Міністерство освіти і науки України
Національний університет "Львівська політехніка"

СОБКО
Валентина Григорівна

УДК 621.532.3.004.17:681.142:622.691.24:536.12

ЧИСЛОВО-АНАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕНОСУ НА БАЗІ БІОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Львів – 2018

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача Національної академії наук України.

Науковий керівник: доктор технічних наук, старший науковий співробітник
П'янило Ярослав Данилович,
Центр математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, директор

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, старший науковий співробітник
Журавчак Любов Михайлівна,
Національний університет "Львівська політехніка",
професор кафедри програмного забезпечення

доктор технічних наук, професор
Лимарченко Олег Степанович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри механіки суцільного середовища

Захист відбудеться "8" червня 2018 року о 16 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.05 Національного університету "Львівська політехніка" (79013, Львів, вул. С.Бандери, 12, 226 ауд. головного корпусу).

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічній бібліотеці Національного університету "Львівська політехніка" (79013, Львів, вул. Професорська, 1).

Автореферат розісланий "04" травня 2018 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доктор технічних наук, професор Р.А.Бунь

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. З розвитком промисловості зростає необхідність у збільшенні енергоносіїв, видобуток яких потребує значних затрат. Тому їх видобуток постійно зменшується, що веде до постійного зростання вартості, в тому числі і транспортування. Параметри процесу транспортування газу визначаються з відповідних математичних моделей. У зв'язку з тим зростають вимоги і до розрахунку параметрів роботи газотранспортних систем (ГТС) та підземних сховищ газу (ПСГ).

Це вимагає побудови відповідних адаптаційних моделей та методів, які описуються крайовими задачами з диференціальними рівняннями різного типу (звичайними, в частинних похідних або в похідних дробових порядків). Для отримання розв'язків цих задач необхідно задавати початкові і крайові умови. В задачах моделювання фізичних процесів вхідні дані, як правило, задаються у довільних дискретних точках з невисокою точністю. Результатом експериментальної роботи або теоретичних досліджень часто є великі масиви числової інформації: одномірні (сигнали), двовимірні (плоскі зображення), багатовимірні (результати зондування середовищ). Такі дані підлягають обробці, метою якої може бути: видалення шуму, згладжування інформації, виявлення особливостей інформації, пошук прихованих у ній закономірностей, дослідження частотних характеристик тощо. Рівняння, якими описують реальні процеси, є, в загальному випадку, багатовимірними. Досить часто вони є двовимірними. Тому виникає необхідність, залежно від вибраного методу розв'язування відповідних задач математичної фізики, в попередній обробці вхідної цифрової інформації та побудови аналітичної залежності крайових умов.

Перспективним способом побудови такої залежності є використання ортогональних та біортогональних рядів. У літературі добре розроблені способи побудови параметричної залежності для випадку однієї змінної. У випадку багатьох змінних такі способи необхідно розробляти та досліджувати.

На цей час основними методами опрацювання числової інформації є спектральні. Спектральні методи використовують як в теоретичних дослідженнях, так і для розв'язування широкого класу задач математики і механіки. Їх суть полягає в тому, що функції, які входять у модель, подають у вигляді ортогональних рядів за вибраним базисом. Знаходження розв'язку зводиться до обчислення коефіцієнтів ортогонального ряду шуканого розв'язку. Відомо, що вибір ортогонального базису слід узгоджувати з областю визначення шуканого розв'язку. Позитивними сторонами є те, що багато ортогональних базисів достатньо добре досліджені, прості у використанні та побудовані на їх основі алгоритми розв'язування легко піддаються автоматизації. До негативних сторін можна віднести те, що сумування відповідних рядів, як правило, є некоректною задачею. Далі, не всі критерії, які ставляться до розв'язків задач, можна задовольнити застосуванням одного ортогонального базису. У зв'язку з цим для ширшого задоволення критеріїв або модифікуються існуючі базиси, або будуються нові. Одним з шляхів врахування згаданих зауважень є застосування біортогональних розкладів. На сьогодні є небагато праць, присвячених їх дослідженню, а особливо практичному використанню. Це, в основному, викликано тим, що побудова біортогональних базисів пов'язана зі значними обчислювальними труднощами і вони недостатньо вивчені.

Швидкий розвиток обчислювальної техніки дає змогу ускладнювати математичні моделі фізичних процесів, що дає можливість більш адекватно описувати процеси, які вивчаються. Тому задача розроблення ускладнених адекватних математичних моделей фізичних процесів, зокрема, моделей фізичних процесів транспортування та зберігання газу є особливо актуальною у цей час. Ускладнення моделей вимагає побудови нових або уточнення існуючих методів розв'язання відповідних задач математичної фізики.

У даній роботі побудовано квазіспектральні поліноми та повні біортогональні системи. Досліджено їх властивості та знайдено розклади ортогональних поліномів Чебишева першого роду та їх похідних через квазіспектральні та біортогональні функції, а також знайдено подання рядів Фур'є-Чебишева через біортогональні розклади.

На базі побудованих біортогональних базисів розроблено методи та відповідні алгоритми для розв'язування крайових задач, якими описують багато фізичних процесів, зокрема масопереносу вуглеводнів у трубопроводах та пористих природних середовищах. Досліджено спосіб розв'язування задач методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів. Знайдено наближено-аналітичні та наближені розв'язки задач масопереносу.

Спосіб розв'язування апробовано як на прикладах розкладу відомих функцій, так і на модельних задачах, розв'язки яких відомі в аналітичному вигляді. Це зроблено з метою вивчення ефективності методу та впливу його параметрів на точність та адекватність шуканого розв'язку. Оскільки задачі такого типу є некоректними за Тихоновим, то дослідження такого типу є актуальними, оскільки дають змогу будувати регуляризуючі алгоритми. Причому суттєвий внесок у побудову регуляризуючих алгоритмів вносить апріорна інформація про процес, що вивчається, яка достатньо просто враховується в побудованому методі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у межах планових науково-дослідних робіт Центру математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача та ПАТ "Укртрансгаз", зокрема:

- "Нестаціонарні задачі фільтрації газу в неоднорідних пористих середовищах в газовому і водонапірному режимах із зосередженими джерелами і стоками" (держ. реєстр. № 0107U000356);
- "Розробка та дослідження математичних моделей процесів деформування та переносу в неоднорідних середовищах з урахуванням локальної структури та зосереджених джерел і стоків" (I кв. 2012 –IV кв. 2016);
- "Розроблення математичних моделей, методів та алгоритмів для прогнозування і оптимального керування режимами експлуатації підземних сховищ газу. Побудова методів та алгоритмів для прогнозування і оптимального керування процесами відбору-закачування газу в підземні сховища" (держ. реєстр. № 0107U005812);
- "Розроблення підсистеми оперативного планування динамічних режимів роботи магістральних газопроводів для автоматизованого диспетчерського керування потоками газу в газотранспортній системі України" (держ. реєстр. № 0110U004141);
- "Математичне моделювання нестаціонарної фільтрації газу в неоднорідних пористих середовищах з рухомими границями розділу газ-вода" Розділ 1 «Побудова математичної моделі та алгоритмів дослідження фільтрації газу та рідини в неоднорідних середовищах складної форми» до договору №1від 17 березня 2014 р. згідно з розпорядженням Президії НАН України від 05.03.2014 №142.

У цих роботах автор був виконавцем і розробив числово-аналітичні моделі процесів масопереносу на базі біортогональних многочленів.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є побудова та дослідження аналітико-числових моделей масопереносу, зокрема газу, в складних газотранспортних системах, трубопроводах та природних пористих середовищах з метою підвищення точності, ефективності та автоматизації розв'язання виниклих у сучасних умовах задач, зокрема витоків газу та оцінки газу, наявного у підошовних та законтурних водах, які наявні в пластах ПСГ. Мета роботи обумовила необхідність розв'язання таких задач:

- побудувати та дослідити аналітико-числові моделі масопереносу в трубопроводах та пористих середовищах ГТС, з цією метою сформулювати відповідні крайові задачі математичної фізики;

- розробити алгоритми і побудувати наближено-аналітичні та наближені способи розв’язування сформульованих крайових задач методом розділення змінних з використанням спектральних представлень у базисах біортогональних многочленів;
- побудувати та дослідити квазіспектральні та біортогональні поліноми з метою розв’язування задач математичної фізики;
- дослідити ефективність біортогональних розкладів при застосуванні до математичного моделювання масопереносу в газопроводах та пористих середовищах, проаналізувати вплив похибок різного типу і гідродинамічних параметрів газу та геометричних параметрів технологічних об’єктів ГТС на кінцевий результат;
- побудовані алгоритми апробувати на реальних даних.

Об’єктом дослідження є процеси руху газу в трубопроводах, фільтрації газу в складних пористих середовищах (пластах підземних сховищ газу), біортогональні та квазіспектральні базисні функції.

Предметом дослідження є математичні моделі масопереносу в технологічних об’єктах ГТС (зокрема трубопроводах і пластах ПСГ) та аналітико-числові методи розв’язування крайових задач з використанням апріорної інформації для оптимізації процесів масопереносу.

Методи досліджень. Рух газу в технологічних об’єктах ГТС в неусталеному неізотермічному режимі описується нелінійними диференціальними рівняннями (або системами диференціальних рівнянь) у частинних похідних із змінними коефіцієнтами. Основними методами, які використовувались для розв’язування побудованих на їх основі крайових задач були числові та метод розділення змінних у базисах ортогональних функцій. У цій роботі шуканий розв’язок знаходиться методом розділення змінних в базисах біортогональних та квазіспектральних поліномів. Для цього згадані базиси спочатку побудовано та досліджено. При цьому використано методи асимптотичних розкладів, функціонального аналізу, математичного аналізу тощо.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі розв’язано завдання наукового характеру в галузі математичного моделювання та обчислювальних методів – створення адаптивних аналітико-чисельних моделей руху газу в трубопроводах, пористих середовищах, які орієнтовані на розв’язання задач оптимального керування процесом і таких на цей час важливих нових задач, які не були актуальними раніше, зокрема, незворотних втрат газу вздовж траси транспортування, врахування процесу дифузії та оцінки кількості газу, розчиненого у воді, що наявна в пластах підземних сховищ газу при його зберіганні тощо. Побудовано методи розв’язування цих задач на основі спектральних представлень функцій у базисах біортогональних многочленів.

У процесі розв’язування вказаного завдання отримано такі нові результати:

- вперше створено нові аналітично-наближені та наближені методи розв’язування крайових задач газової динаміки в базисі біортогональних поліномів, які орієнтовані на використання апріорної інформації про процес, що аналізується, і достатньо просто враховується у цих методах, досліджено вплив параметрів методів, зокрема, порядку часткової суми, розрядної сітки та похибки обчислення на точність отриманих розв’язків;
- удосконалено адаптивні аналітико-чисельні моделі руху газу в трубопроводах, пористих середовищах з реальними крайовими даними, які базуються на заміряних дискретних даних;
- вперше на елементах базису із модифікованих поліномів Чебишева першого роду запропоновано оператор, на основі якого побудовано квазіортогональні та біортогональні базиси, причому отримані біортогональні поліноми такі, що їх похідні другого порядку виражаються через суму двох доданків, одним із яких є самі ці поліноми з деякими коефіцієнтами, а другий доданок – це похідна першого порядку многочлена Чебишева першого роду з відповідними коефіцієнтами (саме така властивість дає можливість розв’язувати

системи рівнянь, які отримуємо при розв'язуванні задач математичної фізики набагато швидше та зменшує накопичення машинної похибки); побудовані квазіспектральні поліноми є похідними першого порядку від біортогональних многочленів, а ця властивість є дуже важливою, коли потрібно знайти похідну першого порядку від функції представленої у вигляді суми ряду через біортогональні поліноми чи знайти інтеграл від функції представленої у вигляді суми ряду через квазіспектральні поліноми, натомість коефіцієнти при цьому залишаються незмінними, а лише змінюються функції при них, які є відомими, що теж зменшує час обчислення;

− вперше сформульовано пряму та спряжену квазіспектральні задачі для інтегрального та диференціального оператора, побудовано квазіспектральні та біортогональні поліноми та описано алгоритми їх побудови, досліджено їх властивості, знайдено коефіцієнти нев'язки для сформульованих задач; знайдено рекурентні формули для представлення поліномів Чебишева через біортогональні та квазіортогональні функції (при застосуванні знайдених біортогональних многочленів до роз'язування поставлених задач позитивним є те, що параметри, які входять в одержані розв'язки можуть бути обчислені з довільною точністю і знайдені з алгоритму побудови біортогональних функцій, причому для довільного натурального числа n можна побудувати бази даних із значеннями цих параметрів і використовувати їх під час обчислення розв'язку, що теж економить час).

Практичне значення отриманих результатів. У дисертаційній роботі побудовано аналітико-чисельні моделі масопереносу в технологічних об'єктах ГТС, запропоновано методи розв'язування крайових задач, які при цьому виникають. Результати досліджень дали змогу покращити ефективність розрахункових схем газотранспортних мереж стосовно зменшення часу їх числової реалізації, розв'язання нових задач, таких як виявлення незворотних втрат газу в процесі транспортування та сформулювати рекомендації щодо більш ефективної роботи підземних сховищ газу.

Результати дисертаційної роботи дали можливість:

− уточнювати оперативні режимні параметри роботи систем газотранспортних мереж для зменшення енергетичних затрат;
− оптимізувати систему підтримки прийняття рішень процесу експлуатації підземних сховищ газу, адаптувати роботу ПСГ з врахуванням величини розчиненого у пластових водах газу (використано в ДК "Укртрансгаз");
− для прийняття адекватних управлінських рішень в умовах оперативних змін роботи ГТС побудувати алгоритми уточнення параметрів потокорозподілу газу.

Отримані в дисертаційній роботі результати використано при читанні спецкурсів "Задачі обробки цифрової інформації" та "Методи моделювання складних систем" для магістрів та спеціалістів з дисципліни прикладне статистичне моделювання спеціальності 6.08020 – прикладна математика Львівського національного університету імені Івана Франка.

До дисертаційної роботи додано акти про використання результатів роботи у виробництві та в навчальному процесі.

Вірогідність отриманих результатів забезпечується строгістю постановок задач та строгістю їх числового моделювання. Результати теоретичних досліджень апробовано в ході обчислювальних експериментів на модельних задачах і заміряних даних. Теоретично обґрунтовано оцінки точності та збіжності побудованих методів і алгоритмів.

Особистий внесок здобувача. У роботах, опублікованих у співавторстві, автору дисертації належать: дослідження аналітико-числової моделі массопереносу, формулювання відповідної крайової задачі, розробка алгоритму і побудова наближено-аналітичного та наближеного методів для розв'язання сформульованої задачі, побудова алгоритму програмного комплексу, проведення розрахунків та аналіз отриманих результатів [1, 12]; побудова та дослідження аналітико-числової моделі масопереносу у базисі біортогональних многочленів, формулювання відповідної крайової задачі, розробка алгоритму і побудова наближено-аналітичного методу для розв'язання сформульованої задачі, побудова алгоритму програмного комплексу, проведення розрахунків та аналіз отриманих результатів [2, 9, 10]; формулювання задачі, підготовка вхідної інформації, побудова алгоритму розрахунку, проведення розрахунків та аналіз отриманих результатів [3, 5, 7, 8, 11]; побудова та дослідження аналітико-числової моделі массопереносу, формулювання відповідної крайової задачі, розробка алгоритму і побудова наближено-аналітичного та наближеного методів для розв'язання сформульованої задачі, побудова структурної схеми розрахунку режимних параметрів та верифікація отриманих результатів [6]; формулювання задачі, побудова алгоритму програмного комплексу, проведення розрахунків та аналіз отриманих результатів [13]. В усіх опублікованих у співавторстві працях автору належать активна участь у постановці задач та в аналізі отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень доповідалися на конференціях різного рівня, зокрема: V Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу", присвяченій пам'яті професора Василишина Б.В. (Івано-Франківськ, 2013); XII Міжнародній науково-технічній конференції "Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів" (Кременчук, 2014); Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів" (Рівне, 2015); XI Міжнародній науковій конференції "Моделюванння та інформаційні технології у фізичному вихованні і спорті" (Львів, 2015); IV науковій-технічній конференції "Обчислювальні методи і системи перетворення інформації", присвяченій пам'яті професора Б.О.Попова (Львів, 2016); XXII Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики APAMCS – 2016" (Львів, 2016); Міжнародній науково-практичній конференції "Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання" (Івано-Франківськ, 2017).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалась і обговорювалась на семінарах Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, на кафедрі механіки суцільного середовища Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Науково-дослідному інституті транспорту газу ПАТ "Укртрансгаз", Львівському національному університеті імені Івана Франка, на кафедрі математичного моделювання Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем'янчука.

Публікації. Основні результати досліджень, що відображені у дисертації, опубліковано у 13 наукових роботах, у тому числі в 6 статтях у наукових фахових виданнях, з них дві внесено до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus, у 7 матеріалах міжнародних та всеукраїнських конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу та чотирьох розділів, які містять 2 рисунки і 17 таблиць, висновків та списку літератури, що налічує 131 найменувань. Повний обсяг дисертації − 209 сторінок, основного тексту − 113 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** подано загальну характеристику роботи, розкрито суть і стан вивчення наукової задачі, обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано її мету, відзначено новизну отриманих результатів, висвітлено практичну цінність отриманих результатів, наведено дані про апробацію результатів і публікації, що відображають основний зміст роботи, визначено особистий внесок здобувача у публікаціях, підготовлених до друку за участю співавторів.

У **першому розділі** наведено огляд літератури за темою дисертації, окреслено її місце у розв'язанні науково-прикладних задач спектрального аналізу, операційного числення та методів розв'язування задач математичної фізики, зокрема задач газової динаміки в газотранспортних мережах, дифузії та обробки інформації.

Ряд фізичних процесів описується нелінійними диференціальними рівняннями або системами нелінійних диференціальних рівнянь (звичайних або в частинних похідних) із змінними коефіцієнтами, залежними як від просторово-часових координат, так і шуканого розв'язку (прикладом є коефіцієнт стисливості газу, який залежить від тиску та температури). Так процес руху газу в трубопроводі в нестаціонарному ізотермічному режимі описується взаємозв'язаною системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\frac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\rho\upsilon^2\right)=-\rho\left(\frac{\chi\upsilon|\upsilon|}{2D}+g\frac{dh}{dx}\right),$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\upsilon)=0, \tag{1}$$
$$p=\rho zRT,$$

де ρ, υ та p − відповідно, густина, швидкість руху і тиск газу; χ − коефіцієнт гідравлічного опору; T − температура газу; h − глибина залягання труби; g − прискорення вільного падіння; D − діаметр трубопроводу; t − час; x, $x\in[0,l]$ − біжуча координата; l − довжина трубопроводу; z − коефіцієнт стисливості, який характеризує відмінність реального газу від ідеального і визначається на основі побудованих емпіричних залежностей; R − газова стала.

Фільтрація реального газу в неоднорідних пластах підземних сховищ газу в неусталеному ізотермічному режимі зводиться до задачі інтегрування рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh_{еф}}{\mu z}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kh_{еф}}{\mu z}\frac{\partial p^2}{\partial y}\right)=2mh_{еф}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{p}{z}+2qp_{am}\right), \tag{2}$$

де k, m і $h_{еф}$ − коефіцієнти проникності, пористості та ефективна газонасичена товщина середовища, які в загальному випадку, є функціями тиску p і температури газу T; p − тиск у точці пласту з координатами (x,y) в момент часу t; μ − коефіцієнт динамічної в'язкості, який залежить від тиску p і температури T; q − густина відбору газу; p_{am} − атмосферний тиск.

Крайові умови для формулювання відповідних задач математичної фізики будуються в оперативному режимі. Як правило, за початкові умови вибираються усталені процеси руху газу. Для побудови граничних умов використовуються заміряні (стосовно процесу руху газу в трубопроводі), або розраховані на базі газодинамічної ув'язки дані (останнє стосується граничних умов для дослідження газоносних або водоносних пластів).

Моделюванню процесу руху газу в різних об'єктах ГТС присвячена значна кількість праць як вітчизняних, так і зарубіжних авторів. Серед відомих робіт слід відзначити роботи І.А.Чарного, С.А.Бобровського, А.В.Александрова, А.П.Силаша, Б.И.Сиперштейна, С.А.Сарданашвили, В.Е.Селезнева, А.З.Миркина, А.С.Трофимова, И.М.Федоткина, J.Kralik, A.L.Lee, W.R.True, Э.Л.Вольского, Н.Н.Новицкого та багатьох інших. В Україні моделюванням роботи ГТС займались такі вчені: М.А.Жидкова, Я.В.Грудз, В.Я.Грудз, Д.Ф.Тимків, А.Д.Тевяшев, Я.Д.П'янило, М.Г.Притула, Н.М.Притула, А.Н.Крайко, В.Гавриленко, Ф.В.Дацюк, М.П.Химко та інші. Згаданим вище авторам належать і методи розв'язування рівнянь газової динаміки.

Очевидно, що крайові задачі газової динаміки є частковим випадком загальної теорії крайових задач математичної фізики. Методи, які там використовуються можна використати і для розв’язання задач газової динаміки. Методи розв’язування задач математичної фізики в різних областях науки розглянуто в роботах В.І.Крилова, О.Н.Кочуєва, М.Н.Кулика, К.В.Логінова, В.Павленка, М.М.Пелеха, Н.Б.Лопуха, Я.Д.П’янила, М.Г.Притули, Н.М.Притули, Л.М.Журавчак, О.С.Лимарченка, А.В.Ликова, Ф.Г.Темпеля, І.А.Чарного, A.Walter, Ф.П.Васильева та інших.

Слід зауважити, що значна кількість прикладних задач математичної фізики розглядається у канонічних просторових областях, а крайові умови задаються в аналітичному вигляді. В той час як природні пористі середовища, зокрема, пласти підземних сховищ газу, мають великі просторові розміри і неканонічну форму, а крайові умови відомі в дискретних нееквідистантних точках з невеликою точністю. Аналітичний розв’язок таких задач математичної фізики, поставлених на цій основі, можна отримати тільки в окремих часткових випадках і в тому випадку, коли вхідні дискретні дані достатньо добре апроксимуються деякими аналітичними виразами. Тому для побудови їх розв’язків використовують певні наближення, які повинні бути узгоджені з вибраними модельними положеннями.

Відзначимо деякі з проблем, які виникають при розв’язанні практичних задач газової динаміки:

- вхідні дані відомі тільки в нееквідистантних точках (зокрема задачі масопереносу та фільтрації газу в підземних сховищах) з невисокою точністю;
- для адаптації математичних моделей до реальних фізичних процесів необхідно розв’язувати різного роду обернені задачі, а для цього необхідно мати певну апріорну інформацію;
- забезпечення кінцевого результату з необхідною точністю та за вказаний час, що необхідно для прийняття керівних рішень;
- нарешті, задачі такого типу розв’язуються в умовах значної невизначеності, що вимагає побудови достатньо точних та стійких методів.

У зв'язку зі зрослою потребою в розв'язанні багатьох практичних задач математичної фізики, механіки і ряду інших дисциплін природознавства інтенсивний розвиток набули дослідження в галузі наближених методів. Значний внесок у побудову і обґрунтування нових методів зробили багато відомих вчених, серед яких варто виділити В.Рітца, Б.Г.Гальоркіна, І.Г.Бубнова, М.М.Крилова, М.М.Боголюбова, М.Ф.Кравчука. Важливий етап у розвитку наближених методів бере початок із того часу, коли розрізнені методи стали вивчатися з єдиної точки зору. Прагнення до знаходження найкращого алгоритму для конкретної задачі призвело до систематизації пропонованих методів. Підвалини для побудови ієрархічної системи алгоритмів були закладені Л.В.Канторовичем у рамках створеної ним загальної теорії наближених методів для розв'язання операторних рівнянь. Згідно з цією теорією одним з основних критеріїв оцінки ефективності наближених методів вважається швидкість збіжності апроксимацій до шуканого розв'язку. Звідси цілком природно виникає питання про побудову оптимальних методів. Проблемами оптимізації методів розв'язання операторних рівнянь у різний час активно займалися М.О.Красносельський, М.С.Бахвалов, К.І.Бабенко, С.Г.Міхлін, В.В.Іванов, Г.М.Вайнікко, В.Л.Макаров, В.К.Задірака, В.В.Хлобистов, А.Ю.Лучка, Б.Г.Габдулхаєв, С.В.Переверзєв і багато інших. Найбільш повна інформація про ці дослідження міститься в монографіях останніх двох названих авторів.

Отримані П.Л.Чебишевим результати стали основою теорії найкращого наближення функцій, вони були продовжені, розвинені і доповнені видатними ученими: Є.І.Золотарьовим, А.Н.Коркіним, А.А.Марковим, В.А.Марковим, К.А.Поссе, Н.Я.Соніним, Ю.Сохоцкім, Е.Борелем, К.Вейерштрассом, Ш.Валле-Пуссеном, Д.Джексоном і особливо С.Н.Бернштейном, який на базі чебишевських ідей розвинув новий напрямок − конструктивну теорію функцій. Значний внесок у неї внесли радянські математики В.І.Смірнов, А.Н.Колмогоров, М.В.Келдиш, Л.А.Лаврентьєв, С.М.Нікольський. Многочлени Чебишева найменш відхиляються від нуля, зайняли виняткове становище в математиці останніх десятиліть як найважливіший засіб теоретичних і практичних досліджень.

З часів одного з найвидатніших досягнень людського генія − створення в XVII ст. І.Ньютоном і Г.Лейбніцем математичного аналізу − основним засобом представлення та обчислення функцій були степеневі ряди. Вони широко використовувалися при диференціюванні та інтегруванні функцій, а метод невизначених коефіцієнтів Р.Декарта дозволив розв'язувати з їх допомогою рівняння, в тому числі диференціальні.

Надалі Д.Бернуллі, Л.Ейлером, П.Лапласом, А.Лежандром, Ж.Фур'є, Н.І.Лобачевським, П.Діріхле, М.В.Остроградським, Г.Ламі, Ш.Ермітом, Е.Лаґерром, У.Діні, Е.Шмідтом, Д.Гільбертом, А.М.Ляпуновим, В.А.Стекловим, А.Зігмундом, Г.Сеге і багатьма іншими знаменитими математиками було встановлено, що цінним способом подання та обчислення функцій є їх розклади в тригонометричні ряди і ряди по різних системах ортогональних многочленів і взагалі ортогональних функцій. У двадцятих-тридцятих роках минулого століття з'ясувалося, що серед усіх різноманітних розкладів особливе становище займають розклади функцій у ряди по многочленах Чебишева першого роду, які найменш відхиляються від нуля на відрізку $\left[-1,1\right]$, забезпечують зазвичай більш швидку збіжність розкладів функцій у ряд по многочленах Чебишева порівняно з їх розкладами в степеневі ряди або в ряди по інших спеціальних многочленах або функціях.

У зв'язку з зазначеними властивостями розкладів функцій в ряди по многочленах Чебишева стали перетворювати часткові суми відповідних розкладів степеневих рядів в лінійні комбінації многочленів Чебишева. Це дозволило або обчислювати значення функцій при заданій точності по меншому числу доданків або підвищувати точність обчислень. Такі прийоми, запропоновані К.Ланцошем, були особливо популярні в перші роки після появи електронних обчислювальних машин. Природно виникла думка відразу отримувати безпосередньо розклади в ряди Чебишева функцій, як явно визначених, так і таких, що є розв'язками тих чи інших, в тому числі диференціальних рівнянь.

При узагальненні класичних ортогональних многочленів на випадки двох і більше змінних виникає необхідність розглядати так звані біортогональні системи многочленів.

Спектральний метод розв'язування задач зводиться до обчислення коефіцієнтів ортогональних рядів, в яких подається шуканий розв'язок, і вся проблема полягає в побудові алгоритмів для обчислення коефіцієнтів цих рядів (узагальнених спектрів).

Спектральні методи розв'язування задач розвинуті в роботах Г.Сеге, С.Качмажа, П.К.Суєтіна, Г.Штейгауза й інших, будуються та досліджуються ортогональні на різних проміжках многочлени та показано елементи їх застосування для розв'язання практичних задач. Відзначимо, що найбіль широко спектральні методи застосовуються в обробленні цифрової інформації. До робіт такого сорту слід віднести роботи Кулі-Тюкі, Ч.Рейдера, Б.Голда, В.В.Солодовнікова, М.Д.Єгупова, В.К.Задираки та їх учнів.

Існує ряд робіт, в яких проведено детальний аналіз застосування класичних ортогональних базисів, зокрема Фур'є, Хаара та Уолша, за різними критеріями. Основний висновок, який було зроблено – проаналізовані базиси часто задовольняють не всі критерії, які ставляться до розв'язків сформульованих задач. Це привело до того, що почали розвиватися спектральні методи в інших ортогональних базисах – Якобі, Чебишева, Лаґерра, Ерміта тощо.

Розвиток сучасної обчислювальної техніки, системи сучасних технічних засобів збору, обробки та передачі даних, а також використання сучасних підходів до моделювання складних процесів дає можливість в оперативному режимі приймати і реалізовувати обґрунтовані управлінські рішення. Формулюванню та втіленню комплексу оптимізаційних задач присвячені роботи І.В.Сергієнка, П.Н.Дейнеки, И.И.Ляшка, А.Г.Євдокимова, А.В.Єгорова, В.В.Скопецького, В.В.Дубровського, А.Д.Тевяшева, Б.Л.Кучика, М.Н.Кулика, Б.Л.Кучина, Ю.І.Максимова, В.А.Диткина, С.К.Митичкина, И.Н.Молчанова, М.И.Нечепуренка, В.С.Панкратова, И.Г.Тетерева та інших.

У першому розділі відзначено актуальність дисертаційної роботи, зроблено огляд літератури за темою дисертації, окреслено її місце у розв'язанні науково-прикладних задач газової динаміки в газотранспортних мережах. Показана необхідність побудови уточнених аналітико-числових адаптивних математичних моделей процесів масопереносу та формулювання відповідних крайових задач математичної фізики, а також застосування спектральних методів до розв'язування цих задач.

Другий розділ присвячений побудові та опису математичних моделей, які досліджено у роботі та вимогам до них. Вперше запропоновано наближено-аналітичні та наближені методи, побудовано алгоритми розв'язування крайових задач у базисі біортогональних поліномів.

Математичні моделі дають можливість досліджувати процеси різного роду не вдаючись до натурних експериментів. Очевидно, що кожна математична модель може розв'язати певний клас задач за заданих вхідних даних та за умови виконання технологічних або інших обмежень. Із зростанням вимог до вивчення фізичних процесів зростають вимоги і до відповідних математичних моделей. Все це відноситься і до моделювання масопереносу в технологічних процесах складних газотранспортних систем.

В літературі відома значна кількість математичних моделей процесу руху газу в трубопроводах різного ступеню точності та адекватності. Значно менше відомо моделей, на базі яких побудовані практично використовувані програмні комплекси розв'язання практичних задач. Як правило, при моделюванні розв'язувались прогнозовані або балансові задачі. Значно менше приділено увазі побудові математичних моделей з метою керування процесом транспорту газу.

У зв'язку із зростанням вартості енергетичних ресурсів, значної зношеності технологічних об'єктів ГТС виникає необхідність у розв'язанні нових задач, які були неактуальними раніше. Це стосується, зокрема, незворотних втрат газу вздовж траси транспортування, врахування процесу дифузії та розчинності газу в платах підземних сховищ при його зберіганні тощо.

Очевидно, що врахування такого роду процесів вимагає значного уточнення та додаткової адаптації відповідних математичних моделей. У свою чергу, уточнення математичних моделей вимагає уточнення існуючих або побудову нових методів розв'язання сформульованих відповідних задач математичної фізики. Відзначимо деякі з додаткових вимог.

1. Очевидно, що розв'язання крайових задач базується на заміряних дискретних даних. У зв'язку з пониженням тиску в ГТС змінюються і вхідні дані (зокрема, зменшується різниця між сусідніми замірами). З проведених досліджень відомо, що основною похибкою при розв'язуванні задач такого типу є похибка у вхідних даних. Використання числових методів (зокрема різницевих) пов'язане дискретизацією і втратою значних цифр, що приводить до збільшення похибки в кінцевих результатах. У зв'язку з цим необхідно вдосконалювати методи розв'язування крайових задач.

2. Аналіз даних замірів параметрів процесу руху газу показує, що є наявними значні незворотні втрати вздовж траси. Тому виникає задача виявлення величини витоків газу та їх місце знаходження. Кореляційний аналіз між величинами витоків газу, вхідними даними та величинами об'ємів транспортування показує, що використовувані методи не дозволя-

ють розв'язання цієї задачі.

3. Особливе місце при транспортуванні газу, особливо в зимовий період, мають підземні сховища газу. Відомо, що в пластах майже кожного ПСГ є наявною вода. Оскільки в пластах ПСГ тиски є значними, то певна кількість газу дифундує та розчиняється у воді. До цього часу цей процес не досліджувався. Однак виникає задача оцінки величини об'ємів розчиненого та дифундованого газу. Очевидно, що при розв'язуванні цієї задачі не можуть бути використані заміряні дані, так як їх отримати нереально. Тому вони визначаються опосередковано, через інші заміряні дані, з невисокою точністю. Далі, в процесах відбирання або закачування газу тиск змінюється в незначних межах (порядку декількох десятих атмосфери за добу). Вище сказане вказує на необхідність достатньо точних методів розв'язування задач такого типу.

В першому підрозділі подано загальний аналіз розв'язування задач математичної фізики. Відзначимо, що основним способом є застосування числових методів в ітераційному процесі. При цьому на різних етапах застосовується процедура лінеаризації. Для розв'язання згаданих вище задач необхідно застосовувати аналітичні або асимптотичні методи. Найбільш вживаними є застосування методів розділення змінних або інтегральних перетворень. Однак вони є некоректними за Тихоновим. Застосування асимптотичних методів вимагає, по-перше, вибір малого параметру, і, по-друге, складністю знаходження асимптотичного розкладу.

Одним із підходів до вирішення згаданих проблем є застосування методу розділення змінних у базисі біортогональних функцій. Нагадаємо, що однією з позитивних сторін цього методу є те, що якщо ряд по одній системі функцій є повільно збіжний, то по іншій – швидкозбіжний.

Біортогональну систему функцій будемо будувати на базі многочленів Чебишева. Вони є ортогональними на проміжку [-1,1]. На цьому ж проміжку будемо будувати і біортогональні системи функцій. Технологічні об'єкти ГТС мають довільні скінченні розміри в просторових координатах. У зв'язку з цим відповідні задачі математичної фізики, які описують процес масопереносу, необхідно звести до проміжку біортогональності лінійною заміною. Як відомо, лінійна заміна координат не змінює типу рівнянь.

Модель 1. Модель процесу руху газу в трубопроводі.

Враховуючи рівняння стану в ізотермічному випадку математична модель руху газу в трубопроводі є система взаємопов'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(y,t)}{\partial y} + \alpha_\kappa \rho \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\upsilon^2(y,t)}{2}\right) + \rho g \dfrac{\partial h(y,t)}{\partial y} + \dfrac{\chi \rho \upsilon^2(y,t)}{2D} + \dfrac{\partial\left(\rho\upsilon(y,t)\right)}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial\left(\rho\upsilon(y,t)\right)}{\partial y} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p(y,t)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

де $\omega = \rho\upsilon$ − масова витрата (швидкість) газу; c − швидкість звуку в газі; α_κ − коефіцієнт Коріоліса, який відповідає за характер руху газу (турбулентний чи ламінарний).

На практиці граничні умови формулюються на входах та виходах компресорних станцій. Значення їх відомі в дискретних точках. Очевидно, що для застосування аналітичних методів розв'язування крайових задач граничні умови необхідно мати в аналітичному вигляді.

Як звичайно, вихідним станом на початку нестаціонарного процесу є стаціонарний розподіл тиску. Тому задача математичної фізики в цьому випадку полягає в наступному.

Формулювання крайової задачі. Знайти розв'язок системи (3) за початкового стаціонарного розподілу тиску

$$p(y,0)=\sqrt{p_0^2-\frac{\chi zRT}{D}\left(\frac{\rho_s q_s}{s_0}\right)^2 y} \tag{4}$$

та граничних умов на об'ємні витрати газу

$$q_0(t)=q_{0n}+(q_0-q_{0n})e^{-\gamma_0 t}; \qquad q_l(t)=q_{ln}+(q_l-q_{ln})e^{-\gamma_l t}, \tag{5}$$

відповідно, на вході та виході трубопроводу. Параметри, що входять в рівності (5) обчислюються на основі заміряних даних відомими методами, зокрема методом найменших квадратів. Зауважимо, що такі залежності для граничних умов з достатньою для практики точністю описують заміряні дані.

У цьому випадку p_0 − значення тиску на початку трубопроводу; ρ_s, q_s − значення густини та об'ємної витрати за стандартних умов, $s_0=\pi D^2/4$; q_0, q_{0n} − об'ємної витрати газу у вихідному та новому стаціонарному стані течії газу і параметр γ_0, який характеризує швидкість переходу з одного стану в інший на початку трубопроводу; q_l, q_{ln}, γ_l − аналогічні параметри в кінці трубопроводу. У разі переходу до масових швидкостей граничні умови такі:

$$\omega_0=\omega(0,t)=\frac{\rho_s}{s_0}q_0(t),\ \omega_l=\omega(l,t)=\frac{\rho_s}{s_0}q_l(t).$$

Модель 2. Знаходження розподілу тиску у воді.

Як було сказано вище, останнім часом виникає задача оцінки кількості газу, який може міститися у воді, яка є наявною в пластах підземних сховищ. На практиці, як правило, розрізняють два випадки наявності води в пласті: підошовну, яка міститься в основному під пластом ПСГ, та законтурну, при якому вважається, що пласт обмежений водою збоків. При цьому тиск на зовнішньому контурі води підтримується перепадом тиску водяного стовпа. Для визначення об'єму газу, наявного у воді, необхідно знати розподіл тиску в ній. У залежності від цього тиску залежить кількість розчиненого та дифундованого газу. При цьому розподіл тиску потрібно знати досить точно і мати можливість розраховувати невеликі його зміни.

Сформулюємо задачу визначення розподілу тиску у підошовній воді, моделюючи її плоским шаром певної товщини.

Розрахунок розподілу тиску води $p(y,t)$ у плоскому безмежному середовищі товщини l визначається як розв'язок одновимірного рівняння фільтрації

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{kh_{еф}}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g\right)\right]=2\alpha_в m h_{еф}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{6}$$

де k − проникність пласту, μ − динамічна в'язкість води, $\alpha_в$ − коефіцієнт водонасиченості, m − пористість пласту.

Крайовими умовами будемо вважати наступні: на нижній границі шару тиск можна вважати сталим, рівним гідростатичному p_n; на верхній границі значення тиску розраховується на основі гідравлічної ув'язки ГЗП − вибійна зона − ГВК і також вважається сталим p_v.

Початковий розподіл тиску води у водяному шарі

$$p(y,0)=\rho g(h_0+y),\ 0<y<l.$$

Тут h_0 - висота стовпа води, який підтримує тиск у підошовній воді.

Розв'язок поставленої задачі є частковим випадком розв'язку більш загальної задачі.

Розглядається безмежний шар товщини l, $0<y<l$. Значення тисків на границях рівні $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$. Початковий тиск $f(y)$.

У цьому випадку задача полягає у такому:
знайти розв'язок рівняння

$$\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial t} \qquad (0 < y < l) \tag{7}$$

за початкової умови

$$p(y,0) = f(y), \tag{8}$$

та граничних умов

$$p(0,t) = \varphi_1(t), \; p(l,t) = \varphi_2(t). \tag{9}$$

Тут $\kappa = k/(2\mu\alpha_в m)$.

Загальна схема розв'язування крайових задач у базисі біортогональних многочленів.

1. Задачу математичної фізики, яка описує процес масопереносу, необхідно звести до проміжку біортогональності [-1,1] лінійною заміною.
2. Якщо математична модель є система взаємопов'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних, то зводимо її до диференціального рівняння в частинних похідних, виражаючи одну невідому функцію через іншу.
3. Невідому функцію, що входить у рівняння, шукаємо у вигляді добутку $W(x,t) = V(x)e^{\beta_к x}G(t)$, де невідомий коефіцієнт $\beta_К$ такий, щоб множник при $V_x'(x)$ перетворювався в нуль якщо такий існує, якщо ні, то $\beta_К = 0$.
4. Підставляємо в рівняння знайдений невідомий коефіцієнт, ліву і праву частину отриманого таким чином рівняння домножимо на $e^{-\beta_к x}$.
5. В рівняння, яке отримали згідно п.4, замість добутку $V(x)G(t)$ підставимо суму $\sum\limits_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x)G_i(t)$ − для наближено-аналітичної моделі та $\sum\limits_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(x)\sum\limits_{j=0}^{\infty} q_{ij}L_j(t)$ − для наближеної моделі, де $V_i^{n+\bar{i}}(x)$ − побудовані базисні біортогональні функції, а $G_i(t)$ - шукані функції, $L_j(t)$ - многочлени Лаґерра, $q_{i,j}$ − невідомі коефіцієнти.
6. З граничних умов, враховуючи, що $V_i(-1) = V_i(1) = 0$, знаходимо невідомі функції $G_{n+2}(t)$ та $G_{n+1}(t)$ − для наближено-аналітичної моделі та $q_{n+1,j}$, $q_{n+2,j}$, $j = 1,...,s$ − для наближеної моделі.
7. Ліву та праву частини, отриманого рівняння згідно з п.5, домножимо на $\frac{\bar{V}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $i = 1,...,n$ та зінтегруємо по x в межах від -1 до 1. Враховуючи знайдені функції з п.6, отримаємо систему з n неоднорідних лінійних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами (для наближено-аналітичної моделі). Ліву та праву частини, отриманого рівняння згідно з п.5, домножимо на $\frac{\bar{V}_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} e^{-t} L_j(t)$, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,s$ та зінтегруємо по t в межах від 0 до ∞, та по x в межах від -1 до 1. Отримаємо $i = n$ систем, кожна з яких містить $j = s$ рівнянь та $j = s$ невідомих, з яких знайдемо решту невідомих коефіцієнтів $q_{i,j}$, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,s$ (для наближеної моделі).
8. Розв'язуючи систему, отриману в п.7, дістаємо шукані функції $G_i(t)$, $i = 1,...,n$ (для наближено-аналітичної моделі). Розв'язуючи системи, отримані в п.7, дістаємо реш-

ту невідомих коефіцієнтів $q_{i,j}$, $i=1,...,n$, $j=1,...,s$ (для наближеної моделі). Отже, знаходимо розв'язок $W(x,t)=V(x)e^{\beta_\kappa x}G(t)$ для п.3.

9. Знаходимо іншу невідому функцію, яку виражали через уже знайдену функцію $W(x,t)$ у п.2 та знаходимо другий розв'язок системи.
10. В отриманих у п.8 та п.9 розв'язках за допомогою лінійної заміни перейдемо від проміжку біортогональності [-1,1] до проміжку розв'язання задачі.

Другий розділ присвячено постановці математичних моделей процесів масопереносу та формулюванню основних вимог до них. Обгрунтовано необхідність при розв'язуванні задач математичної фізики застосування методу розділення змінних в базисі біортогональних функцій. Для наближено-аналітичної та наближеної моделей описано загальні схеми розв'язування крайових задач у базисі біортогональних многочленів.

Третій розділ присвячено побудові та чисельній реалізації квазіспектральних та біортогональних функцій, які дають можливість при розв'язуванні задач математичної фізики підвищити точність, ефективність та автоматизацію одержаних розв'язків. Дослідженню властивостей побудованих квазіортогональних та біортогональних функцій. Для підтвердження теоретичних викладок наведено числові експерименти.

– Сформульовано задачі на власні значення оператора

$$\pi_1^\infty \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{x_1} : \tilde{L}_{2,1}[-1,1] \to \tilde{L}_{2,\varpi}[-1,1].$$

Побудовано рекурентну формулу для знаходження характеристичного поліному та знаходження власних значень описаного оператора та проведено їх оцінку. Описано формулювання квазіспектральних та спряжених квазіспектральних задач.

Квазіспектральна задача для інтегрального оператора: для заданого $n=1,2,...$ знайти такі значення параметра λ, при яких рівняння

$$\int_{-1}^{x} dx_1 \int_{-1}^{x_1} U(x_2)dx_2 = -\lambda U(x) + \tau_1 T_{n+1}(x) + \tau_2 T_{n+2}(x) + w_0 T_0(x)$$

має ненульові поліноміальні розв'язки $U=U(x)\in \tilde{L}_{2,1}[-1,1]$ степеня $\le n$.

Квазіспектральна задача для диференціального оператора: для заданого $n=1,2,...$ знайти такі значення параметра $\bar{\lambda}$, при яких рівняння

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\bar{\lambda}V(x) + \bar{\tau}_1\frac{dT_{n+1}(x)}{dx} + \bar{\tau}_2\frac{dT_{n+2}(x)}{dx}$$

має ненульові поліноміальні розв'язки $V=V(x)\in \tilde{L}_{2,0}[-1,1]$ степеня $\le n+1$.

Сформульовано та розв'язано спряжені квазіспектральні задачі для інтегрального та диференціального операторів.

– Розроблено алгоритми побудови квазіспектральних $U_{2j}^{n}(x)$, $U_{2j-1}^{n-1}(x)$ та біортогональних $\bar{U}_{2j}^{n}(x)$, $\bar{U}_{2j-1}^{n-1}(x)$, $n=2s$, $j=1,...,s$, поліномів. Доведено їх біортогональність та отримано основні властивості.

Подано поліноми Чебишева та їх другі похідні через квазіортогональні функції, а також знайдено параметри $\bar{\tau}_{2i}^{n}$, $\bar{\tau}_{2i-1}^{n}$, τ_{2i}^{n}, τ_{2i-1}^{n}, які доповнюють побудовані поліноми до повної біортогональної системи.

Твердження 1. Для квазіспектральних поліномів, які представлені у вигляді $\bar{U}_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}}(x)=\sum_{j=1}^{s}\bar{c}_{2j-\bar{i}}^{2i-\bar{i}}T_{2j-\bar{i}}(x)$, параметр $\bar{\tau}_{2i-\bar{i}}^{n}$ знаходиться за формулою

$$\bar{\tau}_{2i-\bar{i}}^{n}=\frac{\bar{c}_{2s-\bar{i}}^{2i-\bar{i}}}{4\left(2s-\bar{i}\right)\left(2s+1-\bar{i}\right)}.$$

Знайдено рекурентну формулу для коефіцієнтів розкладу многочленів Чебишева в ряд за побудованими функціями.

Твердження 2. Для квазіспектральних поліномів, які представлені у вигляді $U_{2i-\bar{i}}^{2s-\bar{i}}(x)==\sum_{j=1}^{s}c_{2j-\bar{i}}^{2i-\bar{i}}\tilde{T}_{2j-\bar{i}}(x)$, параметр $\tau_{2i-\bar{i}}^{n}$ знаходиться за формулою

$$\tau_{2i-\bar{i}}^{n}=c_{2s-\bar{i}}^{2i-\bar{i}}\Big/\left[4\left(2s+1-\bar{i}\right)\left(2s+2-\bar{i}\right)\right].$$

Ряди Фур'є-Чебишева подаються через біортогональні розклади.

У третьому розділі описано алгоритми знаходження квазіспектральних та біортогональних функцій, що були використані в роботі. Подано поліноми Чебишева та їх похідні через біортогональні функції. Знайдено рекурентні формулу для коефіцієнтів розкладу многочленів Чебишева в ряд за біортогональними та квазіортогональними функціями. Знайдено параметри нев'язки.

У **четвертому розділі** апробовано побудовані в роботі на базі поліномів Чебишева першого роду повної системи біортогональних поліномів на модельній задачі типу теплопровідності. Запропоновано методи розв'язування задач математичної фізики, зокрема для знаходження розподілу тиску в трубопроводі та значення масової витрати для трубопроводу, а також для знаходження розподілу тиску у воді в пластах підземних сховищ газу. Досліджено спосіб розв'язування задач методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів. Розв'язки задач знайдено у вигляді суми ряду біортогональних та квазіортогональних поліномів. Проведений порівняльний аналіз для різних значень параметрів. Вивчено вплив параметрів методів. Зокрема порядку часткової суми (методу), розрядної сітки (машинної похибки) та похибки вхідних даних на точність обчислення отриманих розв'язків.

Задачі, які розв'язано та досліджено у роботі.

1. ***Модельна задача.*** Необхідно знайти розподіл функції $f(x,t)$ для довільного часу t, $t>0$, на проміжку $x\in[-1,1]$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=0,$$

за наступних крайових умов: $f(x,0)=0$, $f(-1,t)=\sqrt{\pi}\Big/\left(a\sqrt{t}\right)$, $f(1,t)=0$.

Розв'язок задачі знайдено у вигляді

$$\tilde{F}_{n+1}(x,t)=\sum_{\bar{i}=0}^{1}\sum_{i=1}^{s}(-1)^{\bar{i}}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2i-1+\bar{i}}}{2^{2\bar{i}+1}\sqrt{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}}N_{2i-\bar{i}}^{n}}\exp\left(-\frac{a^2}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}}t\right)\left(V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)+(-1)^{\bar{i}}\tau_{2i-1+\bar{i}}^{n}T'_{n+1+\bar{i}}(x)\right)\times$$

$$\times\int_{0}^{\frac{a}{\sqrt{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}}}\sqrt{t}}e^{q^2}dq,$$ де $\bar{i}=0$ – для парних функцій та $\bar{i}=1$ – для непарних функцій. Результати обчислень подані у таблицях, зокрема при $n=8$, $a=0{,}5$ з точністю обчислень 10^{-8} в табл. 1.

Таблиця 1.

Значення шуканого розв'язку за різних значень часу t та координати x

x_i	$t=0,5$	$t=1$	$t=10$	$t=50$	$t=100$	$t=500$
Точне значення -1	5,0132566	3,5449078	1,1209983	0,50132568	0,35449078	0,15853310
-1	5,0119420	3,5468288	1,1211398	,50149199	,35477064	,15928751
-,4	2,4412196	2,4729552	,85962547	,35593443	,24987556	,11114569
0	,67669312	1,3038416	,64255998	,25594976	,17906362	,079416826
,4	,10144246	,49510018	,39774847	,15425459	,10766902	,047673168
1	-,0116674	,00102866	-,00012446	-,00024159	-,000270306	-,000276427

Проаналізовано вплив різного типу похибок (вхідних даних, методу та машинної) на результат обчислень.

Отримані результати підтверджують ефективність застосування біортогональних поліномів для розв'язування задач математичної фізики. На обчислення наближеного розв'язку задачі суттєвий вплив має не лише кількість доданків n суми відповідного ряду, але й точність обчислення. У ході обчислювального експерименту, знайдено, що при $n \ge 26$ для $t=10$ абсолютна похибка зростає. Зростання похибки спостерігається також при $n \ge 20$ для $t=100$, $t=500$. В таких випадках слід збільшити точність обчислень, оскільки, з точністю обчислення 10^{-32} спостерігається накопичення похибок.

2. Модель 1. Модель процесу руху газу в трубопроводі.

Розв'язок задачі знайдено у вигляді

$$\omega(y,t) = e^{-\frac{ld_3}{4}\frac{2y-l}{l}} \sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(y) G_i(t),$$

$$p(y,t) = -\frac{2c^2}{l} e^{-\frac{ld_3}{4}\frac{2y-l}{l}} \sum_{i=1}^{n+2} \left(-\frac{ld_3}{4} V_i^{n+\bar{i}}(y) + U_{i-(-1)^{\bar{i}}}^{n-\bar{i}-(-1)^{\bar{i}}}(y) \right) \int_0^t G_i(t)\,dt + p(y,0).$$

Постійні, що входять у розв'язок, визначено аналітично і залежать від вхідних параметрів.

Обчислювальний експеримент проводився при $l = 100000\,м$, $\alpha_к = 0$, $\chi = 0.01$, $z = 0.908$, $R = 500\,Дж/кг^\circ К$, $D = 1.4\,м$, $T = 300^\circ К$, $q_0 = 894\,м^3/с$, $q_{0n} = 993\,м^3/с$, $q_l = 894\,м^3/с$, $q_{ln} = 993\,м^3/с$, $p_0 = 70\ атм$, $p_1 = 58.4\ атм$, $\rho_s = \rho_0 = 0.682\ кг/м^3$, $\upsilon_1 = 6\ м/с$, $\upsilon_2 = 12\ м/с$, $\gamma_0 = 0.00069$, $\gamma_l = 0.00075$, $c = 500\ м/с$, $\Delta x = 5000\,м$, $\Delta t = 600\,с$. Окремі результати подані у табл. 2 та рис.1 і рис.2.

Таблиця 2.

Значення тиску за різних значень часу t, координати y та n (t у секундах)

t	$y=10000$	$y=30000$	$y=60000$	$y=90000$
	$n=2,4,6,10,\ 14,18,20$	$n=2,4,6,10,$ $14,18,20$	$n=2,4,6,10,$ $14,18,20$	$n=2,4,6,10,$ $14,18,20$
0	68.93	66.74	63.31	59.68
600	68.92	66.73	63.30	59.68
3600	68.83	66.64	63.22	59.60
4200	68.82	66.63	63.21	59.59
6000	68.80	66.62	63.20	59.58

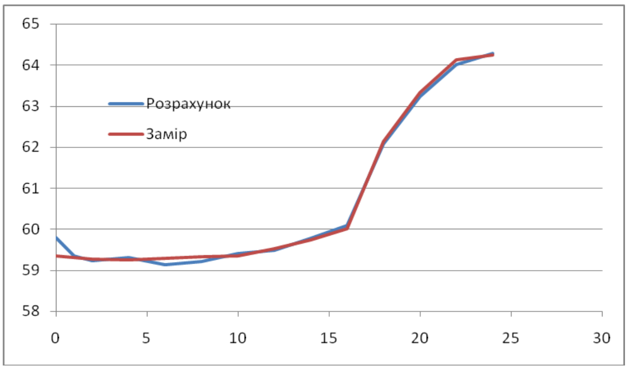

Рис.1. Значення тисків розрахованих і заміряних на віддалі 40 км від початку

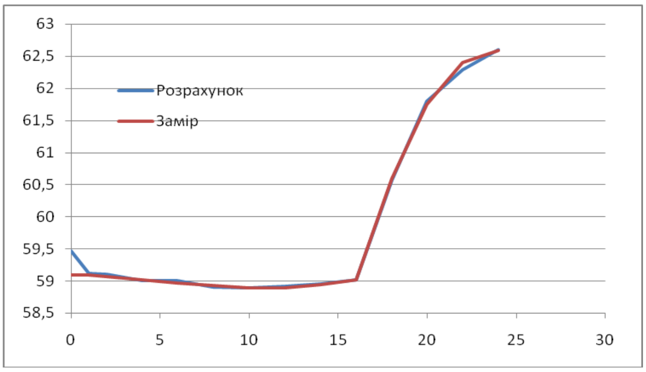

Рис. 2. Значення тисків розрахованих і заміряних на віддалі 60 км від початку

З результатів обчислень випливає, що зміна границь зміни швидкості руху газу υ_1 та υ_2, на основі яких проводиться двочленна лінеаризація, практично не впливає на кінцевий результат. Обчислені значення масової витрати та тиску за різних значень часу t, координати y та порядків n поліномів Чебишева, на базі яких будуються біортогональні поліноми. Оскільки порядок поліномів n мають незначний вплив, то для зменшення часу обчислень доцільно вибрати поліноми Чебишева невеликих порядків.

Досліджено вплив зміни гідравлічного опору χ та вхідного тиску на результати обчислень розподілу масової витрати та тиску вздовж трубопроводу. Як показує аналіз цих результатів, побудований метод розв'язування задач математичної фізики є стійким до похибок вхідних даних.

3. *Модель 2. Знаходження розподілу тиску у воді.*

Розв'язок задачі знайдено у вигляді

$$p(y,t)=\sum_{i=1}^{n+2} V_i^{n+\bar{i}}(y)\left(\frac{\bar{c}_{1+\bar{i}}^{\,i+(-1)^{\bar{i}+1}}\pi}{2^{2\bar{i}+2}N_i^n}\left(\varphi_2+(-1)^i\varphi_1\right)\left(1-e^{-\frac{4\kappa}{l^2\lambda^n_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}}t}\right)+G_i(0)\,e^{-\frac{4\kappa}{l^2\lambda^n_{i+(-1)^{\bar{i}+1}}}t}\right).$$

Обчислювальний експеримент проводився для $k=4\cdot10^{-12}$, $\mu=1{,}1\cdot10^{-6}\left(\text{м}^2/\text{с}\right)$, $\alpha_в=0{,}8$, $m=0{,}28$, $p_0=6{,}864655(МН/м^2)$, $p_1=5{,}3936575(МН/м^2)$, $\rho=998\left(\text{кг/м}^3\right)$, $g=9{,}8\left(\text{м/с}^2\right)$, $h_0=541(\text{м})$ подано в табл. 3.

Таблиця 3.

Значення тиску води у безмежному шарі товщини $l=10м$ за різних значень часу t і координати $y(метрів)$ при $n=10$, значення t у таблиці вказано в годинах

t	y								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
720	68.1024	66.2438	64.4597	62.7777	61.2156	59.7792	58.4621	57.2462	56.1038
1440	68.4502	66.9053	65.3697	63.8469	62.3390	60.8469	59.3697	57.9053	56.4502
2160	68.4938	66.9881	65.4837	63.9808	62.4798	60.9808	59.4837	57.9881	56.4938
2880	68.4992	66.9985	65.4980	63.9976	62.4975	60.9976	59.4980	57.9985	56.4992

Висновки, які можна зробити з одержаних результатів, наступні.

Отримані числові значення тиску підтверджують достовірність отриманих теоретичних результатів та ефективність застосування побудованих біортогональних поліномів для розв'язування задач математичної фізики. Запропонований алгоритм легко піддається автоматизації і може бути ефективно використаний для розв'язання інших практичних задач.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальне наукове завдання − розроблення адаптивних аналітико-числових математичних моделей руху газу в трубопроводах та природних пористих утвореннях, які відповідають практичним завданням керування потокорозподілом газу, та розроблення адаптивних методів розрахунку цих моделей, орієнтованих на використання апріорної інформації про шукані розв'язки.

1. Зроблено аналіз використовуваних математичних моделей процесів руху газу в технологічних об'єктах ГТС та їх відповідність практичним критеріям, які ставляться перед ними на цей час. У зв'язку з підвищенням вимог до обчислення режимних параметрів показано необхідність побудови нових і уточнення існуючих моделей і методів для використання результатів у задачах керування процесом масопереносу.
2. Побудовано адаптивні числово-аналітичні моделі масопереносу в технологічних об'єктах ГТС (зокрема трубопроводах та пористих середовищах). Граничні та початкові умови будуються на базі експериментальних даних, які зазнають попередньої обробки.
3. Вперше побудовано квазіспектральні та біортогональні поліноми, описано алгоритми їх побудови, досліджено їх властивості. Знайдено коефіцієнти нев'язки τ_1 та τ_2 для рівняння, що описує квазіспектральну задачу у випадку інтегрального оператора окремо для парних та непарних поліномів, а також $\overline{\tau}_1$ та $\overline{\tau}_2$ у випадку диференціального оператора.
4. Вперше створено нові аналітично-наближені та наближені методи для вирішення газодинамічних задач у базисі біортогональних поліномів. Вивчено вплив параметрів методів, зокрема порядку часткової суми, розрядної сітки та похибки обчислення на точність отриманих розв'язків. Методи апробовані на модельній задачі типу теплопровідності.
5. Вперше досліджено спосіб розв'язування задач математичної фізики методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів, проведено порівняльний аналіз для різних вхідних параметрів.
6. На базі розробленого методу побудовано адаптивні алгоритми розрахунку режимних параметрів транспорту газу з метою мінімізації енергетичних ресурсів та оптимізації роботи ГТС за різними критеріями.
7. Обґрунтовано ефективність розвинених алгоритмів та застосування побудованих біортогональних поліномів для розв'язування задач математичної фізики, зокрема, задач газогідродинаміки:

- отримані біортогональні поліноми $V_i^{n+\overline{i}}\left(x\right),\ i=1,...,n$ такі, що при знаходженні розв'язків наведених задач, саме у вигляді суми ряду по знайдених біортогональних функціях дістанемо діагональну матрицю для знаходження невідомих коефіцієнтів ряду, з якої відразу ж отримуємо невідомі величини (при знаходженні розв'язків цих же задач у вигляді рядів Фур'є-Чебишева дістаємо трикутну матрицю, а у випадку степеневих рядів − дводіагональну матрицю; у цих випадках для знаходження невідомих коефіцієнтів потрібно виконати більше арифметичних операцій, затратити більше часу, а, отже, накопичити більшу машинну похибку; у випадку використання степеневих рядів, цей метод має меншу збіжність у порівнянні з описаними двома іншими методами);
- отримані біортогональні поліноми $V_i^{n+\overline{i}}\left(x\right)$ володіють властивостями: $V_i^{n+\overline{i}}\left(\pm1\right)=0$, що дає змогу відразу ж з крайових умов знаходити невідомі два коефіцієнти;

- побудовані квазіспектральні поліноми є похідними першого порядку від біортогональних многочленів (ця властивість є дуже важливою, при диференціюванні функції представленої у вигляді суми ряду через біортогональні поліноми чи інтегруванні функції представленої у вигляді суми ряду через квазіспектральні поліноми; коефіцієнти при цьому залишаються незмінними, а лише змінюються функції при них, які є відомими);
- слід зазначити, що саме при застосуванні знайдених біортогональних многочленів до розв’язування поставлених задач позитивним є те, що параметри: $\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2i-1+\bar{i}}$, $\lambda_{2i-1+\bar{i}}^{n}$, $N_{2i-\bar{i}}^{n}$, $\tau_{2i-1+\bar{i}}^{n}$, які входять в одержані розв’язки, можуть бути обчислені з довільною точністю і знайдені з алгоритму побудови біортогональних функцій (для довільного натурального числа n можна побудувати бази даних із значеннями цих параметрів і використовувати їх під час обчислення розв’язку, що теж економить час).

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Pyanylo Ya. Methods of finding distribution of pressure in the pipeline / Ya. Pjanylo, V. Sobko // Mathematical Modeling and Computing. – 2016. – Vol. 3, No. 2. – P. 199-207.
2. Pyanylo Ya. The pressure distribution in water in the complex porous environments investigat / Ya. Pjanylo, V. Sobko, O. Bratash // Mathematical Modeling and Computing. – 2017. – Vol. 4, No. 2. – P. 187-196.
3. П’янило Я. Д. Побудова та дослідження біортогональних поліномів на базі многочленів Чебишева / Я. Д. П’янило, В. Г. Собко // Прикл. проблеми мех. і мат. − 2013. − Вип. 11. − С. 135-141.
4. Собко В. Г. Побудова та дослідження алгоритму розв’язування задач математичної фізики за допомогою біортогональних поліномів / В. Г. Собко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2015. − Вип. 4. – С. 176-180.
5. П’янило Я. Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів / Я. П’янило, В. Собко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. − 2014. − Вип. 19. − С. 146-156.
6. П’янило Я. Дослідження стійкості спектрального методу визначення розподілу тиску вздовж трубопроводу в нестаціонарному випадку в базисі біортогональних поліномів / Я. П’янило, В. Собко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. − 2016. − Вип. 24. − С. 86-92.
7. П’янило Я. Д. Оптимальні квадратурні формули в базисах квазіортогональних многочленів / Я. Д. П’янило, В. Г. Собко // V Всеукр. наук. конф. “Нелінійні проблеми аналізу” присвяченої пам’яті професора Василишина Б.В. (19-22 вересня 2013 р.): Тези доп. − Івано-Франківськ, 2013. – С. 62-63.
8. П’янило Я. Д. Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів / Я. Д. П’янило, В. Г. Собко // XIII Міжнар. наук.-техн. конф. “Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об’єктів” (7-9 листопада 2014 р.): Матер. конф. – Кременчук, 2014. – С. 48-49.
9. П’янило Я. Д. Застосування біортогональних розкладів для рішення рівнянь параболічного типу / Я. Д. П’янило, В. Г. Собко // Міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (19-22 лютого 2015 р.): Матер. конф. – Рівне, 2015. – С. 138.
10. П’янило Я. Д. Застосування квазіортогональних поліномів в задачах обробки цифрової інформації та математичного моделювання / Я. Д. П’янило, В. Г. Собко, Г. М. П’янило // XI Міжнар. наук. конф. “Моделювання та інформаційні технології у

фізичному вихованні і спорті” (12-15 травня 2015 р.): Матер. XI Міжнар. наук. конф. – Львів – Харків : Львів. держ. ун-т фіз. культури, Харк. нац. пед. ун-т ім. Г.С. Сковороди. − Харків : «ОВС», 2015. – С. 88-92.

11. Лянце Г. Т. Апроксимація функцій ортогональними та біортогональними рядами / Г. Т. Лянце, В. Г. Собко, Г. М. П’янило // IV наук.-техн. конф. “Обчислювальні методи і системи перетворення інформації” (28-30 вересня 2016 р.): Матер. IV наук.-техн. конф. – Львів : ФМІ, 2016. – С. 72-75.
12. П’янило Я. Д. Використання спектральних розкладів в задачах математичної фізики / Я. Д. П’янило, Г. Т. Лянце, Г. М. П’янило, О. Б. Браташ, В. Г. Собко // XXII Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (5-7 жовтня 2016 р.): Зб. наук. праць. – Львів : ЛНУ, 2016. – С. 165-168.
13. П’янило Я. Методи розв’язування крайових задач з використанням дробових похідних за часом / Я. П’янило, Г. П’янило, О. Браташ, В. Собко // Міжнар. наук.-практ. конф. “Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання” (15-20 травня 2017 р.): матеріали конференції. – Івано-Франківськ, 2017. – С. 418-421.

АНОТАЦІЇ

Собко В. Г. Числово-аналітичні моделі процесів масопереносу на базі біортогональних многочленів. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Національний університет “Львівська політехніка”, Міністерство освіти і науки України, Львів, 2018.

Розв’язано актуальну наукову задачу − розроблення адаптивних аналітико-числових математичних моделей руху газу в трубопроводах та природних пористих утвореннях, які відповідають практичним завданням оптимізації потокорозподілу газу за критеріями раціонального споживання, та адаптивних методів розрахунку цих моделей, орієнтованих на використання апріорної інформації про шукані розв’язки. На основі аналізу нових практичних задач, зокрема виявлення витоків газу та оцінки об’ємів газу розчиненого у водах, які є наявні в пластах підземних сховищ, показана необхідність уточнення відповідних математичних моделей та методів розв’язування сформульованих крайових задач. В даній роботі побудовано квазіспектральні поліноми та повні біортогональні системи. На цій базі розроблені методи та відповідні алгоритми для розв’язування крайових задач масопереносу. Розроблені способи розв’язування апробовано на модельних задачах.

Ключові слова: математична модель, нестаціонарний процес, спектральний метод, похибка обчислення, рух газу в трубопроводі, природне пористе середовище, біортогональні поліноми, адаптивний метод.

Собко В. Г. Численно-аналитические модели процессов массопереноса на базе биортогональных многочленов. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделлирование и вычислительные методы. − Национальный университет "Львивська политэхника", Министерство образования и науки Украины, Львов, 2018.

Решена актуальная научная задача - разработка адаптивных аналитико-численных математических моделей движения газа в трубопроводах и природных пористых образованиях, которые соответствуют практическим задачам оптимизации потокораспределения газа по критериям рационального потребления, и адаптивных методов расчета этих моделей, ориентированных на использование априорной информации об искомом решении.

На основе анализа новых практических задач, в частности обнаружения утечек газа и оценки объемов газа растворенного в водах, имеющихся в пластах подземных хранилищ, показана необходимость уточнения соответствующих математических моделей и методов решения сформулированных краевых задач. В данной работе построены квазиспектральные полиномы и полные биортогональные системы. На этой базе разработаны методы и соответствующие алгоритмы для решения краевых задач массопереноса. Разработаны способы решения апробированы на модельных задачах.

Ключевые слова: математическая модель, нестационарный процесс, спектральный метод, погрешность вычисления, движение газа в трубопроводе, естественная пористая среда, биортогональные полиномы, адаптивный метод.

Sobko V. G. Numerical-analytical models of the mass transfer processes on the biorthogonal polynomials basis. – On the rights of manuscript.

The dissertation of the degree of the technical sciences candidate for the speciality 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2018.

The actual scientific problem – the development of adaptive analytical-numerical mathematical models of gas motion in the pipelines and in the natural porous formations, which correspond to the practical tasks of the gas distribution optimization according to the criteria of rational consumption and the development of adaptive methods of calculation of these models which are oriented to use apriori information about the desired solutions, is solved.

Based on the analysis of new practical problems, in particular the detection of gas leaks and the estimation of volumes of gas dissolved in the water, which is available in the layers of underground storages, which emerge during the gas transportation process, the need to refine the known mathematical models of the gas motion processes in technological objects and the known metods of corresponding boundary value problems solving or to construct new ones to provide the obtaining the required accuracy of the results during a reasonable time is shown.

In this work, the quasi-spectral polynomials and the complete biorthogonal systems are constructed. Their properties are researched and expansions of biorthogonal Chebyshev polynomials of the first kind and their derivatives using quasi-spectral and biorthogonal functions are found; as well as Fourier-Chebyshev series representations using biorthogonal expansions are obtained.

On the basis of the constructed biorthogonal bases, the methods and accordant algorithms for boundary problems solving, which are used to describe a lot of physical processes, in particular the mass transfer of hydrocarbons in the pipelines and porous natural media, are developed.

The way of solving problems by the method of separating variables on the biorthogonal polynomials basis is investigated. Approximate-analytical and approximate solutions of the mass transfer problems are found.

The way of solving is tested both on the examples of known functions expansion and on the model problems, the solutions of which are known in analytical form. This is done to research the method efficiency and its parameters influence on the accuracy and adequacy of the desired solution. Since the problems of such type are incorrect according to Tikhonov, then the researches of such type are actual because they allow us to construct the regularizing algorithms. Note that apriori information about the process studied, which is sufficiently simple taken into account in the constructed method, makes a significant contribution into the construction of the regularizing algorithms.

Key words: mathematical model, nonstationary process, spectral method, calculation error, gas motion in pipeline, natural porous medium, biorthogonal polynomials, adaptive method.

Підписано до друку 25.04.2018 р.
Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк цифровий. Умовн. друк. арк. 0,9.
Наклад 100 прим. Зам. № 60

ТзОВ «Растр-7»
79005, м. Львів, вул. Кн. Романа, 9/1
тел./факс: (032) 235-52-05
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ЛВ №22 від 19.11.2002 р.