{a_{j,j}}, \quad j=1,\dots,i-1, \quad i=2,\dots,s.$$

Доведення. Доведення слідує з тотожності $A^{-1}A = E$, де E - одинична матриця.

Твердження 3.25. Кожну функцію $F = F(x)$ степеня $\leq n$, яка належить простору $E_{0,\omega}[-1,1]$ можна розкласти по елементах базису (3.70).

Дане твердження доведене у Додатку А9.

У Додатку А10 подано алгебраїчне доведення ортогональності власних векторів.

3.6. Дослідження та властивості квазіортогональних та біортогональних функцій

Твердження 3.26. Многочлени $U_i(x)$, $\bar{U}_i(x)$ та $V_i(x)$, $\bar{V}_i(x)$, $i=1, \dots, n$ утворюють біортогональні системи функцій з вагою $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ на проміжку $[-1, 1]$. [81, 87, 94]

Доведення. Справедливою є наступна рівність

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) U_i(x) \bar{U}_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_i, & i = j \end{cases}, \quad (3.89)$$

яка випливає із побудови біортогональних функцій $\bar{U}_i(x)$, $i=1, \dots, n$. Покажемо, що многочлени $V_i(x)$ та $\bar{V}_i(x)$, $i=1, \dots, n$ теж є біортогональними. Оскільки, поліноми U_{2i}^{2s} та U_{2i-1}^{2s-1} задовольняють рівняння

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i}^{2s}(x_2) dx_2 = -\lambda_{2i}^n U_{2i}^{2s}(x) + \tau_{2i}^n T_{n+2}(x) + w_2 T_0(x), \quad (3.90)$$

та

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i-1}^{2s-1}(x_2) dx_2 = -\lambda_{2i-1}^n U_{2i-1}^{2s-1}(x) + \tau_{2i-1}^n T_{n+1}(x) + w_1 T_0(x) \quad (3.91)$$

відповідно, то помножимо обидві частини рівняння (3.90) на $\bar{U}_{2i}^{2s}(x)$.

Зінтегруємо знайдену рівність за змінною x з вагою $\varpi(x)$. Дістанемо

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varpi(x) \bar{U}_{2i}^{2s}(x) \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} U_{2i}^{2s}(x_2) dx_2 dx &= -\lambda_{2i}^n \int_{-1}^1 \varpi(x) \bar{U}_{2i}^{2s}(x) U_{2i}^{2s}(x) dx + \\ &+ \tau_{2i}^n \int_{-1}^1 \varpi(x) \bar{U}_{2i}^{2s}(x) T_{n+2}(x) dx + w_2 \int_{-1}^1 \varpi(x) \bar{U}_{2i}^{2s}(x) T_0(x) dx. \end{aligned}$$

Степінь поліномів $\bar{U}_{2i}^{2s}(x)$ не перевищує n . Внаслідок ортогональності поліномів Чебишева другий та третій інтеграл в правій частині дорівнюють нулеві. Інтегруючи частинами ліву частину рівності та враховуючи (3.89),

$$V_{2i-1}^{2s+1}(x) = \int_{-1}^x U_{2i}^{2s}(x_1) dx_1 \quad (3.92)$$

та

$$\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \frac{\bar{U}_{2i}^{2s}(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1, \quad (3.93)$$

з останнього співвідношення отримуємо

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) V_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = -\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n. \quad (3.94)$$

Помножимо рівняння (3.91) на $\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x)$. З урахуванням (3.89),

$$V_{2i}^{2s}(x) = \int_{-1}^x U_{2i-1}^{2s-1}(x_1) dx_1 \quad (3.95)$$

та

$$\bar{V}_{2i}^{2s}(x) = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1, \quad (3.96)$$

з останнього співвідношення отримуємо

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) \bar{V}_{2i}^{2s}(x) V_{2i}^{2s}(x) dx = -\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n. \quad (3.97)$$

Таким чином, многочлени $V_i(x)$ та $\bar{V}_i(x)$, $i=1, \dots, n$, є біортогональними на проміжку $[-1, 1]$ з вагою $\varpi(x) = (1-x^2)^{-1/2}$.

Твердження доведено.

Враховуючи (3.94) та (3.97) запишемо [81, 94]

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) V_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ -\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n, & i = j \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) \bar{V}_{2i}^{2s}(x) V_{2i}^{2s}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ -\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n, & i = j \end{cases}$$

Поліноми $U_i(x)$ та $\bar{U}_i(x)$ такі, що $\int_{-1}^1 U_i(x) dx = 0$ та $\int_{-1}^1 \varpi(x) \bar{U}_i(x) dx = 0$.

Поліноми $V_i(x)$ та $\bar{V}_i(x)$ володіють властивостями $V_i(-1) = V_i(1) = 0$, $\bar{V}_i(-1) = \bar{V}_i(1) = 0$.

Під час обчислювального експерименту 3.1 (Додаток А11), для періодичних функцій, та обчислювального експерименту 3.2 (Додаток А12), для монотонних функцій, встановлено, що на визначення коефіцієнтів розкладу функцій у біортогональні ряди за допомогою квадратурних формул суттєво впливає точність обчислення, у той час як порядок квадратурної формули, починаючи з деякого, має значно менший вплив.

Під час обчислювального експерименту досліджено особливості апроксимації функцій побудованими біортогональними поліномами. Зокрема, встановлено, що наближення функцій поліномами $V_{2i-j}^{2s+j}(x)$ та $\bar{V}_{2i-j}^{2s+j}(x)$, $i=1, \dots, s$, $j=0$ - для парних функцій та $j=1$ - для непарних функцій за однакового значення n , мають однаковий ступінь наближення.

3.7. Подання поліномів Чебишева через біортогональні функції

Справедливими є формули розкладу полінома Чебишева в ряд Фур'є за біортогональними системами квазіспектральних поліномів [94]

$$T_{2s}(x) = (2s+1)\pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i-1}^n \frac{\bar{V}_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n\right)} + \frac{1}{(2s+1)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+1}(x), \quad (3.98)$$

$$T_{2s}(x) = (2s)\pi \sum_{i=1}^s -\bar{\tau}_{2i-1}^n \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n\right)} + \frac{1}{(2s+1)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+1}(x). \quad (3.99)$$

Для непарних квазіспектральних поліномів справджуються формули

$$T_{2s+1}(x) = (2s+2)\pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i}^n \frac{\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n\right)} + \frac{1}{(2s+2)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+2}(x), \quad (3.100)$$

$$T_{2s+1}(x) = (2s+1)\pi \sum_{i=1}^s -\bar{\tau}_{2i}^n \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n\right)} + \frac{1}{(2s+2)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+2}(x), \quad (3.101)$$

Для парних квазіспектральних поліномів справджуються формули [94]

$$T_{2s-2}(x) = (2s+1)\pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i-1}^n \left(1 - 4(2s)(2s-1)\lambda_{2i-1}^n\right) \times \\ \times \frac{\bar{V}_{2i}^{2s}}{\left(-\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n\right)} + \frac{1}{(2s+1)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+1}(x), \quad (3.102)$$

$$T_{2s-2}(x) = (2s-2)\pi \sum_{i=1}^s \left[-\bar{\tau}_{2i-1}^n \left(1 - 4(2s)(2s-1)\lambda_{2i-1}^n\right) + \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{(2s)(2s-2)} \right] \times \\ \times \frac{V_{2i}^{2s}}{\left(-\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n\right)} + \frac{1}{(2s+1)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+1}(x). \quad (3.103)$$

Для непарних квазіспектральних поліномів справджуються формули

$$T_{2s-1}(x) = (2s+2)\pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i}^n \left(1 - 4(2s+1)(2s)\lambda_{2i}^n\right) \times \\ \times \frac{\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}}{\left(-\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n\right)} + \frac{1}{(2s+2)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+2}(x), \quad (3.104)$$

$$T_{2s-1}(x) = (2s-1)\pi \sum_{i=1}^s \left[-\bar{\tau}_{2i}^n \left(1 - 4(2s)(2s+1)\lambda_{2i}^n\right) + \frac{\bar{c}_2^{2i}}{4(2s-1)(2s+1)} \right] \times \\ \times \frac{V_{2i-1}^{2s+1}}{\left(-\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n\right)} + \frac{1}{(2s+2)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+2}(x). \quad (3.105)$$

Для похідних третього порядку непарних поліномів Чебишева справедливим є наступне представлення

$$T_{2s+1}'''(x) = \frac{(2s+1)^2}{2} \pi \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \\ + \frac{1}{15} (2s-1)(2s)(2s+2)(2s+3) T'_{2s+1}(x). \quad (3.106)$$

Вивід формул (3.98)-(3.106) міститься у Додатоку А13.

3.7.1. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів Чебишева в ряд за функціями $V_{2i}^{2s}(x)$

$$\text{Якщо } T_{2s-2j}(x) = \sum_{i=1}^s q_{2i}^{2s-2j} \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \frac{T'_{2s+1}(x)}{(2s+1)^2}, \quad j = 2, \dots, s, \quad \text{то}$$

коефіцієнти q_{2i}^{2s-2j} знаходяться за рекурентною формулою [94]

$$q_{2i}^{2s-2j} = 2 \frac{(2s-2j)}{(2s-2j+3)} \left(1 - 2(2s-2j+3)(2s-2j+1)\lambda_{2i-1}^{2s}\right) q_{2i}^{2s-2j+2} -$$

$$- \frac{(2s-2j)}{(2s-2j+3)} \frac{(2s-2j+1)}{(2s-2j+4)} q_{2i}^{2s-2j+4} + \frac{6\pi \bar{c}_1^{-2i-1}}{(2s-2j+4)(2s-2j+3)}, \quad j = 2, \dots, s, \quad (3.107)$$

$$\text{де } q_{2i}^{2s} = -(2s)\pi \bar{c}_1^{-2s}, \quad q_{2i}^{2s-2} = -(2s-2)\pi \bar{c}_1^{-2s} \left(1 - 4(2s)(2s-1)\lambda_{2i-1}^{2s}\right) + \frac{\bar{c}_1^{-2i-1}\pi}{(2s)}.$$

Для похідних третього порядку парних поліномів Чебишева справедливим є наступне представлення

$$T_{2s+2}'''(x) = \frac{(2s+2)^2}{8} \pi \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_1^{-2i}}{\lambda_{2i}^{2s}} \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{15} (2s)(2s+1)(2s+3)(2s+4) T'_{2s+2}(x). \quad (3.108)$$

Вивід формул (3.107) та (3.108) міститься у Додатку А14.

3.7.2. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу непарних многочленів Чебишева в ряд за функціями $V_{2i-1}^{2s+1}(x)$

$$\text{Якщо } T_{2s-2j+1}(x) = \sum_{i=1}^s q_{2i-1}^{2s-2j+1} \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s}\right)} + \frac{T'_{2s+2}(x)}{(2s+2)^2}, \quad j = 2, \dots, s, \quad \text{то}$$

коефіцієнти $q_{2i-1}^{2s+1-2j}$ знаходяться за рекурентною формулою [94]

$$q_{2i-1}^{2s+1-2j} = 2 \frac{(2s+1-2j)}{(2s+4-2j)} \left(1 - 2(2s+4-2j)(2s+2-2j)\lambda_{2i}^{2s}\right) q_{2i-1}^{2s+3-2j} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(2s+2-2j)(2s+1-2j)}{(2s+4-2j)(2s+5-2j)} q_{2i-1}^{2s+5-2j} + \\
& + \frac{3\pi \bar{c}_2^{-2i}}{2(2s+4-2j)(2s+5-2j)}, \quad j=2, \dots, s,
\end{aligned} \tag{3.109}$$

де $q_{2i-1}^{2s+1} = -(2s+1)\pi \bar{\tau}_{2i}^{-2s}$, $q_{2i-1}^{2s-1} = -(2s-1)\pi \bar{\tau}_{2i}^{-2s} \left(1 - 4(2s)(2s+1)\lambda_{2i}^n\right) + \frac{\bar{c}_2^{-2i}\pi}{4(2s+1)}$.

Вивід формули (3.109) міститься у Додатку А15.

3.7.3. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів Чебишева в ряд за функціями $\bar{V}_{2i}^{2s}(x)$

$$\text{Якщо} \quad T_{2s-2j}(x) = \sum_{i=1}^s \bar{q}_{2i}^{-2s-2j} \frac{\bar{V}_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \frac{T'_{2s+1}(x)}{(2s+1)^2}, \quad j=2, \dots, s, \quad \text{то}$$

коефіцієнти \bar{q}_{2i}^{-2s-2j} знаходяться за рекурентною формулою [94]

$$\begin{aligned}
\bar{q}_{2i}^{-2s-2j} = & \left(2 \frac{(2s-2j+2)}{(2s-2j+3)} - 4(2s-2j+2)(2s-2j+1)\lambda_{2i-1}^{2s} \right) \bar{q}_{2i}^{-2s-2j+2} + \\
& + \left(1 - 2 \frac{(2s-2j+2)}{(2s-2j+3)} \right) \bar{q}_{2i}^{-2s-2j+4}, \quad j=2, \dots, s,
\end{aligned} \tag{3.110}$$

де $\bar{q}_{2i}^{-2s} = (2s+1)\pi \bar{\tau}_{2i-1}^{2s}$, $\bar{q}_{2i}^{-2s-2} = (2s+1)\pi \bar{\tau}_{2i-1}^{2s} \left(1 - 4(2s)(2s-1)\lambda_{2i-1}^n\right)$.

Вивід формули (3.110) міститься у Додатку А16.

3.7.4. Рекурентна формула коефіцієнтів розкладу непарних многочленів Чебишева в ряд за функціями $\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)$

$$\text{Якщо} \quad T_{2s-2j+1}(x) = \sum_{i=1}^s \bar{q}_{2i-1}^{-2s-2j+1} \frac{\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s}\right)} + \frac{T'_{2s+2}(x)}{(2s+2)^2}, \quad j=2, \dots, s, \quad \text{то}$$

коефіцієнти $\bar{q}_{2i-1}^{-2s+1-2j}$ знаходяться за рекурентною формулою [94]

$$\begin{aligned} \bar{q}_{2i-1}^{-2s+1-2j} = & \left(2 \frac{(2s+3-2j)}{(2s+4-2j)} - 4(2s+3-2j)(2s+2-2j)\lambda_{2i}^{2s} \right) \bar{q}_{2i-1}^{-2s+3-2j} + \\ & + \left(1 - 2 \frac{(2s+3-2j)}{(2s+4-2j)} \right) \bar{q}_{2i-1}^{-2s+5-2j}, \quad j = 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (3.111)$$

де $\bar{q}_{2i-1}^{2s+1} = (2s+2)\pi\tau_{2i}^{2s}$, $\bar{q}_{2i-1}^{2s-1} = (2s+2)\pi\tau_{2i}^{2s} \left(1 - 4(2s)(2s+1)\lambda_{2i}^n \right)$.

Вивід формули (3.111) міститься у Додатку А17.

3.8. Представлення поліномів Чебишева через квазіортогональні функції

Справедливою є наступна формула

$$\begin{aligned} T_{2s}(x) = \sum_{i=1}^s \left[2(2s)(2s+1)\pi\bar{\tau}_{2i}^n + \frac{\bar{c}_2^{2i}\pi}{8(2s-1)(2s+1)\lambda_{2i}^n} \right] \frac{U_{2i}^{2s}}{\sigma_{2i}^n} - \\ - \frac{T_{2s+2}''(x)}{(2s+2)^2(2s-1)(2s+1)}, \end{aligned} \quad (3.112)$$

де

$$T_{2s+2}''(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T_{2s+2}''(x) dx = (2s+2)^2 \pi \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_2^{2i}}{8\lambda_{2i}^n} \frac{U_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n}. \quad (3.113)$$

Твердження 3.27. Для квазіспектральних поліномів, які представлені у вигляді

$\bar{U}_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j}^{2i} T_{2j}(x)$, параметр $\bar{\tau}_{2i}^n$ знаходиться за формулою

$$\bar{\tau}_{2i}^n = \frac{\bar{c}_{2s}^{2i}}{4(2s)(2s+1)}.$$

Вивід формул (3.112), (3.113) та доведення твердження 3.27 містяться у Додатку А18.

3.8.1. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів Чебишева в ряд за функціями $U_{2i}^{2s}(x)$

$$\text{Якщо } T_{2s-2j}(x) + \frac{1}{(2s-2j-1)(2s-2j+1)} = \sum_{i=1}^s g_{2i}^{2s-2j} \frac{U_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n},$$

$j = 2, \dots, s-1$, то коефіцієнти g_{2i}^{2s-2j} обчислюються за рекурентною формулою

$$g_{2i}^{2s-2j} = 2 \frac{(2s-2j)}{(2s-2j+3)} \left[\left(1 - 2(2s-2j+3)(2s-2j+1)\lambda_{2i}^{2s} \right) g_{2i}^{2s-2j+2} - \frac{\bar{c}_2^{2i} \pi}{4} \right] - \frac{(2s-2j)(2s-2j+1)}{(2s-2j+4)(2s-2j+3)} g_{2i}^{2s-2j+4}, \quad j = 2, \dots, s-1, \quad (3.114)$$

де $g_{2i}^{2s} = 2(2s)(2s+1)\pi\bar{\tau}_{2i}^n$,

$$g_{2i}^{2s-2} = (2s-2)\pi \left[4(2s)\bar{\tau}_{2i}^n \left(1 - 2(2s+1)(2s-1)\lambda_{2i}^{2s} \right) - \frac{\bar{c}_2^{2i}}{2(2s+1)} \right].$$

Для похідних другого порядку непарних поліномів Чебишева справедливим є наступне представлення

$$T_{2s+1}''(x) = (2s+1)^2 \pi \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{2\lambda_{2i-1}^n} \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n}. \quad (3.115)$$

Твердження 3.28. Для квазіспектральних поліномів, які представлені у вигляді

$$\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x), \text{ параметр } \bar{\tau}_{2i-1}^n \text{ знаходиться за формулою}$$

$$\bar{\tau}_{2i-1}^n = \frac{\bar{c}_{2s-1}^{2i-1}}{4(2s)(2s-1)}.$$

Вивід формул (3.114), (3.115) та доведення твердження 3.28 містяться у Додатку А19.

3.8.2. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу непарних многочленів Чебишева в ряд за функціями $U_{2i-1}^{2s-1}(x)$

$$\text{Якщо } T_{2s-2j-1}(x) = \sum_{i=1}^s g_{2i-1}^{2s-2j-1} \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n}, \quad j = 2, \dots, s-1, \text{ то коефіцієнти}$$

$g_{2i-1}^{2s-2j-1}$ обчислюються за рекурентною формулою [94]

$$g_{2i-1}^{2s-2j-1} = 2 \frac{(2s-2j-1)}{(2s-2j+2)} \left[\left(1 - 2(2s-2j+2)(2s-2j) \lambda_{2i-1}^{2s} \right) g_{2i-1}^{2s-2j+1} - \bar{c}_1^{2i-1} \pi \right] - \frac{(2s-2j-1)(2s-2j)}{(2s-2j+3)(2s-2j+2)} g_{2i-1}^{2s-2j+3}, \quad (3.116)$$

де $g_{2i-1}^{2s-1} = 2(2s)(2s-1)\pi\bar{\tau}_{2i-1}^n$,

$$g_{2i-1}^{2s-3} = 2(2s-3)\pi \left[2(2s-1) \left(1 - 2(2s)(2s-2) \lambda_{2i-1}^{2s} \right) \bar{\tau}_{2i-1}^n - \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{(2s)} \right].$$

Вивід формули (3.116) містяться у Додатку А20.

3.8.3. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів Чебишева в ряд за функціями $\bar{U}_{2i}^{2s}(x)$

Якщо $T_{2s-2j}(x) = \sum_{i=1}^s \bar{g}_{2i}^{2s-2j} \frac{\bar{U}_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n}$, $j = 2, \dots, s-1$, то коефіцієнти \bar{g}_{2i}^{2s-2j}

обчислюються за рекурентною формулою [94]

$$\bar{g}_{2i}^{2s-2j} = 2 \frac{(2s-2j+2)}{(2s-2j+3)} \left(1 - 2(2s-2j+3)(2s-2j+1) \lambda_{2i}^{2s} \right) \bar{g}_{2i}^{2s-2j+2} - \frac{(2s-2j+1)}{(2s-2j+3)} \bar{g}_{2i}^{2s-2j+4}, \quad j = 2, \dots, s-1, \quad (3.117)$$

де $\bar{g}_{2i}^{2s} = 2(2s+1)(2s+2)\pi\tau_{2i}^n$, $\bar{g}_{2i}^{2s-2} = 4(2s+2)(2s)\pi\tau_{2i}^n \left(1 - 2(2s+1)(2s-1) \lambda_{2i}^n \right)$.

Твердження 3.29. Для квазіспектральних поліномів, які представлені у вигляді

$U_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^s c_{2j}^{2i} \tilde{T}_{2j}(x)$, параметр τ_{2i}^n знаходиться за формулою

$$\tau_{2i}^n = \frac{c_{2s}^{2i}}{4(2s+1)(2s+2)}.$$

Вивід формули (3.117) та доведення твердження 3.29 містяться у Додатку А21.

3.8.4. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу непарних многочленів Чебишева в ряд за функціями $\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x)$

Якщо $T_{2s-2j-1}(x) = \sum_{i=1}^s \bar{g}_{2i-1}^{2s-2j-1} \frac{\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n}$, $j = 2, \dots, s-1$, то коефіцієнти

$\bar{g}_{2i-1}^{2s-2j-1}$ обчислюються за рекурентною формулою [94]

$$\begin{aligned} \bar{g}_{2i-1}^{2s-2j-1} = & 2 \frac{(2s-2j+1)}{(2s-2j+2)} \left(1 - 2(2s-2j+2)(2s-2j)\lambda_{2i-1}^{2s} \right) \bar{g}_{2i-1}^{2s-2j+1} - \\ & - \frac{(2s-2j)}{(2s-2j+2)} \bar{g}_{2i-1}^{2s-2j+3}, \quad j = 2, \dots, s-1, \end{aligned} \quad (3.118)$$

де $\bar{g}_{2i-1}^{2s-1} = 2(2s)(2s+1)\pi\tau_{2i-1}^n$,

$$\bar{g}_{2i-1}^{2s-3} = 4(2s-1)(2s+1)\pi\tau_{2i-1}^n \left(1 - 2(2s)(2s-2)\lambda_{2i-1}^n \right).$$

Твердження 3.30. Для квазіспектральних поліномів, які представлені у вигляді

$U_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s c_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x)$, параметр τ_{2i-1}^n знаходиться за формулою

$$\tau_{2i-1}^n = \frac{c_{2s-1}^{2i-1}}{4(2s)(2s+1)}.$$

Вивід формули (3.118) та доведення твердження 3.30 містяться у Додатку А22.

3.9. Зведення рядів Фур'є-Чебишева до біортогональних розкладів

Нехай

$$f(x) = \sum_{i=1}^{s+1} f_{2i-2+\bar{i}} T_{2i-2+\bar{i}}(x), \quad (3.119)$$

де $\bar{i} = 0$ - для парних поліномів, та $\bar{i} = 1$ - для непарних поліномів.

Підставимо у розклад (3.119), знайдені представлення многочленів Чебишева згідно з формулами (3.110), (3.111). Дістанемо [81, 94]

$$f(x) = \sum_{i=1}^s -\frac{\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{2s+\bar{i}}(x)}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n \sigma_{2i-1+\bar{i}}^n} \sum_{k=1}^{s+1} f_{2k-2+\bar{i}} \bar{q}_{2i-\bar{i}}^{2k-2+\bar{i}} + \sum_{k=1}^{s+1} f_{2k-2+\bar{i}} \frac{T'_{2s+1+\bar{i}}(x)}{(2s+1+\bar{i})^2}. \quad (3.120)$$

Підставимо у розклад (3.119), знайдені представлення многочленів Чебишева згідно з формулами (3.107), (3.109). Дістанемо [81, 94]

$$f(x) = \sum_{i=1}^s -\frac{V_{2i-\bar{i}}^{2s+\bar{i}}(x)}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n \sigma_{2i-1+\bar{i}}^n} \sum_{k=1}^{s+1} f_{2k-2+\bar{i}} q_{2i-\bar{i}}^{2k-2+\bar{i}} + \sum_{k=1}^{s+1} f_{2k-2+\bar{i}} \frac{T'_{2s+1+\bar{i}}(x)}{(2s+1+\bar{i})^2}. \quad (3.121)$$

Нехай

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^s \tilde{f}_{2i-\bar{i}} T_{2i-\bar{i}}(x). \quad (3.122)$$

Підставимо у розклад (3.122), знайдені представлення многочленів Чебишева згідно з формулами (3.117), (3.118). Дістанемо [81, 94]

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^s \frac{\bar{U}_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}}(x)}{\sigma_{2i-\bar{i}}^n} \sum_{k=1}^s \tilde{f}_{2k-\bar{i}} \bar{g}_{2i-\bar{i}}^{2k-\bar{i}}. \quad (3.123)$$

Підставимо у розклад (3.122), знайдені представлення многочленів Чебишева згідно з формулами (3.114), (3.116). Дістанемо [81, 94]

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^s \frac{U_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}}(x)}{\sigma_{2i-\bar{i}}^n} \sum_{k=1}^s \tilde{f}_{2k-\bar{i}} g_{2i-\bar{i}}^{2k-\bar{i}} - \sum_{k=1}^s \tilde{f}_{2k-\bar{i}} \frac{1-\bar{i}}{(2k-1)(2k+1)}. \quad (3.124)$$

Висновки до розділу

Третій розділ присвячений побудові та дослідженню властивостей квазіортогональних та біортогональних функцій. Для підтвердження теоретичних викладок наведено числові експерименти. Подано алгоритми знаходження квазіспектральних та біортогональних функцій, що були використані в роботі. Сформульовано задачі на власні значення оператора проектування. Побудована рекурентна формула для знаходження характеристичного поліному для знаходження власних значень описаного оператора та проведено їх оцінку. Описано формулювання квазіспектральних

та спряжених квазіспектральних задач. Розроблено алгоритми побудови квазіспектральних поліномів та біортогональних поліномів.

Подаються поліноми Чебишева та їх похідні через біортогональні функції. Знайдено рекурентну формулу для коефіцієнтів розкладу многочленів Чебишева в ряд за біортогональними функціями. Знайдено рекурентні формули для коефіцієнтів розкладу многочленів Чебишева в ряд за квазіспектральними та біортогональними функціями. Подаються поліноми Чебишева та їх другі похідні через квазіортогональні функції, а також знаходяться параметри $\bar{\tau}_{2i}^n$, $\bar{\tau}_{2i-1}^n$, τ_{2i}^n , τ_{2i-1}^n , які доповнюють побудовані поліноми до повної біортогональної системи. Подаються ряди Фур'є-Чебишева через біортогональні розклади.

РОЗДІЛ 4

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ БІОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТІВ.

У другому розділі подано математичні моделі переносу газу в деяких технологічних об'єктах газотранспортної системи та сформульовані відповідні крайові задачі. В третьому розділі на базі многочленів Чебишева побудовані та досліджені біортогональні системи функцій, які використовуються для вирішення сформульованих задач. Очевидно, що для вирішення практичних задач необхідно апробувати метод на модельній задачі.

4.1. Алгоритм розв'язку модельної задачі типу теплопровідності

Формулювання задачі. Необхідно знайти розподіл функції $f(x, t)$ для довільного часу $t, t > 0$, на проміжку $x \in [-1, 1]$, який задовольняє рівняння [86, 87, 116]

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.1)$$

за наступних крайових умов :

$$f(x, 0) = 0, \quad (4.2)$$

$$f(-1, t) = \sqrt{\pi} / (a\sqrt{t}), \quad (4.3)$$

$$f(1, t) = 0. \quad (4.4)$$

Розв'язок задачі (4.1)-(4.4) шукатимемо у вигляді

$$\tilde{F}_{n+1}(x, t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) \left(V_i^{n+i}(x) + \mathcal{G}_i T'_{n+1+i}(x) \right), \quad (4.5)$$

де $V_i^{n+\bar{i}}(x)$, $\bar{V}_i^{n+\bar{i}}(x)$ - біортогональні функції порядку $n+\bar{i}$ та $T'_{n+1+\bar{i}}(x)$ - перша похідна від многочленів Чебишева першого роду степеня $n+1+\bar{i}$, для яких справджуються рівності

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) T'_{n+1+\bar{i}}(x) dx = 0, \quad (4.6)$$

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) \bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) T'_{n+1+\bar{i}}(x) dx = 0, \quad (4.7)$$

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) \bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) dx = N_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}, \quad (4.8)$$

$$\int_{-1}^1 \varpi(x) (T'_{n+1+\bar{i}}(x))^2 dx = (n+1+\bar{i})^3 \pi, \quad (4.9)$$

$\varpi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $n=2s$, $\bar{i}=0$ - для парних функцій та $\bar{i}=1$ - для непарних

функцій. Для того, щоб розв'язок (4.5) задовольняв умову (4.2), потрібно знайти такі функції $\eta_i(t)$, $i=1, \dots, n$ щоб $\eta_i(0)=0$. Оскільки $V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(-1) = V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(1) = 0$, $T'_{n+1+\bar{i}}(-1) = (-1)^{\bar{i}} T'_{n+1+\bar{i}}(1) = (-1)^{\bar{i}} (n+1+\bar{i})^2$, то з умов (4.3) та (4.4) дістанемо відповідно [116]

$$\tilde{F}_{n+1}(-1, t) = \sum_{\bar{i}=0}^1 \sum_{i=1}^s (-1)^{\bar{i}} (n+1+\bar{i})^2 \mathcal{G}_{2i-\bar{i}} \eta_{2i-\bar{i}}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}},$$

$$\tilde{F}_{n+1}(1, t) = \sum_{\bar{i}=0}^1 \sum_{i=1}^s (n+1+\bar{i})^2 \mathcal{G}_{2i-\bar{i}} \eta_{2i-\bar{i}}(t) = 0,$$

або

$$\frac{\tilde{F}_{n+1}(1, t) - \tilde{F}_{n+1}(-1, t)}{2(n+2)^2} = \sum_{i=1}^s \mathcal{G}_{2i-1} \eta_{2i-1}(t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2(n+2)^2 a\sqrt{t}}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\tilde{F}_{n+1}(1, t) + \tilde{F}_{n+1}(-1, t)}{2(n+1)^2} = \sum_{i=1}^s \mathcal{G}_{2i} \eta_{2i}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(n+1)^2 a\sqrt{t}}. \quad (4.11)$$

Тоді,

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}_{n+1}(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) \left(-\frac{V_i^{n+\bar{i}}(x)}{\lambda_{i+(-1)^{i+1}}^n} + \frac{\tau_{i+(-1)^{i+1}}^n}{\lambda_{i+(-1)^{i+1}}^n} T'_{n+1+\bar{i}}(x) + \mathcal{G}_i \left[\frac{(n+1+\bar{i})^2 \pi}{2^{2\bar{i}+1}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2j-1+\bar{i}}}{\lambda_{2j-1+\bar{i}}^n} \frac{V_{2j-\bar{i}}^{n+\bar{i}}}{N_{2j-\bar{i}}^{n+\bar{i}}} + \frac{1}{15} (n-1+\bar{i})(n+\bar{i})(n+2+\bar{i})(n+3+\bar{i}) T'_{n+1+\bar{i}}(x) \right] \right), \quad (4.12)$$

де $N_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}} = \int_{-1}^1 \frac{V_i^{n+\bar{i}}(x) \bar{V}_i^{n+\bar{i}}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad i=1, \dots, n.$

$$\frac{\partial \tilde{F}_{n+1}(x,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{d\eta_i(t)}{dt} \left(V_i^{n+\bar{i}}(x) + \mathcal{G}_i T'_{n+1+\bar{i}}(x) \right). \quad (4.13)$$

Підставимо формули (4.12) та (4.13) в рівняння (4.3). Враховуючи умови (4.10) та (4.11), дістанемо

$$-\eta_{2i-1}(t) \frac{N_{2i-1}}{\lambda_{2i}^n} - \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{c}_2^{2i}}{16at^2 \lambda_{2i}^n} - \frac{N_{2i-1}}{a^2} \frac{d\eta_{2i-1}(t)}{dt} = 0, \quad i=1, \dots, s,$$

$$-\eta_{2i}(t) \frac{N_{2i}}{\lambda_{2i-1}^n} + \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{c}_1^{2i-1}}{4at^2 \lambda_{2i-1}^n} - \frac{N_{2i}}{a^2} \frac{d\eta_{2i}(t)}{dt} = 0, \quad i=1, \dots, s.$$

Отже, ми отримали n диференціальних рівнянь, розв'язками яких є інтеграли Досона [20]

$$\eta_{2i-1}(t) = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{c}_2^{2i}}{8\sqrt{\lambda_{2i}^n} N_{2i-1}} e^{-\frac{a^2}{\lambda_{2i}^n} t \sqrt{\lambda_{2i}^n} \sqrt{t}} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{\lambda_{2i}^n}} \sqrt{t}} e^{q^2} dq, \quad i=1, \dots, s,$$

$$\eta_{2i}(t) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{c}_1^{2i-1}}{2\sqrt{\lambda_{2i-1}^n} N_{2i}} e^{-\frac{a^2}{\lambda_{2i-1}^n} t \sqrt{\lambda_{2i-1}^n} \sqrt{t}} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{\lambda_{2i-1}^n}} \sqrt{t}} e^{q^2} dq, \quad i=1, \dots, s.$$

Підставимо формули (4.12) та (4.13) в рівняння (4.3). Отримане таким чином рівняння домножатимемо на $\frac{T'_{n+2}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, та, зінтегрувавши в межах від -1 до 1, дістанемо

$$\sum_{i=1}^s \left(\eta_{2i-1}(t) \left[\frac{\tau_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n} + \mathcal{G}_{2i-1} \frac{n(n+1)(n+3)(n+4)}{15} \right] - \frac{\mathcal{G}_{2i-1}}{a^2} \frac{d\eta_{2i-1}(t)}{dt} \right) (n+2)^3 \pi = 0. \quad (4.14)$$

Отримане таким чином рівняння домножатимемо на $\frac{T'_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, та,

зінтегрувавши в межах від -1 до 1, дістанемо

$$\sum_{i=1}^s \left(\eta_{2i}(t) \left[\frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} + \mathcal{G}_{2i} \frac{n(n-1)(n+2)(n+3)}{15} \right] - \frac{\mathcal{G}_{2i}}{a^2} \frac{d\eta_{2i}(t)}{dt} \right) (n+1)^3 \pi = 0. \quad (4.15)$$

З рівнянь (4.14) та (4.15) знайдемо невідомі коефіцієнти \mathcal{G}_i , $i = 1, \dots, n$.

Запишемо рівняння (4.14) у вигляді

$$\sum_{i=1}^s \eta_{2i-1}(t) \frac{\tau_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n} + \frac{n(n+1)(n+3)(n+4)}{15} \sum_{i=1}^s \mathcal{G}_{2i-1} \eta_{2i-1}(t) - \sum_{i=1}^s \frac{\mathcal{G}_{2i-1}}{a^2} \frac{d\eta_{2i-1}(t)}{dt} = 0. \quad (4.16)$$

Враховуючи умову (4.10) та рівність $\frac{d\eta_{2i-1}(t)}{dt} = -\frac{a^2}{\lambda_{2i}^n} \eta_{2i-1}(t) - \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{c}_2^{2i} a}{16 \lambda_{2i}^n N_{2i-1}^n \sqrt{t}}$,

$i = 1, \dots, s$, рівняння (4.16) прийме вигляд

$$\sum_{i=1}^s \eta_{2i-1}(t) \left(\frac{\tau_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n} + \frac{\mathcal{G}_{2i-1}}{\lambda_{2i}^n} \right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \left(\frac{n(n+1)(n+3)(n+4)}{15(n+2)^2} - \sum_{i=1}^s \mathcal{G}_{2i-1} \frac{\pi \bar{c}_2^{2i}}{8 \lambda_{2i}^n N_{2i-1}^n} \right) = 0. \quad (4.17)$$

Припустимо, що $\frac{\tau_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n} + \frac{\mathcal{G}_{2i-1}}{\lambda_{2i}^n} = 0$, $i = 1, \dots, s$, тоді $\mathcal{G}_{2i-1} = -\tau_{2i}^n$, $i = 1, \dots, s$. Якщо наше

припущення вірне, то повинна виконуватись і рівність

$$\frac{n(n+1)(n+3)(n+4)}{15(n+2)^2} + \sum_{i=1}^s \tau_{2i}^n \frac{\pi \bar{c}_2^{2i}}{8 \lambda_{2i}^n N_{2i-1}^n} = 0. \quad (4.18)$$

Попередньо знайдена нами формула

$$T_{n+2}'''(x) = \frac{(n+2)^2 \pi}{8} \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_2^{2i}}{\lambda_{2i}^n} \frac{V_{2i-1}^{n+1}(x)}{N_{2i-1}^n} + \frac{n(n+1)(n+3)(n+4)}{15} T_{n+2}'(x).$$

Домножимо останню рівність на $T_{n+1}(x)$ та зінтегруємо з вагою

$\varpi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в межах від -1 до 1, та враховуючи ортогональність многочленів

Чебишева першого роду, оскільки: $T_{n+2}'''(x)$ - є многочленом $(n-1)$ -го степеня;

із розкладу функцій $V_{2i-1}^{n+1}(x)$, $i=1, \dots, s$ за многочленами Чебишева першого

роду маємо при $T_{n+1}(x)$ коефіцієнти $\frac{c_n^{2i}}{2(n+1)}$, де $c_n^{2i} = 4(n+1)(n+2)\tau_{2i}^n$;

многочлен $T_{n+2}'(x) = 2(n+2)[T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) + \dots + T_3(x) + T_1(x)]$, дістанемо

$$0 = \frac{(n+2)^2 \pi}{8} \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_2^{2i}}{\lambda_{2i}^n} \frac{1}{N_{2i-1}} \frac{c_n^{2i}}{2(n+1)} \frac{\pi}{2} + \frac{n(n+1)(n+3)(n+4)}{15} 2(n+2) \frac{\pi}{2}.$$

За допомогою арифметичних перетворень отримаємо рівність (4.18). Отже,

$$\mathcal{G}_{2i-1} = -\tau_{2i}^n, \quad i=1, \dots, s.$$

Аналогічно, з рівняння (4.15) враховуючи умову (4.11) та рівність

$$\frac{d\eta_{2i}(t)}{dt} = -\frac{a^2}{\lambda_{2i-1}^n} \eta_{2i}(t) + \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{c}_1^{2i-1} a}{4\lambda_{2i-1}^n N_{2i}^n \sqrt{t}}, \quad i=1, \dots, s, \quad \text{дістанемо [86, 87, 116]}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^s \eta_{2i}(t) \left(\frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} + \frac{\mathcal{G}_{2i}}{\lambda_{2i-1}^n} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \left(\frac{(n-1)n(n+2)(n+3)}{15(n+1)^2} - \sum_{i=1}^s \mathcal{G}_{2i} \frac{\pi \bar{c}_1^{2i-1}}{2\lambda_{2i-1}^n N_{2i}^n} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Припустимо, що $\frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} + \frac{\mathcal{G}_{2i}}{\lambda_{2i-1}^n} = 0$, $i=1, \dots, s$, тоді $\mathcal{G}_{2i} = -\tau_{2i-1}^n$, $i=1, \dots, s$.

Якщо наше припущення вірне, то повинна виконуватись і рівність

$$\frac{(n-1)n(n+2)(n+3)}{15(n+1)^2} + \sum_{i=1}^s \tau_{2i-1}^n \frac{\pi \bar{c}_1^{2i-1}}{2\lambda_{2i-1}^n N_{2i}^n} = 0. \quad (4.20)$$

Попередньо знайдена нами формула

$$T_{n+1}'''(x) = \frac{(n+1)^2 \pi}{2} \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{V_{2i}^n(x)}{N_{2i}^n} + \frac{(n-1)n(n+2)(n+3)}{15} T_{n+1}'(x).$$

Домножимо останню рівність на $T_n(x)$ та зінтегруємо з вагою

$\varpi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в межах від -1 до 1, та враховуючи ортогональність многочленів

Чебишева першого роду, оскільки: $T_{n+1}'''(x)$ - є многочленом $(n-2)$ -го степеня;

із розкладу функцій $V_{2i}^n(x)$, $i=1, \dots, s$ за многочленами Чебишева першого роду

маємо при $T_n(x)$ коефіцієнти $\frac{c_{n-1}^{2i-1}}{2n}$, де $c_{n-1}^{2i-1} = 4n(n+1)\tau_{2i-1}^n$; многочлен

$$T_{n+1}'(x) = 2(n+1) \left[T_n(x) + T_{n-2}(x) + \dots + T_2(x) + \frac{T_0(x)}{2} \right], \text{ дістанемо}$$

$$0 = \frac{(n+1)^2 \pi}{2} \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{1}{N_{2i}^n} \frac{c_{n-1}^{2i-1} \pi}{2n} + \frac{(n-1)n(n+2)(n+3)}{15} 2(n+1) \frac{\pi}{2}.$$

За допомогою арифметичних перетворень отримаємо рівність (4.20). Отже,

$$\mathcal{G}_{2i} = -\tau_{2i-1}^n, \quad i=1, \dots, s.$$

Таким чином, розв'язок задачі (4.1)-(4.4) записується у вигляді [116]

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{n+1}(x, t) = & \sum_{\bar{i}=0}^1 \sum_{i=1}^s (-1)^{\bar{i}} \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{c}_{1+\bar{i}}^{2i-1+\bar{i}}}{2^{2\bar{i}+1} \sqrt{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} N_{2i-\bar{i}}^n} \exp\left(-\frac{a^2}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} t\right) \times \\ & \times \int_0^{\frac{a}{\sqrt{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n}} \sqrt{t}} e^{q^2} dq \left(V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) + (-1)^{\bar{i}} \tau_{2i-1+\bar{i}}^n T_{n+1+\bar{i}}'(x) \right). \quad (4.21) \end{aligned}$$

Слід зазначити, що параметри $\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2i-1+\bar{i}}$, $\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n$, $N_{2i-\bar{i}}^n$, $\tau_{2i-1+\bar{i}}^n$ із розв'язку (4.21) можуть бути обчислені з довільною точністю і знайдені з алгоритму побудови біортогональних функцій $V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$, $\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$. Для довільного натурального числа n можна побудувати бази даних із значеннями цих параметрів і використовувати їх під час обчислення розв'язку. Для

інтегралу Досона в літературі побудовані таблиці, якими ми можемо скористатися під час обчислення отриманого розв'язку.

Обчислювальний експеримент 4.1. Результати обчислень для різних значень параметрів при $n=8$, $a=0,5$ з точністю обчислень 10^{-8} подано у вигляді таблиць.

Таблиця 4.1.

Значення шуканого розв'язку для різних значень часів та координати.

x_i	$t=0,5$	$t=1$	$t=10$	$t=50$	$t=100$	$t=500$
-1	5,0119420	3,5468288	1,1211398	,50149199	,35477064	,15928751
-,9	4,9144021	3,5092275	1,0830804	,47754666	,33723766	,15072589
-,8	4,6285700	3,4057835	1,0428577	,45354789	,31983641	,14268065
-,7	4,1868309	3,2400544	1,0004051	,42940746	,30243921	,13481420
-,6	3,6391157	3,0209707	,95570088	,40509050	,28498734	,12696397
-,5	3,0402885	2,7607144	,90876102	,38059519	,26746463	,11907438
-,4	2,4412196	2,4729552	,85962547	,35593443	,24987556	,11114569
-,3	1,8831349	2,1714683	,80835482	,33112572	,23223202	,10319951
-,2	1,3947101	1,8690781	,75502516	,30618499	,21454532	,095257504
-,1	,99142618	1,5768986	,69972601	,28112384	,19682194	,087330585
0	,67669312	1,3038416	,64255998	,25594976	,17906362	,079416826
,1	,44425132	1,0563606	,58364281	,23066810	,16126896	,071504905
,2	,28135562	,83839813	,52310384	,20528483	,14343648	,063580996
,3	,17225023	,65150504	,46108657	,17980904	,12556772	,055636338
,4	,10144246	,49510018	,39774847	,15425459	,10766902	,047673168
,5	,05628390	,36683914	,33325995	,12863945	,089751459	,039706400
,6	,02836146	,26305917	,26780120	,10298214	,071827106	,031758533
,7	,01321320	,17927103	,20155770	,077294281	,053901096	,023845386
,8	,00787294	,11066534	,13471296	,051568348	,035958215	,015950117
,9	,00574532	,05259748	,06743745	,025758993	,017942518	,007982812
1	-,0116674	,00102866	-,00012446	-,00024159	-,000270306	-,000276427

При цьому для $a=0,5$ і різних часів t вираз $\sqrt{\pi}/(a\sqrt{t})$ приймає наступні точні

значення: $\sqrt{\pi}/(a\sqrt{0,5})=5,0132566$; $\sqrt{\pi}/(a\sqrt{1})=3,5449078$;

$$\sqrt{\pi}/(a\sqrt{10})=1,1209983; \quad \sqrt{\pi}/(a\sqrt{50})=0,50132568; \quad \sqrt{\pi}/(a\sqrt{100})=0,35449078;$$

$$\sqrt{\pi}/(a\sqrt{500})=0,15853310.$$

Таблиця 4.2.

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$ для різних значень n . $F(1) = 2,7607599369771738174927508774357$

n	$\tilde{F}(t)$	$\varepsilon(t) = F(t) - \tilde{F}(t)$
2	2,6	,962836470952792827888773533285e-1
4	2,70	,523345828255073827237813804305e-1
6	2,75	,44441767641862157109171128536e-2
8	2,76071	,458336359766409694367320554e-4
10	2,76076	-,42161315400923004873303670e-5
12	2,76075998	-,452531079446432534914578e-7
14	2,760759939	-,23339733240911044824291e-8
16	2,760759937	-,4208575062358569368955e-9
18	2,76075993699	-,135548174008647124497e-10
20	2,76075993697718	-,64200298583496486e-14
22	2,76075993697716	,78606925159893408e-14
24	2,7607599369771736	,1612863218565974e-15
26	2,7607599369771738171	,3824810940571e-18
28	2,7607599369771738175	-,266520128343e-19
30	2,760759936977173817493	-,3177550553e-21

Таблиця 4.3.

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$ для різних значень n . $F(10) = 0,90875516534858767964738572885409$

n	$\tilde{F}(t)$	$\varepsilon(t) = F(t) - \tilde{F}(t)$
2	,904	,405090414620094712624562712499e-2
4	,909	-,35143252809158236361787648317e-3
6	,908758	-,350357763383692395591762032e-5
8	,9087551659	-,60507545167522780573514e-9
10	,9087551652	,6041884080753687243453e-10
12	,90875516534854	,4194020361055468501e-13
14	,90875516534858764	,3649570505290440e-16
16	,908755165348587675	,411603855577390e-17
18	,90875516534858767963	,1380217455459e-19
20	,908755165348587679647386	-,86413132e-24
22	,9087551653485876796473858	-,7192040e-25
24	,90875516534858767964738575	-,2914605e-25
26	,9087551653485876796473854	,24231491e-24
28	,908755165348587679647384	,167971901e-23
30	,908755165348587679647386	-,104567923e-23

Таблиця 4.4.

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$ для різних значень n . $F(100) = 0,26745329907430745958847151009006$

n	$\tilde{F}(t)$	$\varepsilon(t) = F(t) - \tilde{F}(t)$
2	,2673	,7633679891992961082682450233e-4
4	,2674538	-,58186215816927873374477961e-6
6	,2674532996	-,52817074635788010334593e-9
8	,26745329907432	-,1659123163628916561e-13
10	,2674532990743072	,16141383334577214e-15
12	,26745329907430745951	,7114934422782e-19
14	,267453299074307459588470	,75345463e-24
16	,267453299074307459588471518	-,797863e-26
18	,2674532990743074595884715101	-,2814e-28
20	,26745329907430745958847151003	,5973e-28
22	,26745329907430745958847150	,190216e-26
24	,267453299074307459588471519	-,917465e-26
26	,2674532990743074595884714	,7661573e-25
28	,267453299074307459588470	,53102078e-24
30	,2674532990743074595884718	-,33053034e-24

Таблиця 4.5.

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$ для різних значень n . $F(500) = 0,11903912959435021003368439929858$

n	$\tilde{F}(t)$	$\varepsilon(t) = F(t) - \tilde{F}(t)$
2	,119032	,664741832108511835457388736e-5
4	,11903913	-,1000356251170188059501251e-7
6	,119039129596	-,179195144438472167428e-11
8	,11903912959435022	-,1154504138853241e-16
10	,11903912959435021001	,2108961402425e-19
12	,119039129594350210033682	,183125362e-23
14	,1190391295943502100336843993	-,5693e-28
16	,11903912959435021003368439926	,2949e-28
18	,1190391295943502100336843993	-,343e-29
20	,11903912959435021003368439927	,1941e-28
22	,119039129594350210033684398	,71054e-27
24	,1190391295943502100336844	-,406352e-26
26	,11903912959435021003368436	,3431363e-25
28	,1190391295943502100336841	,23737649e-24
30	,1190391295943502100336845	-,14780139e-24

Всі результати здійснювались для $n \leq 30$ при 32 вузлах у квадратурах Гауса. Через $F(t)$ - позначене точне значення, $\tilde{F}(t)$ - наближене значення, $\varepsilon(t) = F(t) - \tilde{F}(t)$ - абсолютна похибка, n - кількість членів ряду. Розрахунки проведені з точністю 10^{-32} .

При $n=8$, $a=0.5$ з точність обчислень 10^{-6} дістаємо наступні результати:

$$\sqrt{\pi}/(a\sqrt{0.5}) = 5.01325; \quad \sqrt{\pi}/(a\sqrt{1}) = 3.54490; \quad \sqrt{\pi}/(a\sqrt{10}) = 1.12100;$$

$$\sqrt{\pi}/(a\sqrt{50}) = 0.501324; \quad \sqrt{\pi}/(a\sqrt{100}) = 0.354490; \quad \sqrt{\pi}/(a\sqrt{500}) = 0.158533;$$

Таблиця 4.6.

Значення шуканого розв'язку за різних значень часу t та координати x

x_i	$t=0.5$	$t=1$	$t=10$	$t=50$	$t=100$	$t=500$
-1	5.01268	3.54821	1.12572	.517893	.375457	.228507
-.9	4.91499	3.50970	1.08400	.480291	.339709	.161329
-.8	4.62900	3.40598	1.04288	.452670	.318095	.138276
-.7	4.18711	3.24020	1.00043	.428576	.301407	.131496
-.6	3.63916	3.02102	.955795	.404948	.285286	.127469
-.5	3.04023	2.76073	.908798	.380751	.268278	.121342
-.4	2.44113	2.47293	.859535	.355954	.250386	.112788
-.3	1.88306	2.17142	.808197	.330895	.232158	.103223
-.2	1.39471	1.86907	.754911	.305877	.214095	.0940901
-.1	.991487	1.57692	.699759	.281002	.196406	.0860748
0	.676790	1.30389	.642743	.256162	.178981	.0789561
.1	.444319	1.05640	.583881	.231128	.161518	.0719295
.2	.281332	.838391	.523231	.205703	.143721	.0641525
.3	.172137	.651422	.460964	.179859	.125500	.0553055
.4	.101258	.494949	.397376	.153812	.107100	.0459441
.5	.056127	.366715	.332845	.127989	.0890377	.0374292
.6	.028357	.263071	.267731	.102806	.0718342	.0312092
.7	.013396	.179478	.202148	.0782226	.0554262	.0272405
.8	.008140	.110953	.135672	.0530337	.0381859	.0213304
.9	.005278	.052146	.066777	.0237566	.0154357	.0011599
1	-.01443	-.001949	-.007669	-.016781	-.0225105	-.0591832

Висновки. Отримані результати підтверджують ефективність застосування біортогональних поліномів для розв'язування задач математичної фізики. На обчислення наближеного розв'язку задачі суттєвий вплив має не

лише кількість доданків n суми відповідного ряду, але й точність обчислення. В ході обчислювального експерименту, із таблиці 4.3 чітко видно, що при $n \geq 26$ для $t=10$ абсолютна похибка зростає. Зростання похибки спостерігається і в таблицях 4.4 та 4.5 при $n \geq 24$ для $t=100$ та при $n \geq 20$ для $t=500$ відповідно. В таких випадках слід збільшити точність обчислень, оскільки, з точністю обчислення 10^{-32} спостерігається накопичення похибок. [87, 116]

4.2. Моделювання процесу руху газу в трубопроводі (модель 2.1)

Не зменшуючи загальності, будемо розглядати горизонтальні трубопроводи без врахування сили Коріоліса при постійному значенні коефіцієнта стисливості, тобто $\alpha_k = 0$ і відповідно $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 0$. Тому систему (2.13) запишемо у вигляді [15, 80, 95]

$$\begin{cases} \frac{\partial p(y,t)}{\partial y} + \frac{\partial \omega(y,t)}{\partial t} + d_3 p(y,t) = -d_4, \\ \frac{\partial \omega(y,t)}{\partial y} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p(y,t)}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Оскільки, довжина трубопроводу рівна l , тобто $0 \leq y \leq l$, а функції, за допомогою яких ми будемо розв'язувати дану задачу розглядаються на проміжку $[-1,1]$, то зробимо заміну

$$\begin{aligned} y &= \frac{l(x+1)}{2}, \\ \omega(y,t) &= \omega\left(\frac{l(x+1)}{2}, t\right) = W(x,t), \\ p(y,t) &= p\left(\frac{l(x+1)}{2}, t\right) = P(x,t). \end{aligned} \quad (4.23)$$

З (4.23) отримуємо

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{l}, \quad \frac{\partial \omega(y,t)}{\partial y} = \frac{2}{l} \frac{\partial W(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial p(y,t)}{\partial y} = \frac{2}{l} \frac{\partial P(x,t)}{\partial x}. \quad (4.24)$$

Враховуючи (4.23) та (4.24), систему (4.22) та умови (2.8), (2.11) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \frac{2}{l} \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} + d_3 P(x,t) = -d_4, \\ \frac{2}{l} \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (4.25)$$

$$P(x,0) = \sqrt{p_0^2 - \frac{\chi z RT}{D} \left(\frac{\rho_s q_s}{s_0} \right)^2} \frac{l(x+1)}{2}, \quad (4.26)$$

$$W_0 = W(-1,t) = \frac{\rho_s}{s_0} q_0(t), \quad W_L = W(1,t) = \frac{\rho_s}{s_0} q_l(t). \quad (4.27)$$

З другого рівняння системи (4.25) дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= -\frac{2c^2}{l} \frac{\partial W(x,t)}{\partial x}, \\ P(x,t) &= -\frac{2c^2}{l} \int_0^t \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} dt + P(x,0). \end{aligned} \quad (4.28)$$

I-ий спосіб

Продиференціюємо перше рівняння системи (4.25) по змінній t , а друге – по змінній x і дістанемо

$$\begin{cases} \frac{2}{l} \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + d_3 \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = 0, \\ \frac{2}{l} \frac{\partial W^2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x \partial t} = 0, \end{cases}$$

або

$$\frac{l}{2} \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + \frac{ld_3}{2} \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{2c^2}{l} \frac{\partial W^2(x,t)}{\partial x^2}.$$

Враховуючи (4.28), останнє рівняння запишемо

$$\frac{l}{2} \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + \frac{ld_3}{2} \left(-\frac{2c^2}{l} \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right) = \frac{2c^2}{l} \frac{\partial W^2(x,t)}{\partial x^2},$$

або

$$\frac{4c^2}{l^2} \frac{\partial W^2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + \frac{2c^2 d_3}{l} \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = 0. \quad (4.29)$$

Нехай

$$W(x,t) = V(x) e^{\beta_\kappa x} G(t),$$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = \left(V'_x(x) e^{\beta_\kappa x} + \beta_\kappa V(x) e^{\beta_\kappa x} \right) G(t), \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} = \left(V''_{xx}(x) e^{\beta_\kappa x} + 2\beta_\kappa V'_x(x) e^{\beta_\kappa x} + \beta_\kappa^2 V(x) e^{\beta_\kappa x} \right) G(t).$$

Підставимо (4.30) у рівняння (4.29) і дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{4c^2}{l^2} \left(V''_{xx}(x) + 2\beta_\kappa V'_x(x) + \beta_\kappa^2 V(x) \right) e^{\beta_\kappa x} G(t) - V(x) e^{\beta_\kappa x} G''_{tt}(t) + \\ + \frac{2c^2 d_3}{l} \left(V'_x(x) + \beta_\kappa V(x) \right) e^{\beta_\kappa x} G(t) = 0, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{4c^2}{l^2} V''_{xx}(x) G(t) + \left(\frac{8c^2}{l^2} \beta_\kappa + \frac{2c^2 d_3}{l} \right) V'_x(x) G(t) + \\ + \left(\frac{4c^2}{l^2} \beta_\kappa^2 G(t) - G''_{tt}(t) + \frac{2c^2 d_3}{l} \beta_\kappa G(t) \right) V(x) = 0. \end{aligned}$$

В останньому рівнянні потрібно знайти невідомий коефіцієнт β_κ такий, щоб множник при $V'_x(x)$ перетворювався в нуль, тобто

$$\left[\frac{8c^2}{l^2} \beta_\kappa + \frac{2c^2 d_3}{l} \right] = 0. \quad \beta_\kappa = -\frac{ld_3}{4}.$$

Таким чином дістанемо

$$\frac{4c^2}{l^2} V''_{xx}(x) G(t) - \left(\frac{c^2 d_3}{4} G(t) + G''_{tt}(t) \right) V(x) = 0. \quad (4.31)$$

4.2.1. Наближено-аналітична модель (І-ий спосіб)

Добуток $V(x)G(t)$ представимо у вигляді [15]

$$V(x)G(t) = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x)G_i(t), \quad (4.32)$$

де $V_{n+1}^{n+1}(x) = T'_{n+2}(x)$, $V_{n+2}^n(x) = T'_{n+1}(x)$, $\bar{i} = 0$ - для парних значень i , та $\bar{i} = 1$ - для непарних значень i . $T_{n+1} = T_{n+1}(x)$ та $T_{n+2} = T_{n+2}(x)$ поліноми Чебишева степеня $n+1$ та $n+2$.

Тоді,

$$\begin{aligned} V(x)G''(t) &= \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}} G_i''(t), \\ V''_{xx}(x)G(t) &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{V_i^{n+\bar{i}}(x)}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} + \frac{\tau_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n T'_{n+1+\bar{i}}(x)}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} \right) G_i(t) + \\ &+ \left(\frac{(n+2)^2 \pi}{8} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_2^{2k} V_{2k-1}^{n+1}(x)}{\lambda_{2k}^n N_{2k-1}^n} + \frac{1}{15} n(n+1)(n+3)(n+4) T'_{n+2}(x) \right) G_{n+1}(t) + \\ &+ \left(\frac{(n+1)^2 \pi}{2} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_1^{2k-1} V_{2k}^n(x)}{\lambda_{2k-1}^n N_{2k}^n} + \frac{1}{15} (n-1)n(n+2)(n+3) T'_{n+1}(x) \right) G_{n+2}(t), \quad (4.33) \end{aligned}$$

де λ_i^n , $i=1, \dots, n$ - власні значення інтегрального оператора $\pi_1^\infty L = \pi_1^\infty \int_{-1}^x \int_{-1}^{x_1}$,

$U_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^s c_{2j}^{2i} \tilde{T}_{2j}(x)$, $U_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s c_{2j-1}^{2i-1} \tilde{T}_{2j-1}(x)$ - власні функції цього

оператора, $\bar{U}_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j}^{2i} T_{2j}(x)$, $\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x)$ - власні функції

даного оберненого оператора, $\tau_{2i}^{2s}(x) = \frac{c_{2s}^{2i}}{4(2s+1)(2s+2)}$,

$$\tau_{2i-1}^{2s}(x) = \frac{c_{2s-1}^{2i-1}}{4(2s)(2s+1)}, \quad \bar{\tau}_{2i}^{2s}(x) = \frac{\bar{c}_{2s}^{2i}}{4(2s)(2s+1)}, \quad \bar{\tau}_{2i-1}^{2s}(x) = \frac{\bar{c}_{2s-1}^{2i-1}}{4(2s-1)(2s)},$$

біортогональні функції $V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) = \int_{-1}^x U_{2i-1+\bar{i}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(x_1) dx_1$,

$$\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \frac{\bar{U}_{2i-1+\bar{i}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1, \quad i=1, \dots, n/2,$$

$$N_i^n = \int_{-1}^1 \frac{V_i^{n+\bar{i}}(x) \bar{V}_i^{n+\bar{i}}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad i=1, \dots, n - \text{норма біортогональних функцій, яка}$$

залежить від числа n , кількості доданків суми ряду. Так, наприклад, для $n=4$

$$\text{маємо } N_1^4 = 0.14570486, \quad N_2^4 = 0.55602406, \quad N_3^4 = -0.22215711e-1,$$

$$N_4^4 = -0.44056286e-1, \text{ а для } n=6 \text{ маємо } N_1^6 = -.14598596, \quad N_2^6 = -.55543548,$$

$$N_3^6 = 0.34227627e-1, \quad N_4^6 = 0.59163760e-1, \quad N_5^6 = -0.69184026e-2,$$

$$N_6^6 = -0.11182020e-1.$$

З граничних умов (4.27), враховуючи, що $V_i(-1) = V_i(1) = 0$, маємо

$$\begin{aligned} W_0 = W(-1, t) &= \frac{\rho_s}{s} q_0(t) = e^{\frac{ld_3}{4}} \left[T'_{n+2}(-1) G_{n+1}(t) + T'_{n+1}(-1) G_{n+2}(t) \right] = \\ &= e^{\frac{ld_3}{4}} \left[-(n+2)^2 G_{n+1}(t) + (n+1)^2 G_{n+2}(t) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_L = W(1, t) &= \frac{\rho_s}{s} q_l(t) = e^{-\frac{ld_3}{4}} \left[T'_{n+2}(1) G_{n+1}(t) + T'_{n+1}(1) G_{n+2}(t) \right] = \\ &= e^{-\frac{ld_3}{4}} \left[(n+2)^2 G_{n+1}(t) + (n+1)^2 G_{n+2}(t) \right], \end{aligned}$$

або

$$\frac{e^{\frac{ld_3}{4}} W(1, t) + e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1, t)}{2(n+1)^2} = G_{n+2}(t), \quad \frac{e^{\frac{ld_3}{4}} W(1, t) - e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1, t)}{2(n+2)^2} = G_{n+1}(t). \quad (4.34)$$

Вирази (4.32), (4.33) підставимо в рівняння (4.31) і дістанемо

$$\begin{aligned}
& \frac{4c^2}{l^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{V_i^{n+\bar{i}}(x)}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} + \frac{\tau_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} T'_{n+1+\bar{i}}(x) \right) G_i(t) + \right. \\
& + \left. \left(\frac{(n+2)^2 \pi}{8} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_2^{2k} V_{2k-1}^{n+1}(x)}{\lambda_{2k}^n N_{2k-1}^n} + \frac{1}{15} n(n+1)(n+3)(n+4) T'_{n+2}(x) \right) G_{n+1}(t) + \right. \\
& + \left. \left(\frac{(n+1)^2 \pi}{2} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_1^{2k-1} V_{2k}^n(x)}{\lambda_{2k-1}^n N_{2k}^n} + \frac{1}{15} (n-1)n(n+2)(n+3) T'_{n+1}(x) \right) G_{n+2}(t) \right) - \\
& - \frac{c^2 d_3}{4} \sum_{i=1}^{n+2} V_i(x) G_i(t) - \sum_{i=1}^{n+2} V_i(x) G_i''(t) = 0. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Рівняння (4.35) домножимо на $\frac{\bar{V}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $i=1, \dots, n$ та зінтегруємо по x в межах

від -1 до 1 . Враховуючи рівності (4.34), отримаємо систему з n рівнянь виду

$$\begin{aligned}
& G''_{2i-\bar{i}}(t) + \left(\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4} \right) G_{2i-\bar{i}}(t) = \\
& = \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{\bar{c}_{i+1}^{2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n N_{2i-\bar{i}}^n} \left[e^{\frac{ld_3}{4}} W(1,t) + (-1)^{\bar{i}} e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1,t) \right], i=1, \dots, k, 2k=n, \tag{4.36}
\end{aligned}$$

де $\bar{i}=0$ - для парних функцій, та $\bar{i}=1$ - для непарних функцій.

Система (4.36) складається з n неоднорідних лінійних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами. Розв'язками характеристичних рівнянь будуть числа

$$k_{1,2}^{2i-\bar{i}} = \pm \sqrt{\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4}}. \quad \text{Оскільки,} \quad q_0(t) = q_{0n} + (q_0 - q_{0n}) e^{-\gamma_0 t},$$

$q_l(t) = q_{ln} + (q_l - q_{ln}) e^{-\gamma_l t}$, то

$$e^{\frac{ld_3}{4}} W(1,t) + (-1)^{\bar{i}} e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1,t) =$$

$$= \frac{\rho_s}{s_0} \left(q_{ln} e^{\frac{ld_3}{4}} + (q_l - q_{ln}) e^{-\gamma_l t + \frac{ld_3}{4}} + (-1)^{\bar{i}} \left(q_{0n} e^{-\frac{ld_3}{4}} + (q_0 - q_{0n}) e^{-\gamma_0 t - \frac{ld_3}{4}} \right) \right).$$

Отже, розв'язками рівнянь системи (4.36) будуть функції [15]

$$G_{2i-\bar{i}}(t) = A_{2i-\bar{i}} e^{\frac{ld_3}{4}} + B_{2i-\bar{i}} e^{-\gamma_0 t - \frac{ld_3}{4}} + E_{2i-\bar{i}} e^{-\gamma_l t + \frac{ld_3}{4}} + D_{2i-\bar{i}} e^{-\frac{ld_3}{4}}, \quad (4.37)$$

де

$$A_{2i-\bar{i}} = \frac{\frac{\rho_s}{s_0} q_{ln} \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{\bar{c}_{\bar{i}+1}^{2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n}}{\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4}},$$

$$B_{2i-\bar{i}} = (-1)^{\bar{i}} \frac{\frac{\rho_s}{s_0} (q_0 - q_{0n}) \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{\bar{c}_{\bar{i}+1}^{2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n}}{\gamma_0^2 + \frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4}},$$

$$E_{2i-\bar{i}} = \frac{\frac{\rho_s}{s_0} (q_l - q_{ln}) \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{\bar{c}_{\bar{i}+1}^{2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n}}{\gamma_l^2 + \frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4}},$$

$$D_{2i-\bar{i}} = (-1)^{\bar{i}} \frac{\frac{\rho_s}{s_0} q_{0n} \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{\bar{c}_{\bar{i}+1}^{2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n}}{\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4}}.$$

Таким чином, ми знайшли розв'язок системи (4.25) на проміжку $x \in [-1, 1]$, а саме

$$W(x, t) = e^{-\frac{ld_3}{4} x^{n+2}} \sum_{i=1} V_i^{n+\bar{i}}(x) G_i(t).$$

Тоді,

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = -\frac{ld_3}{4} e^{-\frac{ld_3}{4} x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x) G_i(t) + e^{-\frac{ld_3}{4} x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} U_{i-(-1)^{\bar{i}}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(x) G_i(t),$$

або

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = e^{-\frac{ld_3}{4} x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+\bar{i}}(x) + U_{i-(-1)^{\bar{i}}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(x) \right) G_i(t),$$

де $U_{n+2}^n(x) = T_{n+2}''(x)$, $U_{n+1}^{n-1}(x) = T_{n+1}''(x)$.

Згідно формули (4.28), дістаємо другий розв'язок системи (4.25)

$$P(x,t) = -\frac{2c^2}{l} e^{-\frac{ld_3}{4} x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+\bar{i}}(x) + U_{i-(-1)^{\bar{i}}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(x) \right) \int_0^t G_i(t) dt + P(x,0).$$

В отриманих розв'язках, повернемося до змінної y за формулою $x = \frac{2y-l}{l}$ і дістанемо розв'язки системи (4.22)

$$\omega(y,t) = e^{-\frac{ld_3}{4} \frac{2y-l}{l}^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(y) G_i(t),$$

$$p(y,t) = -\frac{2c^2}{l} e^{-\frac{ld_3}{4} \frac{2y-l}{l}^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+\bar{i}}(y) + U_{i-(-1)^{\bar{i}}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(y) \right) \int_0^t G_i(t) dt + p(y,0).$$

4.2.2. Наближена модель (І-ий спосіб)

Добуток $V(x)G(t)$ представимо у вигляді [15]

$$V(x)G(t) = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x) \sum_{j=0}^{\infty} q_{ij} L_j(t), \quad (4.38)$$

де $V_i^{n+1}(x) = T_{n+2}'(x)$, $V_i^n(x) = T_{n+1}'(x)$, $\bar{i} = 0$ - для парних значень i , та $\bar{i} = 1$ - для непарних значень i .

Нехай $s \rightarrow \infty$, тоді

$$V_{xx}''(x)G(t) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{V_i^{n+\bar{i}}(x)}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} + \frac{\tau_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} T_{n+1+\bar{i}}'(x) \right) \sum_{j=0}^s q_{ij} L_j(t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{(n+2)^2 \pi}{8} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_2^{-2k} V_{2k-1}^{n+1}(x)}{\lambda_{2k}^n N_{2k-1}} + \frac{1}{15} n(n+1)(n+3)(n+4) T'_{n+2}(x) \right) \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t) + \\
& + \left(\frac{(n+1)^2 \pi}{2} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_1^{-2k-1} V_{2k}^n(x)}{\lambda_{2k-1}^n N_{2k}} + \frac{1}{15} (n-1)n(n+2)(n+3) T'_{n+1}(x) \right) \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t) \\
& V(x) G''_t(t) = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+i} (x) \sum_{j=0}^s q_{i,j+2} \sum_{k=0}^j (j+1-k) L_k(t). \quad (4.39)
\end{aligned}$$

З граничних умов (4.27), враховуючи, що $V_i(-1) = V_i(1) = 0$, маємо

$$\begin{aligned}
W_0 = W(-1, t) &= e^{\frac{ld_3}{4}} \left[T'_{n+2}(-1) \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t) + T'_{n+1}(-1) \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t) \right] = \\
&= e^{\frac{ld_3}{4}} \left[-(n+2)^2 \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t) + (n+1)^2 \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t) \right], \\
W_L = W(1, t) &= e^{-\frac{ld_3}{4}} \left[T'_{n+2}(1) \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t) + T'_{n+1}(1) \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t) \right] = \\
&= e^{-\frac{ld_3}{4}} \left[(n+2)^2 \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t) + (n+1)^2 \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t) \right],
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\frac{ld_3}{4}} W(1, t) + e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1, t)}{2(n+1)^2} &= \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t), \\
\frac{e^{\frac{ld_3}{4}} W(1, t) - e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1, t)}{2(n+2)^2} &= \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t).
\end{aligned}$$

Домножимо останні дві рівності на $e^{-t} L_j(t)$ та зінтегруємо по t в межах від 0 до ∞ знайдемо невідомі коефіцієнти $q_{n+1,j}$, $q_{n+2,j}$, $j = 1, \dots, s$ для (4.38).

Вирази (4.38), (4.39) підставимо в рівняння (4.31) і дістанемо

$$\begin{aligned}
& \frac{4c^2}{l^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{V_i^{n+\bar{i}}(x)}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} + \frac{\tau_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} T'_{n+1+\bar{i}}(x) \right) \sum_{j=0}^s q_{ij} L_j(t) + \right. \\
& + \left. \left(\frac{(n+2)^2 \pi}{8} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_2^{2k} V_{2k-1}^{n+1}(x)}{\lambda_{2k}^n N_{2k-1}^n} + \frac{1}{15} n(n+1)(n+3)(n+4) T'_{n+2}(x) \right) \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t) + \right. \\
& + \left. \left(\frac{(n+1)^2 \pi}{2} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_1^{2k-1} V_{2k}^n(x)}{\lambda_{2k-1}^n N_{2k}^n} + \frac{1}{15} (n-1)n(n+2)(n+3) T'_{n+1}(x) \right) \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t) \right) - \\
& - \frac{c^2 d_3^2}{4} \sum_{i=1}^{n+2} V_i(x) \sum_{j=0}^s q_{ij} L_j(t) - \sum_{i=1}^{n+2} V_i(x) \sum_{j=0}^s q_{i,j+2} \sum_{k=0}^j (j+1-k) L_k(t) = 0. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Рівняння (4.40) домножимо на $\frac{\bar{V}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} e^{-t} L_j(t)$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, s$ та зінтегруємо по t в межах від 0 до ∞ та по x в межах від -1 до 1 . Отримаємо $i=n$ систем, кожна з яких містить $j=s$ рівнянь та $j=s$ невідомих, з яких знайдемо решту невідомих коефіцієнтів $q_{i,j}$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, s$ для (4.38).

Таким чином, ми знайшли розв'язок системи (4.25) на проміжку $x \in [-1, 1]$, а саме [15]

$$W(x, t) = e^{-\frac{ld_3}{4} x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x) \sum_{j=0}^s q_{ij} L_j(t).$$

Тоді,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = & -\frac{ld_3}{4} e^{-\frac{ld_3}{4} x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x) \sum_{j=0}^s q_{ij} L_j(t) + \\
& + e^{-\frac{ld_3}{4} x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} U_{i-(-1)^{\bar{i}}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(x) \sum_{j=0}^s q_{ij} L_j(t),
\end{aligned}$$

або

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = e^{-\frac{ld_3}{4}x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+i} (x) + U_{i-(-1)^i}^{n-i-(-1)^i} (x) \right) \sum_{j=0}^s q_{ij} L_j(t),$$

де $U_{n+2}^n(x) = T_{n+2}''(x)$, $U_{n+1}^{n-1}(x) = T_{n+1}''(x)$.

Згідно формули (4.28), дістаємо другий розв'язок системи (4.25)

$$P(x,t) = -\frac{2c^2}{l} e^{-\frac{ld_3}{4}x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+i} (x) + U_{i-(-1)^i}^{n-i-(-1)^i} (x) \right) \int_0^t \sum_{j=0}^s q_{ij} L_j(t) dt + P(x,0),$$

або

$$P(x,t) = -\frac{2c^2}{l} e^{-\frac{ld_3}{4}x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+i} (x) + U_{i-(-1)^i}^{n-i-(-1)^i} (x) \right) \times \\ \times \sum_{j=0}^s q_{ij} [L_j(t) - L_{j+1}(t)] + P(x,0).$$

В отриманих розв'язках, повернемося до змінної y за формулою

$$x = \frac{2y-l}{l} \text{ і дістанемо розв'язки системи (4.22) [15]}$$

$$\omega(y,t) = e^{-\frac{ld_3}{4} \frac{2y-l}{l}^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+i} (y) \sum_{j=0}^s q_{ij} L_j(t), \\ p(y,t) = -\frac{2c^2}{l} e^{-\frac{ld_3}{4} \frac{2y-l}{l}^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+i} (y) + \right. \\ \left. + U_{i-(-1)^i}^{n-i-(-1)^i} (y) \right) \sum_{j=0}^s q_{ij} [L_j(t) - L_{j+1}(t)] + p(y,0).$$

II-ий спосіб

Вираз (4.28) підставимо в перше рівняння системи (4.25) і дістанемо

$$\frac{2}{l} \left[-\frac{2c^2}{l} \int_0^t \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} dt + \frac{\partial P(x,0)}{\partial x} \right] + \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} + \\ + d_3 \left[-\frac{2c^2}{l} \int_0^t \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} dt + P(x,0) \right] = -d_4. \quad (4.41)$$

Підставимо (4.30) у рівняння (4.41) і дістанемо

$$-\frac{4c^2}{l^2}e^{\beta x}\left(V''_{xx}(x)+2\beta V'_x(x)+\beta^2V(x)\right)\int_0^tG(t)dt+e^{\beta x}V(x)G'_t(t)-$$

$$-\frac{2c^2}{l}d_3e^{\beta x}\left(V'_x(x)+\beta V(x)\right)\int_0^tG(t)dt=-d_4-\frac{2}{l}\frac{\partial P(x,0)}{\partial x}-d_3P(x,0),$$

або

$$-\frac{4c^2}{l^2}e^{\beta x}V''_{xx}(x)\int_0^tG(t)dt-\left[\frac{8c^2}{l^2}\beta+\frac{2c^2}{l}d_3\right]e^{\beta x}V'_x(x)\int_0^tG(t)dt-$$

$$-\left[\left(\frac{4c^2}{l^2}\beta^2+\frac{2c^2}{l}\beta d_3\right)\int_0^tG(t)dt-G'_t(t)\right]e^{\beta x}V(x)=$$

$$=-d_4-\frac{2}{l}\frac{\partial P(x,0)}{\partial x}-d_3P(x,0). \quad (4.42)$$

В останньому рівнянні потрібно знайти невідомий коефіцієнт β такий, щоб множник при $V'_x(x)$ перетворювався в нуль, тобто

$$\left[\frac{8c^2}{l^2}\beta+\frac{2c^2}{l}d_3\right]=0. \quad \beta=-\frac{ld_3}{4}.$$

Таким чином дістанемо

$$-\frac{4c^2}{l^2}V''_{xx}(x)\int_0^tG(t)dt+\left[\frac{d_3^2c^2}{4}\int_0^tG(t)dt+G'_t(t)\right]V(x)=$$

$$=-\left[d_4+\frac{2}{l}\frac{\partial P(x,0)}{\partial x}+d_3P(x,0)\right]e^{\frac{ld_3}{4}x}. \quad (4.43)$$

4.2.3. Наближено-аналітична модель (II-ий спосіб)

Добуток $V(x)G(t)$ представимо у вигляді

$$V(x)G(t)=\sum_{i=1}^{n+2}V_i^{n+i}(x)G_i(t), \quad (4.44)$$

де $V_{n+1}^{n+1}(x) = T'_{n+2}(x)$, $V_{n+2}^n(x) = T'_{n+1}(x)$, $\bar{i} = 0$ - для парних значень i , та $\bar{i} = 1$ - для непарних значень i . $T_{n+1} = T_{n+1}(x)$ та $T_{n+2} = T_{n+2}(x)$ поліноми Чебишева степеня $n+1$ та $n+2$.

З граничних умов (4.27), враховуючи, що $V_i(-1) = V_i(1) = 0$, маємо

$$\begin{aligned} W_0 = W(-1, t) &= \frac{\rho_s}{s_0} q_0(t) = e^{\frac{ld_3}{4}} \left[T'_{n+2}(-1) G_{n+1}(t) + T'_{n+1}(-1) G_{n+2}(t) \right] = \\ &= e^{\frac{ld_3}{4}} \left[-(n+2)^2 G_{n+1}(t) + (n+1)^2 G_{n+2}(t) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_L = W(1, t) &= \frac{\rho_s}{s_0} q_l(t) = e^{-\frac{ld_3}{4}} \left[T'_{n+2}(1) G_{n+1}(t) + T'_{n+1}(1) G_{n+2}(t) \right] = \\ &= e^{-\frac{ld_3}{4}} \left[(n+2)^2 G_{n+1}(t) + (n+1)^2 G_{n+2}(t) \right], \end{aligned}$$

або

$$\frac{e^{\frac{ld_3}{4}} W(1, t) + e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1, t)}{2(n+1)^2} = G_{n+2}(t), \quad \frac{e^{\frac{ld_3}{4}} W(1, t) - e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1, t)}{2(n+2)^2} = G_{n+1}(t). \quad (4.45)$$

Вирази (4.44), (4.33) підставимо в рівняння (4.43) і дістанемо

$$\begin{aligned} & -\frac{4c^2}{l^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(-\frac{V_i^{n+\bar{i}}(x)}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} + \frac{\tau_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} T'_{n+1+\bar{i}}(x) \right) \int_0^t G_i(t) dt + \right. \\ & + \left(\frac{(n+2)^2 \pi}{8} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_2^{2k} V_{2k-1}^{n+1}(x)}{\lambda_{2k}^n N_{2k-1}^n} + \frac{1}{15} n(n+1)(n+3)(n+4) T'_{n+2}(x) \right) \int_0^t G_{n+1}(t) dt + \\ & + \left(\frac{(n+1)^2 \pi}{2} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_1^{2k-1} V_{2k}^n(x)}{\lambda_{2k-1}^n N_{2k}^n} + \frac{1}{15} (n-1)n(n+2)(n+3) T'_{n+1}(x) \right) \int_0^t G_{n+2}(t) dt \Big) + \\ & + \frac{c^2 d_3^2}{4} \sum_{i=1}^{n+2} V_i(x) \int_0^t G_i(t) dt + \sum_{i=1}^{n+2} V_i(x) G'_i(t) = \end{aligned}$$

$$= - \left[d_4 + \frac{2}{l} \frac{\partial P(x,0)}{\partial x} + d_3 P(x,0) \right] e^{\frac{ld_3}{4}x}. \quad (4.46)$$

Праву частину рівняння (4.45) $F(x,t) = - \left[d_4 + \frac{2}{l} \frac{\partial P(x,0)}{\partial x} + d_3 P(x,0) \right] e^{\frac{ld_3}{4}x}$

представимо у вигляді

$$F(x,t) = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x) f_i(t), \quad (4.47)$$

де

$$f_i(t) = \frac{1}{N_{i-1}^n} \int \frac{F(x,t) \bar{V}_i^{n+\bar{i}}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad i=1, \dots, n.$$

Рівняння (4.46) домножимо на $\frac{\bar{V}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $i=1, \dots, n$ та зінтегруємо по x в межах

від -1 до 1 . Враховуючи рівності (4.45), отримаємо систему з n рівнянь виду

$$G'_{2i-\bar{i}}(t) + \left(\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4} \right) \int_0^t G_{2i-\bar{i}}(t) dt = f_{2i-\bar{i}}(t) + \quad (4.48)$$

$$+ \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{\bar{c}_{\bar{i}+1}^{2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n} \int_0^t \left[e^{\frac{ld_3}{4}} W(1,t) + (-1)^{\bar{i}} e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1,t) \right] dt, \quad i=1, \dots, k, \quad 2k=n,$$

де $\bar{i} = 0$ - для парних функцій, та $\bar{i} = 1$ - для непарних функцій.

Нехай $Z_{2i-\bar{i}}(t) = \int_0^t G_{2i-\bar{i}}(t) dt$, тоді систему (4.48) запишемо у виді

$$Z''_{2i-\bar{i}}(t) + \left(\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4} \right) Z_{2i-\bar{i}}(t) = f_{2i-\bar{i}}(t) + \quad (4.49)$$

$$+ \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{\bar{c}_{\bar{i}+1}^{2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n} \int_0^t \left[e^{\frac{ld_3}{4}} W(1,t) + (-1)^{\bar{i}} e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1,t) \right] dt, \quad i=1, \dots, k, \quad 2k=n.$$

Система (4.49) складається з n неоднорідних лінійних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами. Розв'язками характеристичних рівнянь будуть числа

$$k_{1,2}^{2i-\bar{i}} = \pm \sqrt{\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4}}. \quad \text{Оскільки,} \quad q_0(t) = q_{0n} + (q_0 - q_{0n})e^{-\gamma_0 t},$$

$$q_l(t) = q_{ln} + (q_l - q_{ln})e^{-\gamma_l t}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(e^{\frac{ld_3}{4}} W(1,t) + (-1)^{\bar{i}} e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1,t) \right) dt = \\ & = \frac{\rho_s}{s_0} \int_0^t \left(q_{ln} e^{\frac{ld_3}{4}} + (q_l - q_{ln}) e^{-\gamma_l t + \frac{ld_3}{4}} + (-1)^{\bar{i}} \left(q_{0n} e^{-\frac{ld_3}{4}} + (q_0 - q_{0n}) e^{-\gamma_0 t - \frac{ld_3}{4}} \right) \right) dt = \\ & = \frac{\rho_s}{s_0} \left(\left(\frac{q_l - q_{ln}}{\gamma_l} + q_{ln} t \right) e^{\frac{ld_3}{4}} + (-1)^{\bar{i}} \left(\frac{q_0 - q_{0n}}{\gamma_0} + q_{0n} t \right) e^{-\frac{ld_3}{4}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{(q_l - q_{ln})}{\gamma_l} e^{-\gamma_l t + \frac{ld_3}{4}} - (-1)^{\bar{i}} \frac{(q_0 - q_{0n})}{\gamma_0} e^{-\gamma_0 t - \frac{ld_3}{4}} \right). \end{aligned}$$

Отже, розв'язками рівнянь системи (4.49) будуть функції

$$\begin{aligned} Z_{2i-\bar{i}}(t) = & A_{2i-\bar{i}} + (B_{2i-\bar{i}} + E_{2i-\bar{i}} t) e^{\frac{ld_3}{4}} + N_{2i-\bar{i}} e^{-\gamma_0 t - \frac{ld_3}{4}} + \\ & + M_{2i-\bar{i}} e^{-\gamma_l t + \frac{ld_3}{4}} + (D_{2i-\bar{i}} + Q_{2i-\bar{i}} t) e^{-\frac{ld_3}{4}}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

де

$$\begin{aligned} A_{2i-\bar{i}} = & \frac{f_{2i-\bar{i}}(t)}{\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4}}, \quad E_{2i-\bar{i}} = \frac{\frac{\rho_s}{s_0} q_{ln} \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{c_{\bar{i}+1}^{-2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n}}{\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4}}, \\ N_{2i-\bar{i}} = & (-1)^{\bar{i}+1} \frac{\frac{\rho_s}{s_0} (q_0 - q_{0n}) \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{c_{\bar{i}+1}^{-2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n}}{\gamma_0 \left(\gamma_0^2 + \frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4} \right)}, \end{aligned}$$

$$B_{2i-\bar{i}} = \frac{\frac{\rho_s}{s_0}(q_l - q_{ln}) \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{\bar{c}_{\bar{i}+1}^{-2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n}}{\gamma_l \left(\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4} \right)},$$

$$M_{2i-\bar{i}} = -\frac{\frac{\rho_s}{s_0}(q_l - q_{ln}) \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{\bar{c}_{\bar{i}+1}^{-2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n}}{\gamma_l \left(\gamma_l^2 + \frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4} \right)},$$

$$D_{2i-\bar{i}} = (-1)^{\bar{i}} \frac{\frac{\rho_s}{s_0}(q_0 - q_{0n}) \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{\bar{c}_{\bar{i}+1}^{-2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n}}{\gamma_0 \left(\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4} \right)},$$

$$Q_{2i-\bar{i}} = (-1)^{\bar{i}} \frac{\frac{\rho_s}{s_0} q_{0n} \frac{c^2}{l^2} \frac{\pi}{4^{\bar{i}}} \frac{\bar{c}_{\bar{i}+1}^{-2i-1+\bar{i}}}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} \frac{1}{N_{2i-\bar{i}}^n}}{\frac{4c^2}{l^2} \frac{1}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} + \frac{c^2 d_3^2}{4}}.$$

Розв'язком системи (4.48) будуть функції

$$Z'_{2i-\bar{i}}(t) = G_{2i-\bar{i}}(t) = E_{2i-\bar{i}} e^{\frac{ld_3}{4} t} - \gamma_0 N_{2i-\bar{i}} e^{-\gamma_0 t - \frac{ld_3}{4} t} - \gamma_l M_{2i-\bar{i}} e^{-\gamma_l t + \frac{ld_3}{4} t} + Q_{2i-\bar{i}} e^{-\frac{ld_3}{4} t}$$

Таким чином, ми знайшли розв'язок системи (4.25) на проміжку $x \in [-1, 1]$, а саме

$$W(x, t) = e^{-\frac{ld_3}{4} x^{n+2}} \sum_{i=1} V_i^{n+\bar{i}}(x) G_i(t).$$

Тоді,

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = -\frac{ld_3}{4} e^{-\frac{ld_3}{4} x^{n+2}} \sum_{i=1} V_i^{n+\bar{i}}(x) G_i(t) + e^{-\frac{ld_3}{4} x^{n+2}} \sum_{i=1} U_{i-(-1)^{\bar{i}}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(x) G_i(t),$$

або

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = e^{-\frac{ld_3}{4}x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+i} (x) + U_{i-(-1)^i}^{n-i-(-1)^i} (x) \right) G_i(t),$$

де $U_{n+2}^n(x) = T_{n+2}''(x)$, $U_{n+1}^{n-1}(x) = T_{n+1}''(x)$.

Згідно формули (4.28), дістаємо другий розв'язок системи (4.25)

$$P(x,t) = -\frac{2c^2}{l} e^{-\frac{ld_3}{4}x^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+i} (x) + U_{i-(-1)^i}^{n-i-(-1)^i} (x) \right) \int_0^t G_i(t) dt + P(x,0).$$

В отриманих розв'язках, повернемося до змінної y за формулою $x = \frac{2y-l}{l}$ і дістанемо розв'язки системи (4.22)

$$\omega(y,t) = e^{-\frac{ld_3}{4} \frac{2y-l}{l}^{n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+i} (y) G_i(t),$$

$$p(X,t) = -\frac{2c^2}{l} e^{-\frac{ld_3}{4} \frac{2y-l}{l}^{n+2}} \times$$

$$\sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+i} (y) + U_{i-(-1)^i}^{n-i-(-1)^i} (y) \right) \int_0^t G_i(t) dt + p(y,0).$$

4.2.4. Наближена модель (II-ий спосіб)

Добуток $V(x)G(t)$ представимо у вигляді

$$V(x)G(t) = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+i} (x) \sum_{j=0}^{\infty} q_{ij} L_j(t), \quad (4.51)$$

Нехай $s \rightarrow \infty$, тоді

$$V_{xx}''(x) \int_0^t G(t) dt = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{V_i^{n+i} (x)}{\lambda_{i+(-1)^i}^n} + \frac{\tau_{i+(-1)^i}^n}{\lambda_{i+(-1)^i}^n} T_{n+1+i}' (x) \right) \sum_{j=0}^s q_{ij} (L_j(t) - L_{j+1}(t)) +$$

$$+ \left(\frac{(n+2)^2 \pi}{8} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_2^{-2k}}{\lambda_{2k}^n} \frac{V_{2k-1}^{n+1}(x)}{N_{2k-1}} + \frac{1}{15} n(n+1)(n+3)(n+4) T_{n+2}'(x) \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} (L_j(t) - L_{j+1}(t)) + \left(\frac{(n+1)^2 \pi}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{c}_1^{2k-1} V_{2k}^n(x)}{\lambda_{2k-1}^n N_{2k}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{15} (n-1)n(n+2)(n+3) T'_{n+1}(x) \right) \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} (L_j(t) - L_{j+1}(t)), \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$V(x) \int_0^t G(t) dt = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+i} (x) \sum_{j=0}^s q_{ij} [L_j(t) - L_{j+1}(t)], \quad (4.53)$$

$$V(x) G'_t(t) = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+i} (x) \sum_{j=1}^s q_{ij} \left[- \sum_{k=0}^{j-1} L_k(t) \right]. \quad (4.54)$$

Праву частину рівняння (4.43) $F(x,t) = - \left[d_4 + \frac{2}{l} \frac{\partial P(x,0)}{\partial x} + d_3 P(x,0) \right] \ell^{\frac{ld_3}{4} x}$

представимо у вигляді

$$F(x,t) = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+i} (x) \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{ij} L_j(t), \quad (4.55)$$

де

$$g_j(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} F(x,t) L_j(t) dt, \quad j=1, \dots, s,$$

$$\psi_{ij} = \frac{1}{N_i^n} \int_{-1}^1 \frac{\bar{V}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} g_j(x) dx, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, s,$$

$$\psi_{n+1,j} = \frac{1}{(n+2)^3 \pi} \int_{-1}^1 \frac{T'_{n+2}(x)}{\sqrt{1-x^2}} g_j(x) dx, \quad j=1, \dots, s,$$

$$\psi_{n+2,j} = \frac{1}{(n+1)^3 \pi} \int_{-1}^1 \frac{T'_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} g_j(x) dx, \quad j=1, \dots, s.$$

З граничних умов (4.27), враховуючи, що $V_i(-1) = V_i(1) = 0$, маємо

$$W_0 = W(-1,t) = e^{\frac{ld_3}{4} x} \left[T'_{n+2}(-1) \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t) + T'_{n+1}(-1) \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t) \right] =$$

$$= e^{\frac{ld_3}{4}} \left[-(n+2)^2 \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t) + (n+1)^2 \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t) \right],$$

$$W_L = W(1,t) = e^{-\frac{ld_3}{4}} \left[T'_{n+2}(1) \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t) + T'_{n+1}(1) \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t) \right] =$$

$$= e^{-\frac{ld_3}{4}} \left[(n+2)^2 \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t) + (n+1)^2 \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t) \right],$$

або

$$\frac{e^{\frac{ld_3}{4}} W(1,t) + e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1,t)}{2(n+1)^2} = \sum_{j=0}^s q_{n+2,j} L_j(t),$$

$$\frac{e^{\frac{ld_3}{4}} W(1,t) - e^{-\frac{ld_3}{4}} W(-1,t)}{2(n+2)^2} = \sum_{j=0}^s q_{n+1,j} L_j(t).$$

Домножимо останні дві рівності на $e^{-t} L_j(t)$ та зінтегруємо по t в межах від 0 до ∞ знайдемо невідомі коефіцієнти $q_{n+1,j}$, $q_{n+2,j}$, $j=1, \dots, s$ для (4.51).

Підставимо (4.52)-(4.54) у (4.43), та отримане таким чином рівняння домножимо на $\frac{\bar{V}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} e^{-t} L_j(t)$ та зінтегруємо по t в межах від 0 до ∞ та по x в межах від -1 до 1 . Отримаємо $i=n$ систем, кожна з яких містить $j=s$ рівнянь та $j=s$ невідомих, з яких знайдемо невідомі коефіцієнти $q_{i,j}$, $j=1, \dots, n$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, s$ для (4.51).

$$\omega(y,t) = e^{-\frac{ld_3}{4} \frac{2y-l}{l} n+2} \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(y) \sum_{j=0}^s q_{ij} L_j(t),$$

$$p(y,t) = -\frac{2c^2}{l} e^{-\frac{ld_3}{4} \frac{2y-l}{l} n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+\bar{i}}(y) + \right.$$

$$\left. + U_{i-(-1)^{\bar{i}}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(y) \right) \sum_{j=0}^s q_{ij} [L_j(t) - L_{j+1}(t)] + p(y,0).$$

Обчислювальний експеримент 4.2. Результати розв'язку системи рівнянь (4.29) при $l=100000\text{м}$, $\chi=0.01$, $z=0.908$, $R=500\text{Дж/кг}^\circ\text{К}$, $D=1.4\text{м}$, $T=300^\circ\text{К}$, $q_0=894\text{м}^3/\text{с}$, $q_{0n}=993\text{м}^3/\text{с}$, $q_l=894\text{м}^3/\text{с}$, $q_{ln}=993\text{м}^3/\text{с}$, $p_0=70\text{атм}$, $p_1=58.4\text{атм}$, $\rho_s=\rho_0=0.682\text{кг/м}^3$, $v_1=6\text{ м/с}$, $v_2=12\text{ м/с}$, $\gamma_0=0.00069$, $\gamma_l=0.00075$, $c=500\text{ м/с}$, $\Delta x=5000\text{м}$, $\Delta t=120\text{с}$.

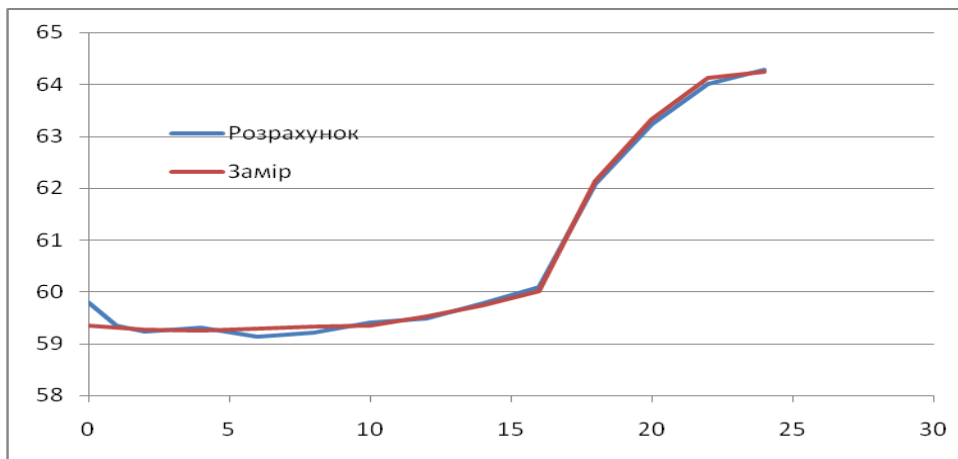


Рис.1. Значення тисків розрахованих і заміряних на віддалі 40 км від початку.

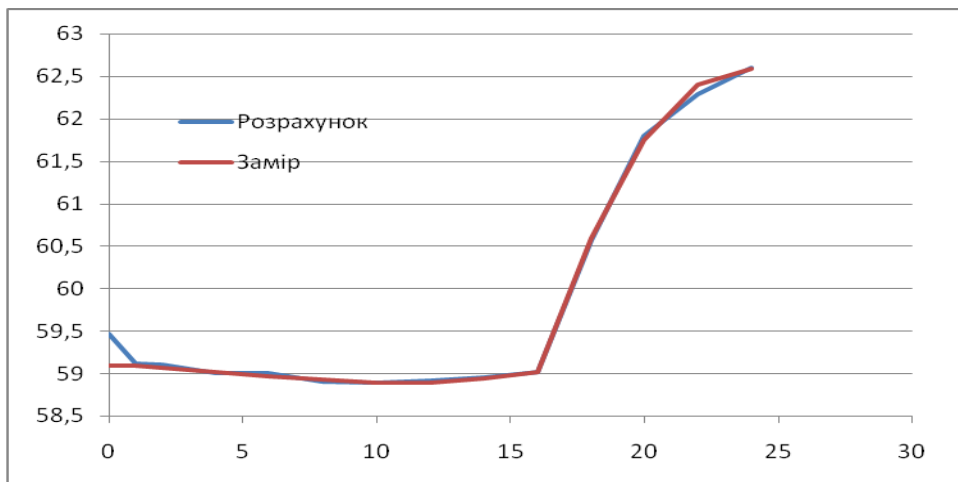


Рис.2. Значення тисків розрахованих і заміряних на віддалі 60 км від початку.

Таблиця 4.7.

Значення масової витрати за різних значень часу t і координати y та $n=10$ (t у секундах) наближено-аналітичним методом (I-ий спосіб)

t	y								
	0	10000	20000	40000	50000	60000	80000	90000	100000
0	396.07	396.11	396.15	396.18	396.19	396.18	396.15	396.12	396.07
120	399.56	399.62	399.68	399.77	399.81	399.83	399.86	399.86	399.85
240	402.77	402.85	402.93	403.07	403.13	403.18	403.25	403.28	403.30
360	405.72	405.82	405.92	406.10	406.17	406.24	406.36	406.41	406.45
480	408.44	408.56	408.67	408.87	408.97	409.05	409.21	409.27	409.33
600	410.94	411.07	411.19	411.42	411.53	411.63	411.81	411.89	411.97
720	413.25	413.38	413.51	413.76	413.88	413.99	414.19	414.29	414.37
840	415.37	415.51	415.65	415.91	416.03	416.15	416.37	416.48	416.57
960	417.32	417.47	417.61	417.88	418.01	418.13	418.37	418.48	418.58
1080	419.12	419.27	419.41	419.69	419.82	419.95	420.19	420.31	420.42
1200	420.77	420.92	421.07	421.35	421.48	421.62	421.87	421.99	422.10
1320	422.29	422.44	422.59	422.87	423.01	423.14	423.40	423.52	423.64
1440	423.69	423.84	423.99	424.27	424.41	424.54	424.80	424.92	425.04
1560	424.99	425.13	425.28	425.56	425.69	425.82	426.08	426.20	426.32
1680	426.17	426.32	426.46	426.73	426.87	427.00	427.25	427.37	427.49
1800	427.27	427.41	427.55	427.82	427.95	428.07	428.32	428.45	428.56
1920	428.27	428.41	428.55	428.81	428.94	429.06	429.31	429.43	429.54
2040	429.20	429.33	429.46	429.72	429.84	429.97	430.21	430.32	430.44
2160	430.05	430.18	430.31	430.56	430.68	430.80	431.03	431.14	431.25
2280	430.84	430.96	431.08	431.32	431.44	431.56	431.78	431.89	432.00
2400	431.56	431.68	431.80	432.03	432.14	432.25	432.47	432.58	432.68
2520	432.23	432.34	432.45	432.68	432.79	432.89	433.10	433.21	433.31
2640	432.84	432.95	433.06	433.27	433.38	433.48	433.68	433.78	433.88
2760	433.40	433.51	433.61	433.82	433.92	434.02	434.21	434.31	434.40
2880	433.92	434.02	434.12	434.32	434.41	434.51	434.69	434.79	434.88
3000	434.40	434.50	434.59	434.78	434.87	434.96	435.14	435.22	435.31
3120	434.84	434.93	435.02	435.20	435.29	435.37	435.54	435.63	435.71
3240	435.24	435.33	435.42	435.59	435.67	435.75	435.91	435.99	436.07
3360	435.62	435.70	435.78	435.94	436.02	436.10	436.25	436.33	436.40
3480	435.96	436.04	436.12	436.27	436.34	436.42	436.56	436.64	436.71
3600	436.28	436.35	436.42	436.57	436.64	436.71	436.85	436.92	436.99
3720	436.57	436.64	436.71	436.84	436.91	436.98	437.11	437.18	437.24
3840	436.83	436.90	436.97	437.10	437.16	437.22	437.35	437.41	437.47

Таблиця 4.8.

Значення тиску за різних значень часу t і координати y та $n=10$ (t у секундах)
наближено-аналітичним методом (I-й спосіб)

t	y								
	0	10000	20000	40000	50000	60000	80000	90000	100000
0	70.000	68.930	67.843	65.616	64.473	63.310	60.916	59.684	58.425
120	69.998	68.929	67.842	65.615	64.472	63.309	60.917	59.684	58.426
240	69.996	68.926	67.840	65.613	64.471	63.308	60.916	59.684	58.426
360	69.993	68.924	67.838	65.611	64.469	63.307	60.915	59.683	58.425
480	69.990	68.920	67.835	65.609	64.467	63.304	60.913	59.681	58.424
600	69.986	68.917	67.831	65.606	64.464	63.302	60.911	59.679	58.422
720	69.982	68.913	67.827	65.602	64.461	63.299	60.908	59.677	58.420
840	69.978	68.909	67.823	65.599	64.457	63.295	60.905	59.674	58.417
960	69.973	68.905	67.819	65.595	64.454	63.292	60.902	59.671	58.414
1080	69.969	68.900	67.815	65.591	64.450	63.288	60.898	59.668	58.411
1200	69.964	68.896	67.811	65.587	64.446	63.284	60.895	59.664	58.407
1320	69.960	68.892	67.807	65.583	64.442	63.281	60.891	59.661	58.404
1440	69.955	68.887	67.802	65.579	64.438	63.277	60.888	59.657	58.401
1560	69.951	68.883	67.798	65.575	64.434	63.273	60.884	59.653	58.397
1680	69.947	68.879	67.794	65.571	64.430	63.269	60.880	59.650	58.394
1800	69.942	68.875	67.790	65.567	64.426	63.265	60.876	59.646	58.390
1920	69.938	68.870	67.785	65.563	64.422	63.261	60.873	59.643	58.387
2040	69.934	68.866	67.782	65.559	64.419	63.258	60.869	59.639	58.383
2160	69.930	68.863	67.778	65.555	64.415	63.254	60.866	59.636	58.380
2280	69.926	68.859	67.774	65.552	64.411	63.251	60.863	59.633	58.377
2400	69.923	68.855	67.771	65.548	64.408	63.247	60.859	59.629	58.374
2520	69.919	68.852	67.768	65.545	64.405	63.244	60.856	59.626	58.371
2640	69.916	68.849	67.764	65.542	64.402	63.241	60.853	59.623	58.368
2760	69.913	68.845	67.761	65.539	64.399	63.238	60.850	59.621	58.365
2880	69.910	68.842	67.758	65.536	64.396	63.235	60.848	59.618	58.362
3000	69.907	68.839	67.755	65.533	64.393	63.233	60.845	59.615	58.359
3120	69.904	68.837	67.753	65.530	64.390	63.230	60.842	59.613	58.357
3240	69.901	68.834	67.750	65.528	64.388	63.227	60.840	59.610	58.355
3360	69.899	68.832	67.747	65.525	64.386	63.225	60.838	59.608	58.352
3480	69.896	68.829	67.745	65.523	64.383	63.223	60.835	59.606	58.350
3600	69.894	68.827	67.743	65.521	64.381	63.221	60.833	59.604	58.348
3720	69.892	68.825	67.741	65.519	64.379	63.219	60.831	59.602	58.346
3840	69.890	68.823	67.739	65.517	64.377	63.217	60.829	59.600	58.344

Таблиця 4.9.

Значення масової витрати за різних значень часу t і координати y та $n=10$ (t у секундах) наближеним методом (I-ий спосіб)

t	y								
	0	10000	20000	40000	50000	60000	80000	90000	100000
0	396.07	396.11	396.15	396.18	396.19	396.18	396.15	396.12	396.07
120	399.56	399.62	399.68	399.77	399.81	399.83	399.86	399.86	399.85
240	402.77	402.85	402.93	403.07	403.13	403.18	403.25	403.28	403.30
360	405.72	405.82	405.92	406.10	406.17	406.24	406.36	406.41	406.45
480	408.44	408.56	408.67	408.87	408.97	409.05	409.21	409.27	409.33
600	410.94	411.07	411.19	411.42	411.53	411.63	411.81	411.89	411.97
720	413.25	413.38	413.51	413.76	413.88	413.99	414.19	414.29	414.37
840	415.37	415.51	415.65	415.91	416.03	416.15	416.37	416.48	416.57
960	417.32	417.47	417.61	417.88	418.01	418.13	418.37	418.48	418.58
1080	419.12	419.27	419.41	419.69	419.82	419.95	420.19	420.31	420.42
1200	420.77	420.92	421.07	421.35	421.48	421.62	421.87	421.99	422.10
1320	422.29	422.44	422.59	422.87	423.01	423.14	423.40	423.52	423.64
1440	423.70	423.84	423.99	424.27	424.41	424.54	424.80	424.92	425.04
1560	424.99	425.13	425.28	425.56	425.69	425.82	426.08	426.20	426.32
1680	426.17	426.32	426.46	426.73	426.87	427.00	427.25	427.37	427.49
1800	427.27	427.41	427.55	427.82	427.95	428.07	428.32	428.45	428.56
1920	428.27	428.41	428.55	428.81	428.94	429.06	429.31	429.43	429.54
2040	429.20	429.33	429.46	429.72	429.84	429.97	430.21	430.32	430.44
2160	430.05	430.18	430.31	430.56	430.68	430.80	431.03	431.14	431.25
2280	430.84	430.96	431.09	431.32	431.44	431.56	431.78	431.89	432.00
2400	431.56	431.68	431.80	432.03	432.14	432.25	432.47	432.58	432.68
2520	432.23	432.34	432.45	432.68	432.79	432.89	433.10	433.21	433.31
2640	432.84	432.95	433.06	433.27	433.38	433.48	433.68	433.78	433.88
2760	433.40	433.51	433.61	433.82	433.92	434.02	434.21	434.31	434.40
2880	433.92	434.02	434.12	434.32	434.41	434.51	434.69	434.79	434.88
3000	434.40	434.50	434.59	434.78	434.87	434.96	435.14	435.22	435.31
3120	434.84	434.93	435.02	435.20	435.29	435.37	435.54	435.63	435.71
3240	435.24	435.33	435.42	435.59	435.67	435.75	435.91	435.99	436.07
3360	435.62	435.70	435.78	435.94	436.02	436.10	436.25	436.33	436.41
3480	435.96	436.04	436.12	436.27	436.34	436.42	436.57	436.64	436.71
3600	436.28	436.35	436.42	436.57	436.64	436.71	436.85	436.92	436.99
3720	436.57	436.64	436.71	436.84	436.91	436.98	437.11	437.18	437.24
3840	436.83	436.90	436.97	437.10	437.16	437.22	437.35	437.41	437.47

Таблиця 4.10.
Значення тиску за різних значень часу t і координати y та $n=10$ (t у секундах)
наближеним методом (I-ий спосіб)

t	y								
	0	10000	20000	40000	50000	60000	80000	90000	100000
0	70.000	68.930	67.843	65.616	64.473	63.310	60.916	59.684	58.425
120	69.998	68.929	67.842	65.615	64.472	63.309	60.917	59.684	58.426
240	69.996	68.926	67.840	65.613	64.471	63.308	60.916	59.684	58.426
360	69.993	68.924	67.838	65.611	64.469	63.307	60.915	59.683	58.425
480	69.990	68.921	67.835	65.609	64.467	63.304	60.913	59.681	58.424
600	69.986	68.917	67.831	65.606	64.464	63.302	60.911	59.679	58.422
720	69.982	68.913	67.827	65.602	64.461	63.299	60.908	59.677	58.419
840	69.978	68.909	67.824	65.599	64.457	63.295	60.905	59.674	58.416
960	69.974	68.905	67.819	65.595	64.454	63.292	60.902	59.671	58.413
1080	69.969	68.901	67.815	65.591	64.450	63.288	60.898	59.667	58.410
1200	69.965	68.896	67.811	65.587	64.446	63.284	60.895	59.664	58.407
1320	69.960	68.892	67.807	65.583	64.442	63.281	60.891	59.660	58.403
1440	69.956	68.887	67.802	65.579	64.438	63.277	60.887	59.657	58.400
1560	69.952	68.883	67.798	65.575	64.434	63.273	60.884	59.653	58.396
1680	69.947	68.879	67.794	65.571	64.430	63.269	60.880	59.650	58.393
1800	69.943	68.875	67.790	65.567	64.426	63.265	60.876	59.646	58.389
1920	69.939	68.871	67.786	65.563	64.422	63.261	60.873	59.643	58.386
2040	69.935	68.867	67.782	65.559	64.419	63.258	60.869	59.639	58.382
2160	69.931	68.863	67.778	65.555	64.415	63.254	60.866	59.636	58.379
2280	69.927	68.859	67.775	65.552	64.412	63.251	60.863	59.632	58.376
2400	69.924	68.856	67.771	65.548	64.408	63.247	60.859	59.629	58.373
2520	69.920	68.852	67.768	65.545	64.405	63.244	60.856	59.626	58.370
2640	69.917	68.849	67.764	65.542	64.402	63.241	60.853	59.623	58.367
2760	69.913	68.846	67.761	65.539	64.399	63.238	60.850	59.620	58.364
2880	69.910	68.843	67.758	65.536	64.396	63.235	60.848	59.618	58.361
3000	69.907	68.840	67.755	65.533	64.393	63.233	60.845	59.615	58.359
3120	69.905	68.837	67.753	65.530	64.390	63.230	60.842	59.612	58.356
3240	69.902	68.834	67.750	65.528	64.388	63.227	60.840	59.610	58.354
3360	69.899	68.832	67.748	65.525	64.386	63.225	60.838	59.608	58.351
3480	69.897	68.829	67.745	65.523	64.383	63.223	60.835	59.606	58.349
3600	69.894	68.827	67.743	65.521	64.381	63.221	60.833	59.604	58.347
3720	69.892	68.825	67.741	65.519	64.379	63.219	60.831	59.602	58.345
3840	69.890	68.823	67.739	65.517	64.377	63.217	60.829	59.600	58.344

Таблиця 4.11.

Значення масової витрати за різних значень часу t і координати y та $n=10$ (t у секундах) наближено-аналітичним методом (II-ий спосіб)

t	y								
	0	10000	20000	40000	50000	60000	80000	90000	100000
0	396.07	396.11	396.15	396.18	396.19	396.18	396.15	396.12	396.07
120	399.56	399.62	399.68	399.77	399.81	399.83	399.86	399.86	399.85
240	402.77	402.85	402.93	403.07	403.13	403.18	403.25	403.28	403.30
360	405.72	405.82	405.92	406.10	406.17	406.24	406.36	406.41	406.45
480	408.44	408.56	408.67	408.87	408.97	409.05	409.21	409.27	409.33
600	410.94	411.07	411.19	411.42	411.53	411.63	411.81	411.89	411.97
720	413.25	413.38	413.51	413.76	413.88	413.99	414.19	414.29	414.37
840	415.37	415.51	415.65	415.91	416.03	416.15	416.37	416.48	416.57
960	417.32	417.47	417.61	417.88	418.01	418.13	418.37	418.48	418.58
1080	419.12	419.27	419.41	419.69	419.82	419.95	420.19	420.31	420.42
1200	420.77	420.92	421.07	421.35	421.48	421.62	421.87	421.99	422.10
1320	422.29	422.44	422.59	422.87	423.01	423.14	423.40	423.52	423.64
1440	423.69	423.84	423.99	424.27	424.41	424.54	424.80	424.92	425.04
1560	424.99	425.13	425.28	425.56	425.69	425.82	426.08	426.20	426.32
1680	426.17	426.32	426.46	426.73	426.87	427.00	427.25	427.37	427.49
1800	427.27	427.41	427.55	427.82	427.95	428.07	428.32	428.45	428.56
1920	428.27	428.41	428.55	428.81	428.94	429.06	429.31	429.43	429.54
2040	429.20	429.33	429.46	429.72	429.84	429.97	430.21	430.32	430.44
2160	430.05	430.18	430.31	430.56	430.68	430.80	431.03	431.14	431.25
2280	430.84	430.96	431.08	431.32	431.44	431.56	431.78	431.89	432.00
2400	431.56	431.68	431.80	432.03	432.14	432.25	432.47	432.58	432.68
2520	432.23	432.34	432.45	432.68	432.79	432.89	433.10	433.21	433.31
2640	432.84	432.95	433.06	433.27	433.38	433.48	433.68	433.78	433.88
2760	433.40	433.51	433.61	433.82	433.92	434.02	434.21	434.31	434.40
2880	433.92	434.02	434.12	434.32	434.41	434.51	434.69	434.79	434.88
3000	434.40	434.50	434.59	434.78	434.87	434.96	435.14	435.22	435.31
3120	434.84	434.93	435.02	435.20	435.29	435.37	435.54	435.63	435.71
3240	435.24	435.33	435.42	435.59	435.67	435.75	435.91	435.99	436.07
3360	435.62	435.70	435.78	435.94	436.02	436.10	436.25	436.33	436.40
3480	435.96	436.04	436.12	436.27	436.34	436.42	436.56	436.64	436.71
3600	436.28	436.35	436.42	436.57	436.64	436.71	436.85	436.92	436.99
3720	436.57	436.64	436.71	436.84	436.91	436.98	437.11	437.18	437.24
3840	436.83	436.90	436.97	437.10	437.16	437.22	437.35	437.41	437.47

Таблиця 4.12.

Значення тиску за різних значень часу t і координати y та $n=10$ (t у секундах)
наближено-аналітичним методом (II-ий спосіб)

t	y								
	0	10000	20000	40000	50000	60000	80000	90000	100000
0	70.000	68.930	67.843	65.616	64.473	63.310	60.916	59.684	58.425
120	69.998	68.929	67.842	65.615	64.472	63.309	60.917	59.684	58.426
240	69.996	68.926	67.840	65.613	64.471	63.308	60.916	59.684	58.426
360	69.993	68.924	67.838	65.611	64.469	63.307	60.915	59.683	58.425
480	69.990	68.920	67.835	65.609	64.467	63.304	60.913	59.681	58.424
600	69.986	68.917	67.831	65.606	64.464	63.302	60.911	59.679	58.422
720	69.982	68.913	67.827	65.602	64.461	63.299	60.908	59.677	58.420
840	69.978	68.909	67.823	65.599	64.457	63.295	60.905	59.674	58.417
960	69.973	68.905	67.819	65.595	64.454	63.292	60.902	59.671	58.414
1080	69.969	68.900	67.815	65.591	64.450	63.288	60.898	59.668	58.411
1200	69.964	68.896	67.811	65.587	64.446	63.284	60.895	59.664	58.407
1320	69.960	68.892	67.807	65.583	64.442	63.281	60.891	59.661	58.404
1440	69.955	68.887	67.802	65.579	64.438	63.277	60.888	59.657	58.401
1560	69.951	68.883	67.798	65.575	64.434	63.273	60.884	59.653	58.397
1680	69.947	68.879	67.794	65.571	64.430	63.269	60.880	59.650	58.394
1800	69.942	68.875	67.790	65.567	64.426	63.265	60.876	59.646	58.390
1920	69.938	68.870	67.786	65.563	64.422	63.261	60.873	59.643	58.387
2040	69.934	68.866	67.782	65.559	64.419	63.258	60.869	59.639	58.383
2160	69.930	68.863	67.778	65.555	64.415	63.254	60.866	59.636	58.380
2280	69.926	68.859	67.774	65.552	64.412	63.251	60.863	59.633	58.377
2400	69.923	68.855	67.771	65.548	64.408	63.247	60.859	59.629	58.374
2520	69.919	68.852	67.768	65.545	64.405	63.244	60.856	59.626	58.371
2640	69.916	68.849	67.764	65.542	64.402	63.241	60.853	59.623	58.368
2760	69.913	68.845	67.761	65.539	64.399	63.238	60.850	59.621	58.365
2880	69.910	68.842	67.758	65.536	64.396	63.235	60.848	59.618	58.362
3000	69.907	68.839	67.755	65.533	64.393	63.233	60.845	59.615	58.359
3120	69.904	68.837	67.753	65.530	64.390	63.230	60.842	59.613	58.357
3240	69.901	68.834	67.750	65.528	64.388	63.227	60.840	59.610	58.355
3360	69.899	68.832	67.747	65.525	64.386	63.225	60.838	59.608	58.352
3480	69.896	68.829	67.745	65.523	64.383	63.223	60.835	59.606	58.350
3600	69.894	68.827	67.743	65.521	64.381	63.221	60.833	59.604	58.348
3720	69.892	68.825	67.741	65.519	64.379	63.219	60.831	59.602	58.346
3840	69.890	68.823	67.739	65.517	64.377	63.217	60.829	59.600	58.344

Таблиця 4.13.

Значення масової витрати вздовж трубопроводу для різних значень гідравлічного опору за різних значень часу t і координати y (t у секундах)

t	$\chi = 0.00995$			$\chi = 0.01005$			$\chi = 0.0101$		
	y			y			y		
	5000	60000	95000	5000	60000	95000	5000	60000	95000
0	396.10	396.18	396.10	396.10	396.18	396.10	396.10	396.18	396.10
300	404.32	404.74	404.90	404.32	404.74	404.90	404.32	404.74	404.90
600	411.01	411.63	411.93	411.01	411.63	411.93	411.01	411.63	411.93
900	416.44	417.16	417.55	416.44	417.16	417.55	416.44	417.16	417.55
1200	420.85	421.62	422.04	420.85	421.62	422.04	420.85	421.62	422.04
1500	424.43	425.20	425.64	424.43	425.20	425.64	424.43	425.20	425.64
1800	427.34	428.07	428.51	427.34	428.07	428.51	427.34	428.07	428.51
2100	429.70	430.39	430.80	429.70	430.39	430.80	429.70	430.39	430.80
2400	431.62	432.25	432.63	431.62	432.25	432.63	431.62	432.25	432.63
2700	433.18	433.75	434.10	433.18	433.75	434.10	433.18	433.75	434.10
3000	434.45	434.96	435.27	434.45	434.96	435.27	434.45	434.96	435.27
3300	435.48	435.93	436.20	435.48	435.93	436.20	435.48	435.93	436.20
3600	436.31	436.71	436.95	436.31	436.71	436.95	436.31	436.71	436.95
3900	436.99	437.34	437.55	436.99	437.34	437.55	436.99	437.34	437.55
4200	437.54	437.84	438.03	437.54	437.84	438.03	437.54	437.84	438.03
4500	437.99	438.25	438.41	437.99	438.25	438.41	437.99	438.25	438.41
4800	438.36	438.58	438.72	438.36	438.58	438.72	438.36	438.58	438.72
5100	438.65	438.84	438.96	438.65	438.84	438.96	438.65	438.84	438.96
5400	438.89	439.06	439.16	438.89	439.06	439.16	438.89	439.06	439.16
5700	439.09	439.23	439.31	439.09	439.23	439.31	439.09	439.23	439.31
6000	439.25	439.36	439.44	439.25	439.36	439.44	439.25	439.36	439.44
6300	439.38	439.47	439.54	439.38	439.47	439.54	439.38	439.47	439.54
6600	439.48	439.56	439.62	439.48	439.56	439.62	439.48	439.56	439.62
6900	439.57	439.64	439.68	439.57	439.64	439.68	439.57	439.64	439.68
7200	439.63	439.69	439.73	439.63	439.69	439.73	439.63	439.69	439.73
7500	439.69	439.74	439.77	439.69	439.74	439.77	439.69	439.74	439.77
7800	439.74	439.78	439.80	439.74	439.78	439.80	439.74	439.78	439.80
8100	439.77	439.81	439.83	439.77	439.81	439.83	439.77	439.81	439.83
8400	439.80	439.83	439.85	439.80	439.83	439.85	439.80	439.83	439.85
8700	439.83	439.85	439.87	439.83	439.85	439.87	439.83	439.85	439.87
9000	439.85	439.87	439.88	439.85	439.87	439.88	439.85	439.87	439.88
9300	439.86	439.88	439.89	439.86	439.88	439.89	439.86	439.88	439.89
9600	439.88	439.89	439.90	439.88	439.89	439.90	439.88	439.89	439.90
9900	439.89	439.90	439.91	439.89	439.90	439.91	439.89	439.90	439.91
10200	439.90	439.91	439.91	439.90	439.91	439.91	439.90	439.91	439.91
10500	439.90	439.91	439.92	439.90	439.91	439.92	439.90	439.91	439.92
10800	439.91	439.92	439.92	439.91	439.92	439.92	439.91	439.92	439.92

Таблиця 4.14.

Значення тиску вздовж трубопроводу для різних значень гідравлічного опору за різних значень часу t і координати y (t у секундах)

t	$\chi = 0.00995$			$\chi = 0.01005$			$\chi = 0.0101$		
	y			y			y		
	5000	60000	95000	5000	60000	95000	5000	60000	95000
0	69.47	63.34	59.12	69.46	63.27	59.00	69.46	63.24	58.94
300	69.46	63.34	59.12	69.46	63.27	59.00	69.46	63.24	58.94
600	69.46	63.34	59.11	69.45	63.27	58.99	69.45	63.23	58.93
900	69.45	63.33	59.11	69.44	63.26	58.99	69.44	63.22	58.93
1200	69.43	63.32	59.10	69.43	63.25	58.98	69.43	63.21	58.92
1500	69.42	63.31	59.09	69.42	63.24	58.97	69.42	63.20	58.91
1800	69.41	63.30	59.08	69.41	63.23	58.96	69.41	63.19	58.90
2100	69.40	63.29	59.07	69.40	63.22	58.95	69.40	63.19	58.89
2400	69.39	63.28	59.06	69.39	63.21	58.95	69.39	63.18	58.89
2700	69.39	63.27	59.06	69.38	63.20	58.94	69.38	63.17	58.88
3000	69.38	63.27	59.05	69.37	63.20	58.93	69.37	63.16	58.87
3300	69.37	63.26	59.04	69.37	63.19	58.92	69.36	63.16	58.86
3600	69.37	63.26	59.04	69.36	63.19	58.92	69.36	63.15	58.86
3900	69.36	63.25	59.03	69.35	63.18	58.91	69.35	63.15	58.85
4200	69.36	63.25	59.03	69.35	63.18	58.91	69.35	63.14	58.85
4500	69.35	63.24	59.03	69.35	63.17	58.91	69.34	63.14	58.85
4800	69.35	63.24	59.02	69.34	63.17	58.90	69.34	63.13	58.84
5100	69.35	63.24	59.02	69.34	63.17	58.90	69.34	63.13	58.84
5400	69.34	63.23	59.02	69.34	63.16	58.90	69.34	63.13	58.84
5700	69.34	63.23	59.02	69.34	63.16	58.90	69.33	63.13	58.84
6000	69.34	63.23	59.01	69.33	63.16	58.90	69.33	63.13	58.84
6300	69.34	63.23	59.01	69.33	63.16	58.89	69.33	63.12	58.83
6600	69.34	63.23	59.01	69.33	63.16	58.89	69.33	63.12	58.83
6900	69.34	63.23	59.01	69.33	63.16	58.89	69.33	63.12	58.83
7200	69.33	63.23	59.01	69.33	63.16	58.89	69.33	63.12	58.83
7500	69.33	63.23	59.01	69.33	63.16	58.89	69.33	63.12	58.83
7800	69.33	63.23	59.01	69.33	63.16	58.89	69.33	63.12	58.83
8100	69.33	63.22	59.01	69.33	63.16	58.89	69.32	63.12	58.83

У таблицях 4.13 та 4.14 показано вплив зміни гідравлічного опору χ на результати обчислень розподілу масової витрати та тиску вздовж трубопроводу. Побудований метод розв'язування задач математичної фізики є стійким до похибок вхідних даних. [15, 95]

4.3. Дослідження розподілу тиску у воді в складних пористих середовищах. Наближено-аналітична модель розподілу тиску у воді (модель 2.2)

Розв'язок сформульованої крайової задачі (2.19)-(2.21) знайдемо у вигляді [16]

$$P(x,t) = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x) G_i(t), \quad (4.56)$$

де $V(x)$ - базисні функції, для яких справедливі співвідношення

$$\frac{d^2 V_i^{n+\bar{i}}(x)}{dx^2} = -\frac{V_i^{n+\bar{i}}(x)}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} + \frac{\tau_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} T'_{n+1+\bar{i}}(x), \quad i=1, \dots, n,$$

$$\frac{d^2 V_{n+1}^{n+1}(x)}{dx^2} = \frac{(n+2)^2 \pi}{8} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_2^{2k} V_{2k-1}^{n+1}(x)}{\lambda_{2k}^n N_{2k-1}^n} + \frac{1}{15} n(n+1)(n+3)(n+4) T'_{n+2}(x),$$

$$\frac{d^2 V_{n+2}^n(x)}{dx^2} = \frac{(n+1)^2 \pi}{2} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\bar{c}_1^{2k-1} V_{2k}^n(x)}{\lambda_{2k-1}^n N_{2k}^n} + \frac{1}{15} (n-1)n(n+2)(n+3) T'_{n+1}(x),$$

де $V_{n+1}^{n+1}(x) = T'_{n+2}(x)$, $V_{n+2}^n(x) = T'_{n+1}(x)$, $\bar{i} = 0$ - для парних значень i , та $\bar{i} = 1$ - для непарних значень i . $T_{n+1} = T_{n+1}(x)$ та $T_{n+2} = T_{n+2}(x)$ поліноми Чебишева степеня $n+1$ та $n+2$, λ_i^n , $i=1, \dots, n$ - власні значення інтегрального оператора

$$\pi_1^\infty L = \pi_1^\infty \int_{-1}^x \int_{-1}^{x_1}, \quad U_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^s c_{2j}^{2i} \tilde{T}_{2j}(x), \quad U_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s c_{2j-1}^{2i-1} \tilde{T}_{2j-1}(x) - \text{власні функції}$$

цього оператора, $\tilde{T}_j(x)$ - модифіковані многочлени Чебишева,

$$\bar{U}_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j}^{2i} T_{2j}(x), \quad \bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x) - \text{власні функції даного}$$

$$\text{оберненого оператора,} \quad \tau_{2i}^{2s}(x) = \frac{c_{2s}^{2i}}{4(2s+1)(2s+2)}, \quad \tau_{2i-1}^{2s}(x) = \frac{c_{2s-1}^{2i-1}}{4(2s)(2s+1)},$$

$$\bar{\tau}_{2i}^{2s}(x) = \frac{\bar{c}_{2s}^{2i}}{4(2s)(2s+1)}, \quad \bar{\tau}_{2i-1}^{2s}(x) = \frac{\bar{c}_{2s-1}^{2i-1}}{4(2s-1)(2s)}, \quad \text{біортогональні функції}$$

$$V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) = \int_{-1}^x U_{2i-1+\bar{i}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(x_1) dx_1, \quad \bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \frac{\bar{U}_{2i-1+\bar{i}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1, \quad i=1, \dots, n/2,$$

$$N_i^n = \int_{-1}^1 \frac{V_i^{n+\bar{i}}(x) \bar{V}_i^{n+\bar{i}}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad i=1, \dots, n \text{ - норма біортогональних функцій [16, 17].}$$

Підставимо (4.56) у рівняння (2.19) і дістанемо

$$\kappa \frac{4}{l^2} \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\partial^2 V_i^{n+\bar{i}}(x)}{\partial x^2} G_i(t) = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x) \frac{\partial G_i(t)}{\partial t}. \quad (4.57)$$

Рівняння (4.57) домножимо на $V_i^{n+\bar{i}}(x)$, $i=1, \dots, n$ та зінтегруємо по змінні

x з вагою $\varpi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в межах від $x=-1$ до $x=1$. Отримаємо систему з n

диференціальних рівнянь першого порядку виду

$$\begin{aligned} \kappa \frac{4}{l^2} \left(-\frac{N_i^n}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} G_i(t) + \frac{(n+1+\bar{i})^2}{2^{2\bar{i}+1}} \pi \frac{\bar{c}_{1+\bar{i}}^{i+(-1)^{\bar{i}+1}}}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} G_{n+2-\bar{i}}(t) \right) = \\ = N_i^n \frac{\partial G_i(t)}{\partial t}, \quad i=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.58)$$

З граничних умов (2.21), враховуючи, що $V_i^{n+\bar{i}}(-1) = V_i^{n+\bar{i}}(1) = 0$, $i=1, \dots, n$, маємо

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2(n+1)^2} = G_{n+2}(t), \quad \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2(n+2)^2} = G_{n+1}(t). \quad (4.59)$$

Враховуючи (4.59), систему (4.58) запишемо

$$\frac{\partial G_i(t)}{\partial t} + \frac{4\kappa}{l^2 \lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} G_i(t) = \frac{\kappa \pi}{2^{2\bar{i}} l^2 N_i^n} \frac{\bar{c}_{1+\bar{i}}^{i+(-1)^{\bar{i}+1}}}{\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} \left(\varphi_2 + (-1)^i \varphi_1 \right), \quad i=1, \dots, n. \quad (4.60)$$

Розв'язками системи (4.60) будуть функції [16]

$$G_i(t) = \frac{\bar{c}_{1+\bar{i}}^{i+(-1)^{\bar{i}+1}} \pi}{2^{2\bar{i}+2} N_i^n} \left(\varphi_2 + (-1)^i \varphi_1 \right) \left(1 - e^{-\frac{4\kappa}{l^2 \lambda_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}^n} t} \right) +$$

$$+G_i(0)e^{-\frac{4\kappa}{l^2\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}}+1}^n}t}, \quad i=1,\dots,n, \quad (4.61)$$

де коефіцієнти $G_i(0)$ знайдені з початкової умови (2.20) за формулою

$$G_i(0) = \frac{1}{N_i^n} \int_{-1}^1 \frac{P(x,0)\bar{V}_i^{n+\bar{i}}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (4.62)$$

Таким чином, ми знайшли розв'язок рівняння (2.19) на проміжку $x \in [-1,1]$, а саме

$$P(x,t) = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x) \left(\frac{\bar{c}_{1+\bar{i}}^{i+(-1)^{\bar{i}+1}} \pi}{2^{2\bar{i}+2} N_i^n} (\varphi_2 + (-1)^i \varphi_1) \left(1 - e^{-\frac{4\kappa}{l^2\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}}+1}^n}t} \right) + G_i(0) e^{-\frac{4\kappa}{l^2\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}}+1}^n}t} \right).$$

В отриманому розв'язку, повернемося до змінної y і дістанемо розв'язок рівняння (2.15) [16]

$$p(y,t) = \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}} \left(\frac{2y-l}{l} \right) \times \left(\frac{\bar{c}_{1+\bar{i}}^{i+(-1)^{\bar{i}+1}} \pi}{2^{2\bar{i}+2} N_i^n} (\varphi_2 + (-1)^i \varphi_1) \left(1 - e^{-\frac{4\kappa}{l^2\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}}+1}^n}t} \right) + G_i(0) e^{-\frac{4\kappa}{l^2\lambda_{i+(-1)^{\bar{i}}+1}^n}t} \right).$$

Обчислювальний експеримент 4.3. Результати розв'язку рівняння (2.15) при $k = 4 \cdot 10^{-12}$, $\mu = 1,1 \cdot 10^{-6} (\text{м}^2/\text{с})$, $\alpha_g = 0,8$, $m = 0,28$, $p_0 = 6,864655 (\text{МН} / \text{м}^2)$, $p_1 = 5,3936575 (\text{МН} / \text{м}^2)$, $\rho = 998 (\text{кг}/\text{м}^3)$, $g = 9,8 (\text{м}/\text{с}^2)$, $\Delta x = 1 \text{ м}$, $\Delta t = 24 \text{ год}$ (день).

Таблиця 4.15.

Значення тиску води у безмежному шарі товщини $l = 10\text{м}$ за різних значень часу t і координати y (метри) при $n = 10$, значення t у таблиці вказано в годинах

t	y										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	70.000	56.027	52.689	55.111	54.351	53.722	55.453	54.092	54.939	54.622	55.000
24	70.000	60.451	55.614	54.438	54.371	54.445	54.560	54.654	54.753	54.876	55.000
48	70.000	62.886	57.885	55.429	54.625	54.501	54.559	54.658	54.764	54.879	55.000
72	70.000	64.097	59.443	56.559	55.175	54.692	54.611	54.670	54.771	54.883	55.000
96	70.000	64.851	60.548	57.549	55.819	55.014	54.739	54.713	54.784	54.887	55.000
120	70.000	65.378	61.377	58.383	56.456	55.404	54.936	54.797	54.815	54.897	55.000
144	70.000	65.773	62.026	59.086	57.051	55.818	55.181	54.921	54.869	54.916	55.000
168	70.000	66.083	62.551	59.684	57.594	56.233	55.454	55.078	54.947	54.947	55.000
192	70.000	66.334	62.988	60.200	58.087	56.635	55.740	55.257	55.045	54.988	55.000
216	70.000	66.544	63.357	60.650	58.534	57.018	56.029	55.451	55.159	55.040	55.000
240	70.000	66.722	63.676	61.046	58.940	57.379	56.315	55.654	55.284	55.098	55.000
264	70.000	66.876	63.954	61.398	59.309	57.719	56.594	55.859	55.415	55.161	55.000
288	70.000	67.011	64.199	61.713	59.647	58.037	56.863	56.062	55.549	55.227	55.000
312	70.000	67.130	64.418	61.997	59.957	58.335	57.120	56.262	55.683	55.294	55.000
336	70.000	67.236	64.614	62.254	60.241	58.613	57.365	56.455	55.815	55.360	55.000
360	70.000	67.332	64.791	62.489	60.503	58.873	57.597	56.641	55.944	55.426	55.000
384	70.000	67.418	64.953	62.704	60.745	59.115	57.817	56.819	56.068	55.490	55.000
408	70.000	67.497	65.100	62.901	60.969	59.342	58.023	56.989	56.187	55.551	55.000
432	70.000	67.569	65.234	63.082	61.177	59.553	58.218	57.149	56.301	55.610	55.000
456	70.000	67.635	65.358	63.250	61.369	59.750	58.400	57.300	56.409	55.666	55.000
480	70.000	67.695	65.473	63.405	61.548	59.934	58.571	57.443	56.511	55.719	55.000
504	70.000	67.751	65.578	63.548	61.714	60.105	58.732	57.577	56.607	55.769	55.000
528	70.000	67.803	65.676	63.681	61.868	60.266	58.882	57.703	56.698	55.816	55.000
552	70.000	67.851	65.766	63.805	62.012	60.415	59.022	57.821	56.783	55.861	55.000
576	70.000	67.895	65.850	63.920	62.146	60.554	59.154	57.932	56.863	55.903	55.000
600	70.000	67.936	65.928	64.026	62.270	60.685	59.276	58.036	56.938	55.942	55.000
624	70.000	67.974	66.001	64.126	62.387	60.806	59.391	58.133	57.008	55.979	55.000
648	70.000	68.010	66.068	64.218	62.495	60.919	59.498	58.224	57.074	56.013	55.000
672	70.000	68.043	66.131	64.305	62.596	61.025	59.598	58.309	57.135	56.046	55.000
696	70.000	68.074	66.189	64.385	62.690	61.124	59.692	58.388	57.193	56.076	55.000
720	70.000	68.102	66.244	64.460	62.778	61.216	59.779	58.462	57.247	56.104	55.000

Таблиця 4.16.

Значення тиску води у безмежному шарі товщини $l = 10\text{м}$ за різних значень часу t і координати y (метри) при $n = 10$, значення t у таблиці вказано в годинах

t	y								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
168	66.0826	62.5512	59.6844	57.5939	56.2329	55.4537	55.0777	54.9471	54.9466
336	67.2362	64.6141	62.2544	60.2411	58.6131	57.3652	56.4553	55.8149	55.3603
504	67.7511	65.5780	63.5482	61.7136	60.1054	58.7315	57.5771	56.6069	55.7689
672	68.0429	66.1309	64.3045	62.5958	61.0249	59.5984	58.3087	57.1350	56.0455
840	68.2190	66.4656	64.7646	63.1356	61.5913	60.1360	58.7652	57.4662	56.2194
1008	68.3270	66.6710	65.0471	63.4676	61.9403	60.4677	59.0472	57.6710	56.3271
1176	68.3934	66.7973	65.2210	63.6721	62.1552	60.6721	59.2211	57.7973	56.3935
1344	68.4344	66.8752	65.3282	63.7980	62.2876	60.7980	59.3282	57.8752	56.4344
1512	68.4596	66.9231	65.3942	63.8756	62.3692	60.8756	59.3942	57.9231	56.4596
1680	68.4751	66.9526	65.4348	63.9233	62.4194	60.9233	59.4348	57.9526	56.4751
1848	68.4847	66.9708	65.4598	63.9528	62.4504	60.9528	59.4598	57.9708	56.4847
2016	68.4905	66.9820	65.4753	63.9709	62.4694	60.9709	59.4753	57.9820	56.4905
2184	68.4942	66.9889	65.4848	63.9821	62.4812	60.9821	59.4848	57.9889	56.4942
2352	68.4964	66.9932	65.4906	63.9890	62.4884	60.9890	59.4906	57.9932	56.4964
2520	68.4978	66.9958	65.4942	63.9932	62.4929	60.9932	59.4942	57.9958	56.4978
2688	68.4986	66.9974	65.4964	63.9958	62.4956	60.9958	59.4964	57.9974	56.4986
2856	68.4992	66.9984	65.4978	63.9974	62.4973	60.9974	59.4978	57.9984	56.4992
3024	68.4995	66.9990	65.4986	63.9984	62.4983	60.9984	59.4986	57.9990	56.4995
3192	68.4997	66.9994	65.4992	63.9990	62.4990	60.9990	59.4992	57.9994	56.4997
3360	68.4998	66.9996	65.4995	63.9994	62.4994	60.9994	59.4995	57.9996	56.4998
3528	68.4999	66.9998	65.4997	63.9996	62.4996	60.9996	59.4997	57.9998	56.4999
3696	68.4999	66.9999	65.4998	63.9998	62.4998	60.9998	59.4998	57.9999	56.4999
3864	68.5000	66.9999	65.4999	63.9999	62.4999	60.9999	59.4999	57.9999	56.5000
4032	68.5000	66.9999	65.4999	63.9999	62.4999	60.9999	59.4999	57.9999	56.5000
4200	68.5000	67.0000	65.5000	63.9999	62.4999	60.9999	59.5000	58.0000	56.5000
4368	68.5000	67.0000	65.5000	64.0000	62.5000	61.0000	59.5000	58.0000	56.5000
4536	68.5000	67.0000	65.5000	64.0000	62.5000	61.0000	59.5000	58.0000	56.5000
4704	68.5000	67.0000	65.5000	64.0000	62.5000	61.0000	59.5000	58.0000	56.5000
4872	68.5000	67.0000	65.5000	64.0000	62.5000	61.0000	59.5000	58.0000	56.5000
5040	68.5000	67.0000	65.5000	64.0000	62.5000	61.0000	59.5000	58.0000	56.5000

Таблиця 4.17.

Значення тиску води у безмежному шарі товщини $l = 10\text{ м}$ за різних значень часу t і координати y (метри) при $n = 10$, значення t у таблиці вказано в годинах

t	y								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
720	68.1024	66.2438	64.4597	62.7777	61.2156	59.7792	58.4621	57.2462	56.1038
1440	68.4502	66.9053	65.3697	63.8469	62.3390	60.8469	59.3697	57.9053	56.4502
2160	68.4938	66.9881	65.4837	63.9808	62.4798	60.9808	59.4837	57.9881	56.4938
2880	68.4992	66.9985	65.4980	63.9976	62.4975	60.9976	59.4980	57.9985	56.4992
3600	68.4999	66.9998	65.4997	63.9997	62.4997	60.9997	59.4997	57.9998	56.4999
4320	68.5000	67.0000	65.5000	64.0000	62.5000	61.0000	59.5000	58.0000	56.5000
5040	68.5000	67.0000	65.5000	64.0000	62.5000	61.0000	59.5000	58.0000	56.5000
5760	68.5000	67.0000	65.5000	64.0000	62.5000	61.0000	59.5000	58.0000	56.5000
6480	68.5000	67.0000	65.5000	64.0000	62.5000	61.0000	59.5000	58.0000	56.5000
7200	68.5000	67.0000	65.5000	64.0000	62.5000	61.0000	59.5000	58.0000	56.5000

Висновки до розділу

З результатів обчислень випливає, що зміна границь зміни швидкості руху газу v_1 та v_2 , на основі яких проводиться двочленна лінеаризація, практично не впливає на кінцевий результат. Обчислені значення масової витрати та тиску за різних значень часу t , координати y та порядків n поліномів Чебишева, на базі яких будуються біортогональні поліноми. Оскільки порядок поліномів n мають незначний вплив, то для зменшення часу обчислень доцільно вибрати поліноми Чебишева невеликих порядків.

Отримані числові значення тиску підтверджують достовірність отриманих теоретичних результатів та ефективність застосування побудованих біортогональних поліномів для розв'язання задач математичної фізики. Запропонований алгоритм легко піддається автоматизації і може бути ефективно використаний для вирішення інших практичних задач.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальне наукове завдання – розроблення адаптивних аналітико-числових математичних моделей руху газу в трубопроводах та природних пористих утвореннях, які відповідають практичним завданням керування поточкорозподілом газу, та розроблення адаптивних методів розрахунку цих моделей, орієнтованих на використання апріорної інформації про шукані розв'язки.

1. Зроблено аналіз використовуваних математичних моделей процесів руху газу в технологічних об'єктах ГТС та їх відповідність практичним критеріям, які ставляться перед ними на цей час. У зв'язку з підвищенням вимог до обчислення режимних параметрів показано необхідність побудови нових і уточнення існуючих моделей і методів для використання результатів у задачах керування процесом масопереносу.

2. Побудовано адаптивні числово-аналітичні моделі масопереносу в технологічних об'єктах ГТС (зокрема трубопроводах та пористих середовищах). Граничні та початкові умови будуються на базі експериментальних даних, які зазнають попередньої обробки.

3. Вперше побудовано квазіспектральні та біортогональні поліноми, описано алгоритми їх побудови, досліджено їх властивості. Знайдено коефіцієнти нев'язки τ_1 та τ_2 для рівняння, що описує квазіспектральну задачу у випадку інтегрального оператора окремо для парних та непарних поліномів, а також $\bar{\tau}_1$ та $\bar{\tau}_2$ у випадку диференціального оператора.

4. Вперше створено нові аналітично-наближені та наближені методи для вирішення газодинамічних задач у базисі біортогональних поліномів. Вивчено вплив параметрів методів, зокрема порядку часткової суми, розрядної сітки та похибки обчислення на точність отриманих розв'язків. Методи апробовані на модельній задачі типу теплопровідності.

5. Вперше досліджено спосіб розв'язування задач математичної фізики методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів, проведено

порівняльний аналіз для різних вхідних параметрів.

6. На базі розробленого методу побудовано адаптивні алгоритми розрахунку режимних параметрів транспорту газу з метою мінімізації енергетичних ресурсів та оптимізації роботи ГТС за різними критеріями.

7. Обґрунтовано ефективність розвинених алгоритмів та застосування побудованих біортогональних поліномів для розв'язування задач математичної фізики, зокрема, задач газогідродинаміки:

- отримані біортогональні поліноми $V_i^{n+i}(x)$, $i=1, \dots, n$ такі, що при знаходженні розв'язків наведених задач, саме у вигляді суми ряду по знайдених біортогональних функціях дістанемо діагональну матрицю для знаходження невідомих коефіцієнтів ряду, з якої відразу ж отримуємо невідомі величини (при знаходженні розв'язків цих же задач у вигляді рядів Фур'є-Чебишева дістаємо трикутну матрицю, а у випадку степеневих рядів - дводіагональну матрицю; у цих випадках для знаходження невідомих коефіцієнтів потрібно виконати більше арифметичних операцій, затратити більше часу, а, отже, накопичити більшу машинну похибку; у випадку використання степеневих рядів, цей метод має меншу збіжність у порівнянні з описаними двома іншими методами);

- отримані біортогональні поліноми $V_i^{n+i}(x)$ володіють властивостями: $V_i^{n+i}(\pm 1) = 0$, що дає змогу відразу ж з крайових умов знаходити невідомі два коефіцієнти;

- побудовані квазіспектральні поліноми є похідними першого порядку від біортогональних многочленів (ця властивість є дуже важливою, при диференціюванні функції представленої у вигляді суми ряду через біортогональні поліноми чи інтегруванні функції представленої у вигляді суми ряду через квазіспектральні поліноми; коефіцієнти при цьому залишаються незмінними, а лише змінюються функції при них, які є відомими);

- слід зазначити, що саме при застосуванні знайдених біортогональних многочленів до розв'язування поставлених задач позитивним є те, що

параметри: \bar{c}_{1+i}^{2i-1+i} , λ_{2i-1+i}^n , N_{2i-i}^n , τ_{2i-1+i}^n , які входять в одержані розв'язки, можуть бути обчислені з довільною точністю і знайдені з алгоритму побудови біортогональних функцій (для довільного натурального числа n можна побудувати бази даних із значеннями цих параметрів і використовувати їх під час обчислення розв'язку, що теж економить час).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Badkov V. M. Convergence in the mean and almost everywhere of Fourier series in polynomials orthogonal on an interval / V. M. Badkov // Math. USSR Sbornik. 2. MR0355464 (50:7938). – 1974. PP. 223–256.
2. Bernardi C. Properties of some weighted sobolev spaces, and applications to spectral approximations / C. Bernardi and Y. Maday // SIAM J. Numer. Anal. 26.– 1989. – PP. 769–829.
3. Cabos Ch. A preconditioning of the tau operator for ordinary differential equations / Ch. Cabos, Z. Angew // Math. Mech. 74 (11). – 1994. - PP. 521–532.
4. Coutsias E.A. Integration preconditioners for differential operators in spectral τ -methods / E.A. Coutsias, T. Hagstorm, J.S. Hesthaven, D. Torres // Proc. 3rd International Conference on Spectral and High Order Methods. Houston. TX. – 1995. - PP. 21-38.
5. Coutsias E.A. Integration preconditioners for differential operators in spectral τ -methods / E.A. Coutsias, T. Hagstorm, J.S. Hesthaven, D. Torres // Proc. 3rd International Conference on Spectral and High Order Methods. Houston. TX. – 1995. - PP. 21–38.
6. Ghoreishi F. The Tau method and a new preconditioner / F. Ghoreishi, S.Mohammad Hosseini // Journal of Computational and Applied Mathematics: Volume 163. - Issue 2. – 2004. - PP. 351 – 379.
7. Jie Shen. Efficient Chebyshev-Legendre Galerkin methods for elliptic problems / Jie Shen // In A. V. Ilin and R. Scott, editors, Proceedings of ICOSAHOM'95. Houston J. Math. - 1996. – PP. 233–240.
8. Jie Shen. Efficient spectral-Galerkin method II. Direct solvers for second- and fourthorder equations by using Chebyshev polynomials / Jie Shen // SIAM J. Sci. Comput. 16. – 1995. PP. 74–87.
9. John P. Boyd. Chebyshev and Fourier Spectral methods / John P. Boyd // 2nd edition. Dover Publication, Inc., Mineola, New York. - 2001.
10. Kralik J. SIMONE documentation library. SIMONE Research Group. Prague. /

- [Kralik J. etc.] // Dynamic Modeling of Large Scale Network with Application to Gas Distribution. Elsevier. – 1988. – 517 p.
11. Lee A. L. The viscosity of natural gases / Lee A. L., Gonzalez M. H., Eakin B. E. – J. Petr. Technol., 1966, – N28. – P. 997–1000.
 12. Limarchenko O. Parametric oscillations of liquid with a free surface in reservoir of conic shape / O. Limarchenko, V. Melnik // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. - 2015. - Вип. 21. - С. 1134-138.
 13. Limarchenko O. S. Applied problems of dynamics of pipelines, conveying liquid / O. S. Limarchenko, V. O. Limarchenko, M. Majid, A. P. Timokhin // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2015. - Вип. 94. - С. 96-106.
 14. Pyanylo Ya. D. Optimization of energy costs for gas transportation in complex gas transmission systems / Ya. D. Pyanylo, S. V. Gladun // ANNALS of Faculty Engineering Hunedoara – International Journal of Engineering 31 | Fascicule 3 Tome XIII [2015] – Fascicule 3 [August].
 15. Pyanylo Ya. Methods of finding distribution of pressure in the pipeline / Ya. Pyanylo, V. Sobko // Mathematical modeling and computing, Vol. 3, No. 2, pp. 199–207 (2016).
 16. Pyanylo Ya. The pressure distribution in water in the complex porous environments investigat / Ya. Pyanylo, V. Sobko, O. Bratash // Mathematical modeling and computing, Vol. 4, No. 2, pp. 187–196 (2017).
 17. True W. R. Worldwide gas processing continues to expand, shift balance / True W. R. // Oil & Gas Journal. 14 June. 1999. – P. 41–46.
 18. Walter A. Strauss. Partial Differential Equations: An Introduction / Walter A. Strauss // 2nd edition, John Wiley and Sons. - 2008.
 19. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика / Абрамович Г.Н. – М.: Наука, 1969. – 825 с.
 20. Абрамович М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Абрамович М., Стиган И. – М.: Наука. – 1979. – 832 с.
 21. Александров А.В. Проектирование и эксплуатация систем дальнего

- транспорта газа / Александров А.В., Яковлев Е.И. – М.: Недра, 1974. – 432 с.
22. Альтшуль А. Д. Гидравлика и аэродинамика / Альтшуль А. Д., Киселев П. Г. – М.: Изд, лит. по строительству, 1965. – 273 с.
23. Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления / Альтшуль А. Д. – М.: Недра, 1982. – 2-е изд. – 224 с.
24. Атавин А. А. Описание переходных процессов в сложных трубопроводных системах моделями с сосредоточенными параметрами / Атавин А. А., Тарасевич В. В. – Труды Международной конференции RDAMM – 2001. – Т. 6, Ч. 2.
25. Бабе Г. Д. Идентификация моделей гидравлики / Бабе Г. Д., Бондаров Э. А., Воеводин А. Ф., Каниболотский М. А. – Новосибирск: Наука, 1980. – 160 с.
26. Баренблат Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Баренблат Г. И., Ентов Б. М., Рыжик В. М. – М.: Недра, 1972. – 288 с.
27. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. В 2-х томах / Бейтмен Г., Эрдейи А. – М.: Наука, 1974. – т.1 – 296 с., т.2. – 300 с.
28. Бобровский С. А. Движение газа в газопроводах с путевым отбором / Бобровский С. А., Щербаков С. Г., Гусейн-Заде М. А. – М.: Наука, 1972. – 192 с.
29. Бобровский С. А. Трубопроводный транспорт газа / Бобровский С. А., Щербаков С. Г., Яковлев Е. И. и др. – М.: Наука, 1976. – 495 с.
30. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Варгафтик Н. Б. – М.: Наука, 1972. – 708 с.
31. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Васильев Ф. П. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
32. Вольский Э. Л. Режим работы магистрального газопровода / Э. Л. Вольский, И. М. Константинова. – Л.: Недра, 1970. – 168 с.
33. Гавриленко В. Вплив сил Коріоліса на динаміку трубопроводу з рідиною при різних способах закріплення / В. Гавриленко, О. Лимарченко, О.Ковальчук // Підводні технології. Промислова та цивільна інженерія. – 2015. – Вип. 2. – С. 66-71.

34. Газ природный. Методы расчета физических свойств. Общие положения.: ГОСТ 30319.0,1,2,3–96. – Минск, 1996.
35. Гладун С. Моделювання масопереносу в системі пласт підземного сховища газу - магістральний газопровід з метою оптимізації його роботи / Гладун С. // Фізико– математичне моделювання та інформаційні технології. – 2016. – Вип. 23. – С. 52– 61.
36. Глетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / Глетчер К. – М.: Мир. – 1988. – 352 с.
37. Дацюк А. Аналіз нестационарного процесу руху газу в трубопроводі / Дацюк А., П'янило Я., Притула М., Притула Н. // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” : Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2008. – №674. – С. 35–40 .
38. Дацюк А. В. Програмний комплекс для моделювання і оптимізації роботи газотранспортних систем / Дацюк А. В., Фролов В. А., Гладун С. В., Химко О. М., Пянило Я. Д., Притула М. Г., Притула Н. М., Землянський Б. В., Лопух Н. Б. // 3– я Міжнародна науково–технічна конференція „Комп’ютерні науки та інформаційні технології” (CSIT 2008).– Львів, 2008. – С. 217–221.
39. Дацюк А. Розрахунок об’ємів акумульованого газу в газотранспортній системі / Дацюк А., Гладун С., Притула Н., Притула М., П'янило Я. // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” : Комп’ютерні науки та інформаційні технології. – 2009. – № 638. – С. 81-85.
40. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Математические модели и методы расчета задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. – 615 с.
41. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / Дзядык В. К. – Киев: Наукова думка. – 1998. – 370 с.
42. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / Дзядык В. К. – М.: Наука. – 1977. – 512 с.

43. Диткин В. А. Операционное исчисление / Диткин В. А., Прудников А. П. – М.: Высшая школа. – 1975. – 407 с.
44. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / Диткин В. А., Прудников А. П. – М.: Высшая школа, – 1965. – 466 с.
45. Евдокимов А. Г. Моделирование и оптимизация потокораспределением в КС / Евдокимов А. Г., Тевяшев А. Д., Дубровский В. В. – М: Стройиздат, 1990.– 368 с.
46. Егоров А. В. Оптимизация режимов транспорта газа по ГТС / Егоров А. В., Митичкин С. К., Сарданашвили С. А. – 1991. – Вып. 3 – (Газовая промышленность, сер. Экономика организация и управление производством в газовой промышленности).
47. Жидкова М. А. О точности линеаризации уравнений неустановившегося движения газа / Жидкова М. А. // Газовая промышленность. – 1965, №11. – С. 20–26.
48. Жидкова М.А. Трубопроводный транспорт газа / Жидкова М.А. – Киев.: Наук. думка, 1973. – 142 с.
49. Журавчак Л. М. Математичне моделювання усталених коливань електромагнітного поля у кусково-однорідному просторі непрямим методом граничних елементів / Л. М. Журавчак, Ю. О. Федоришин // Геодинаміка. – 2013. – № 2. – С. 151-153.
50. Журавчак Л. М. Неусталена фільтрація стисливої рідини у кусково-однорідному пласті з нелінійною поведінкою матеріалів зон / Л. М. Журавчак, А. Є. Струк // Геодинаміка. – 2013. – № 2. – С. 148-150.
51. Журавчак Л. Математичне моделювання розподілу гармонічного електромагнітного поля у півпросторі з локальною неоднорідністю / Л. Журавчак // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2016. – № 843. – С. 144-153.
52. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ / Канторович Л. В., Акилов Г. П. – М.: Наука. – 1984. – 752 с.

53. Ковалко М. П. Трубопровідний транспорт газу / Ковалко М. П., Грудз В. Я., Михалків В. Б., Тимків Д. Ф. і інші. – К.: Арена, 2002. – 600 с.
54. Качмаж С., Щтейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. – М.: Физматгиз, 1958. – 394 с.
55. Корн Г. Справочник по математике / Корн Г. и Корн Т. – М.: Наука, – 1974.– 831 с.
56. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения / Корнейчук Н. П. – М.: Наука. – 1987. – 424 с.
57. Кочуева О. Н. Эвристические алгоритмы расчета экономических режимов магистрального газопровода в диспетчерском управлении / Кочуева О. Н., Митичкин С. К., Сарданашвили С. А. – Газовая промышленность. ИРЦ РАО "Газпром". – (Серия : Экономика, организация и управление производством в газовой промышленности). № 4–5 1993.
58. Крайко А. Н. Газовая динамика. Избранное: В 2 т. / [Под общей ред. А. Н. Крайко]. – М.: Физико–математическая литература, 2000. – Т. 1. – 720 с.
59. Крылов В. И. Вычислительные методы высшей математики: В 2–х томах. / Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. – Минск: Вышэйш. шк., т.1. – 1972. –296 с., т.2. – 1975. – 320 с.
60. Кулик М. Н. Методы системного анализа в энергетических исследованиях / Кулик М. Н. – Киев: Наук. думка. 1987. – 200 с.
61. Кучик Б. Л. Оперативная информация в АСУ магистральных газопроводов / Кучик Б. Л. – М.: Недра, 1979, – 216 с.
62. Кучин Б. Л. Управление системой газоснабжения в осложненных условиях эксплуатации / Кучин Б. Л., Алтунин А. Е. – Москва: Недра, 1984. – 208 с.
63. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа / Ланцош К. – М.: Гос. изд. физ. мат. литер., 1961. – 524 с.
64. Логинов К. В. Расчет, оптимизация и управление режимами работы больших гидравлических сетей / Логинов К. В., Мызников А. М., Файзуллин Р. Т. // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, № 9. – С. 92–106.

65. Лопух Н. Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах / Н. Лопух, М. Притула, Я. П'янило, Я. Савула // Вісник Львів. Ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2007. — Вип. 12. — С. 108-117.
66. Лопух Н. Б. Розрахунок початково – граничних умов в задачах фільтрації газу в пористих середовищах / Лопух Н. Б., П'янило Я. Д., Притула М. Г., Притула Н. М. // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” : Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2008.– №638 . – С. 239-244.
67. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений: (Числ. анализ. Методы решения задач мат. физики). – Киев: Вища школа, 1977. – 406 с. .
68. Лянце Г. Т. Апроксимація функцій ортогональними та біортогональними рядами / Г. Т. Лянце, В. Г. Собко, Г. М. П'янило // IV наук.-техн. конф. “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації” (28-30 вересня 2016 р.): Матер. IV наук.-техн. конф.– Львів: ФМІ, 2016. – С. 72-75.
69. Ляшко С. И. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса / Ляшко С. И., Ключин Д. А., Тригуб А. С. – К.: Наук. думка, 1998. – 240 с.
70. Максимов Ю. И. Иммитационные модели оперативного планирования и управления магистральным транспортом газа / Максимов Ю. И. – Новосибирск: Наука, 1982. – 194 с.
71. Миркин А. З. Трубопроводные системы: Справочное издание / Миркин А. З., Усиныш В. В. – М.: Химия, 1991, 366 с.
72. Митичкин С. К. Оптимизация режимов транспорта газа по газотранспортным сетям. / Митичкин С. К., Сарданашвили С. А. – 1991. – № 2. – (Газовая промышленность, Сер. Экономика, организация и управление производством в газовой промышленности).
73. Молчанов И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения / Молчанов И. Н. – К.: Наук. думка, 1988. – 342 с.

74. Нечепуренко М. И. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / [Нечепуренко М. И., Попков В. К., Майнагашев С. М. и др.] – Новосибирск: Наука, 1990. – 515 с.
75. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред: В 2–х томах. / Нигматулин Р. И. – М.: Наука, 1987. – Т.1. – 464 с.; – Т.2. – 360 с.
76. Новицкий Н. Н. Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения / [Новицкий Н. Н., Сеннова Е. В., Сухарев М. Г. и др.]. – Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000. – 273 с.
77. Новицкий Н. Н. Трубопроводные системы энергетики: Управление развитием и функционированием. Коллективная монография / Новицкий Н. Н., Сеннова Е. В., Сухарев М. Г. и др. – Новосибирск: Наука, 2004. – 461 с. – (разд. 4.1. Самойлов Р.В. Оптимальное управление нестационарными режимами коридора магистральных газопроводов.).
78. Новицкий Н.Н. Трубопроводные системы энергетики. Методические и прикладные проблемы математического моделирования. / Новицкий Н.Н., Сухарев М.Г., Тевяшев А.Д. и др. – Новосибирск, 2015. – 476 с.
79. П'янило Я. Аналітичний спосіб розрахунку параметрів гідравлічної ув'язки колекторного збору газу / Я. П'янило, С. Гладун, Г. П'янило // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” : Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. – Львів, – 2011. – №719. – С. 250–256.
80. П'янило Я. Д. Використання спектральних розкладів в задачах математичної фізики / Я. Д. П'янило, Г. Т. Лянце, Г. М. П'янило, В. Г. Собко // XXII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (5-7 жовтня 2016 р.): Зб. наук. праць. – Львів: ЛНУ, 2016. – С. 165-168.
81. П'янило Я. Д. Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко // XIII Міжнар. наук.-техн. конф. “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів” (7-9 листопада 2014 р.): Матер. конф. - Кременчук: Моделювання процесів у технічних і біологічних

- системах і об'єктах. 2014. – С. 48-49.
82. П'янило Я. Д. Дослідження гідравлічного тиску при нестационарному русі газу в горизонтальних трубопроводах / П'янило Я. Д. // Мат. методи і фіз. мех. поля. – 2004. – Т. 47, №1. – С. 169–174.
83. П'янило Я. Д. Дослідження неусталеного руху газу в пористих середовищах / П'янило Я. Д. // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Вип.2. – С. 178–184.
84. П'янило Я. Д. Дослідження перехідних процесів при моделюванні руху газу в горизонтальних трубопроводах / П'янило Я. Д., Притула М. Г. // Матеріали 2-ої Українсько-Польської конференція "Інформаційно-математичне моделювання складних систем – MIMUZ" – Львів: Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Ахілл. – 2002. – С. 105–110.
85. П'янило Я. Д. Задачі, моделі і методи в задачах керування рухом газу в системі пласт підземного сховища газу – магістральний газопровід / П'янило Я. Д., Притула М. Г., Притула Н. М. // Матеріали 4-ої Українсько-Польської конференції "Механіка середовища, методи комп'ютерних наук та моделювання" – Львів: Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Сполом. – 2004. – С. 242–247.
86. П'янило Я. Д. Застосування біортогональних розкладів для рішення рівнянь параболічного типу / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко // Міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів" (19-22 лютого 2015 р.): Матер. конф. – Рівне, 2015. – С. 138.
87. П'янило Я. Д. Застосування квазіортогональних поліномів в задачах обробки цифрової інформації та математичного моделювання / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко, Г. М. П'янило // XI Міжнар. наук. конф. "Моделювання та інформаційні технології у фізичному вихованні і спорті" (12-15 травня 2015 р.): Матер. XI Міжнар. наук. конф. – Львів – Харків: Львів. держ. ун-т фіз. культури, Харк. нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди. — Харків: «ОВС», 2015. – С. 88-92.

88. П'янило Я. Д. Неусталений рух газу в трубопроводах і пористих середовищах / П'янило Я. Д., Притула М. Г., Притула Н. М. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 4. – С. 72–80.
89. П'янило Я. Д. Оптимальні квадратурні формули в базисах квазіортогональних многочленів / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко // V Всеукр. наук. конф. “Нелінійні проблеми аналізу” присвяченої пам'яті професора Васишина Б.В. (19-22 вересня 2013 р.): Тези доп. - Івано-Франківськ, 2013. – С. 62-63.
90. П'янило Я. Д. Побудова та дослідження біортогональних поліномів на базі многочленів Чебишева / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2013. - Вип. 11. - С. 135-141.
91. П'янило Я. Д. Розподіл гідравлічного тиску при нестационарному русі газу в трубопроводах при наявності компресорних станцій та відборів / П'янило Я. Д. // Нелінійні коливання. – Вип. 2. – 1998. – С. 84–88.
92. П'янило Я. Д. Розрахунок режимних параметрів роботи підсистеми транспорту газу пласт підземного сховища-магістральний газопровід / П'янило Я. Д., Гладун С. В., Притула М., Притула Н., П'янило Г. // Науково-технічна конференція «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (INTERPOR'15) 22–24 вересня 2015 року (Львів, Україна) – 2015. – С. 67-69.
93. П'янило Я. Д. Система прийняття рішень: Моделі, методи (для газотранспортної системи України) / П'янило Я. Д., Притула М. Г., Фролов В. А., Гладун С. В. // Тези конф. „Інтелектуальні системи прийняття рішень та прикладні аспекти інформаційних технологій”. – Україна, Євпаторія, – 2005. С. 35–38.
94. П'янило Я. Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів / Я. П'янило, В. Собко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. - 2014. - Вип. 19. - С. 146-156.

95. П'янило Я. Дослідження стійкості спектрального методу визначення розподілу тиску вздовж трубопроводу в нестационарному випадку в базисі біортогональних поліномів / Я. П'янило, В. Собко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. - 2016. - Вип. 24. - С. 86-92.
96. П'янило Я. Математичні моделі процесів енергомасопереносу в газовій динаміці. Задачі та аналіз методів їх розв'язування / П'янило Я., Притула М. // International workshop on free boundary flows and related problems of analysis. – Ukraine, Kiev, 2005. – P. 58–59.
97. П'янило Я. Методи розв'язування крайових задач з використанням дробових похідних за часом / Я. П'янило, Г. П'янило, О. Браташ, В. Собко // Міжнар. наук.-практ. конф. “Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання” (15-20 травня 2017 р.): матеріали конференції. – Івано-Франківськ, 2017. – С. 418-421.
98. Панкратов В. С. Комплекс моделирования и оптимизации режимов работы ГТС / Панкратов В. С., Герке В. Г., Митичкин С. К., Сарданашвили С. А. // Газовая промышленность. Серия: Автоматизация, телемеханизация и связь в газовой промышленности Изд. ООО ИРЦ. – М.: Газпром, 2002. – 56 с.
99. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. – Москва: Наука. - 1983. – 384 с.
100. Притула Н. М. Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи) / Притула Н. М., П'янило Я. Д., Притула М. Г. — Львів.: Растр – 7, 2015. — 266 с.
101. Притула Н. М. Задачі оптимізації поточкорозподілу в газотранспортних системах / Притула Н. М. // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” : Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2007. – № 604. – С. 220–227.
102. Притула Н. М. Математичні моделі і методи розрахунку режимів роботи газотранспортної системи України (програмний комплекс) / Притула Н. М., П'янило Я. Д., Притула М. Г., Дацюк А. В., Фролов В. А., Гладун С. В. // П'ята науково–практична конференція з міжнародною участю

- „Математичне та імітаційне моделювання систем МОДС 2010. – 2010. – С. 138–139.
103. Притула Н. М. Розрахунок параметрів усталеного руху газу в магістральних газопроводах / Притула Н. М., Притула М. Г., П'янило Я. Д. // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів, 2006.– № 565. – С. 270–274.
104. Притула Н. М. Розрахунок режимів роботи Більче-Волицько-Угерського підземного сховища газу (програмний комплекс) / Н. М. Притула, М. Г. Притула, Р. Я. Шимко, С. В. Гладун // Нафтогазова галузь України. – 2013. – № 3. – С. 36- 41.
105. Притула Н. Подземные хранилища и эффективное управление транспортом газа / Н. Притула, М. Притула, О. Грынив, С. Гладун, Р. Вечерик, П. Галий // 5-ая Межд. научно-техническая конф. “Компьютерные технологии поддержки принятия решений в диспетчерском управлении газотранспортными и газодобывающими системами”: тезисы докладов (Москва, 2012). – 2012. – С. 59.
106. Павленко В., П'янило Я., Притула М., Алгоритм гідравлічного розрахунку мереж // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”: Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. –Львів, – 2003. – №496. – С. 172–177.
107. Пелех М.М., П'янило Я.Д., Лаушник І.П. Аналіз методів у математичному моделюванні фізичних явищ // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”: Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні і приладобудування. –Львів, – 1999. №359. – С. 26–31.
108. П'янило Я. Д. Ітераційні методи розв'язування задач про розподіл тиску в трубопроводах / П'янило Я. Д., Притула М. Г., Землянський Б. В. // Фізико–математичне моделювання та інформаційні технології. – 2005. – Вип. 1. – С. 97–105.

109. П'янило Я. Д. Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу / П'янило Я. Д. – Львів: Сплайн. - 2011. – 248 с.
110. П'янило Я. Д. Алгоритм термогідрравлічних розрахунків газових мереж / П'янило Я. Д., Притула М. Г., Павленко В. А., Землянський Б. В. // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” : Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. – 2004. – № 521. – С. 196–200.
111. Сарданашвили С. А. Расчетные методы и алгоритмы / Сарданашвили С. А. – М.: Изд-во “Нефть и газ”, 2005. – 577 с.
112. Селезнев В. Е. Численный анализ и оптимизация газодинамических режимов транспорта природного газа / Селезнев В. Е., Клишин Г. С. и др. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 224 с.
113. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. – К.: Наук. думка, – 1991. – 432 с.
114. Силаш А. П. Добыча и транспорт нефти и газа / Силаш А. П. – М.: Недра, 1980. – 264 с.
115. Сиперштейн Б. И. Параметрическая идентификация сложных газопроводных систем / Сиперштейн Б. И. // Электронное моделирование. – 1986. – №1. – С. 77–92.
116. Собко В. Г. Побудова та дослідження алгоритму розв'язування задач математичної фізики за допомогою біортогональних поліномів / В. Г. Собко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2015. Вип.4. – С. 176-180.
117. Тевяшев А. Д. Эффективный метод анализа существенно нестационарных неизотермических режимов транспорта газа по системе магистральных газопроводов. / Тевяшев А. Д., Гусарова И. Г., Понамарев Ю. В. – Київ: "Нафтова та газова промисловість", 1997. – № 4.– С. 23–27.
118. Тевяшев А. Д. Эффективный метод построения модели установившегося потокораспределения в трубопроводных системах энергетики по оперативным данным / Тевяшев А. Д., Козыренко С. И. // СЭИ СО РАН, сб.

- "Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики". – Санкт–Петербург, 1997. – Вып. 49. – С. 448–459.
119. Темпель В. Ф. Моделирование газоснабжающих систем / Темпель В. Ф. – Л.: Недра, 1986. – 184 с.
120. Темпель Ф. Г. Технология режима газопередачи / Темпель Ф. Г., Маслов В. М. – Ленинград: Недра, 1974. – 112 с.
121. Тетерев И. Г. Управление процессами добычи газа / Тетерев И. Г., Шешуков Н. Л., Нанивский Е. М. – М.: Недра, – 1981. – 248 с.
122. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. – М.: Наука, – 1979. – 288 с.
123. Трофимов А. С. Неизотермическая модель транспорта газа / Трофимов А. С., Куцев В. А., Кочарян Е. В. - Нефтегазовое дело. 2004
124. Трофимов А. С. Приближенная нестационарная модель расчета линейной части МГ / Трофимов А. С., Куцев В. А. – Газовая промышленность, № 7, 1999г.
125. Федоткин И. М. Математическое моделирование технологических процессов / Федоткин И. М. – К.: Выща школа, 1988. – 415 с.
126. Химко М. П. Вплив сил тертя на розподіл температури газових потоків та склад газу / Химко М. П., Фролов В. А., Гладун С. В., П'янило Я. Д., Притула М. Г., Землянський Б. В. // Нафтова і газова промисловість. – 2005.– № 5. – С. 56–58.
127. Химко М. П. Програмный комплекс для определения газодинамических параметров работы газотранспортных систем / Химко М. П., Дацюк А. В., Притула Н. М. и др. // Тезисы докладов 3–й Международной науч.–техн. конференции “Компьютерные технологии поддержки принятия решений в диспетчерском управлении газотранспортными и газодобывающими системами”. – Москва, 2007. – С. 27–27.
128. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах / Чарный И. А. – М.: Недра, – 1975. – 240 с.
129. Чарный И. А. Основы газовой динамики / Чарный И. А. –

М.: Гостехиздат, – 1961.

130. Черников А.В. Формула для расчета коэффициента гидравлического сопротивления газопроводов / Черников А.В., Галиуллин З.Т. // Газовая промышленность.– № 1.–1998. – С. 32–33.
131. Юфин В. А. Трубопроводный транспорт нефти и газа. / Под ред. В. А. Юфина. – М.: Недра, – 1978. – 407 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

ДОВЕДЕННЯ ДОПОМІЖНИХ ТВЕРДЖЕНЬ. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ. АЛГОРИТМИ ПОБУДОВИ КВАЗІСПЕКТРАЛЬНИХ ТА БІОРТОГОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. РЕКУРЕНТНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ КОЕФІЦІЄНТІВ РОЗКЛАДУ МНОГОЧЛЕНІВ ЧЕБИШЕВА В РЯД ЗА ПОБУДОВАНИМИ ФУНКЦІЯМИ.

А1. Доведення твердження 3.2.

Дане твердження доведемо згідно методу математичної індукції.

1. При $s = 1$, згідно формул (3.18) для випадку (3.16) дістанемо $P^1(0) = -\frac{3}{8}$. 2.

При $s = 2$, дістанемо $P^2(0) = \frac{5}{8 \cdot 48}$. 3. При $s = 3$, дістанемо

$P^3(0) = -\frac{7}{8 \cdot 48 \cdot 120}$. 4. Припустимо, що формула (3.19) справедлива для

деякого $s = 2q$, тобто $P^{2q}(0) = (-1)^{2q} (4q+1) \prod_{i=2}^{2q+1} \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)}$ та для деякого

$s = 2q+1$, тобто $P^{2q+1}(0) = (-1)^{2q+1} (4q+3) \prod_{i=2}^{2q+2} \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)}$. 5. Покажемо,

що формула (2.19) буде справедливою і для деякого $s = 2q+2$, тобто

$P^{2q+2}(0) = (-1)^{2q+2} (4q+5) \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)}$. Запишемо формулу (3.18) для

$k = 2q+2$ і $\lambda = 0$ у випадку (3.16) з урахуванням наших припущень та

дістанемо
$$P^{2q+2}(0) = -\frac{(-1)^{2q+1} (4q+3) \prod_{i=2}^{2q+2} \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)}}{4(4q+4)(4q+2)} -$$

$$-\frac{(-1)^{2q} (4q+1) \prod_{i=2}^{2q+1} \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)}}{4(4q+2)(4q+3)4(4q+2)(4q+1)} - \frac{(-1)^{2q+2}}{(4q+4)(4q+2)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \prod_{i=2}^{2q+2} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}, \quad \text{або} \quad P^{2q+2}(0) = \frac{2(4q+3)^2}{(4q+2)} \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)} - \\ & - \frac{(4q+4)(4q+1)}{(4q+2)} \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)} - \frac{4(4q+5)}{(4q+2)} \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}. \text{ Добуток в} \\ \text{останньому доданку запишемо} & \quad \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)} = \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)} \times \\ & \times \frac{(2i-3)}{(2i-1)} = \frac{1}{(4q+5)} \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)}. \quad \text{Отже, дістанемо} \quad P^{2q+2}(0) = \\ & = \left(\frac{2(4q+3)^2}{(4q+2)} - \frac{(4q+4)(4q+1)}{(4q+2)} - \frac{4}{(4q+2)} \right) \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)} \quad \text{або} \\ & P^{2q+2}(0) = (4q+5) \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-3)}. \end{aligned}$$

довільного натурального числа. З формули (3.19) слідує, що знак полінома $P^s(\lambda)$ при $\lambda=0$ буде додатнім для парних значень s та від'ємним для непарних значень s . **Твердження доведено.**

А2. Доведення твердження 3.3.

Дане твердження доведемо згідно методу математичної індукції.

1. Нехай $s=1$, тоді згідно формул (3.18) для випадку (3.16), одержимо лінійне рівняння виду $P^1(\lambda) = (\lambda - 3/8)$. Знайдемо його корінь $\lambda_1^1 = 3/8$. Отже, $P^1(\lambda_1^1) = 0$. Зазначимо, що $P^1(0) = -3/8$ та $P^1(\lambda_3^2) = (\sqrt{107} - \sqrt{75}) / (32\sqrt{3})$, тобто на проміжку $(0; \lambda_1^1)$ поліном $P^1(\lambda) < 0$ та на проміжку $(\lambda_1^1; \lambda_3^2)$ поліном $P^1(\lambda) > 0$. 2. Нехай $s=2$, тоді згідно формул (3.18) для випадку (3.16), одержимо квадратне рівняння виду $P^2(\lambda) = (\lambda - 1/16)P^1(\lambda) - 1/(4 \cdot 24)$. Розглянемо проміжки $\left[0; \lambda_1^1\right]_1^2$ та $\left[\lambda_1^1; \lambda_3^2\right]_2^2$. $P^2(0) = 5/(8 \cdot 48)$, оскільки $P^1(\lambda_1^1) = 0$, то

$P^2(\lambda_1^1) = -1/(4 \cdot 24)$. На проміжку $[0; \lambda_1^1]_1^2$ поліном $P^2(\lambda)$ змінює знак, то на цьому проміжку існує число $\lambda_1^2 = (7\sqrt{3} - \sqrt{107})/(32\sqrt{3})$, яке є його коренем.

$P^2(\lambda_1^2) = P^2(\lambda_3^2) = 0$. Отже, на проміжку $(0; \lambda_1^2)$ поліном $P^2(\lambda) > 0$ та на проміжку $(\lambda_1^2; \lambda_3^2)$ поліном $P^2(\lambda) < 0$. Справедлива нерівність $0 < \lambda_1^2 < \lambda_1^1 < \lambda_3^2$.

3. Нехай $s = 3$, тоді згідно формул (3.18) для випадку (3.16), одержимо кубічне рівняння виду $P^3(\lambda) = (\lambda - 1/48)P^2(\lambda) - P^1(\lambda)/(80 \cdot 48) + 1/(24 \cdot 80 \cdot 24)$. Розгля-

немо проміжки $[0; \lambda_1^2]_1^3$, $[\lambda_1^2; \lambda_1^1]_2^3$ та $[\lambda_1^1; \lambda_3^2]_3^3$. $P^3(0) = -7/(8 \cdot 48 \cdot 120)$, оскільки

ки $P^2(\lambda_1^2) = 0$ і $P^1(\lambda_1^2) < 0$, то $P^3(\lambda_1^2) = -P^1(\lambda_1^2)/(80 \cdot 48) + 1/(24 \cdot 80 \cdot 24) > 0$;

оскільки $P^1(\lambda_1^1) = 0$, то $P^3(\lambda_1^1) = (\lambda_1^1 - 1/48)P^2(\lambda_1^1) + 1/(24 \cdot 80 \cdot 24) =$

$= -169/(24 \cdot 80 \cdot 24)$; оскільки $P^2(\lambda_3^2) = 0$, то $P^3(\lambda_3^2) = -P^1(\lambda_3^2)/(80 \cdot 48) +$

$+1/(24 \cdot 80 \cdot 24) = (23 - \sqrt{321})/(48 \cdot 80 \cdot 96)$. На кінцях вказаних проміжків полі-

ном $P^3(\lambda)$ змінює знак, а тому на кожному із цих проміжків існують деякі чи-

сла λ_1^3 , λ_3^3 та λ_5^3 відповідно, які є його коренями. Отже,

$P^3(\lambda_1^3) = P^3(\lambda_3^3) = P^3(\lambda_5^3) = 0$. На проміжках $(0; \lambda_1^3)$, $(\lambda_3^3; \lambda_5^3)$ поліном

$P^3(\lambda) < 0$ та на проміжках $(\lambda_1^3; \lambda_3^3)$, $(\lambda_5^3; \lambda_3^2)$ поліном $P^3(\lambda) > 0$. Справедлива

нерівність $0 < \lambda_1^3 < \lambda_1^2 < \lambda_3^3 < \lambda_1^1 < \lambda_5^3 < \lambda_3^2$. 4. Нехай $s = 4$, тоді згідно формул

(3.18) для випадку (3.16), одержимо рівняння четвертого степеня виду

$P^4(\lambda) = (\lambda - 1/96)P^3(\lambda) - P^2(\lambda)/(168 \cdot 120) - 1/(24 \cdot 80 \cdot 168 \cdot 48)$. Розглянемо

проміжки $[0; \lambda_1^3]_1^4$, $[\lambda_1^3; \lambda_1^2]_2^4$, $[\lambda_1^2; \lambda_1^1]_3^4$ та $[\lambda_1^1; \lambda_3^2]_4^4$. $P^4(0) > 0$ згідно формули

(2.19). Оскільки $P^2(\lambda_1^3) > 0$ і $P^3(\lambda_1^3) = 0$, то $P^4(\lambda_1^3) < 0$. Оскільки $P^3(\lambda_1^2) > 0$,

$P^2(\lambda_1^2) = 0$ і $(\lambda_1^2 - 1/96) > 0$, то $P^4(\lambda_1^2) = (\lambda_1^2 - 1/96)P^3(\lambda_1^2) - 1/(24 \cdot 80 \cdot 168 \cdot 48) > 0$. Припустимо, що $P^4(\lambda_1^2) < 0$, тоді $(\lambda_1^2 - 1/96)P^3(\lambda_1^2) < 1/(24 \cdot 80 \cdot 168 \cdot 48)$, або $(\lambda_1^2 - 1/96) \left[-P^1(\lambda_1^2)/(80 \cdot 48) + 1/(24 \cdot 80 \cdot 24) \right] < 1/(24 \cdot 80 \cdot 168 \cdot 48)$, тобто $(\lambda_1^2 - 1/96) \left[-P^1(\lambda_1^2)/(80 \cdot 48) \right] < 1/(24 \cdot 80 \cdot 168 \cdot 48) - (\lambda_1^2 - 1/96)/(24 \cdot 80 \cdot 24)$. Оскільки $P^1(\lambda_1^2) < 0$, то ліва частина нерівності буде додатне число, а права – від’ємне, що суперечить нерівності. Отже наше припущення невірне. Покажемо, що знак полінома $P^4(\lambda_1^1)$ теж залежить лише від першого доданку, тобто $P^4(\lambda_1^1) < 0$, оскільки $(\lambda_1^1 - 1/96) > 0$ і $P^3(\lambda_1^1) < 0$. Припустимо, що $P^4(\lambda_1^1) > 0$, тоді дістанемо $(\lambda_1^1 - 1/96)P^3(\lambda_1^1) - P^2(\lambda_1^1)/(168 \cdot 120) > 1/(24 \cdot 80 \cdot 168 \cdot 48)$. Обчисливши ліву частину нерівності, дістанемо від’ємне число, яке не може бути більшим за будь-яке додатне число. Наше припущення – невірне. Аналогічним чином покажемо, що знак полінома $P^4(\lambda_3^2)$ теж залежить лише від першого доданку, тобто $P^4(\lambda_3^2) > 0$, оскільки $P^3(\lambda_3^2) > 0$, $(\lambda_3^2 - 1/96) > 0$. Припустимо, що $P^3(\lambda_3^2) < 0$, тоді врахувавши, що $P^2(\lambda_3^2) = 0$ дістанемо $(\lambda_3^2 - 1/96)P^3(\lambda_3^2) - 1/(24 \cdot 80 \cdot 168 \cdot 48) < 0$. Обчисливши ліву частину нерівності, дістанемо додатне число, що суперечить нерівності. Отже, наше припущення – невірне. На кінцях вказаних проміжків поліном $P^4(\lambda)$ змінює знак, тому на кожному із цих проміжків існують деякі числа λ_1^4 , λ_3^4 , λ_5^4 та λ_7^4 відповідно, які є його коренями. Отже, $P^4(\lambda_1^4) = P^4(\lambda_3^4) = P^4(\lambda_5^4) = P^4(\lambda_7^4) = 0$. На проміжках $(0; \lambda_1^4)$, $(\lambda_3^4; \lambda_5^4)$, $(\lambda_7^4; \lambda_3^2)$ поліном $P^4(\lambda) > 0$ та на проміжках $(\lambda_1^4; \lambda_3^4)$, $(\lambda_5^4; \lambda_7^4)$ полі-

ном $P^4(\lambda) < 0$. Справедлива нерівність $0 < \lambda_1^4 < \lambda_1^3 < \lambda_3^4 < \lambda_1^2 < \lambda_5^4 < \lambda_1 < \lambda_7^4 < \lambda_3^2$. 5. Нехай $s = 2q$, тоді згідно формул (3.18), одержимо рівняння степеня $2q$. Припустимо, що поліном $P^{2q}(\lambda)$ має $2q$ - різних, дійсних, додатніх коренів, які позначимо через λ_{2j-1}^{2q} , $j = 1, \dots, 2q$ і, при переході через які змінює свій знак на протилежний. Тоді, $P^{2q}(\lambda_{2j-1}^{2q}) = 0$, $j = 1, \dots, 2q$, причому $0 < \lambda_1^{2q} < \lambda_1^{2q-1} < \lambda_3^{2q} < \lambda_3^{2q-1} < \dots < \lambda_{4q-7}^{2q-1} < \lambda_{4q-5}^{2q} < \lambda_1^2 < \lambda_{4q-3}^{2q} < \lambda_1 < \lambda_{4q-1}^{2q} < \lambda_3^2$. Оскільки $P^{2q}(0) > 0$ згідно формули (3.19), то, очевидно, що на проміжку $(0; \lambda_1^{2q})_1^{2q+1}$ поліном $P^{2q}(\lambda) > 0$. На проміжку $(\lambda_{2j-3}^{2q}; \lambda_{2j-1}^{2q})_j^{2q+1}$, $j = 2, \dots, 2q$ поліном $P^{2q}(\lambda) < 0$ при парних значеннях j та $P^{2q}(\lambda) > 0$ при непарних значеннях j . На проміжку $(\lambda_{4q-1}^{2q}; \lambda_3^2)_{2q+1}^{2q+1}$ поліном $P^{2q}(\lambda) > 0$. 6. Нехай $s = 2q + 1$, тоді згідно формул (3.18), одержимо рівняння степеня $2q + 1$. Припустимо, що поліном $P^{2q+1}(\lambda)$ має $2q + 1$ - різних, дійсних, додатніх коренів, які позначимо через λ_{2j-1}^{2q+1} , $j = 1, \dots, 2q + 1$ і, при переході через які змінює свій знак на протилежний. Тоді, $P^{2q+1}(\lambda_{2j-1}^{2q+1}) = 0$, $j = 1, \dots, 2q + 1$, причому $0 < \lambda_1^{2q+1} < \lambda_1^{2q} < \lambda_3^{2q+1} < \lambda_3^{2q} < \dots < \lambda_{4q-5}^{2q} < \lambda_{4q-3}^{2q+1} < \lambda_1^2 < \lambda_{4q-1}^{2q+1} < \lambda_1 < \lambda_{4q+1}^{2q+1} < \lambda_3^2$. Оскільки $P^{2q+1}(0) < 0$ згідно формули (3.19), то очевидно, що на проміжку $(0; \lambda_1^{2q+1})_1^{2q+2}$ поліном $P^{2q+1}(\lambda) < 0$. На проміжку $(\lambda_{2j-3}^{2q+1}; \lambda_{2j-1}^{2q+1})_j^{2q+2}$, $j = 2, \dots, 2q + 1$ поліном $P^{2q+1}(\lambda) > 0$ при парних значеннях j та $P^{2q+1}(\lambda) < 0$ при непарних значеннях j . На проміжку $(\lambda_{4q+1}^{2q+1}; \lambda_3^2)_{2q+2}^{2q+2}$ поліном $P^{2q+1}(\lambda) > 0$. 7. Покажемо, що при

$s = 2q + 2$ поліном, обчислений згідно формул (3.18) $P^{2q+2}(\lambda)$ на проміжку $(0; \lambda_3^2)$ змінює свій знак $2q + 2$ разів, а отже, має $2q + 2$ - різних, дійсних, додатніх коренів. $P^{2q+2}(0) > 0$ згідно формули (3.19). Оскільки $P^{2q+1}(\lambda_{2j-1}^{2q+1}) = 0$, $j = 1, \dots, 2q + 1$ і $P^{2q}(\lambda_{4j-3}^{2q+1}) > 0$, $j = 1, \dots, q$, то очевидно, що $P^{2q+2}(\lambda_{4j-3}^{2q+1}) < 0$, $j = 1, \dots, q$. $P^{2q}(\lambda_{4j-1}^{2q+1}) < 0$, $j = 1, \dots, q - 1$, то $P^{2q+2}(\lambda_{4j-1}^{2q+1}) > 0$, $j = 1, \dots, q$. Перейдемо до границі у формулі (3.18) при $k \rightarrow \infty$ і дістанемо $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k(\lambda) = \lambda P^{k-1}(\lambda)$. Отже, $P^{2q+2}(\lambda_1^2) > 0$, оскільки $P^{2q+1}(\lambda_1^2) > 0$ та $\lambda_1^2 > 0$; $P^{2q+2}(\lambda_1^1) < 0$, оскільки $P^{2q+1}(\lambda_1^1) < 0$ та $\lambda_1^1 > 0$; $P^{2q+2}(\lambda_3^2) > 0$, оскільки $P^{2q+1}(\lambda_3^2) > 0$ та $\lambda_3^2 > 0$. Дійсно многочлен $P^{2q+2}(\lambda)$ змінює свій знак $q + (q - 1) + 3 = 2q + 2$ рази, а тому має $2q + 2$ - різних, дійсних, додатніх коренів, які позначимо через λ_{2j-1}^{2q+2} , $j = 1, \dots, 2q + 2$. $P^{2q+2}(\lambda_{2j-1}^{2q+2}) = 0$, $j = 1, \dots, 2q + 2$, причому справедлива нерівність $0 < \lambda_1^{2q+2} < \lambda_1^{2q+1} < \lambda_3^{2q+2} < \lambda_3^{2q+1} < \dots < \lambda_{4q-3}^{2q+1} < \lambda_{4q-1}^{2q+2} < \lambda_1^2 < \lambda_{4q+1}^{2q+2} < \lambda_1^1 < \lambda_{4q+3}^{2q+2} < \lambda_3^2$. Очевидно, що на проміжку $(0; \lambda_1^{2q+2})_1^{2q+3}$ поліном $P^{2q+2}(\lambda) > 0$. На проміжку $(\lambda_{2j-3}^{2q+2}; \lambda_{2j-1}^{2q+2})_j^{2q+3}$, $j = 2, \dots, 2q + 2$ поліном $P^{2q+2}(\lambda) < 0$ при парних значеннях j та $P^{2q+2}(\lambda) > 0$ при непарних значеннях j . На проміжку $(\lambda_{4q+3}^{2q+2}; \lambda_3^2)_{2q+3}^{2q+3}$ поліном $P^{2q+2}(\lambda) > 0$. **Твердження доведено.**

А3. Доведення твердження 3.4.

Дане твердження доведемо згідно методу математичної індукції.

1. При $s = 1$, згідно формул (3.18) для випадку (3.17) дістанемо $P^1(0) = -\frac{1}{12}$. 2.

При $s = 2$, дістанемо $P^2(0) = \frac{1}{16 \cdot 40}$. 3. При $s = 3$, дістанемо

$P^3(0) = -\frac{1}{12 \cdot 42 \cdot 160}$. 4. Припустимо, що формула (3.20) справедлива для де-

якого $s = 2q$, тобто $P^{2q}(0) = (-1)^{2q} (2q + 1) \prod_{i=2}^{2q+1} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}$ та для деякого

$s = 2q + 1$, тобто $P^{2q+1}(0) = (-1)^{2q+1} (2q + 2) \prod_{i=2}^{2q+2} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}$. 5. Покажемо, що фор-

мула (3.20) буде справедливою і для деякого $s = 2q + 2$, тобто

$P^{2q+2}(0) = (-1)^{2q+2} (2q + 3) \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}$. Запишемо формулу (3.18) для

$k = 2q + 2$ і $\lambda = 0$ у випадку (3.17) з урахуванням наших припущень та діста-

немо $P^{2q+2}(0) = -\frac{(-1)^{2q+1} (2q + 2) \prod_{i=2}^{2q+2} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}}{2(4q+5)(4q+3)}$

$-\frac{(-1)^{2q} (2q + 1) \prod_{i=2}^{2q+1} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}}{4(4q+2)(4q+3)4(4q+3)(4q+4)} - \frac{(-1)^{2q+2}}{4(4q+5)(4q+3)} \times$

$\times \prod_{i=2}^{2q+2} \frac{1}{4(2i-1)(2i)}$, або $P^{2q+2}(0) = \frac{(4q+4)^2 \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}}{(4q+3)}$

$-\frac{(4q+5)(2q+1) \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}}{(4q+3)} - \frac{(4q+6) \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-1)(2i)}}{(4q+3)}$. Добуток в

останньому доданку запишемо $\prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-1)(2i)} = \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)} \times$

$\times \frac{(2i-2)}{(2i)} = \frac{2}{(4q+6)} \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}$. Отже, дістанемо $P^{2q+2}(0) =$

$\left(\frac{(4q+4)^2}{(4q+3)} - \frac{(4q+5)(2q+1)}{(4q+3)} - \frac{2}{(4q+3)} \right) \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}$ або $P^{2q+2}(0) =$

$= (2q+3) \prod_{i=2}^{2q+3} \frac{1}{4(2i-2)(2i-1)}$. Отже наша формула справедлива для довільного

натурального числа. З формули (3.20) слідує, що знак полінома $P^s(\lambda)$ при $\lambda=0$ буде додатнім для парних значень s та від'ємним для непарних значень s . **Твердження доведено.**

А4. Доведення твердження 3.5.

Дане твердження доведемо згідно методу математичної індукції.

1. Нехай $s=1$, тоді згідно формул (3.18) для випадку (3.17), одержимо лінійне рівняння виду $P^1(\lambda) = (\lambda - 1/12)$. Знайдемо його корінь $\lambda_2^1 = 1/12$. Отже, $P^1(\lambda_2^1) = 0$. Зазначимо, що $P^1(0) = -1/12$ та $P^1(\lambda_8^4) \approx 0.0179879264$, тобто на проміжку $(0; \lambda_2^1)$ поліном $P^1(\lambda) < 0$ та на проміжку $(\lambda_2^1; \lambda_8^4)$ поліном $P^1(\lambda) > 0$.

2. Нехай $s=2$, тоді згідно формул (3.18) для випадку (3.17), одержимо квадратне рівняння виду $P^2(\lambda) = (\lambda - 1/30)P^1(\lambda) - 7/(48 \cdot 120)$. Розглянемо проміжки

$[0; \lambda_2^1]_1^2$ та $[\lambda_2^1; \lambda_8^4]_2^2$. $P^2(0) = 1/(16 \cdot 40)$, оскільки $P^1(\lambda_2^1) = 0$, то

$P^2(\lambda_2^1) = -7/(48 \cdot 120)$. За допомогою арифметичних обчислень знаходимо

$P^2(\lambda_8^2) \approx 0.7684034595 \cdot 10^{-5}$. На проміжку $[0; \lambda_2^1]_1^2$ поліном $P^2(\lambda)$ змінює

знак, то на цьому проміжку існує число $\lambda_2^2 = (7 - \sqrt{53/2})/120$, яке є його коре-

нем. На проміжку $[\lambda_2^1; \lambda_8^4]_2^2$ поліном $P^2(\lambda)$ також змінює знак, то на цьому

проміжку існує число $\lambda_4^2 = (7 + \sqrt{53/2})/120$, яке є його коре-

нем. $P^2(\lambda_2^2) = P^2(\lambda_4^2) = 0$. Отже, на проміжках $(0; \lambda_2^2)$ і $(\lambda_4^2; \lambda_8^4)$ поліном

$P^2(\lambda) > 0$ та на проміжку $(\lambda_2^2; \lambda_4^2)$ поліном $P^2(\lambda) < 0$. Справедлива нерівність

$0 < \lambda_2^2 < \lambda_2^1 < \lambda_4^2 < \lambda_8^4$. 3. Нехай $s=3$, тоді згідно формул (3.18) для випадку (3.17), одержимо кубічне рівняння виду $P^3(\lambda) = (\lambda - 1/70)P^2(\lambda) - P^1(\lambda)/(80 \cdot 120) + 1/(48 \cdot 120 \cdot 140)$. Розглянемо проміжки $[0; \lambda_2^2]_1^3$, $[\lambda_2^2; \lambda_2^1]_2^3$ та $[\lambda_2^1; \lambda_8^4]_3^3$. Оскільки $P^3(0) = -1/(12 \cdot 42 \cdot 160)$, оскільки $P^2(\lambda_2^2) = 0$ і $P^1(\lambda_2^2) < 0$, то $P^3(\lambda_2^2) = -P^1(\lambda_2^2)/(80 \cdot 120) + 1/(48 \cdot 120 \cdot 140) > 0$; оскільки $P^1(\lambda_2^1) = 0$, то $P^3(\lambda_2^1) = (\lambda_2^1 - 1/70)P^2(\lambda_2^1) + 1/(48 \cdot 120 \cdot 140) = -1/(12 \cdot 21 \cdot 48)$; оскільки $P^4(\lambda_8^4) = 0$, то $(\lambda_8^4 - 1/126)P^3(\lambda_8^4) = P^2(\lambda_8^4)/(224 \cdot 168) + 1/(48 \cdot 120 \cdot 224 \cdot 252)$. Отже, $P^3(\lambda_8^4) > 0$, тому що права частина останньої рівності є додатнім числом і $(\lambda_8^4 - 1/126) > 0$. На кінцях вказаних проміжків поліном $P^3(\lambda)$ змінює знак, а тому на кожному із цих проміжків існують деякі числа λ_2^3 , λ_4^3 та λ_6^3 відповідно, які є його коренями. Отже, $P^3(\lambda_2^3) = P^3(\lambda_4^3) = P^3(\lambda_6^3) = 0$. На проміжках $(0; \lambda_2^3)$, $(\lambda_4^3; \lambda_6^3)$ поліном $P^3(\lambda) < 0$ та на проміжках $(\lambda_2^3; \lambda_4^3)$, $(\lambda_6^3; \lambda_8^4)$ поліном $P^3(\lambda) > 0$. Справедлива нерівність $0 < \lambda_2^3 < \lambda_2^2 < \lambda_4^3 < \lambda_2^1 < \lambda_6^3 < \lambda_8^4$. 4. Нехай $s=4$, тоді згідно формул (3.18) для випадку (3.17), одержимо рівняння четвертого степеня виду $P^4(\lambda) = (\lambda - 1/126)P^3(\lambda) - P^2(\lambda)/(224 \cdot 168) - 1/(48 \cdot 120 \cdot 224 \cdot 252)$. Розглянемо проміжки $[0; \lambda_2^3]_1^4$, $[\lambda_2^3; \lambda_2^2]_2^4$, $[\lambda_2^2; \lambda_2^1]_3^4$ та $[\lambda_2^1; \lambda_8^4]_4^4$. $P^4(0) > 0$ згідно формули (2.20). Оскільки $P^2(\lambda_2^3) > 0$ і $P^3(\lambda_2^3) = 0$, то $P^4(\lambda_2^3) < 0$. Оскільки $P^3(\lambda_2^2) > 0$, $P^2(\lambda_2^2) = 0$ і $(\lambda_2^2 - 1/126) > 0$, то $P^4(\lambda_2^2) = (\lambda_2^2 - 1/126)P^3(\lambda_2^2) - 1/(48 \cdot 120 \cdot 224 \cdot 252) > 0$. Припустимо, що $P^4(\lambda_2^2) < 0$,

тоді $(\lambda_2^2 - 1/126)P^3(\lambda_2^2) < 1/(48 \cdot 120 \cdot 224 \cdot 252)$, або $(\lambda_2^2 - 1/126) \times$
 $\times \left[-P^1(\lambda_2^2)/(80 \cdot 120) + 1/(48 \cdot 120 \cdot 140) \right] < 1/(48 \cdot 120 \cdot 224 \cdot 252)$, тобто
 $(\lambda_2^2 - 1/126) \left[-P^1(\lambda_2^2)/(80 \cdot 120) \right] < 1/(48 \cdot 120 \cdot 224 \cdot 252) - (\lambda_2^2 - 1/126) \times$
 $\times 1/(48 \cdot 120 \cdot 140)$. Оскільки $P^1(\lambda_2^2) < 0$, то ліва частина нерівності буде додатне
число, а права – від’ємне, що суперечить нерівності. Отже наше припущення
невірне. Покажемо, що знак полінома $P^4(\lambda_2^1)$ теж залежить лише від першого
доданку, тобто $P^4(\lambda_2^1) < 0$, оскільки $(\lambda_2^1 - 1/126) > 0$ і $P^3(\lambda_2^1) < 0$. Припустимо,
що $P^4(\lambda_2^1) > 0$, тоді дістанемо $(\lambda_2^1 - 1/126)P^3(\lambda_2^1) - P^2(\lambda_2^1)/(168 \cdot 224) >$
 $> 1/(48 \cdot 120 \cdot 224 \cdot 252)$. Обчисливши ліву частину нерівності, дістанемо
від’ємне число, яке не може бути більшим за будь-яке додатне число. Наше
припущення – невірне. На кінцях вказаних проміжків поліном $P^4(\lambda)$ змінює
знак, тому на кожному із цих проміжків існують деякі числа λ_2^4 , λ_4^4 , та λ_6^4 від-
повідно, які є його коренями. $P^4(\lambda_8^4) = 0$, оскільки λ_8^4 - один із коренів полі-
нома $P^4(\lambda)$. Отже, $P^4(\lambda_2^4) = P^4(\lambda_4^4) = P^4(\lambda_6^4) = 0$. На проміжках $(0; \lambda_2^4)$,
 $(\lambda_4^4; \lambda_6^4)$ поліном $P^4(\lambda) > 0$ та на проміжках $(\lambda_2^4; \lambda_4^4)$, $(\lambda_6^4; \lambda_8^4)$ поліном
 $P^4(\lambda) < 0$. Справедлива нерівність $0 < \lambda_2^4 < \lambda_2^3 < \lambda_4^4 < \lambda_2^2 < \lambda_6^4 < \lambda_2^1 < \lambda_8^4$. 5. Не-
хай $s = 2q$, тоді згідно формул (3.18), одержимо рівняння степеня $2q$. Припус-
тимо, що поліном $P^{2q}(\lambda)$ має $2q$ - різних, дійсних, додатніх коренів, які поз-
начимо через λ_{2j}^{2q} , $j = 1, \dots, 2q$ і, при переході через які змінює свій знак на про-
тилежний. Тоді, $P^{2q}(\lambda_{2j}^{2q}) = 0$, $j = 1, \dots, 2q$, причому $0 < \lambda_2^{2q} < \lambda_2^{2q-1} < \lambda_4^{2q} <$
 $< \lambda_4^{2q-1} < \dots < \lambda_{4q-6}^{2q-1} < \lambda_{4q-4}^{2q} < \lambda_2^2 < \lambda_{4q-2}^{2q} < \lambda_2^1 < \lambda_{4q}^{2q} < \lambda_8^4$. Оскільки $P^{2q}(0) > 0$

згідно формули (3.20), то очевидно, що на проміжку $(0; \lambda_2^{2q})_1^{2q+1}$ поліном $P^{2q}(\lambda) > 0$. На проміжку $(\lambda_{2j-2}^{2q}; \lambda_{2j}^{2q})_j^{2q+1}$, $j = 2, \dots, 2q$ поліном $P^{2q}(\lambda) < 0$ при парних значеннях j та $P^{2q}(\lambda) > 0$ при непарних значеннях j . На проміжку $(\lambda_{4q}^{2q}; \lambda_8^4)_{2q+1}^{2q+1}$ поліном $P^{2q}(\lambda) > 0$. 6. Нехай $s = 2q + 1$, тоді згідно формул (3.18), одержимо рівняння степеня $2q + 1$. Припустимо, що поліном $P^{2q+1}(\lambda)$ має $2q + 1$ - різних, дійсних, додатніх коренів, які позначимо через λ_{2j}^{2q+1} , $j = 1, \dots, 2q + 1$ і, при переході через які змінює свій знак на протилежний. Тоді, $P^{2q+1}(\lambda_{2j}^{2q+1}) = 0$, $j = 1, \dots, 2q + 1$, причому $0 < \lambda_2^{2q+1} < \lambda_2^{2q} < \lambda_4^{2q+1} < \lambda_4^{2q} < \dots < \lambda_{4q-4}^{2q} < \lambda_{4q-2}^{2q+1} < \lambda_2^2 < \lambda_{4q}^{2q+1} < \lambda_2^1 < \lambda_{4q+2}^{2q+1} < \lambda_8^4$. Оскільки $P^{2q+1}(0) < 0$ згідно формули (3.20), то, очевидно, що на проміжку $(0; \lambda_2^{2q+1})_1^{2q+2}$ поліном $P^{2q+1}(\lambda) < 0$. На проміжку $(\lambda_{2j-2}^{2q+1}; \lambda_{2j}^{2q+1})_j^{2q+2}$, $j = 2, \dots, 2q + 1$ поліном $P^{2q+1}(\lambda) > 0$ при парних значеннях j та $P^{2q+1}(\lambda) < 0$ при непарних значеннях j . На проміжку $(\lambda_{4q+2}^{2q+1}; \lambda_8^4)_{2q+2}^{2q+2}$ поліном $P^{2q+1}(\lambda) > 0$. 7. Покажемо, що при $s = 2q + 2$ поліном, обчислений згідно формул (3.18) $P^{2q+2}(\lambda)$ на проміжку $(0; \lambda_8^4)$ змінює свій знак $2q + 2$ разів, а отже, має $2q + 2$ - різних, дійсних, додатніх коренів. $P^{2q+2}(0) > 0$ згідно формули (3.20). Оскільки $P^{2q+1}(\lambda_{2j}^{2q+1}) = 0$, $j = 1, \dots, 2q + 1$ і $P^{2q}(\lambda_{4j-2}^{2q+1}) > 0$, $j = 1, \dots, q$, то очевидно, що $P^{2q+2}(\lambda_{4j-2}^{2q+1}) < 0$, $j = 1, \dots, q$. $P^{2q}(\lambda_{4j}^{2q+1}) < 0$, $j = 1, \dots, q - 1$, то $P^{2q+2}(\lambda_{4j}^{2q+1}) > 0$, $j = 1, \dots, q$. Перейдемо до границі у формулі (3.18) при $k \rightarrow \infty$ і дістанемо

$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k(\lambda) = \lambda P^{k-1}(\lambda)$. Отже, $P^{2q+2}(\lambda_2^2) > 0$, оскільки $P^{2q+1}(\lambda_2^2) > 0$ та $\lambda_2^2 > 0$; $P^{2q+2}(\lambda_2^1) < 0$, оскільки $P^{2q+1}(\lambda_2^1) < 0$ та $\lambda_2^1 > 0$; $P^{2q+2}(\lambda_8^4) > 0$, оскільки $P^{2q+1}(\lambda_8^4) > 0$ та $\lambda_8^4 > 0$. Дійсно многочлен $P^{2q+2}(\lambda)$ змінює свій знак $q + (q-1) + 3 = 2q + 2$ рази, а тому має $2q + 2$ - різних, дійсних, додатніх коренів, які позначимо через λ_{2j}^{2q+2} , $j = 1, \dots, 2q + 2$. $P^{2q+2}(\lambda_{2j}^{2q+2}) = 0$, $j = 1, \dots, 2q + 2$, причому справедлива нерівність $0 < \lambda_2^{2q+2} < \lambda_2^{2q+1} < \lambda_4^{2q+2} < \lambda_4^{2q+1} < \dots < \lambda_{4q-2}^{2q+1} < \lambda_{4q}^{2q+2} < \lambda_2^2 < \lambda_{4q+2}^{2q+2} < \lambda_2^1 < \lambda_{4q+4}^{2q+2} < \lambda_8^4$. Очевидно, що на проміжку $(0; \lambda_2^{2q+2})_1^{2q+3}$ поліном $P^{2q+2}(\lambda) > 0$. На проміжку $(\lambda_{2j-2}^{2q+2}; \lambda_{2j}^{2q+2})_j^{2q+3}$, $j = 2, \dots, 2q + 2$ поліном $P^{2q+2}(\lambda) < 0$ при парних значеннях j та $P^{2q+2}(\lambda) > 0$ при непарних значеннях j . На проміжку $(\lambda_{4q+4}^{2q+2}; \lambda_8^4)_{2q+3}^{2q+3}$ поліном $P^{2q+2}(\lambda) > 0$. **Твердження доведено.**

A5. Алгоритм 3.1. (Обчислення полінома $U_{2j}^n(x)$).

for $j \leftarrow 1$ to $j \leftarrow s$ do

$c_{2s} \leftarrow 1$

$c_{2s-2} \leftarrow -(\lambda_{2j} - (a_{2s-1} + a_{2s}))c_{2s} / a_{2s-1}$

for $k \leftarrow s-1$ downto $k \leftarrow 2$ do

$c_{2k-2} \leftarrow -((\lambda_{2j} - (a_{2k-1} + a_{2k}))c_{2k} + a_{2k}c_{2k+2}) / a_{2k-1}$

$r \leftarrow 1 / \sqrt{\sum_{j=1}^s (c_{2j})^2}$

for $i \leftarrow 1$ to $i \leftarrow s$ do

$$c_{2j}^{2i} \leftarrow rc_{2i}.$$

Результатом роботи даного алгоритму є значення алгебраїчного полінома $c_0 = P^s(\lambda)$ визначеного згідно формул (3.18) для степеня s в деякій точці $\lambda \in (0, 0.1013212597]$, де a_i знаходяться за формулами (3.59), λ_{2j-1} , $j=1, \dots, s$ - параметри, знайдені з рівняння (3.18) для матриці з елементами (3.17), r - нормуючий множник.

Аб. Алгоритм 3.2. (Обчислення поліномів $U_{2j-1}^{n-1}(x)$).

for $j \leftarrow 1$ to $j \leftarrow s$ do

$$c_{2s-1} \leftarrow 1$$

$$c_{2s-3} \leftarrow -(\lambda_{2j-1} - (a_{2s-2} + a_{2s-1}))c_{2s-1} / a_{2s-2}$$

for $k \leftarrow s-2$ downto $k \leftarrow 1$ do

$$c_{2k-1} \leftarrow -((\lambda_{2j-1} - (a_{2k} + a_{2k+1}))c_{2k+1} + a_{2k+1}c_{2k+3}) / a_{2k}$$

$$r \leftarrow 1 / \sqrt{\sum_{i=1}^s (c_{2i-1})^2}$$

for $i \leftarrow 1$ to $i \leftarrow s$ do

$$c_{2i-1}^j \leftarrow rc_{2i-1}.$$

Результатом роботи даного алгоритму є значення алгебраїчного полінома $c_* = P^s(\lambda)$ визначеного згідно формул (3.18) для степеня s в деякій точці $\lambda \in \left(0, \frac{7\sqrt{3} + \sqrt{107}}{32\sqrt{3}}\right]$, де a_i знаходяться за формулами (3.59), λ_{2j-1} , $j=1, \dots, s$ - параметри, знайдені з рівняння (3.18) для матриці з елементами (3.16), r - нормуючий множник.

A7. Алгоритм 3.3. (Обчислення поліномів $\bar{U}_{2j-1}^{n-1}(x)$).

for $j \leftarrow 1$ to $j \leftarrow s$ do

$$c_{2s-1} \leftarrow 1$$

$$\bar{c}_3 \leftarrow -(\lambda_{2j-1} + b_1)\bar{c}_1 / a_2$$

$$\bar{c}_5 \leftarrow -(b_3\bar{c}_1 + (\lambda_{2j-1} - (a_2 + a_3))\bar{c}_3) / a_4$$

for $k \leftarrow 4$ to $k \leftarrow s$ do

$$\bar{c}_{2k-1} \leftarrow -(b_{2k-3}\bar{c}_1 + a_{2k-5}\bar{c}_{2k-5} + (\lambda_{2j-1} - (a_{2k-4} + a_{2k-3}))\bar{c}_{2k-3}) / a_{2k-2}$$

$$r \leftarrow 1 / \sqrt{\sum_{j=1}^s (\bar{c}_{2j-1})^2}$$

for $i \leftarrow 1$ to $i \leftarrow s$ do

$$\bar{c}_{2j-1}^{2i-1} \leftarrow r\bar{c}_{2i-1},$$

де a_i, b_i знаходяться за формулами (3.59), (3.63) відповідно, $\lambda_{2j-1}, j = 1, \dots, s$ - параметри, знайдені з рівняння (3.18) для матриці з елементами (3.16), r - нормуючий множник.

A8. Алгоритм 3.4. (Обчислення поліномів $\bar{U}_{2j}^n(x)$).

for $j \leftarrow 1$ to $j \leftarrow s$ do

$$\bar{c}_2 \leftarrow 1$$

$$\bar{c}_4 \leftarrow -(\lambda_{2j} + b_2)\bar{c}_2 / a_3$$

$$\bar{c}_6 \leftarrow -(b_4\bar{c}_2 + (\lambda_{2j} - (a_3 + a_4))\bar{c}_4) / a_5$$

for $k \leftarrow 4$ to $k \leftarrow s$ do

$$\bar{c}_{2k} \leftarrow -(b_{2k-2}\bar{c}_2 + a_{2k-4}\bar{c}_{2k-4} + (\lambda_{2j} - (a_{2k-3} + a_{2k-2}))\bar{c}_{2k-2}) / a_{2k-1}$$

$$r \leftarrow 1 / \sqrt{\sum_{j=1}^s (\bar{c}_{2j})^2}$$

for $i \leftarrow 1$ to $i \leftarrow s$ do

$$\bar{c}_{2j}^{2i} \leftarrow r \bar{c}_{2i},$$

де a_i, b_i знаходяться за формулами (3.59), (3.60) відповідно, $\lambda_{2j}, j=1, \dots, s$ - параметри, знайдені з рівняння (3.18) для матриці з елементами (3.17), r - нормуючий множник.

А9. Доведення твердження 3.5.

Нехай $F = F_n(x)$ така, що $F(-1) = 0$ і $F(1) = 0$. Будемо шукати $F_n(x)$ у вигляді

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^n q_i u_i(x), \quad (\text{A9.1})$$

де
$$u_1(x) = \frac{1}{4}(T_2(x) - T_0(x)), \quad u_1(x) = \frac{1}{6}(T_3(x) - T_1(x)),$$

$$u_1(x) = \frac{T_{i+1}(x)}{2(i+1)} - \frac{T_{i-1}(x)}{2(i-1)} + \frac{T_{\bar{i}}(x)}{(i+1)(i-1)}, \quad i=1, \dots, n, \quad \bar{i}=0 \text{ - для парних функцій та}$$

$\bar{i}=1$ - для непарних функцій.

Через x_k позначимо нулі многочлена Чебишева першого роду, які знаходяться за формулою

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k=1, \dots, n. \quad (\text{A9.2})$$

Серед функцій вигляду

$$l_j(x) = \sum_{i=1}^n c_i^j u_i(x), \quad j=1, \dots, n, \quad (\text{A9.3})$$

знайдемо такі, що

$$l_j(x_j) = 1, \quad l_j(x_k) = 0, \quad k \neq j. \quad (\text{A9.4})$$

В рівняння (A9.3) по черзі підставлятимемо x_k , знайдені за формулою (A9.2) та, враховуючи умову (A9.4), отримаємо n - систем виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n c_i^j u_i(x_1) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum_{i=1}^n c_i^j u_i(x_j) = 1, \quad j = 1, \dots, n. \\ \dots\dots\dots, \\ \sum_{i=1}^n c_i^j u_i(x_n) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A9.5})$$

Функцію $F_n(x)$ розвинемо в скінченний ряд вигляду $F_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j l_j(x)$. В останнє рівняння по черзі підставлятимемо вузли x_k , $k = 1, \dots, n$, отримані за формулою (A9.2) і знаходимо $F_n(x_k) = a_k$.

Отже,

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^n F_n(x_j) l_j(x) = \sum_{j=1}^n F_n(x_j) \sum_{i=1}^n c_i^j u_i(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_i^j F_n(x_j) \right) u_i(x). \quad (\text{A.9.6})$$

Введемо позначення $q_i = \sum_{j=1}^n c_i^j F_n(x_j)$, тоді рівність (A9.6) прийме вигляд

(A9.1). *Твердження доведено.*

A10. Алгебраїчне доведення ортогональності власних векторів.

Сформулюємо по-новому загальний зміст проблеми власних значень

$$Qx = \lambda x. \quad (\text{A10.1})$$

Це рівняння визначає кожен раз лише одну головну вісь, так як тут λ представляє лише одне із власних значень, і для кожного $\lambda = \lambda_i$ рівняння повинно бути окремим розв'язане. Отже, рівняння (A10.1) повинно бути розв'язане n раз для $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Об'єднаємо всі власні значення матриці Q в єдину матричну форму. З цією метою введемо матрицю Λ , визначену наступним чином:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Запишемо тепер матричне рівняння для інтегрального рівняння виду (3.22)

$$QU = -U\Lambda. \quad (\text{A10.2})$$

Якщо ми випишемо це рівняння поелементно, то знайдемо, що перший стовпець результуючої системи рівнянь визначає першу головну вісь u_1 , другий стовпець визначає другу головну вісь u_2 і т.д. Вся задача пошуку головних осей тепер виражена одним матричним рівнянням, в якому U - шукана матриця.

Запишемо тепер матричне рівняння для знаходження біортогональних функцій \bar{U} до функцій U

$$Q^T \bar{U} = -\bar{U}\Lambda, \quad (\text{A10.3})$$

де Q^T - транспонована матриця до матриці Q .

Запишемо матричну рівність, що описує рівняння (3.87) та (3.88)

$$AU = -BU\Lambda^{-1}. \quad (\text{A10.4})$$

де Λ^{-1} - обернена матриця до матриці Λ .

Із рівняння (A10.4) дістанемо

$$-AU\Lambda U^{-1} = B. \quad (\text{A10.5})$$

Із рівняння (A10.2) дістанемо

$$Q = -U\Lambda U^{-1},$$

тому (A10.5) запишемо $AQ = B$ або $Q = A^{-1}B$, або $Q^T = B^T (A^{-1})^T$.

Останню рівність домножимо на \bar{U} справа і дістанемо

$$Q^T \bar{U} = B^T (A^{-1})^T \bar{U}. \quad (\text{A10.6})$$

Введемо позначення $\bar{V} = (A^{-1})^T \bar{U}$.

Отже, знайдені нами функції

$$\bar{V} = (A^{-1})^T \bar{U}, \quad (\text{A10.7})$$

розкладені по базисних функціях (3.70) будуть біортогональними до функцій знайдених за формулою (3.34), оскільки вони є власними функціями матриці Q^T лише представлені в іншому базисі.

A11. Обчислювальний експеримент 3.1. (для періодичної функції)

Нехай $\Phi(x) = \cos x - 0.5[\cos(-1) + \cos(1)]$. Знайдемо коефіцієнти та часткові

$$\text{суми } \Phi_{2s+1}(x) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^s \varphi_{2i-j} V_{2i-j}^{2s+j}(x) \text{ та } \bar{\Phi}_{2s+1}(x) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^s \bar{\varphi}_{2i-j} \bar{V}_{2i-j}^{2s+j}(x).$$

Невідомі коефіцієнти φ_{2i-j} та $\bar{\varphi}_{2i-j}$ знаходимо так:

$$\varphi_{2i-j} = h_{2i-j}^{-1} \int_{-1}^1 \rho(x) \Phi(x) V_{2i-j}^{2s+j}(x) dx, \quad \bar{\varphi}_{2i-j} = h_{2i-j}^{-1} \int_{-1}^1 \rho(x) \Phi(x) \bar{V}_{2i-j}^{2s+j}(x) dx,$$

$$h_{2i-j} = \int_{-1}^1 \rho(x) V_{2i-j}^{2s+j}(x) \bar{V}_{2i-j}^{2s+j}(x) dx.$$

Таблиця A11.1.

Залежність стійкості обчислень коефіцієнтів від похибки q для $n = 10, m = 32$

φ_i	$q = 10^{-6}$	$q = 10^{-8}$	$q = 10^{-16}$	$\bar{\varphi}_i$	$q = 10^{-6}$	$q = 10^{-8}$	$q = 10^{-16}$
φ_2	-0.841002	-0.8410020	-0.8410021	$\bar{\varphi}_2$	0.516416	0.5164132	0.5164132
φ_4	0.553687(-1)	0.5537967(-1)	0.5537953(-1)	$\bar{\varphi}_4$	0.249766	0.2497734	0.2497735
φ_6	-0.194872(-1)	-0.1932325(-1)	-0.1932465(-1)	$\bar{\varphi}_6$	0.191903	0.1917867	0.191787
φ_8	-0.920766(-2)	-0.1058995(-1)	-0.1061236(-1)	$\bar{\varphi}_8$	0.192706	0.1944100	0.1944061
φ_{10}	0.131645(-1)	0.1282124(-1)	0.1281685(-1)	$\bar{\varphi}_{10}$	0.182997	0.1833310	0.1833316

Інтеграли визначимо за допомогою квадратурних формул порядку m . Резуль-

тати обчислень подано у вигляді таблиць. Множник $(-N)$ означає $\times 10^{-N}$.

Надалі вважатимемо, що $n = 2s$.

Таблиця A11.2.

Результати розрахунку коефіцієнтів за різних порядків квадратурної формули і точності обчислень

φ_i	$m = 32$		$m = 64$	
	$q = 10^{-10}$	$q = 10^{-16}$	$q = 10^{-10}$	$q = 10^{-16}$
φ_2	-0.8410021315	-0.8410021317117916	-0.8410021317	-0.8410021317117926
φ_4	0.5538081220(-1)	0.5538082152098281(-1)	0.5538082214(-1)	0.5538082152099605(-1)
φ_6	-0.1902234578(-1)	-0.1902228818869918(-1)	-0.1902235219(-1)	-0.1902228818874203(-1)
φ_8	0.9536166140(-2)	0.9536017562528369(-2)	0.9535714763(-2)	0.9536017563100237(-2)
φ_{10}	-0.5734908656(-2)	-0.5731784483925621(-2)	-0.5734946631(-2)	-0.5731784480399962(-2)
φ_{12}	-0.2726600876(-2)	-0.2765158631302883(-2)	-0.2707282283(-2)	-0.2765158565708843(-2)
φ_{14}	-0.4012341171(-2)	-0.4032113858922699(-2)	-0.3987165616(-2)	-0.4032113819811012(-2)
φ_{16}	0.4227275632(-2)	0.4190271198391008(-2)	0.4197872782(-2)	0.4190271222573633(-2)
φ_{18}	0.3679537060(-2)	0.3657156053669544(-2)	0.3675613910(-2)	0.3657156117362212(-2)

Таблиця A11.3.

Значення абсолютної похибки апроксимації $\square R_n^{(q)}(x_i)$ функції

для різних значень n та q

x_i	$\square R_{18}^{(-10)}(x_i)$	$\square \bar{R}_{18}^{(-10)}(x_i)$	$\square R_{18}^{(-16)}(x_i)$	$\square \bar{R}_{18}^{(-16)}(x_i)$
0	0.20718(-5)	-0.19365(-5)	0.4543(-12)	-0.18321(-11)
0.1	-0.3783(-6)	0.3902(-6)	-0.2100(-12)	0.6796(-12)
0.2	-0.20291(-5)	0.18144(-5)	-0.4344(-12)	0.13481(-11)
0.3	0.12026(-5)	-0.11501(-5)	0.5442(-12)	-0.19874(-11)
0.4	0.17350(-5)	-0.12635(-5)	0.2923(-12)	0.4571(-12)
0.5	-0.21223(-5)	0.15782(-5)	-0.5110(-12)	0.24165(-11)
0.6	-0.7334(-6)	-0.27(-8)	-0.1416(-12)	-0.39950(-11)
0.7	0.23340(-5)	-0.2481(-6)	-0.5053(-12)	0.16462(-11)
0.8	-0.4216(-6)	-0.3631(-6)	0.24666(-11)	0.23953(-11)
0.9	-0.128898(-5)	0.165063(-5)	-0.275087(-11)	-0.279019(-11)
1	-0.404(-7)	0.28690(-5)	-0.749000(-13)	0.68640(-12)

Таблиця А11.4.

Значення абсолютної похибки апроксимації $\square R_n^{(q)}(x_i)$ функції
для різних значень n та q

x_i	$\square R_{18}^{(-22)}(x_i)$	$\square \bar{R}_{18}^{(-22)}(x_i)$	$\square R_{18}^{(-27)}(x_i)$	$\square \bar{R}_{18}^{(-27)}(x_i)$	$\square R_{18}^{(-32)}(x_i)$	$\square \bar{R}_{18}^{(-32)}(x_i)$
0	-0.43133(-17)	-0.21104(-17)	-0.5042(-23)	0.4907(-23)	0.81579562(-24)	0.81570958(-24)
0.1	0.6888(-18)	0.8639(-18)	0.2522(-23)	-0.580(-24)	-0.33835743(-24)	-0.33830840(-24)
0.2	0.40041(-17)	0.16455(-17)	0.3217(-23)	-0.4526(-23)	-0.52253452(-24)	-0.52248533(-24)
0.3	-0.21656(-17)	-0.25698(-17)	-0.7921(-23)	0.1857(-23)	0.79884802(-24)	0.79870199(-24)
0.4	-0.27475(-17)	0.1636(-18)	0.3412(-23)	0.3440(-23)	-0.28365897(-24)	-0.28357914(-24)
0.5	0.34081(-17)	0.34868(-17)	0.11437(-22)	-0.2960(-23)	-0.42787707(-24)	-0.42770506(-24)
0.6	-0.1791(-18)	-0.40070(-17)	-0.17642(-22)	-0.1278(-23)	0.78740560(-24)	0.78708509(-24)
0.7	-0.17041(-17)	0.1173(-18)	-0.804(-24)	0.3819(-23)	-0.79143592(-24)	-0.79123717(-24)
0.8	0.8380(-18)	0.38915(-17)	0.23391(-22)	-0.3749(-23)	0.76182983(-24)	0.76189175(-24)
0.9	0.17762(-18)	-0.240503(-17)	-0.69888(-23)	-0.51912(-23)	-0.782224103(-24)	-0.782716165(-24)
1	-0.366(-19)	-0.3045(-18)	0.614(-24)	-0.16155(-22)	0.338(-29)	0.3183(-28)

Таблиця А11.5.

Вплив порядку та кількості поліномів Чебишева на обчислення коефіцієнтів $\bar{\varphi}_i$, які використовуються для побудови біортогональних многочленів, для $m = 32$ з точністю обчислення $q = 10^{-10}$

$\bar{\varphi}_i$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 12$	$n = 14$	$n = 20$
$\bar{\varphi}_2$	0.5158321516	0.5162588894	0.5164132988	0.5164831615	0.5165190625	0.5165594819
$\bar{\varphi}_4$	0.2516285303	0.2496791625	0.2497735389	0.2497926931	0.2498066461	0.2498226476
$\bar{\varphi}_6$	0.2386207451	0.2134156726	0.1917879585	0.1907298411	0.1907174805	0.1907295480
$\bar{\varphi}_8$		0.2019045181	0.1944060840	0.1795336646	0.1607510298	0.1604384312
$\bar{\varphi}_{10}$			0.1833317078	0.1722806572	0.1675417960	0.1411752207
$\bar{\varphi}_{12}$				0.1661280557	0.1631462293	0.1285564380
$\bar{\varphi}_{14}$					0.1545462872	0.1408730559

Аналогічні результати мають місце і для коефіцієнтів φ_i .

Вище подані результати обчислювального експерименту для періодичної функції. Обчислювальний експеримент проводився і для монотонних функцій.

A12. Обчислювальний експеримент 3.2. (для монотонної функції)

Нехай $\Phi(x) = e^x - 0.5(e^1 + e^{-1}) - -0.5(e^1 - e^{-1})x$. Результати обчислень подані в таблицях.

Таблиця A12.1.

Значення коефіцієнтів φ_i для $n = 10$, $m = 32$ з різною точністю обчислення q

φ_i	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-4}$	$q = 10^{-6}$	$q = 10^{-8}$	$q = 10^{-16}$
φ_1	0.32	0.2191	0.219999	0.2200038	0.2200038
φ_2	0.96	1.016	1.01647	1.0164678	1.0164678
φ_3	-0.1	-0.5977(-1)	-0.597686(-1)	-0.5979217(-1)	-0.5979278(-1)
φ_4	0.96(-1)	-0.1441	-0.144521	-0.1445308	-0.1445308
φ_5	0.71	-0.6939(-1)	0.187149(-1)	0.1797442(-1)	0.1798045(-1)
φ_6	0.39(-1)	0.1839(-1)	0.536377(-1)	0.5343365(-1)	0.5343554(-1)
φ_7	-0.7(-1)	0.5612(-1)	0.275970(-1)	0.2800956(-1)	0.2800741(-1)
φ_8	0.76(-1)	0.4771	0.282840(-1)	0.3019348(-1)	0.3022307(-1)
φ_9	-0.63(-1)	-0.6024(-1)	-0.232585(-1)	-0.2185457(-1)	-0.2185123(-1)
φ_{10}	-1.4	-0.9573(-1)	-0.365695(-1)	-0.3609259(-1)	-0.3608700(-1)

Таблиця A12.2.

Значення абсолютної похибки апроксимації $\square R_n^{(q)}(x_i)$ функції для різних значень $n = 10$ та q

x_i	$\square R_{19}^{(-22)}(x_i)$	$\square \bar{R}_{19}^{(-22)}(x_i)$	$\square R_{19}^{(-27)}(x_i)$	$\square \bar{R}_{19}^{(-27)}(x_i)$	$\square R_{19}^{(-32)}(x_i)$	$\square \bar{R}_{19}^{(-32)}(x_i)$
-1	0.234(-19)	-0.4021(-17)	0.2101(-23)	0.77156(-22)	0.926(-29)	0.5254(-28)
-0.8	-0.14016(-17)	-0.66088(-17)	-0.18977(-22)	-0.8597(-23)	0.76967563(-24)	0.76939063(-24)
-0.6	-0.15901(-17)	0.44952(-17)	0.26898(-22)	0.27978(-22)	0.79055525(-24)	0.79101863(-24)
-0.4	0.53001(-17)	0.15095(-17)	-0.26021(-22)	-0.16038(-22)	-0.30373698(-24)	-0.30361199(-24)
-0.2	-0.62093(-17)	-0.32369(-17)	0.8552(-23)	0.8285(-23)	-0.51767483(-24)	-0.51790618(-24)
0	0.58259(-17)	0.27977(-17)	0.9067(-23)	-0.4194(-23)	0.83482367(-24)	0.83493728(-24)
0.2	-0.46058(-17)	-0.11108(-17)	-0.20345(-22)	0.550(-24)	-0.55256993(-24)	-0.55246624(-24)
0.4	0.20965(-17)	-0.20191(-17)	0.15890(-22)	0.5965(-23)	-0.27515542(-24)	-0.27550132(-24)
0.6	0.21398(-17)	0.63141(-17)	0.24361(-22)	-0.20093(-22)	0.82172828(-24)	0.82213598(-24)
0.8	-0.8917(-18)	-0.40311(-17)	-0.39492(-22)	0.25804(-22)	0.79107635(-24)	0.79120462(-24)
1	-0.1217(-18)	0.5685(-18)	0.439(-24)	0.952(-24)	-0.3328(-28)	-0.1039(-27)

Таблиця А12.2.

Вплив порядку квадратурної формули m та точності обчислення q

$\bar{\varphi}_i$	$m = 32$		$m = 64$	
	$q = 10^{-10}$	$q = 10^{-16}$	$q = 10^{-10}$	$q = 10^{-16}$
$\bar{\varphi}_1$	-0.1855163685	-0.1855163674000813	-0.1855163699	-0.1855163674000817
$\bar{\varphi}_2$	-0.6266295017	-0.6266294992490467	-0.6266295022	-0.6266294992490460
$\bar{\varphi}_3$	-0.1163896571	-0.1163896564921923	-0.1163896523	-0.1163896564921958
$\bar{\varphi}_4$	-0.3691420148	-0.3691420105644407	-0.3691420113	-0.3691420105644346
$\bar{\varphi}_5$	-0.8926529460(-1)	-0.8926532650386368(-1)	-0.8926532016(-1)	-0.8926532650386922(-1)
$\bar{\varphi}_6$	-0.2788923726	-0.2788924057695956	-0.2788923924	-0.2788924057695922
$\bar{\varphi}_7$	-0.7452341029(-1)	-0.7452382955441131(-1)	-0.7452289614(-1)	-0.7452382955459861(-1)
$\bar{\varphi}_8$	-0.2324007217	-0.2324000956677709	-0.2324004419	-0.2324000956681079
$\bar{\varphi}_9$	-0.6529588519(-1)	-0.6529600983529250(-1)	-0.6529593885(-1)	-0.6529600983902234(-1)
$\bar{\varphi}_{10}$	-0.2034252931	-0.2034253736681622	-0.2034261091	-0.2034253736626350
$\bar{\varphi}_{11}$	-0.6485680545(-1)	-0.6485658033849316(-1)	-0.6481014582(-1)	-0.6485658039978618(-1)
$\bar{\varphi}_{12}$	-0.2097377949	-0.2096225499198289	-0.2098061935	-0.2096225498453046
$\bar{\varphi}_{13}$	-0.6644379977(-1)	-0.6642360810676869(-1)	-0.6643448028(-1)	-0.6642360810116852(-1)
$\bar{\varphi}_{14}$	-0.2050072727	-0.2050177233038453	-0.2050164095	-0.2050177232646628
$\bar{\varphi}_{15}$	-0.6655090725(-1)	-0.6647464316630985(-1)	-0.6657390683(-1)	-0.6647464319391595(-1)
$\bar{\varphi}_{16}$	-0.1910553197	-0.1910814513476299	-0.1910545673	-0.1910814513520610
$\bar{\varphi}_{17}$	-0.6240534212(-1)	-0.6242526719539417(-1)	-0.6241181488(-1)	-0.6242526718144028(-1)
$\bar{\varphi}_{18}$	-0.2094721794	-0.2095192867851294	-0.2095036762	-0.2095192868805587

Висновки. На визначення коефіцієнтів розкладу функцій у біортогональні ряди за допомогою квадратурних формул суттєво впливає точність обчислення, у той час як порядок квадратурної формули, починаючи з деякого, має значно менший вплив.

А13. Подання поліномів Чебишева через біортогональні функції.

Зазначимо, що для поліномів Чебишева $T_n(x)$, $n=1, \dots$ та їх похідних

$$T'_n(x) = \frac{d}{dx} T_n(x) \text{ справджуються рівності}$$

$$T'_n(1) = n^2, T'_n(-1) = (-1)^{n-1} T'_n(1), T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n,$$

(A13.1)

$$\int_{-1}^1 \rho(x) (T_n(x))^2 dx = \frac{\pi}{2}, \int_{-1}^1 \rho(x) (T_0(x))^2 dx = \pi, \int_{-1}^1 \rho(x) (T'_n(x))^2 dx = n^3 \pi.$$

Запишемо квазіспектральне диференціальне рівняння для парних функцій

$$\frac{d^2 V_{2i}^{2s}(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} V_{2i}^{2s}(x) + \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{dT_{n+1}(x)}{dx}. \quad (\text{A13.2})$$

Враховуючи співвідношення (A13.1), домножимо обидві частини рівності (A13.2) на поліном Чебишева $T_{2s}(x)$ та зінтегруємо за змінною x із вагою $\rho(x)$. Отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s}(x) \frac{d^2 V_{2i}^{2s}(x)}{dx^2} dx = \\ & = -\frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s}(x) V_{2i}^{2s}(x) dx + \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s}(x) T'_{n+1}(x) dx, \quad i=1, \dots, s. \end{aligned} \quad (\text{A13.3})$$

Степінь парних поліномів $V_{2i}^{2s}(x)$ не перевищує $2s$. Внаслідок ортогональності поліномів Чебишева інтеграл у лівій частині дорівнює нулеві. Оскільки

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s}(x) T'_{2s+1}(x) dx = (2s+1)\pi, \quad (\text{A13.4})$$

то зі співвідношення (A13.3) матимемо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s}(x) V_{2i}^{2s}(x) dx = \tau_{2i-1}^n (2s+1)\pi. \quad (\text{A13.5})$$

Аналогічно зі спряженого квазіспектрального диференціального рівняння для парних функцій

$$\sqrt{1-x^2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\bar{V}_{2i}^{2s}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right) = -\frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} \bar{V}_{2i}^{2s}(x) - \frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{2} \frac{T_n(x)}{n(1-x^2)} - \frac{\bar{\tau}_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{(s+1)T_n(x) - sT_{n+2}(x)}{(1-x^2)} \quad (\text{A13.6})$$

дістанемо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s}(x) \bar{V}_{2i}^{2s}(x) dx = -\bar{\tau}_{2i-1}^n (2s) \pi. \quad (\text{A13.7})$$

Із рівностей (A13.4), (A13.5), (A13.5) випливають формули розкладу полінома Чебишева в ряд Фур'є за біортогональними системами квазіспектральних поліномів

$$T_{2s}(x) = (2s+1) \pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i-1}^n \frac{\bar{V}_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n\right)} + \frac{1}{(2s+1)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+1}(x), \quad (\text{A13.8})$$

$$T_{2s}(x) = (2s) \pi \sum_{i=1}^s -\bar{\tau}_{2i-1}^n \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n\right)} + \frac{1}{(2s+1)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+1}(x). \quad (\text{A13.9})$$

Для непарних квазіспектральних поліномів справджуються формули

$$T_{2s+1}(x) = (2s+2) \pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i}^n \frac{\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n\right)} + \frac{1}{(2s+2)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+2}(x), \quad (\text{A13.10})$$

$$T_{2s+1}(x) = (2s+1) \pi \sum_{i=1}^s -\bar{\tau}_{2i}^n \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n\right)} + \frac{1}{(2s+2)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+2}(x), \quad (\text{A13.11})$$

розкладу в ряд Фур'є непарного полінома Чебишева степеня $2s+1$, які є аналогами формул (A13.8), (A13.9).

Візьмемо другу похідну по x від обох частин рівняння (A13.2)

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 V_{2i}^{2s}(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{d^2}{dx^2} V_{2i}^{2s}(x) + \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{d^3 T_{n+1}(x)}{dx^3}.$$

Враховуючи (A13.2) останню рівність запишемо

$$\frac{d^4 V_{2i}^{2s}(x)}{dx^4} = -\frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} \left(-\frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} V_{2i}^{2s}(x) + \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{dT_{n+1}(x)}{dx} \right) + \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{d^3 T_{n+1}(x)}{dx^3}. \quad (\text{A13.12})$$

Домножимо обидві частини рівності (A13.12) на поліном Чебишева $T_{2s-2}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$. Отримаємо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-2}(x) \frac{d^4 V_{2i}^{2s}(x)}{dx^4} dx = \frac{1}{\left(\lambda_{2i-1}^n\right)^2} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-2}(x) V_{2i}^{2s}(x) dx -$$

$$-\frac{\tau_{2i-1}^n}{\left(\lambda_{2i-1}^n\right)^2} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-2}(x) T'_{2s+1}(x) dx + \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-2}(x) \frac{d^3 T_{2s+1}(x)}{dx^3} dx.$$

Степінь парних поліномів $\frac{d^4}{dx^4} V_{2i}^{2s}(x)$ не перевищує $2s-4$, а тому, внаслідок ортогональності поліномів Чебишева інтеграл у лівій частині дорівнює нулеві.

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-2}(x) T'_{2s+1}(x) dx = (2s+1)\pi. \quad (\text{A13.13})$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-2}(x) \frac{d^3 T_{2s+1}(x)}{dx^3} dx = 4(2s+1)(2s)(2s-1)\pi. \quad (\text{A13.14})$$

Враховуючи (A13.13) та (A13.14) дістанемо

$$\frac{1}{\left(\lambda_{2i-1}^n\right)^2} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-2}(x) V_{2i}^{2s}(x) dx =$$

$$= \frac{\tau_{2i-1}^n}{\left(\lambda_{2i-1}^n\right)^2} (2s+1)\pi - \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} 4(2s+1)(2s)(2s-1)\pi$$

або

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-2}(x) V_{2i}^{2s}(x) dx = (2s+1)\pi \tau_{2i-1}^n \left(1 - 4(2s)(2s-1)\lambda_{2i-1}^n\right). \quad (\text{A13.15})$$

Аналогічно з рівняння (A13.6) дістанемо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-2}(x) \bar{V}_{2i}^{2s}(x) dx =$$

$$= (2s-2)\pi \left[-\bar{\tau}_{2i-1}^n \left(1 - 4(2s)(2s-1)\lambda_{2i-1}^n \right) + \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{(2s)(2s-2)} \right]. \quad (\text{A13.16})$$

Із рівностей (A13.13) - (A13.16) впливають наступні формули

$$T_{2s-2}(x) = (2s+1)\pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i-1}^n \left(1 - 4(2s)(2s-1)\lambda_{2i-1}^n \right) \times$$

$$\times \frac{\bar{V}_{2i}^{2s}}{\left(-\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n \right)} + \frac{1}{(2s+1)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+1}(x), \quad (\text{A13.17})$$

$$T_{2s-2}(x) = (2s-2)\pi \sum_{i=1}^s \left[-\bar{\tau}_{2i-1}^n \left(1 - 4(2s)(2s-1)\lambda_{2i-1}^n \right) + \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{(2s)(2s-2)} \right] \times$$

$$\times \frac{V_{2i}^{2s}}{\left(-\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n \right)} + \frac{1}{(2s+1)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+1}(x). \quad (\text{A13.18})$$

Для непарних квазіспектральних поліномів справджуються формули

$$T_{2s-1}(x) = (2s+2)\pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i}^n \left(1 - 4(2s+1)(2s)\lambda_{2i}^n \right) \times$$

$$\times \frac{\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}}{\left(-\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n \right)} + \frac{1}{(2s+2)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+2}(x), \quad (\text{A13.19})$$

$$T_{2s-1}(x) = (2s-1)\pi \sum_{i=1}^s \left[-\bar{\tau}_{2i}^n \left(1 - 4(2s)(2s+1)\lambda_{2i}^n \right) + \frac{\bar{c}_2^{2i}}{4(2s-1)(2s+1)} \right] \times$$

$$\times \frac{V_{2i-1}^{2s+1}}{\left(-\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n \right)} + \frac{1}{(2s+2)^2} \frac{d}{dx} T_{2s+2}(x). \quad (\text{A13.20})$$

Розглянемо рівняння (A13.12), в якому присутня похідна третього порядку. Знайдемо розклад $\frac{d^3 T_{n+1}(x)}{dx^3}$ по многочленах $V_{2i}^{2s}(x)$.

Припустимо, що

$$\frac{d^3 T_{n+1}(x)}{dx^3} = \sum_{i=1}^s \gamma_{2i}^{2s} \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \gamma_{2s+2}^{2s} T'_{n+1}(x). \quad (\text{A13.21})$$

У формулі (A13.21) знайдемо невідомі коефіцієнти γ_{2i}^{2s} , $i = \overline{1, s+1}$.

Оскільки,

$$\int_{-1}^x T_{2s-1}(x) dx = \frac{T_{2s}(x)}{2(2s)} - \frac{T_{2s-2}(x)}{2(2s-2)} + \frac{1}{(2s-2)(2s)}, \quad (\text{A13.22})$$

то

$$T'_{2s-1}(x) = \frac{T''_{2s}(x)}{2(2s)} - \frac{T''_{2s-2}(x)}{2(2s-2)}. \quad (\text{A13.23})$$

З формул (A13.9) та (A13.18) з урахуванням (A13.2) та (A13.21) дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{T''_{2s}(x)}{2(2s)} &= \frac{1}{2(2s)} \left((2s) \pi \sum_{i=1}^s -\bar{\tau}_{2i-1}^{2s} \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \frac{T'_{2s+1}(x)}{(2s+1)^2} \right)'' = \\ &= \frac{1}{2(2s)} \left((2s) \pi \sum_{i=1}^s -\bar{\tau}_{2i-1}^{2s} \frac{-\frac{1}{\lambda_{2i-1}^{2s}} V_{2i}^{2s}(x) + \frac{\bar{\tau}_{2i-1}^{2s}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} T'_{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{(2s+1)^2} \left(\sum_{i=1}^s \gamma_{2i}^{2s} \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \gamma_{2s+2}^{2s} T'_{n+1}(x) \right) \right), \quad (\text{A13.24}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T''_{2s-2}(x)}{2(2s-2)} &= \frac{1}{2(2s-2)} \left((2s-2) \pi \sum_{i=1}^s \left[-\bar{\tau}_{2i-1}^n \left(1 - 4(2s)(2s-1) \lambda_{2i-1}^n \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{(2s)(2s-2)} \right] \frac{-\frac{1}{\lambda_{2i-1}^{2s}} V_{2i}^{2s}(x) + \frac{\bar{\tau}_{2i-1}^{2s}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} T'_{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{(2s+1)^2} \left(\sum_{i=1}^s \gamma_{2i}^{2s} \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \gamma_{2s+2}^{2s} T'_{n+1}(x) \right) \right). \quad (\text{A13.25}) \end{aligned}$$

Отже, з формул (A13.24) та (A13.25) дістанемо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) \frac{T_{2s}''(x)}{2(2s)} \bar{V}_{2i}^{2s}(x) dx = \frac{\pi \bar{\tau}_{2i-1}^{2s}}{2 \lambda_{2i-1}^{2s}} + \frac{\gamma_{2i}^{2s}}{2(2s)(2s+1)^2}, \quad (\text{A13.26})$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) \frac{T_{2s-2}''(x)}{2(2s-2)} \bar{V}_{2i}^{2s}(x) dx = \frac{\pi \bar{\tau}_{2i-1}^{2s}}{2 \lambda_{2i-1}^{2s}} - 2(2s)(2s-1) \pi \bar{\tau}_{2i-1}^{2s} -$$

$$- \frac{\bar{c}_1^{2i-1} \pi}{2(2s)(2s-2) \lambda_{2i-1}^{2s}} + \frac{\gamma_{2i}^{2s}}{2(2s-2)(2s+1)^2}. \quad (\text{A13.27})$$

Формули (A13.26) та (A13.27) – це коефіцієнти розкладу першого та другого доданків відповідно правої частини рівняння (A13.23) в ряд по функціях $V_{2i}^{2s}(x)$, $i = 1, \dots, s$.

Знайдемо коефіцієнти розкладу лівої частини рівняння (A13.23) в ряд по функціях $V_{2i}^{2s}(x)$, $i = 1, \dots, s$.

Оскільки,

$$\int_{-1}^x T_{2s}(x) dx = \frac{T_{2s+1}(x)}{2(2s+1)} - \frac{T_{2s-1}(x)}{2(2s-1)} - \frac{1}{(2s+1)(2s-1)},$$

то

$$T_{2s}(x) = \frac{T'_{2s+1}(x)}{2(2s+1)} - \frac{T'_{2s-1}(x)}{2(2s-1)}.$$

З останнього рівняння, з врахуванням (A13.7) дістаємо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T'_{2s-1}(x) \bar{V}_{2i}^{2s}(x) dx = -2(2s-1) \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s}(x) \bar{V}_{2i}^{2s}(x) dx =$$

$$= 2(2s)(2s-1) \pi \bar{\tau}_{2i-1}^{2s}. \quad (\text{A13.28})$$

Отже, з рівняння (A13.23) з врахуванням (A13.26)-(A13.27) знаходимо невідомі коефіцієнти для (A13.21)

$$\gamma_{2i}^{2s} = (2s+1)^2 \frac{\bar{c}_1^{2i-1} \pi}{\lambda_{2i-1}^{2s} 2}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (\text{A13.29})$$

Коефіцієнт γ_{2s+2}^{2s} знаходимо з рівняння (A13.21), підставивши в нього $x=1$, і дістанемо

$$\gamma_{2s+2}^{2s} = \frac{1}{15}(2s-1)(2s)(2s+2)(2s+3). \quad (\text{A13.30})$$

Отримані значення коефіцієнтів (A13.29) та (A13.30) підставимо в (A13.21) і дістанемо шуканий розклад

$$\begin{aligned} T_{2s+1}'''(x) &= \frac{(2s+1)^2}{2} \pi \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_1^{-2i-1}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \\ &+ \frac{1}{15}(2s-1)(2s)(2s+2)(2s+3)T_{2s+1}'(x). \end{aligned} \quad (\text{A13.31})$$

A14. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів

Чебишева в ряд за функціями $V_{2i}^{2s}(x)$.

Введемо позначення $q_{2i}^{2s} = \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s}(x) \bar{V}_{2i}^{2s}(x) dx = -(2s) \pi \bar{\tau}_{2i-1}^{2s}$, згідно формули

(M.7). Аналогічно, згідно формули (M.16), маємо

$$q_{2i}^{2s-2} = \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-2}(x) \bar{V}_{2i}^{2s}(x) dx = -(2s-2) \pi \bar{\tau}_{2i-1}^{2s} \left(1 - 4(2s)(2s-1) \lambda_{2i-1}^n\right) + \frac{\bar{c}_1^{-2i-1} \pi}{(2s)}$$

Справедливою є формула

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} T_{2s-2}(x_2) dx_2 &= \frac{T_{2s}(x)}{4(2s-1)(2s)} - \frac{T_{2s-2}(x)}{2(2s-1)(2s-3)} + \\ &+ \frac{T_{2s-4}(x)}{4(2s-3)(2s-4)} - \frac{T_1(x)}{(2s-3)(2s-1)} - \frac{1}{(2s-4)(2s)}. \end{aligned} \quad (\text{A14.1})$$

Знайдемо другу похідну по x від обох частин рівності (A14.1) і дістанемо

$$T_{2s-2}''(x) = \frac{T_{2s}''(x)}{4(2s-1)(2s)} - \frac{T_{2s-2}''(x)}{2(2s-1)(2s-3)} + \frac{T_{2s-4}''(x)}{4(2s-3)(2s-4)}. \quad (\text{A14.2})$$

Нехай $T_{2s-4}(x) = \sum_{i=1}^s q_{2i}^{2s-4} \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \frac{T_{n+1}'(x)}{(2s+1)^2}$, де q_{2i}^{2s-4} - невідомі

коефіцієнти, $i = \overline{1, s}$. Тоді, враховуючи формули (A13.2) та (A13.31), дістанемо

$$T_{2s-4}''(x) = \sum_{i=1}^s q_{2i}^{2s-4} \frac{-\frac{1}{\lambda_{2i-1}^{2s}} V_{2i}^{2s}(x) + \frac{\bar{c}_1^{2s}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} T_{2s+1}'(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \frac{1}{(2s+1)^2} \left(\frac{(2s+1)^2}{2} \pi \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \frac{1}{15} (2s-1)(2s)(2s+2)(2s+3) T_{2s+1}'(x) \right). \quad (\text{A14.3})$$

Обидві частини рівності (A14.3) помножимо на $\bar{V}_{2i}^{2s}(x)$ та зінтегруємо за

змінною x з вагою $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в межах від $x=-1$ до $x=1$, і дістанемо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-4}''(x) \bar{V}_{2i}^{2s}(x) dx = -\frac{q_{2i}^{2s-4}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_1^{2i-1}}{2 \lambda_{2i-1}^{2s}}. \quad (\text{A14.4})$$

По аналогії до формули (A14.4) запишемо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s}''(x) \bar{V}_{2i}^{2s}(x) dx = -\frac{q_{2i}^{2s}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_1^{2i-1}}{2 \lambda_{2i-1}^{2s}}, \quad (\text{A14.5})$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-2}''(x) \bar{V}_{2i}^{2s}(x) dx = -\frac{q_{2i}^{2s-2}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_1^{2i-1}}{2 \lambda_{2i-1}^{2s}}. \quad (\text{A14.6})$$

З рівності (A14.2) з урахуванням формул (A14.4)-(A14.6) дістанемо рівняння для знаходження невідомих коефіцієнтів q_{2i}^{2s-4} , $i = \overline{1, s}$ розкладу многочлена

$T_{2s-4}(x)$ в ряд за функціями $V_{2i}^{2s}(x)$

$$q_{2i}^{2s-2} = \frac{1}{4(2s-1)(2s)} \left(-\frac{q_{2i}^{2s}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_1^{2i-1}}{2 \lambda_{2i-1}^{2s}} \right) - \frac{1}{2(2s-1)(2s-3)} \left(-\frac{q_{2i}^{2s-2}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_1^{2i-1}}{2 \lambda_{2i-1}^{2s}} \right) + \\ + \frac{1}{4(2s-3)(2s-4)} \left(-\frac{q_{2i}^{2s-4}}{\lambda_{2i-1}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_1^{2i-1}}{2 \lambda_{2i-1}^{2s}} \right),$$

або

$$q_{2i}^{2s-4} = 2 \frac{(2s-4)}{(2s-1)} \left(1 - 2(2s-1)(2s-3) \lambda_{2i-1}^{2s} \right) q_{2i}^{2s-2} -$$

$$-\frac{(2s-4)(2s-3)}{(2s-1)(2s)}q_{2i}^{2s} + \frac{6\pi\bar{c}_1^{-2i-1}}{(2s)(2s-1)}. \quad (\text{A14.7})$$

Аналогічно формулі (A14.7) знаходимо

$$q_{2i}^{2s-6} = 2\frac{(2s-6)}{(2s-3)}\left(1-2(2s-3)(2s-5)\lambda_{2i-1}^{2s}\right)q_{2i}^{2s-4} - \\ -\frac{(2s-6)(2s-5)}{(2s-3)(2s-2)}q_{2i}^{2s-2} + \frac{6\pi\bar{c}_1^{-2i-1}}{(2s-2)(2s-3)}, \quad (\text{A14.8})$$

де коефіцієнти q_{2i}^{2s-6} , $i = \overline{1, s}$ коефіцієнти розкладу многочлена $T_{2s-6}(x)$ в ряд за функціями $V_{2i}^{2s}(x)$, $i = \overline{1, s}$.

$$\text{Отже, якщо } T_{2s-2j}(x) = \sum_{i=1}^s q_{2i}^{2s-2j} \frac{V_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s}\sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \frac{T'_{2s+1}(x)}{(2s+1)^2}, \quad j = 2, \dots, s, \text{ то}$$

коефіцієнти q_{2i}^{2s-2j} знаходяться за рекурентною формулою

$$q_{2i}^{2s-2j} = 2\frac{(2s-2j)}{(2s-2j+3)}\left(1-2(2s-2j+3)(2s-2j+1)\lambda_{2i-1}^{2s}\right)q_{2i}^{2s-2j+2} - \\ -\frac{(2s-2j)(2s-2j+1)}{(2s-2j+3)(2s-2j+4)}q_{2i}^{2s-2j+4} + \frac{6\pi\bar{c}_1^{-2i-1}}{(2s-2j+4)(2s-2j+3)}, \quad j = 2, \dots, s. \quad (\text{A14.9})$$

При $j = s$ дістанемо $q_{2i}^0 = \bar{c}_1^{-2i-1} \frac{\pi}{2}$. Знайдемо розклад $\frac{d^3 T_{n+2}(x)}{dx^3}$ по

многочленах $V_{2i-1}^{2s+1}(x)$. Припустимо, що

$$\frac{d^3 T_{n+2}(x)}{dx^3} = \sum_{i=1}^s \gamma_{2i-1}^{2s} \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i}^{2s}\sigma_{2i}^{2s}\right)} + \gamma_{2s+1}^{2s} T'_{n+2}(x). \quad (\text{A14.10})$$

У формулі (A14.10) знайдемо невідомі коефіцієнти γ_{2i-1}^{2s} , $i = \overline{1, s+1}$.

Оскільки,

$$\int_{-1}^x T_{2s}(x) dx = \frac{T_{2s+1}(x)}{2(2s+1)} - \frac{T_{2s-1}(x)}{2(2s-1)} - \frac{1}{(2s-1)(2s+1)}. \quad (\text{A14.11})$$

Візьмемо другу похідну по x від обох частин рівності (A14.11) і дістанемо

$$T'_{2s}(x) = \frac{T''_{2s+1}(x)}{2(2s+1)} - \frac{T''_{2s-1}(x)}{2(2s-1)}. \quad (\text{A14.12})$$

З формул (A13.11) та (A13.20) з урахуванням квазіспектрального диференціального рівняння для непарних функцій

$$\frac{d^2 V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda_{2i}^n} V_{2i-1}^{2s+1}(x) + \frac{\tau_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n} \frac{dT_{n+2}(x)}{dx} \quad (\text{A14.13})$$

та (A14.10) дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{T''_{2s+1}(x)}{2(2s+1)} &= \frac{1}{2(2s+1)} \left((2s+1) \pi \sum_{i=1}^s -\bar{\tau}_{2i}^{2s} \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s})} + \frac{T'_{2s+2}(x)}{(2s+2)^2} \right)'' = \\ &= \frac{1}{2(2s+1)} \left((2s+1) \pi \sum_{i=1}^s -\bar{\tau}_{2i}^{2s} \frac{-\frac{1}{\lambda_{2i}^{2s}} V_{2i-1}^{2s+1}(x) + \frac{\tau_{2i}^{2s}}{\lambda_{2i}^{2s}} T'_{2s+2}(x)}{(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2s+2)^2} \left(\sum_{i=1}^s \gamma_{2i-1}^{2s} \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s})} + \gamma_{2s+1}^{2s} T'_{n+2}(x) \right) \right), \quad (\text{A14.14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T''_{2s-1}(x)}{2(2s-1)} &= \frac{1}{2(2s-1)} \left((2s-1) \pi \sum_{i=1}^s \left[-\bar{\tau}_{2i}^n (1 - 4(2s)(2s+1) \lambda_{2i}^n) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\bar{c}_2^{2i}}{4(2s-1)(2s+1)} \right] \frac{-\frac{1}{\lambda_{2i}^{2s}} V_{2i-1}^{2s+1}(x) + \frac{\tau_{2i}^{2s}}{\lambda_{2i}^{2s}} T'_{2s+2}(x)}{(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2s+2)^2} \left(\sum_{i=1}^s \gamma_{2i-1}^{2s} \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s})} + \gamma_{2s+1}^{2s} T'_{n+2}(x) \right) \right). \quad (\text{A14.15}) \end{aligned}$$

Отже, з формул (A14.14) та (A14.15) дістанемо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) \frac{T''_{2s+1}(x)}{2(2s+1)} \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = \frac{\pi}{2} \frac{\bar{\tau}_{2i}^{2s}}{\lambda_{2i}^{2s}} + \frac{\gamma_{2i-1}^{2s}}{2(2s+1)(2s+2)^2}, \quad (\text{A14.16})$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) \frac{T_{2s-1}''(x)}{2(2s-1)} \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = \frac{\pi \bar{c}_{2i}^{2s}}{2 \lambda_{2i}^{2s}} - 2(2s)(2s+1) \pi \bar{c}_{2i}^{2s} -$$

$$-\frac{\bar{c}_2^{2i} \pi}{8(2s-1)(2s+1) \lambda_{2i}^{2s}} + \frac{\gamma_{2i-1}^{2s}}{2(2s-1)(2s+2)^2}. \quad (\text{A14.17})$$

Формули (A14.16) та (A14.17) – це коефіцієнти розкладу першого та другого доданків відповідно правої частини рівняння (A14.12) в ряд по функціях $V_{2i-1}^{2s+1}(x)$, $i=1, \dots, s$. Знайдемо коефіцієнти розкладу лівої частини рівняння (A14.12) в ряд по функціях $V_{2i-1}^{2s+1}(x)$, $i=1, \dots, s$. Оскільки,

справедливою є рівність $\int_{-1}^x T_{2s+1}(x) dx = \frac{T_{2s+2}(x)}{2(2s+2)} - \frac{T_{2s}(x)}{2(2s)} + \frac{1}{(2s)(2s+2)}$, то

справедливою буде рівність $T_{2s+1}(x) = \frac{T'_{2s+2}(x)}{2(2s+2)} - \frac{T'_{2s}(x)}{2(2s)}$. З останнього рівняння,

з врахуванням (A13.11) дістаємо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s+1}(x) \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = -\frac{1}{2(2s)} \int_{-1}^1 \rho(x) T'_{2s}(x) \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) dx$$

або

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T'_{2s}(x) \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = 2(2s)(2s+1) \pi \bar{c}_{2i}^{2s}. \quad (\text{A14.18})$$

Отже, з рівняння (A14.12) з врахуванням (A14.16)-(A14.18) знаходимо невідомі коефіцієнти (A14.10)

$$\gamma_{2i-1}^{2s} = (2s+2)^2 \frac{\bar{c}_2^{2i} \pi}{\lambda_{2i}^{2s} 8}, \quad i=1, \dots, s. \quad (\text{A14.19})$$

Коефіцієнт γ_{2s+1}^{2s} знаходимо з рівняння (A14.10), підставивши в нього $x=1$, і дістанемо

$$\gamma_{2s+1}^{2s} = \frac{1}{15} (2s)(2s+1)(2s+3)(2s+4). \quad (\text{A14.20})$$

Отримані значення коефіцієнтів (A14.19) та (A14.20) підставимо в (A14.10) і дістанемо шуканий розклад

$$T_{2s+2}'''(x) = \frac{(2s+2)^2}{8} \pi \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_2^{-2i}}{\lambda_{2i}^{2s}} \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s})} +$$

$$+ \frac{1}{15} (2s)(2s+1)(2s+3)(2s+4) T_{2s+2}'(x). \quad (\text{A14.21})$$

А15. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу непарних многочленів

Чебишева в ряд за функціями $V_{2i-1}^{2s+1}(x)$.

Введемо позначення $q_{2i-1}^{2s+1} = \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s+1}(x) \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = -(2s+1) \pi \bar{\tau}_{2i}^{2s}$,

згідно формули (A13.11). Аналогічно, згідно формули (A13.20), маємо

$$q_{2i-1}^{2s-1} = \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-1}(x) \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) dx =$$

$$= -(2s-1) \pi \bar{\tau}_{2i}^{2s} \left(1 - 4(2s)(2s+1) \lambda_{2i}^n \right) + \frac{\bar{c}_2^{-2i} \pi}{4(2s+1)}.$$

Справедливою є формула

$$\int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} T_{2s-1}(x_2) dx_2 = \frac{T_{2s+1}(x)}{4(2s)(2s+1)} - \frac{T_{2s-1}(x)}{2(2s-2)(2s)} +$$

$$+ \frac{T_{2s-3}(x)}{4(2s-2)(2s-3)} + \frac{T_1(x)}{(2s-2)(2s)} + \frac{1}{(2s-3)(2s+1)}. \quad (\text{A15.1})$$

Знайдемо другу похідну по x від обох частин рівності (A15.1) і дістанемо

$$T_{2s-1}''(x) = \frac{T_{2s+1}''(x)}{4(2s)(2s+1)} - \frac{T_{2s-1}''(x)}{2(2s-2)(2s)} + \frac{T_{2s-3}''(x)}{4(2s-2)(2s-3)}. \quad (\text{A15.2})$$

Нехай $T_{2s-3}(x) = \sum_{i=1}^s q_{2i-1}^{2s-3} \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s})} + \frac{T_{n+2}'(x)}{(2s+2)^2}$, де q_{2i-1}^{2s-3} - невідомі

коефіцієнти, $i = \overline{1, s}$. Тоді, враховуючи формули (A14.13) та (A14.21), дістанемо

$$T_{2s-3}''(x) = \sum_{i=1}^s q_{2i-1}^{2s-3} \frac{-\frac{1}{\lambda_{2i}^{2s}} V_{2i-1}^{2s+1}(x) + \frac{\tau_{2i}^{2s}}{\lambda_{2i}^{2s}} T'_{2s+2}(x)}{\left(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s}\right)} + \frac{1}{(2s+2)^2} \times$$

$$\times \left(\frac{(2s+2)^2}{8} \pi \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_2^{-2i}}{\lambda_{2i}^{2s}} \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s}\right)} + \frac{1}{15} (2s)(2s+1)(2s+3)(2s+4) T'_{2s+2}(x) \right). \quad (\text{A15.3})$$

Обидві частини рівності (A15.3) помножимо на $\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в межах від $x = -1$ до $x = 1$, і дістанемо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-3}''(x) \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = -\frac{q_{2i-1}^{2s-3}}{\lambda_{2i}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_2^{-2i}}{8 \lambda_{2i}^{2s}}. \quad (\text{A15.4})$$

По аналогії до формули (A15.4) запишемо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s+1}''(x) \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = -\frac{q_{2i-1}^{2s+1}}{\lambda_{2i}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_2^{-2i}}{8 \lambda_{2i}^{2s}}, \quad (\text{A15.5})$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-1}''(x) \bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = -\frac{q_{2i-1}^{2s-1}}{\lambda_{2i}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_2^{-2i}}{8 \lambda_{2i}^{2s}}. \quad (\text{A15.6})$$

З рівності (A15.2) з урахуванням формул (A15.4)-(A15.6) дістанемо рівняння для знаходження невідомих коефіцієнтів q_{2i-1}^{2s-3} , $i = \overline{1, s}$ розкладу многочлена $T_{2s-3}(x)$ в ряд за функціями $V_{2i-1}^{2s+1}(x)$

$$q_{2i-1}^{2s-1} = \frac{1}{4(2s)(2s+1)} \left(-\frac{q_{2i-1}^{2s+1}}{\lambda_{2i}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_2^{-2i}}{8 \lambda_{2i}^{2s}} \right) - \frac{1}{2(2s-2)(2s)} \left(-\frac{q_{2i-1}^{2s-1}}{\lambda_{2i}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_2^{-2i}}{8 \lambda_{2i}^{2s}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{4(2s-2)(2s-3)} \left(-\frac{q_{2i-1}^{2s-3}}{\lambda_{2i}^{2s}} + \frac{\pi \bar{c}_2^{-2i}}{8 \lambda_{2i}^{2s}} \right),$$

або

$$q_{2i-1}^{2s-3} = 2 \frac{(2s-3)}{(2s)} \left(1 - 2(2s)(2s-2) \lambda_{2i}^{2s} \right) q_{2i-1}^{2s-1} -$$

$$-\frac{(2s-2)(2s-3)}{(2s)(2s+1)}q_{2i-1}^{2s+1} + \frac{3\pi\bar{c}_2^{2i}}{2(2s)(2s+1)}. \quad (\text{A15.7})$$

Аналогічно формулі (A15.7) знаходимо

$$q_{2i-1}^{2s-5} = 2\frac{(2s-5)}{(2s-2)}\left(1 - 2(2s-2)(2s-4)\lambda_{2i}^{2s}\right)q_{2i-1}^{2s-3} -$$

$$-\frac{(2s-4)(2s-5)}{(2s-2)(2s-1)}q_{2i-1}^{2s-1} + \frac{3\pi\bar{c}_2^{2i}}{2(2s-2)(2s-1)}, \quad (\text{A15.8})$$

де коефіцієнти q_{2i-1}^{2s-5} , $i = \overline{1, s}$ коефіцієнти розкладу многочлена $T_{2s-5}(x)$ в ряд за функціями $V_{2i-1}^{2s+1}(x)$, $i = \overline{1, s}$.

$$\text{Отже, якщо } T_{2s-2j+1}(x) = \sum_{i=1}^s q_{2i-1}^{2s-2j+1} \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\left(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s}\right)} + \frac{T'_{2s+2}(x)}{(2s+2)^2}, \quad j = 2, \dots, s, \text{ то}$$

коефіцієнти $q_{2i-1}^{2s+1-2j}$ знаходяться за рекурентною формулою

$$q_{2i-1}^{2s+1-2j} = 2\frac{(2s+1-2j)}{(2s+4-2j)}\left(1 - 2(2s+4-2j)(2s+2-2j)\lambda_{2i}^{2s}\right)q_{2i-1}^{2s+3-2j} -$$

$$-\frac{(2s+2-2j)(2s+1-2j)}{(2s+4-2j)(2s+5-2j)}q_{2i-1}^{2s+5-2j} + \frac{3\pi\bar{c}_2^{2i}}{2(2s+4-2j)(2s+5-2j)}. \quad (\text{A15.9})$$

A16. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів

Чебишева в ряд за функціями $\bar{V}_{2i}^{2s}(x)$.

$$\text{Введемо позначення } \bar{q}_{2i}^{2s} = \int_{-1}^1 \rho(x)T_{2s}(x)V_{2i}^{2s}(x)dx = (2s+1)\pi\tau_{2i-1}^{2s},$$

згідно формули (A13.5). Аналогічно, згідно формули (A13.15), маємо

$$\bar{q}_{2i}^{2s-2} = \int_{-1}^1 \rho(x)T_{2s-2}(x)V_{2i}^{2s}(x)dx = (2s+1)\pi\tau_{2i-1}^{2s}\left(1 - 4(2s)(2s-1)\lambda_{2i-1}^n\right).$$

Візьмемо другу похідну по x від обох частин рівняння (A13.12) і дістанемо

$$\frac{d^6 V_{2i}^{2s}(x)}{dx^6} = -\frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} \left(-\frac{1}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{d^2 V_{2i}^{2s}(x)}{dx^2} + \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{d^3 T_{n+1}(x)}{dx^3} \right) + \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{d^5 T_{n+1}(x)}{dx^5}.$$

Враховуючи (A13.2) останню рівність запишемо

$$\begin{aligned} \frac{d^6 V_{2i}^{2s}(x)}{dx^6} &= -\frac{V_{2i}^{2s}(x)}{(\lambda_{2i-1}^n)^3} + \frac{\tau_{2i-1}^n}{(\lambda_{2i-1}^n)^3} \frac{dT_{n+1}(x)}{dx} - \\ &- \frac{\tau_{2i-1}^n}{(\lambda_{2i-1}^n)^2} \frac{d^3 T_{n+1}(x)}{dx^3} + \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{d^5 T_{n+1}(x)}{dx^5}. \end{aligned} \quad (\text{A16.1})$$

Домножимо обидві частини рівності (A16.1) на поліном Чебишева $T_{2s-4}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-4}(x) \frac{d^6 V_{2i}^{2s}(x)}{dx^6} dx &= -\frac{1}{(\lambda_{2i-1}^n)^3} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-4}(x) V_{2i}^{2s}(x) dx + \\ &+ \frac{\tau_{2i-1}^n}{(\lambda_{2i-1}^n)^3} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-4}(x) T'_{2s+1}(x) dx - \frac{\tau_{2i-1}^n}{(\lambda_{2i-1}^n)^2} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-4}(x) T'''_{2s+1}(x) dx + \\ &+ \frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-4}(x) \frac{d^5}{dx^5} T_{2s+1}(x) dx. \end{aligned}$$

Степінь парних поліномів $\frac{d^6}{dx^6} V_{2i}^{2s}(x)$ не перевищує $2s-6$, а тому, внаслідок ортогональності поліномів Чебишева інтеграл у лівій частині дорівнюватиме нулеві.

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-4}(x) T'_{2s+1}(x) dx = (2s+1)\pi. \quad (\text{A16.2})$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-4}(x) \frac{d^3}{dx^3} T_{2s+1}(x) dx = 12(2s+1)(2s-2)(2s-1)\pi. \quad (\text{A16.3})$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-4}(x) \frac{d^5}{dx^5} T_{2s+1}(x) dx = 16(2s+1)(2s)(2s-1)(2s-2)(2s-3)\pi. \quad (\text{A16.4})$$

Враховуючи (A16.2)-(A16.4) дістанемо

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-4}(x) V_{2i}^{2s}(x) dx = \tau_{2i-1}^n (2s+1)\pi - \lambda_{2i-1}^n \tau_{2i-1}^n 12(2s+1)(2s-2)(2s-1)\pi +$$

$$+ \left(\lambda_{2i-1}^n \right)^2 \tau_{2i-1}^n 16(2s+1)(2s)(2s-1)(2s-2)(2s-3)\pi.$$

Останню рівність подамо у вигляді

$$\bar{q}_{2i}^{2s-4} = \left(2 \frac{(2s-2)}{(2s-1)} - 4(2s-2)(2s-3)\lambda_{2i-1}^{2s} \right) \bar{q}_{2i}^{2s-2} + \left(1 - 2 \frac{(2s-2)}{(2s-1)} \right) \bar{q}_{2i}^{2s}.$$

Отже, якщо $T_{2s-2j}(x) = \sum_{i=1}^s \bar{q}_{2i}^{2s-2j} \frac{\bar{V}_{2i}^{2s}(x)}{\left(-\lambda_{2i-1}^{2s} \sigma_{2i-1}^{2s}\right)} + \frac{T'_{2s+1}(x)}{(2s+1)^2}$, $j = 2, \dots, s$, то

коефіцієнти \bar{q}_{2i}^{2s-2j} знаходяться за рекурентною формулою

$$\bar{q}_{2i}^{2s-2j} = \left(2 \frac{(2s-2j+2)}{(2s-2j+3)} - 4(2s-2j+2)(2s-2j+1)\lambda_{2i-1}^{2s} \right) \bar{q}_{2i}^{2s-2j+2} +$$

$$+ \left(1 - 2 \frac{(2s-2j+2)}{(2s-2j+3)} \right) \bar{q}_{2i}^{2s-2j+4}, \quad j = 2, \dots, s. \quad (\text{A16.5})$$

A17. Рекурентна формула коефіцієнтів розкладу непарних многочленів

Чебишева в ряд за функціями $\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)$.

Введемо позначення $\bar{q}_{2i-1}^{2s+1} = \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s+1}(x) V_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = (2s+2)\pi \tau_{2i}^{2s}$,

згідно формули (A13.10). Аналогічно, згідно формули (A13.19), маємо

$$\bar{q}_{2i-1}^{2s-1} = \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-1}(x) V_{2i-1}^{2s+1}(x) dx = (2s+2)\pi \tau_{2i}^{2s} \left(1 - 4(2s)(2s+1)\lambda_{2i}^n \right).$$

Аналогічно формулі (A16.1) з рівності (A14.13) дістанемо

$$\frac{d^6 V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{dx^6} = - \frac{V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{\left(\lambda_{2i}^n\right)^3} + \frac{\tau_{2i}^n}{\left(\lambda_{2i}^n\right)^3} \frac{dT_{n+2}(x)}{dx} -$$

$$-\frac{\tau_{2i}^n}{(\lambda_{2i}^n)^2} \frac{d^3 T_{n+2}(x)}{dx^3} + \frac{\tau_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n} \frac{d^5 T_{n+2}(x)}{dx^5}. \quad (\text{A17.1})$$

Домножимо обидві частини рівності (A17.1) на поліном Чебишева $T_{2s-3}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-3}(x) \frac{d^6 V_{2i-1}^{2s+1}(x)}{dx^6} dx &= -\frac{1}{(\lambda_{2i-1}^n)^3} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-3}(x) V_{2i-1}^{2s+1}(x) dx + \\ &+ \frac{\tau_{2i}^n}{(\lambda_{2i}^n)^3} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-3}(x) T'_{2s+2}(x) dx - \frac{\tau_{2i}^n}{(\lambda_{2i}^n)^2} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-3}(x) T'''_{2s+2}(x) dx + \\ &+ \frac{\tau_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-3}(x) \frac{d^5}{dx^5} T_{2s+2}(x) dx. \end{aligned}$$

Степінь парних поліномів $\frac{d^6}{dx^6} V_{2i-1}^{2s+1}(x)$ не перевищує $2s-5$, а тому, внаслідок ортогональності поліномів Чебишева інтеграл у лівій частині дорівнюватиме нулеві.

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-3}(x) T'_{2s+2}(x) dx = (2s+2)\pi. \quad (\text{A17.2})$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-3}(x) \frac{d^3}{dx^3} T_{2s+2}(x) dx = 12(2s+2)(2s-1)(2s)\pi. \quad (\text{A17.3})$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-3}(x) \frac{d^5}{dx^5} T_{2s+2}(x) dx = 16(2s+2)(2s+1)(2s)(2s-1)(2s-2)\pi. \quad (\text{A17.4})$$

Враховуючи (A17.2)-(A17.4) дістанемо

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \rho(x) T_{2s-3}(x) V_{2i-1}^{2s+1}(x) dx &= \tau_{2i}^n (2s+2)\pi - \lambda_{2i}^n \tau_{2i}^n 12(2s+2)(2s-1)(2s)\pi + \\ &+ (\lambda_{2i}^n)^2 \tau_{2i}^n 16(2s+2)(2s+1)(2s)(2s-1)(2s-2)\pi. \end{aligned}$$

Останню рівність подамо у вигляді

$$\bar{q}_{2i-1}^{-2s-3} = \left(2 \frac{(2s-1)}{(2s)} - 4(2s-1)(2s-2) \lambda_{2i-1}^{2s} \right) \bar{q}_{2i-1}^{-2s-1} + \left(1 - 2 \frac{(2s-1)}{(2s)} \right) \bar{q}_{2i-1}^{-2s+1}.$$

Отже, якщо $T_{2s-2j+1}(x) = \sum_{i=1}^s \bar{q}_{2i-1}^{-2s-2j+1} \frac{\bar{V}_{2i-1}^{2s+1}(x)}{(-\lambda_{2i}^{2s} \sigma_{2i}^{2s})} + \frac{T'_{2s+2}(x)}{(2s+2)^2}$, $j = 2, \dots, s$, то

коефіцієнти $\bar{q}_{2i-1}^{-2s+1-2j}$ знаходяться за рекурентною формулою

$$\begin{aligned} \bar{q}_{2i-1}^{-2s+1-2j} = & \left(2 \frac{(2s+3-2j)}{(2s+4-2j)} - 4(2s+3-2j)(2s+2-2j) \lambda_{2i}^{2s} \right) \bar{q}_{2i-1}^{-2s+3-2j} + \\ & + \left(1 - 2 \frac{(2s+3-2j)}{(2s+4-2j)} \right) \bar{q}_{2i-1}^{-2s+5-2j}, \quad j = 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (\text{A17.5})$$

A18. Представлення поліномів Чебишева через квазіортогональні функції.

Зауважимо, що між многочленами Чебишева першого і другого роду справедливими є співвідношення

$$\int_{-1}^x \frac{T_n(x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 = -\sqrt{1-x^2} \frac{1}{n} U_{n-1}^{\text{Чеб}}(x), \quad (\text{A18.1})$$

$$U_n^{\text{Чеб}}(x) = \frac{T_{n+2}(x) - T_n(x)}{2(x^2 - 1)}, \quad (\text{A18.2})$$

$$T'_{2s+1}(x) = (2s+1)U_{2s}^{\text{Чеб}}(x), \quad T'_{2s+2}(x) = (2s+2)U_{2s+1}^{\text{Чеб}}(x), \quad (\text{A18.3})$$

$$2T_{2s}(x) = U_{2s}^{\text{Чеб}}(x) - U_{2s-2}^{\text{Чеб}}(x), \quad 2T_{2s+1}(x) = U_{2s+1}^{\text{Чеб}}(x) - U_{2s-1}^{\text{Чеб}}(x). \quad (\text{A18.4})$$

Запишемо спряжене квазіспектральне інтегральне рівняння для парних

поліномів, які представимо у вигляді $\bar{U}_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j}^{2i} T_{2j}(x)$.

$$\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \frac{\sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j}^{2i} T_{2j}(x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 =$$

$$= -\lambda_{2i}^{2s} \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j}^{2i} T_{2j}(x) + \frac{\bar{c}_2^{2i}}{8} \left(T_0(x) - \sum_{j=1}^s \frac{2T_{2j}(x)}{(2j+1)(2j-1)} \right) + \bar{\tau}_{2i}^n T_{n+2}(x). \quad (\text{A18.5})$$

Скориставшись формулою (A18.1), ліву частину рівняння (A18.5) запишемо

$$\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \frac{\sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j}^{2i} T_{2j}(x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \sqrt{1-x_1^2} \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{2j}^{2i}}{2j} U_{2j-1}^{\text{Чеб}}(x_1) dx_1. \quad (\text{A18.6})$$

У правій частині формули (A18.6) перейдемо від поліномів Чебишева другого роду до поліномів Чебишева першого роду, застосовуючи формулу (A18.2) отримаємо

$$\begin{aligned} & -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \sqrt{1-x_1^2} \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{2j}^{2i}}{2j} U_{2j-1}(x_1) dx_1 = \\ & = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{2j}^{2i}}{2j} (T_{2j+1}(x_1) - T_{2j-1}(x_1)) dx_1. \end{aligned} \quad (\text{A18.7})$$

Для правої частини формули (A18.7) знову застосуємо формулу (A18.1) і дістанемо

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{2j}^{2i}}{2j} (T_{2j+1}(x_1) - T_{2j-1}(x_1)) dx_1 = \\ & = \frac{(x^2-1)}{2} \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{2j}^{2i}}{2j} \left(\frac{U_{2j}^{\text{Чеб}}(x)}{2j+1} - \frac{U_{2j-2}^{\text{Чеб}}(x)}{2j-1} \right). \end{aligned} \quad (\text{A18.8})$$

До правої частини останньої рівності знову ж застосуємо формулу (A18.2) та запишемо (A18.5) у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{2j}^{2i}}{2j} \left(\frac{T_{2j+2}(x)}{2j+1} - \frac{4j}{(2j-1)(2j+1)} T_{2j}(x) + \frac{T_{2j-2}(x)}{2j-1} \right) = \\ & = -\lambda_{2i}^{2s} \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j}^{2i} T_{2j}(x) + \frac{\bar{c}_2^{2i}}{8} \left(T_0(x) - \sum_{j=1}^s \frac{2T_{2j}(x)}{(2j+1)(2j-1)} \right) + \bar{\tau}_{2i}^n T_{n+2}(x). \end{aligned} \quad (\text{A18.9})$$

Домножимо обидві частини рівняння (A18.9) на поліном Чебишева $T_{2s+2}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$. Отримаємо

$$\bar{c}_{2s}^{2i} = 4(2s)(2s+1)\bar{\tau}_{2i}^n. \quad (\text{A18.10})$$

Отже,

$$\int_{-1}^1 \rho(x) \bar{U}_{2i}^{2s}(x) T_{2s}(x) dx = \bar{c}_{2s}^{2i} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A18.11})$$

Враховуючи формули (A18.10) та (A18.11) запишемо

$$T_{2s}(x) + \frac{1}{(2s-1)(2s+1)} = 2(2s)(2s+1)\pi \sum_{i=1}^s \bar{\tau}_{2i}^n \frac{U_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n}. \quad (\text{A18.12})$$

Візьмемо похідну по x від обох частин рівності (A13.11) і, враховуючи формулу (A18.3), дістанемо

$$(2s+1)U_{2s}^{Чеб}(x) = (2s+1)\pi \sum_{i=1}^s -\bar{\tau}_{2i}^n \frac{U_{2i}^{2s}(x)}{(-\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n)} + \frac{1}{(2s+2)^2} \frac{d^2}{dx^2} T_{2s+2}(x), \quad (\text{A18.13})$$

де $U_{2s}^{Чеб}(x)$ - многочлен Чебишева другого роду степеня $2s$.

Рівність (A18.13) запишемо у вигляді

$$U_{2s}^{Чеб}(x) = \sum_{i=1}^s \frac{\pi \bar{\tau}_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n} \frac{U_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n} + \frac{1}{(2s+1)(2s+2)^2} \frac{d^2}{dx^2} T_{2s+2}(x), \quad (\text{A18.14})$$

Візьмемо похідну по x від обох частин рівності (A13.20) і, враховуючи формулу (A18.3), дістанемо

$$(2s-1)U_{2s-2}^{Чеб}(x) = (2s-1)\pi \sum_{i=1}^s \left[-\bar{\tau}_{2i}^n \left(1 - 4(2s)(2s+1)\lambda_{2i}^n \right) + \frac{\bar{c}_2^{2i}}{4(2s-1)(2s+1)} \right] \times \\ \times \frac{U_{2i}^{2s}(x)}{(-\lambda_{2i}^n \sigma_{2i}^n)} + \frac{1}{(2s+2)^2} \frac{d^2}{dx^2} T_{2s+2}(x). \quad (\text{A18.15})$$

Рівність (A18.15) запишемо у вигляді

$$U_{2s-2}^{Чеб}(x) = \sum_{i=1}^s \left[\frac{\pi \bar{\tau}_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n} - \pi \bar{\tau}_{2i}^n 4(2s)(2s+1) - \frac{\bar{c}_2^{2i} \pi}{4(2s-1)(2s+1)\lambda_{2i}^n} \right] \times$$

$$\times \frac{U_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n} + \frac{1}{(2s-1)(2s+2)^2} \frac{d^2}{dx^2} T_{2s+2}(x). \quad (\text{A18.16})$$

Від формули (A18.14) відніmemo рівність (A18.16), та згідно з (A18.4) дістанемо

$$T_{2s}(x) = \sum_{i=1}^s \left[2(2s)(2s+1)\pi \bar{\tau}_{2i}^n + \frac{\bar{c}_2^{2i} \pi}{8(2s-1)(2s+1)\lambda_{2i}^n} \right] \frac{U_{2i}^{2s}}{\sigma_{2i}^n} - \frac{T_{2s+2}''(x)}{(2s+2)^2(2s-1)(2s+1)}. \quad (\text{A18.17})$$

Прирівняємо праві частини рівностей (A18.17) та (A18.12) і дістанемо

$$T_{2s+2}''(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T_{2s+2}''(x) dx = (2s+2)^2 \pi \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_2^{2i}}{8\lambda_{2i}^n} \frac{U_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n}. \quad (\text{A18.18})$$

A19. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів

Чебишева в ряд за функціями $U_{2i}^{2s}(x)$.

Введемо позначення

$$g_{2i}^{2s} = \int_{-1}^1 \rho(x) \bar{U}_{2i}^{2s}(x) T_{2s}(x) dx = 2(2s)(2s+1)\pi \bar{\tau}_{2i}^n, \quad (\text{A19.1})$$

згідно формул (A18.11) та (A18.10). Домножимо обидві частини рівняння

(A18.9) на поліном Чебишева $T_{2s}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$

в межах від $x = -1$ до $x = 1$. Отримаємо

$$-\frac{1}{4} \frac{\bar{c}_2^{2i}}{(2s)(2s-1)(2s+1)} \frac{4s}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \frac{\bar{c}_2^{2i}}{(2s-2)(2s-1)} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = -\lambda_{2i}^{2s} \frac{\bar{c}_2^{2i}}{c_{2s}^{2i}} \frac{\pi}{2} - \frac{\bar{c}_2^{2i}}{4} \frac{1}{(2s+1)(2s-1)} \frac{\pi}{2}$$

або

$$\bar{c}_{2s-2}^{2i} \frac{\pi}{2} = 2 \frac{(2s-2)}{(2s+1)} \left(1 - 2(2s+1)(2s-1)\lambda_{2i}^{2s} \right) \bar{c}_{2s}^{2i} \frac{\pi}{2} - \frac{(2s-2)}{(2s+1)} \bar{c}_2^{2i} \frac{\pi}{2}.$$

Враховуючи (A18.10), останнє рівняння запишемо

$$\bar{c}_{2s-2}^{2i} \frac{\pi}{2} = 2(2s)(2s-2)\bar{\tau}_{2i}^n \left(1 - 2(2s+1)(2s-1)\lambda_{2i}^{2s} \right) \pi - \frac{(2s-2)}{(2s+1)} \bar{c}_2^{2i} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A19.2})$$

Оскільки

$$\int_{-1}^1 \rho(x) \bar{U}_{2i}^{2s}(x) T_{2s-2}(x) dx = \bar{c}_{2s-2}^{2i} \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A19.3})$$

тому

$$\begin{aligned} & T_{2s-2}(x) + \frac{1}{(2s-1)(2s-3)} = \\ & = (2s-2)\pi \sum_{i=1}^s \left[4(2s) \bar{\tau}_{2i}^n \left(1 - 2(2s+1)(2s-1) \lambda_{2i}^{2s} \right) - \frac{\bar{c}_2^{2i}}{2(2s+1)} \right] \frac{U_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n}. \end{aligned}$$

По аналогії до (A19.1), згідно формул (A19.2) та (A19.3) запишемо

$$g_{2i}^{2s-2} = (2s-2)\pi \left[4(2s) \bar{\tau}_{2i}^n \left(1 - 2(2s+1)(2s-1) \lambda_{2i}^{2s} \right) - \frac{\bar{c}_2^{2i}}{2(2s+1)} \right]. \quad (\text{A19.4})$$

Домножимо обидві частини рівняння (A18.9) на поліном Чебишева

$T_{2s-2}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$ в межах від $x = -1$ до $x = 1$.

Отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{\bar{c}_{2s}^{2i}}{(2s)} \frac{1}{(2s-1)} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \frac{\bar{c}_{2s-2}^{2i}}{(2s-2)} \frac{4(s-1)}{(2s-3)(2s-1)} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \frac{\bar{c}_{2s-4}^{2i}}{(2s-4)} \frac{1}{(2s-3)} \frac{\pi}{2} = \\ & = -\lambda_{2i}^{2s} \frac{\bar{c}_{2s-2}^{2i}}{2} \frac{\pi}{4} - \frac{\bar{c}_2^{2i}}{(2s-1)(2s-3)} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{c}_{2s-4}^{2i}}{2} \frac{\pi}{2} = 2 \frac{(2s-4)}{(2s-1)} \left[\left(1 - 2(2s-1)(2s-3) \lambda_{2i}^{2s} \right) \bar{c}_{2s-2}^{2i} \frac{\pi}{2} - \frac{\bar{c}_2^{2i} \pi}{4} \right] - \\ & - \frac{(2s-4)(2s-3)}{(2s)(2s-1)} \bar{c}_{2i}^{2i} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A19.5}) \end{aligned}$$

Із (A19.5) дістанемо

$$\begin{aligned} & g_{2i}^{2s-4} = 2 \frac{(2s-4)}{(2s-1)} \left[\left(1 - 2(2s-1)(2s-3) \lambda_{2i}^{2s} \right) g_{2i}^{2s-2} - \frac{\bar{c}_2^{2i} \pi}{4} \right] - \\ & - \frac{(2s-4)(2s-3)}{(2s)(2s-1)} g_{2i}^{2s}, \quad (\text{A19.6}) \end{aligned}$$

оскільки,

$$\int_{-1}^1 \rho(x) \bar{U}_{2i}^{2s}(x) T_{2s-4}(x) dx = \bar{c}_{2s-4}^{2i} \frac{\pi}{2},$$

Тому $T_{2s-4}(x) + \frac{1}{(2s-3)(2s-5)} = \sum_{i=1}^s g_{2i}^{2s-4} \frac{U_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n}$, де коефіцієнти g_{2i}^{2s-4}

обчислюються згідно формули (A19.6). Отже, якщо

$$T_{2s-2j}(x) + \frac{1}{(2s-2j-1)(2s-2j+1)} = \sum_{i=1}^s g_{2i}^{2s-2j} \frac{U_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n}, \quad j = 2, \dots, s-1,$$

то коефіцієнти g_{2i}^{2s-2j} обчислюються за рекурентною формулою

$$g_{2i}^{2s-2j} = 2 \frac{(2s-2j)}{(2s-2j+3)} \left[\left(1 - 2(2s-2j+3)(2s-2j+1) \lambda_{2i}^{2s} \right) g_{2i}^{2s-2j+2} - \frac{\bar{c}_2^{2i} \pi}{4} \right] - \frac{(2s-2j)(2s-2j+1)}{(2s-2j+4)(2s-2j+3)} g_{2i}^{2s-2j+4}. \quad (\text{A19.7})$$

Запишемо спряжене квазіспектральне інтегральне рівняння для непарних поліномів, які представимо у вигляді $\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x)$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \frac{\sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 = -\lambda_{2i-1}^{2s} \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x) + \\ & + \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{2} \left(\frac{T_1(x)}{2} - \sum_{j=1}^s \frac{T_{2j-1}(x)}{2j(j-1)} - \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{\pi}{2} \sqrt{1-x^2} \right) + \bar{c}_{2i-1}^n T_{n+1}(x). \quad (\text{A19.8}) \end{aligned}$$

Скориставшись формулою (A18.1), ліву частину рівняння (A19.8) запишемо

$$\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \frac{\sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x_2)}{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 = -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \sqrt{1-x_1^2} \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{2j-1}^{2i-1}}{2j-1} U_{2j-2}^{\text{Чеб}}(x_1) dx_1. \quad (\text{A19.9})$$

У правій частині формули (A19.9) перейдемо від поліномів Чебишева другого роду до поліномів Чебишева першого роду, застосовуючи формулу (A18.2) отримаємо

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{1-x^2} \int_{-1}^x \sqrt{1-x_1^2} \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{2j-1}^{-2i-1}}{2j-1} U_{2j-2}^{Чеб}(x_1) dx_1 = \\
& = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{2j-1}^{-2i-1}}{2j-1} (T_{2j}(x_1) - T_{2j-2}(x_1)) dx_1. \quad (A19.10)
\end{aligned}$$

Для правої частини формули (A19.10) знову застосуємо формулу (A18.1) і дістанемо

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{2j-1}^{-2i-1}}{2j-1} (T_{2j}(x_1) - T_{2j-2}(x_1)) dx_1 = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{2} \bar{c}_1^{-2i-1} \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right) + \\
& + \frac{(x^2-1)}{2} \left[\bar{c}_1^{-2i-1} \frac{U_1^{Чеб}(x)}{2} + \sum_{j=2}^s \frac{\bar{c}_{2j-1}^{-2i-1}}{2j-1} \left(\frac{U_{2j-1}^{Чеб}(x)}{2j} - \frac{U_{2j-3}^{Чеб}(x)}{2j-2} \right) \right]. \quad (A19.11)
\end{aligned}$$

До правої частини останньої рівності знову ж застосуємо формулу (A18.2) та запишемо (A19.8) у вигляді

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{c}_1^{-2i-1}}{2} \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{\bar{c}_1^{-2i-1} \pi}{4} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4} \left[\frac{\bar{c}_1^{-2i-1}}{2} (T_3(x) - T_1(x)) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=2}^s \frac{\bar{c}_{2j-1}^{-2i-1}}{2j-1} \left(\frac{T_{2j+1}(x)}{2j} - \frac{2(2j-1)}{(2j)(2j-2)} T_{2j-1}(x) + \frac{T_{2j-3}(x)}{2j-2} \right) \right] = \\
& = -\lambda_{2i-1}^{2s} \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1}^{-2i-1} T_{2j-1}(x) + \frac{\bar{c}_1^{-2i-1}}{2} \times \\
& \times \left(\frac{T_1(x)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^s \frac{T_{2j-1}(x)}{j(j-1)} - \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{\pi}{2} \sqrt{1-x^2} \right) + \bar{\tau}_{2i-1}^n T_{n+1}(x). \quad (A19.12)
\end{aligned}$$

Домножимо обидві частини рівняння (A19.9) на поліном Чебишева $T_{2s+1}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$. Отримаємо

$$\bar{c}_{2s-1}^{-2i-1} = 4(2s)(2s-1) \bar{\tau}_{2i-1}^n. \quad (A19.13)$$

Отже,

$$\int_{-1}^1 \rho(x) \bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) T_{2s-1}(x) dx = \bar{c}_{2s-1}^{-2i-1} \frac{\pi}{2}. \quad (A19.14)$$

Враховуючи формули (A19.13) та (A19.14) запишемо

$$T_{2s-1}(x) = 2(2s)(2s-1)\pi \sum_{i=1}^s \bar{\tau}_{2i-1}^n \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n}. \quad (\text{A19.15})$$

Візьмемо похідну по x від обох частин рівності (A13.9) і, враховуючи формулу (A18.3), дістанемо

$$(2s)U_{2s-1}(x) = (2s)\pi \sum_{i=1}^s -\bar{\tau}_{2i-1}^n \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x)}{(-\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n)} + \frac{1}{(2s+1)^2} \frac{d^2}{dx^2} T_{2s+1}(x), \quad (\text{A19.16})$$

де $U_{2s-1}(x)$ - многочлен Чебишева другого роду степеня $2s-1$.

Рівність (A19.16) запишемо у вигляді

$$U_{2s-1}^{\text{Чеб}}(x) = \sum_{i=1}^s \frac{\pi \bar{\tau}_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n} + \frac{1}{(2s)(2s+1)^2} \frac{d^2}{dx^2} T_{2s+1}(x), \quad (\text{A19.17})$$

Візьмемо похідну по x від обох частин рівності (A13.18) і, враховуючи формулу (A18.3), дістанемо

$$(2s-2)U_{2s-3}^{\text{Чеб}}(x) = (2s-2)\pi \sum_{i=1}^s \left[-\bar{\tau}_{2i-1}^n \left(1 - 4(2s)(2s-1)\lambda_{2i-1}^n \right) + \frac{\bar{c}_1^{-2i-1}}{(2s)(2s-2)} \right] \times \\ \times \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x)}{(-\lambda_{2i-1}^n \sigma_{2i-1}^n)} + \frac{1}{(2s+1)^2} \frac{d^2}{dx^2} T_{2s+1}(x). \quad (\text{A19.18})$$

Рівність (A19.18) запишемо у вигляді

$$U_{2s-3}^{\text{Чеб}}(x) = \sum_{i=1}^s \left[\frac{\pi \bar{\tau}_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} - \pi \bar{\tau}_{2i-1}^n 4(2s)(2s-1) - \frac{\bar{c}_1^{-2i-1} \pi}{(2s)(2s-2)\lambda_{2i-1}^n} \right] \times \\ \times \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n} + \frac{1}{(2s-2)(2s+1)^2} \frac{d^2}{dx^2} T_{2s+1}(x). \quad (\text{A19.19})$$

Від формули (A19.17) віднімемо рівність (A19.19), та згідно з (A18.4) дістанемо

$$T_{2s-1}(x) = \sum_{i=1}^s \left[2(2s)(2s-1)\pi \bar{\tau}_{2i-1}^n + \frac{\bar{c}_1^{-2i-1} \pi}{2(2s)(2s-2)\lambda_{2i-1}^n} \right] \frac{U_{2i-1}^{2s-1}}{\sigma_{2i-1}^n} -$$

$$-\frac{T''_{2s+1}(x)}{(2s+1)^2(2s)(2s-2)}. \quad (\text{A19.20})$$

Прирівняємо праві частини рівностей (A19.20) та (A19.15) і дістанемо

$$T''_{2s+1}(x) = (2s+1)^2 \pi \sum_{i=1}^s \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{2\lambda_{2i-1}^n} \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n}. \quad (\text{A19.21})$$

Твердження 3.3. Для квазіспектральних поліномів, які представлені у вигляді

$$\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x), \text{ параметр } \bar{\tau}_{2i-1}^n \text{ знаходиться за формулою}$$

$$\bar{\tau}_{2i-1}^n = \frac{\bar{c}_{2s-1}^{2i-1}}{4(2s)(2s-1)}.$$

Доведення. Слідує із формули (A19.13).

Твердження доведено.

A20. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу непарних многочленів

Чебишева в ряд за функціями $U_{2i-1}^{2s-1}(x)$.

Введемо позначення

$$g_{2i-1}^{2s-1} = \int_{-1}^1 \rho(x) \bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) T_{2s-1}(x) dx = 2(2s)(2s-1) \pi \bar{\tau}_{2i-1}^n, \quad (\text{A20.1})$$

Згідно формул (A19.14) та (A19.13). Домножимо обидві частини рівняння (A19.12) на поліном Чебишева $T_{2s-1}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою

$\rho(x)$ в межах від $x = -1$ до $x = 1$. Отримаємо

$$-\frac{1}{4} \frac{\bar{c}_{2s-1}^{2i-1}}{(2s-1)} \frac{2(2s-1)}{(2s)(2s-2)} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \frac{\bar{c}_{2s-3}^{2i-1}}{(2s-3)} \frac{1}{(2s-2)} \frac{\pi}{2} = -\lambda_{2i-1}^{2s} \bar{c}_{2s-1}^{2i-1} \frac{\pi}{2} - \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{2} \frac{1}{2s(s-1)} \frac{\pi}{2},$$

або

$$\bar{c}_{2s-3}^{2i-1} \frac{\pi}{2} = 2 \frac{(2s-3)}{(2s)} \left(1 - 2(2s)(2s-2) \lambda_{2i-1}^{2s}\right) \bar{c}_{2s-1}^{2i-1} \frac{\pi}{2} - 2 \frac{(2s-3)}{s} \bar{c}_1^{2i-1} \frac{\pi}{2}.$$

Враховуючи (A19.13), останнє рівняння запишемо

$$\frac{\bar{c}_{2s-3}^{-2i-1} \pi}{2} = 4(2s-1)(2s-3) \left(1 - 2(2s)(2s-2) \lambda_{2i-1}^{2s}\right) \bar{c}_{2i-1}^n \pi - 2 \frac{(2s-3)}{(2s)} \bar{c}_1^{-2i-1} \pi. \quad (\text{A20.2})$$

Оскільки

$$\int_{-1}^1 \rho(x) \bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) T_{2s-3}(x) dx = \bar{c}_{2s-3}^{-2i-1} \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A20.3})$$

тому

$$T_{2s-3}(x) = 2(2s-3) \pi \sum_{i=1}^s \left[2(2s-1) \left(1 - 2(2s)(2s-2) \lambda_{2i-1}^{2s}\right) \bar{c}_{2i-1}^n - \frac{\bar{c}_1^{-2i-1}}{(2s)} \right] \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n}.$$

По аналогії до (A20.1), згідно формул (A20.2) та (A20.3) запишемо

$$g_{2i-1}^{2s-3} = 2(2s-3) \pi \left[2(2s-1) \left(1 - 2(2s)(2s-2) \lambda_{2i-1}^{2s}\right) \bar{c}_{2i-1}^n - \frac{\bar{c}_1^{-2i-1}}{(2s)} \right]. \quad (\text{A20.4})$$

Домножимо обидві частини рівняння (A19.12) на поліном Чебишева $T_{2s-3}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$ в межах від $x = -1$ до $x = 1$.

Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{\bar{c}_{2s-1}^{-2i-1}}{(2s-1)(2s-2)} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \frac{\bar{c}_{2s-3}^{-2i-1}}{(2s-3)(2s-2)(2s-4)} \frac{2(2s-3)}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \frac{\bar{c}_{2s-5}^{-2i-1}}{(2s-5)(2s-4)} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \\ = -\lambda_{2i-1}^{2s} \frac{\bar{c}_{2s-3}^{-2i-1}}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{\bar{c}_1^{-2i-1}}{4} \frac{1}{(s-1)(s-2)} \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{\bar{c}_{2s-5}^{-2i-1} \pi}{2} = 2 \frac{(2s-5)}{(2s-2)} \left[\left(1 - 2(2s-2)(2s-4) \lambda_{2i-1}^{2s}\right) \bar{c}_{2s-3}^{-2i-1} \frac{\pi}{2} - \bar{c}_1^{-2i-1} \pi \right] - \\ - \frac{(2s-5)(2s-4)}{(2s-1)(2s-2)} \bar{c}_{2i-1}^{-2i-1} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A20.5}) \end{aligned}$$

Із (A20.5) дістанемо

$$\begin{aligned} g_{2i-1}^{2s-5} = 2 \frac{(2s-5)}{(2s-2)} \left[\left(1 - 2(2s-2)(2s-4) \lambda_{2i-1}^{2s}\right) g_{2i-1}^{2s-3} - \bar{c}_1^{-2i-1} \pi \right] - \\ - \frac{(2s-5)(2s-4)}{(2s-1)(2s-1)2} g_{2i-1}^{2s-1}, \quad (\text{A20.6}) \end{aligned}$$

оскільки, $\int_{-1}^1 \rho(x) \bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) T_{2s-5}(x) dx = \bar{c}_{2s-5}^{2i-1} \frac{\pi}{2}$, тому

$$T_{2s-5}(x) = \sum_{i=1}^s g_{2i-1}^{2s-5} \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n},$$

де коефіцієнти g_{2i-1}^{2s-5} обчислюються згідно формули (A20.6). Отже, якщо

$$T_{2s-2j-1}(x) = \sum_{i=1}^s g_{2i-1}^{2s-2j-1} \frac{U_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n}, \quad j = 2, \dots, s-1,$$

то коефіцієнти $g_{2i-1}^{2s-2j-1}$ обчислюються за рекурентною формулою

$$g_{2i-1}^{2s-2j-1} = 2 \frac{(2s-2j-1)}{(2s-2j+2)} \left[\left(1 - 2(2s-2j+2)(2s-2j) \lambda_{2i-1}^{2s} \right) g_{2i-1}^{2s-2j+1} - \bar{c}_1^{2i-1} \pi \right] - \frac{(2s-2j-1)(2s-2j)}{(2s-2j+3)(2s-2j+2)} g_{2i-1}^{2s-2j+3}. \quad (\text{A20.7})$$

A21. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу парних многочленів

Чебишева в ряд за функціями $\bar{U}_{2i}^{2s}(x)$.

Запишемо квазіспектральне інтегральне рівняння для парних поліномів,

які представимо у вигляді $U_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^s c_{2j}^{2i} \tilde{T}_{2j}(x)$,

де $\tilde{T}_{2j}(x)$ - модифіковані многочлени Чебишева, які обчислюються за

формулою

$$\tilde{T}_{2j}(x) = T_{2j}(x) + \frac{1}{(2j+1)(2j-1)}.$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \sum_{j=1}^s c_{2j}^{2i} \left(T_{2j}(x_2) + \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} \right) dx_2 = \\ & = -\lambda_{2i}^n \sum_{j=1}^s c_{2j}^{2i} \left(T_{2j}(x) + \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} \right) + \tau_{2i}^n T_{n+2}(x) + w_2 T_0(x). \end{aligned} \quad (\text{A21.1})$$

Домножимо обидві частини рівняння (A21.1) на поліном Чебишева $T_{2s+2}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$ в межах від $x=-1$ до $x=1$.

$$\text{Отримаємо} \quad c_{2s}^{2i} \frac{1}{4(2s+1)(2s+2)} \frac{\pi}{2} = \tau_{2i}^n \frac{\pi}{2}$$

$$\text{або} \quad c_{2s}^{2i} = 4(2s+1)(2s+2)\tau_{2i}^n. \quad (\text{A21.2})$$

Отже,

$$\int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i}^{2s}(x) T_{2s}(x) dx = c_{2s}^{2i} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A21.3})$$

Враховуючи формули (A21.2) та (A21.3) запишемо

$$T_{2s}(x) = 2(2s+1)(2s+2)\pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i}^n \frac{\bar{U}_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^{2s}}. \quad (\text{A21.4})$$

Домножимо обидві частини рівняння (A21.1) на поліном Чебишева $T_{2s}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$ в межах від $x=-1$ до $x=1$.

$$\text{Отримаємо} \quad \frac{c_{2s-2}^{2i}}{4(2s-1)(2s)} \frac{\pi}{2} - \frac{c_{2s}^{2i}}{2(2s-1)(2s+1)} \frac{\pi}{2} = -\lambda_{2i}^n c_{2s}^{2i} \frac{\pi}{2}$$

$$\text{або} \quad c_{2s-2}^{2i} = \left(\frac{2(2s)}{(2s+1)} - 4(2s-1)(2s)\lambda_{2i}^n \right) c_{2s}^{2i}.$$

Враховуючи (A21.2), останнє рівняння запишемо

$$c_{2s-2}^{2i} = 8(2s+2)(2s)\tau_{2i}^n \left(1 - 2(2s+1)(2s-1)\lambda_{2i}^n \right). \quad (\text{A21.5})$$

Оскільки,

$$\int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i}^{2s}(x) T_{2s-2}(x) dx = c_{2s-2}^{2i} \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A21.6})$$

тому

$$T_{2s-2}(x) = 4(2s+2)(2s)\pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i}^n \left(1 - 2(2s+1)(2s-1)\lambda_{2i}^n \right) \frac{\bar{U}_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^{2s}}.$$

Домножимо обидві частини рівняння (A21.1) на поліном Чебишева $T_{2s-2}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$ в межах від $x=-1$ до $x=1$.

Отримаємо

$$\frac{c_{2s}^{2i}}{4(2s-1)(2s-2)} \frac{\pi}{2} - \frac{c_{2s-2}^{2i}}{2(2s-3)(2s-1)} \frac{\pi}{2} + \frac{c_{2s-4}^{2i}}{4(2s-3)(2s-2)} \frac{\pi}{2} = -\lambda_{2i}^n c_{2s-2}^{2i} \frac{\pi}{2}$$

або

$$c_{2s-4}^{2i} \frac{\pi}{2} = 2 \frac{(2s-2)}{(2s-1)} \left(1 - 2(2s-3)(2s-1)\lambda_{2i}^n\right) c_{2s-2}^{2i} \frac{\pi}{2} - \frac{(2s-3)}{(2s-1)} c_{2s}^{2i} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A21.7})$$

Введемо позначення

$$\bar{g}_{2i}^{2s} = \int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i}^{2s}(x) T_{2s}(x) dx = 2(2s+1)(2s+2)\pi\tau_{2i}^n, \quad (\text{A21.8})$$

згідно формул (A21.3) та (A21.2). Аналогічно, згідно формул (A21.5) та (A21.6)

запишемо

$$\begin{aligned} \bar{g}_{2i}^{2s-2} &= \int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i}^{2s}(x) T_{2s-2}(x) dx = \\ &= 4(2s+2)(2s)\pi\tau_{2i}^n \left(1 - 2(2s+1)(2s-1)\lambda_{2i}^n\right). \end{aligned} \quad (\text{A21.9})$$

Із (A21.7) дістанемо

$$\bar{g}_{2i}^{2s-4} = 2 \frac{(2s-2)}{(2s-1)} \left(1 - 2(2s-3)(2s-1)\lambda_{2i}^n\right) \bar{g}_{2i}^{2s-2} - \frac{(2s-3)}{(2s-1)} \bar{g}_{2i}^{2s}. \quad (\text{A21.10})$$

Оскільки, $\int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i}^{2s}(x) T_{2s-4}(x) dx = \bar{g}_{2i}^{2s-4} = c_{2s-4}^{2i} \frac{\pi}{2}$, тому

$$T_{2s-4}(x) = \sum_{i=1}^s \bar{g}_{2i}^{2s-4} \frac{\bar{U}_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n},$$

де коефіцієнти \bar{g}_{2i}^{2s-4} обчислюються згідно формули (A21.10). Отже, якщо

$$T_{2s-2j}(x) = \sum_{i=1}^s \bar{g}_{2i}^{2s-2j} \frac{\bar{U}_{2i}^{2s}(x)}{\sigma_{2i}^n}, \quad j = 2, \dots, s-1,$$

то коефіцієнти \bar{g}_{2i}^{2s-2j} обчислюються за рекурентною формулою

$$\begin{aligned} \frac{\bar{g}_{2i}^{2s-2j}}{g_{2i}^{2s-2j}} = & 2 \frac{(2s-2j+2)}{(2s-2j+3)} \left(1 - 2(2s-2j+3)(2s-2j+1)\lambda_{2i}^{2s} \right) \frac{\bar{g}_{2i}^{2s-2j+2}}{g_{2i}^{2s-2j+2}} - \\ & - \frac{(2s-2j+1)}{(2s-2j+3)} \frac{\bar{g}_{2i}^{2s-2j+4}}{g_{2i}^{2s-2j+4}}. \end{aligned} \quad (\text{A21.11})$$

Твердження 3.4. Для квазіспектральних поліномів, які представлені у вигляді

$$U_{2i}^{2s}(x) = \sum_{j=1}^s c_{2j}^{2i} \tilde{T}_{2j}(x), \text{ параметр } \tau_{2i}^n \text{ знаходиться за формулою}$$

$$\tau_{2i}^n = \frac{c_{2s}^{2i}}{4(2s+1)(2s+2)}.$$

Доведення. Слідує із формули (A21.2). **Твердження доведено.**

A22. Рекурентна формула для коефіцієнтів розкладу непарних многочленів Чебишева в ряд за функціями $\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x)$.

Запишемо квазіспектральне інтегральне рівняння для непарних поліномів, які представимо у вигляді $U_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s c_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x)$.

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} \sum_{j=1}^s c_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x_2) dx_2 = \\ & = -\lambda_{2i-1}^n \sum_{j=1}^s c_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x) + \tau_{2i-1}^n T_{n+1}(x) + w_1 T_0(x). \end{aligned} \quad (\text{A22.1})$$

Домножимо обидві частини рівняння (A22.1) на поліном Чебишева $T_{2s+1}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$ в межах від $x=-1$ до $x=1$.

$$\text{Отримаємо } c_{2s-1}^{2i-1} \frac{1}{4(2s)(2s+1)} \frac{\pi}{2} = \tau_{2i-1}^n \frac{\pi}{2} \text{ або}$$

$$c_{2s-1}^{2i-1} = 4(2s)(2s+1)\tau_{2i-1}^n. \quad (\text{A22.2})$$

Отже,

$$\int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i-1}^{2s-1}(x) T_{2s-1}(x) dx = c_{2s-1}^{2i-1} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A22.3})$$

Враховуючи формули (A22.2) та (A22.3) запишемо

$$T_{2s-1}(x) = 2(2s)(2s+1)\pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i-1}^n \frac{\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^{2s}}. \quad (\text{A22.4})$$

Домножимо обидві частини рівняння (A22.1) на поліном Чебишева $T_{2s-1}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$ в межах від $x=-1$ до $x=1$.

$$\text{Отримаємо } \frac{c_{2s-3}^{2i-1}}{4(2s-2)(2s-1)} \frac{\pi}{2} - \frac{c_{2s-1}^{2i-1}}{2(2s)(2s-2)} \frac{\pi}{2} = -\lambda_{2i-1}^n c_{2s-1}^{2i-1} \frac{\pi}{2} \text{ або}$$

$$c_{2s-3}^{2i-1} = \left(\frac{2(2s-1)}{(2s)} - 4(2s-2)(2s-1)\lambda_{2i-1}^n \right) c_{2s-1}^{2i-1}.$$

Враховуючи (A22.2), останнє рівняння запишемо

$$c_{2s-3}^{2i-1} = 8(2s-1)(2s+1)\tau_{2i-1}^n \left(1 - 2(2s)(2s-2)\lambda_{2i-1}^n \right). \quad (\text{A22.5})$$

Оскільки,

$$\int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i-1}^{2s-1}(x) T_{2s-3}(x) dx = c_{2s-3}^{2i-1} \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A22.6})$$

$$\text{тому } T_{2s-3}(x) = 4(2s-1)(2s+1)\pi \sum_{i=1}^s \tau_{2i-1}^n \left(1 - 2(2s)(2s-2)\lambda_{2i-1}^n \right) \frac{\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^{2s}}.$$

Домножимо обидві частини рівняння (A22.1) на поліном Чебишева $T_{2s-3}(x)$ та зінтегруємо за змінною x з вагою $\rho(x)$ в межах від $x=-1$ до $x=1$.

Отримаємо

$$\frac{c_{2s-1}^{2i-1}}{4(2s-2)(2s-3)} \frac{\pi}{2} - \frac{c_{2s-3}^{2i-1}}{2(2s-2)(2s-4)} \frac{\pi}{2} + \frac{c_{2s-5}^{2i-1}}{4(2s-4)(2s-3)} \frac{\pi}{2} = -\lambda_{2i-1}^n c_{2s-3}^{2i-1} \frac{\pi}{2}$$

або

$$c_{2s-5}^{2i-1} \frac{\pi}{2} = 2 \frac{(2s-3)}{(2s-2)} \left(1 - 2(2s-4)(2s-2)\lambda_{2i-1}^n \right) c_{2s-3}^{2i-1} \frac{\pi}{2} - \frac{(2s-4)}{(2s-2)} c_{2s-1}^{2i-1} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A22.7})$$

Введемо позначення

$$\bar{g}_{2i-1}^{2s-1} = \int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i-1}^{2s-1}(x) T_{2s-1}(x) dx = 2(2s)(2s+1)\pi \tau_{2i-1}^n, \quad (\text{A22.8})$$

згідно формул (A22.3) та (A22.2). Аналогічно, згідно формул (A22.5) та (A22.6) запишемо

$$\begin{aligned} \bar{g}_{2i-1}^{2s-3} &= \int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i-1}^{2s-1}(x) T_{2s-3}(x) dx = \\ &= 4(2s-1)(2s+1) \pi \tau_{2i-1}^n \left(1 - 2(2s)(2s-2) \lambda_{2i-1}^n\right). \end{aligned} \quad (\text{A22.9})$$

Із (A22.7) дістанемо

$$\bar{g}_{2i-1}^{2s-5} = 2 \frac{(2s-3)}{(2s-2)} \left(1 - 2(2s-4)(2s-2) \lambda_{2i-1}^n\right) \bar{g}_{2i-1}^{2s-3} - \frac{(2s-4)}{(2s-2)} \bar{g}_{2i-1}^{2s-1}. \quad (\text{A22.10})$$

Оскільки, $\int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i-1}^{2s-1}(x) T_{2s-5}(x) dx = \bar{g}_{2i-1}^{2s-5} = c_{2s-5}^{2i} \frac{\pi}{2}$, тому

$$T_{2s-5}(x) = \sum_{i=1}^s \bar{g}_{2i-1}^{2s-5} \frac{\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n},$$

де коефіцієнти \bar{g}_{2i-1}^{2s-5} обчислюються згідно формули (A22.10). Отже, якщо

$$T_{2s-2j-1}(x) = \sum_{i=1}^s \bar{g}_{2i-1}^{2s-2j-1} \frac{\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x)}{\sigma_{2i-1}^n}, \quad j = 2, \dots, s-1,$$

то коефіцієнти $\bar{g}_{2i-1}^{2s-2j-1}$ обчислюються за рекурентною формулою

$$\begin{aligned} \bar{g}_{2i-1}^{2s-2j-1} &= 2 \frac{(2s-2j+1)}{(2s-2j+2)} \left(1 - 2(2s-2j+2)(2s-2j) \lambda_{2i-1}^n\right) \bar{g}_{2i-1}^{2s-2j+1} - \\ &\quad - \frac{(2s-2j)}{(2s-2j+2)} \bar{g}_{2i-1}^{2s-2j+3}. \end{aligned} \quad (\text{A22.11})$$

Твердження 3.5. Для квазіспектральних поліномів, які представлені у вигляді

$U_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s c_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x)$, параметр τ_{2i-1}^n знаходиться за формулою

$$\tau_{2i-1}^n = \frac{c_{2s-1}^{2i-1}}{4(2s)(2s+1)}.$$

Доведення. Слідує із формули (A22.2). **Твердження доведено.**

**СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА
ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ**

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

7. Pyanylo Ya. Methods of finding distribution of pressure in the pipeline / Ya. Pyanylo, V. Sobko // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2016. – Vol. 3, No. 2. – P. 199–207.
8. Pyanylo Ya. The pressure distribution in water in the complex porous environments investigat / Ya. Pjanylo, V. Sobko, O. Bratash // *Mathematical Modeling and Computing*. – 2017. – Vol. 4, No. 2. – P. 187–196.
9. П'янило Я. Д. Побудова та дослідження біортогональних поліномів на базі многочленів Чебишева / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2013. – Вип. 11. – С. 135-141.
10. Собко В. Г. Побудова та дослідження алгоритму розв'язування задач математичної фізики за допомогою біортогональних поліномів / В.Г.Собко // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. – 2015. – Вип.4. – С.176-180.
11. П'янило Я. Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів / Я.П'янило, В. Собко // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. – 2014. – Вип. 19. – С. 146-156.
12. П'янило Я. Дослідження стійкості спектрального методу визначення розподілу тиску вздовж трубопроводу в нестационарному випадку в базисі біортогональних поліномів / Я. П'янило, В. Собко // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. – 2016. – Вип. 24. – С. 86-92.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

8. П'янило Я. Д. Оптимальні квадратурні формули в базисах квазіортогональних многочленів / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко // V Всеукр. наук. конф. “Нелінійні проблеми аналізу” присвяченої пам'яті професора Василюшина Б. В. (19-22 вересня 2013 р.): Тези доп. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 62-63.
9. П'янило Я. Д. Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів / Я.Д.П'янило, В.Г. Собко // XIII Міжнар. наук.-техн. конф. “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів” (7-9 листопада 2014 р.): Матер. конф. – Кременчук, 2014. – С. 48-49.
10. П'янило Я. Д. Застосування біортогональних розкладів для рішення рівнянь параболічного типу / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко // Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (19-22 лютого 2015 р.): Матер. конф. – Рівне, 2015. – С. 138.
11. П'янило Я. Д. Застосування квазіортогональних поліномів в задачах обробки цифрової інформації та математичного моделювання / Я.Д.П'янило, В. Г. Собко, Г. М. П'янило // XI Міжнар. наук. конф. “Моделювання та інформаційні технології у фізичному вихованні і спорті” (12-15 травня 2015 р.): Матер. XI Міжнар. наук. конф. – Львів – Харків: Львів. держ. ун-т фіз. культури, Харк. нац. пед. ун-т ім. Г.С.Сковороди. – Харків: «ОВС», 2015. – С. 88-92.
12. Лянце Г.Т. Апроксимація функцій ортогональними та біортогональними рядами / Г.Т. Лянце, В.Г. Собко, Г.М. П'янило // IV наук.-техн. конф. “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації” (28-30 вересня 2016 р.): Матер. IV наук.-техн. конф. – Львів: ФМІ, 2016. – С. 72-75.
13. П'янило Я. Д. Використання спектральних розкладів в задачах математичної фізики / Я. Д. П'янило, Г. Т. Лянце, Г. М. П'янило,

О.Б.Браташ, В. Г. Собко // XXII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (5-7 жовтня 2016 р.): Зб. наук. праць. – Львів: ЛНУ, 2016. – С. 165-168.

14. П’янило Я., Методи розв’язування крайових задач з використанням дробових похідних за часом / Я. П’янило, Г. П’янило, О. Браташ, В. Собко // Міжнар. наук.-практ. конф. “Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання” (15-20 травня 2017 р.): матеріали конференції. – Івано-Франківськ, 2017. – С. 418-421.

Основні результати досліджень доповідалися на конференціях різного рівня, зокрема: V Всеукраїнській науковій конференції “Нелінійні проблеми аналізу”, присвяченій пам’яті професора Васишина Б.В. (Івано-Франківськ, 2013); XII Міжнародній науково-технічній конференції “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об’єктів” (Кременчук, 2014); Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (Рівне, 2015); XI Міжнародній науковій конференції “Моделювання та інформаційні технології у фізичному вихованні і спорті” (Львів, 2015); IV науковій-технічній конференції “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації”, присвяченій пам’яті професора Б.О.Попова (Львів, 2016); XXII Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики АРАМCS – 2016” (Львів, 2016); Міжнародній науково-практичній конференції “Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання” (Івано-Франківськ, 2017).

ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Затверджую
 Заступник директора з наукової роботи філії
 «Науково-дослідний інститут транспорту
 газу ПАТ «УКРТРАНСГАЗ»
 Ю.В. Пономарьов
 «14» серпня 2017 р.



АКТ ПРО ВИКОРИСТАННЯ

наукових результатів дисертаційної роботи Собко Валентини Григорівни у
 філії «Науково-дослідного інституту транспорту газу ПАТ «УКРТРАНСГАЗ»

Ми, що нижче підписалися, склали цей акт про те, що результати наукової роботи аспірантки Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України Собко Валентини Григорівни, що увійшли до дисертаційної роботи “ **Числово -аналітичні моделі процесів масопереносу на базі біортогональних многочленів**” на здобуття ступеня кандидата технічних наук використані при створенні системних моделей та адаптивних чисельно-аналітичних методів розрахунку параметрів руху газу в трубопроводах, пористих середовищах та в об'єктах МГ і ПСГ як єдиної технологічно ув'язаної гідравлічної системи. Зокрема вперше побудовано числово-аналітичну модель системи транспорту газу та фільтрації вуглеводнів в пластах підземних сховищ газу в базисах біортогональних функцій.

Обґрунтовано ефективність використання розроблених алгоритмів в системах моделювання процесів масопереносу в складних технологічних об'єктах.

Отримані теоретичні результати дали можливість побудувати розрахункові алгоритми для знаходження параметрів потоків газу в об'єктах газотранспортної системи для прийняття адекватних рішень в диспетчерському керуванні потоками газу.

Начальник Відділу розробки
 систем оптимального планування
 прогнозування режимів роботи ГТС

Притула Н.М.



Затверджую
 Декан факультету прикладної
 математики та інформатики

І.І.Дияк

29.10.2014 р.

АКТ

про впровадження результатів кандидатської дисертації
Собко Валентини Григорівни

на тему **“Числово-аналітичні моделі процесів масопереносу на базі
 біортогональних многочленів”**

у навчальний процес на кафедрі прикладної математики Львівського
 національного університету імені Івана Франка

Даним актом засвідчується, що наукові та практичні результати дисертаційної роботи Собко Валентини Григорівни на тему “Числово-аналітичні моделі процесів масопереносу на базі біортогональних многочленів”, в якій розглядаються питання математичного моделювання процесів масопереносу в складних системах та побудови методів вирішення крайових задач математичної фізики, впроваджено в навчальний процес кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка для читання спецкурсів «Задачі обробки цифрової інформації» та «Методи моделювання складних систем» для магістрів та спеціалістів з дисципліни прикладне статистичне моделювання спеціальності 6.08020 - прикладна математика.

Завідувач кафедри прикладної математики
 д.ф.-м.н., проф.

 Я.Г.Савула