

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА  
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**РОМАШКО ВАСИЛЬ МИКОЛАЙОВИЧ**

УДК 624.012.45:620.17

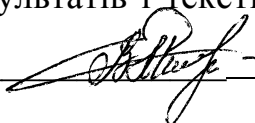
**ДИСЕРТАЦІЯ**

**ДЕФОРМАЦІЙНО-СИЛОВА МОДЕЛЬ ОПОРУ  
БЕТОНУ ТА ЗАЛІЗОБЕТОНУ**

05.23.01 – Будівельні конструкції, будівлі та споруди  
19 – Архітектура та будівництво

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 - В. М. РОМАШКО

Науковий консультант Бабич Євгеній Михайлович, доктор технічних наук, професор

Рівне - 2017

## АНОТАЦІЯ

**Ромашко В.М. Деформаційно-силова модель опору бетону та залізобетону.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.23.01 «Будівельні конструкції, будівлі та споруди» (192 – Будівництво та цивільна інженерія). Національний університет водного господарства та природокористування. – Національний університет «Львівська політехніка», Львів, 2017.

Розроблено узагальнену деформаційно-силову модель опору і найважливіші положення загальної теорії деформування бетонних та залізобетонних елементів, що зазнають довільного згину, стиску чи розтягу. В основу запропонованої деформаційно-силової моделі закладено універсальну діаграму реального стану залізобетонних елементів  $M - 1/r$ .

Вперше континуальну залежність  $M = f(1/r)$  отримано аналітичним шляхом на підставі гіпотези «нелінійності» жорсткості. Остання, разом з гіпотезами граничної рівноваги та плоских перерізів, забезпечила функціональну єдність діаграм реального стану залізобетонних елементів з діаграмами деформування бетону та повну методологічну єдність їх розрахунків за граничними станами. Залежність  $M = f(1/r)$  за певних вихідних умов трансформується в діаграму стану бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$ . Вона, разом з отриманою функцією граничних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu} = f(\varepsilon_{si}, \rho_{li}, x_{si}, m_h, m_b)$ , сприяє розкриттю внутрішньої статичної невизначеності залізобетонних елементів та дозволяє уникнути численних ітераційних операцій в їх розрахунках.

В рамках деформаційно-силової моделі всі розрахунки залізобетонних елементів в найбільш напруженому (осередненому) перерізі виконуються з урахуванням їх нелінійного деформування шляхом вирішення замкнутої системи рівнянь механіки деформованого твердого тіла. Обґрунтовано з фізичної точки зору пропозиції щодо вибору критеріїв вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів та визначення основних параметричних

точок діаграм деформування бетону. Запропоновано раціональні способи врахування впливу розтягнутого бетону на загальний стан залізобетонних елементів. Розроблено методику розрахунку ширини розкриття нормальних тріщин і відстані між ними з урахуванням не тільки зчепленням арматури з бетоном, а й зміни напружень вздовж осі арматури. Завдяки універсальній залежності  $M = f(1/r)$  отримано замкнуті рішення щодо визначення кривини та розрахунку прогинів залізобетонних елементів різними методами.

Запропоновано спрощені методи розрахунку залізобетонних елементів, в основу яких теж закладено універсальну діаграму їх стану. Використання аналітичної залежності  $M = f(1/r)$  дозволило максимально наблизити деформаційно-силову модель їх опору до моделей МСЕ та одночасно зберегти відносну простоту програмного забезпечення та можливість інженерної реалізації більшості розрахунків за компактними алгоритмами.

Отримані результати дисертаційних досліджень знайшли застосування в практиці проектування низки будівельних об'єктів. На їх основі розроблені відповідні рекомендації, що прийняті до впровадження в нормативні документи.

У **вступі** визначені актуальність, мета та задачі досліджень, викладені загальна характеристика, наукова новизна та практична значимість роботи.

**Перший розділ** присвячено огляду етапів розвитку теорії деформування бетонних та залізобетонних елементів, ретельному аналізу сучасного стану експериментально-теоретичних досліджень, пов'язаних з розвитком деформаційних моделей. На його основі окреслено напрямок наукових досліджень і шляхи вирішення найважливіших задач дисертаційної роботи.

У **другому розділі** викладено найважливіші положення розробленої деформаційно-силової моделі опору бетону та залізобетону, в основу якої закладено діаграми реального стану залізобетонних елементів «момент-кривина». Універсальну залежність останньої отримано на підставі гіпотези «нелінійності» жорсткості та доведено можливість її трансформації в діаграму стану бетону чинного Єврокод-2. Продемонстровано, як подібна трансформація діаграм в деформаційно-силовій моделі забезпечує розкриття

внутрішньої статичної невизначеності поперечного перерізу залізобетонних елементів та методологічну єдність їх розрахунків за граничними станами. Окреслено низку характерних задач, вирішення яких доцільно здійснювати з допомогою діаграм стану «момент-кривина». Детально обґрунтовано застосування критеріїв граничного стану залізобетонних елементів.

**Третій розділ** присвячено дослідженням найвагоміших закономірностей деформування бетону в неармованих елементах на основі висунутої гіпотези «нелінійності» жорсткості. Доведено, що реалізація останньої за допомогою модуля деформацій дозволяє отримати діаграму стану бетону, закладену в Єврокод-2. Критичні деформації стиснутого бетону для цієї діаграми запропоновано визначати за пружною і пластичною складовими. Застосування критерію Ферма до діаграми «момент-кривина» дозволило отримати залежність з прогнозування граничних деформацій стиснутого бетону.

**У четвертому розділі** висвітлено основні положення загальної теорії деформування залізобетонних елементів за прийнятою деформаційно-силовою моделлю їх опору. Зазначено, що деформування бетону в залізобетонних елементах багато у чому близьке або подібне до його деформування в бетонних аналогах. Однак завдяки арматурі бетон в перерізі таких елементів, навіть за їх осьового навантаження, може працювати не тільки на висхідних, але і на низхідних вітках діаграми його стану. Отримано універсальну функцію з визначення рівня граничних деформацій бетону залежно від ступеня неоднорідності його деформування в перерізі та параметрів армування залізобетонного елемента.

**П'ятий розділ** присвячено розрахунку нормальних перерізів залізобетонних елементів за граничними станами першої групи. Отримані відповідні залежності для розрахунку плоскозігнутих та позацентрово стиснутих елементів, розроблені точні та наближені методи розрахунку косозігнутих і косостиснутих елементів для випадків: повного використання міцнісних властивостей всіх арматурних стержнів; пружного деформування всіх арматурних стержнів; досягнення межі текучості лише в частині



арматурних стержнів та за відсутності такої в інших.

У шостому розділі викладено основні положення розрахунку нормальних перерізів залізобетонних елементів за граничними станами другої групи. Завдяки діаграмі стану «момент-кривина» прогини та ширину розкриття нормальних тріщин залізобетонних елементів пов'язано з найважливішими параметрами їх напружено-деформованого стану (у тому числі з параметрами зчеплення арматури з бетоном) через систему рівнянь механіки деформованого твердого тіла, чим суттєво підвищено ефективність відповідних розрахунків. Запропонована залежність з визначення коефіцієнта, що враховує профіль арматури за критерієм Рема.

У сьомому розділі наведені основні види задач з розрахунку залізобетонних елементів та коротко описана послідовність їх розв'язку. Достовірність розроблених методів розрахунку залізобетонних елементів за деформаційно-силовою моделлю опору підтверджено експериментально-статистичною оцінкою результатів розрахунку більше 360-ти елементів, випробуваних вітчизняними та закордонними дослідниками.

**Ключові слова:** залізобетонні елементи, модель опору, жорсткість, діаграми стану, граничні деформації, несуча здатність, тріщиностійкість, прогини.

## ABSTRACT

**Romashko V. Deformation and force model of concrete and reinforced concrete resistance.** – Qualification scientific work as a manuscript.

The thesis for the degree of doctor of technical sciences, specialty 05.23.01 – Building constructions, buildings and structures (192 – Construction and civil engineering). National University of Water Management and Nature Recourses Use. – Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2017.

The generalized deformation and force model of resistance and the most important provisions of the general theory of concrete and reinforced concrete elements deformation, experiencing arbitrary bending, compression or tension, are

developed. The basis for the deformation and force model formed is a universal diagram of the real state of the reinforced concrete elements  $M - 1/r$ .

For the first time continuum dependence  $M - 1/r$  is obtained in the analytical way on the basis of rigidity "nonlinearity" hypothesis. The specified hypotheses provided the functional unity of the real state diagrams of reinforced concrete elements with concrete deformation diagrams and complete methodological unity of their calculations for limit states. It is imperative  $M - 1/r$  that the function received at certain original conditions, is transformed into the concrete state diagram  $\sigma_c - \varepsilon_c$ . It together with the received function of compressed concrete limit deformations  $\varepsilon_{cu} = f(\varepsilon_{si}, \rho_{li}, x_{si}, m_h, m_b)$ , promotes disclosing the reinforced concrete elements internal static indeterminacy and avoids numerous iterative operations in the their calculations.

As part of the deformation and force model, all calculations of reinforced concrete elements in the most intense section are carried out taking into account nonlinear deformation in the solution of closed system of equations of the deformable solid body mechanics. The proposals for criteria selection of exhaustion of the bearing strength of reinforced concrete elements and definitions of the main parametric points of concrete deformation diagrams according are grounded from the physical point of view. The rational methods for accounting the effect of stretched concrete on the general condition of reinforced concrete elements are offered. The method of calculation of normal cracks disclosure width and distance between them taking into account not only coupling of reinforcement with concrete, but also tension changes along the axis of armature is developed. Thanks to the universal dependence  $M = f(1/r)$  a closed decisions to the curvature identify and deflections calculations of reinforced concrete elements by the various methods are obtained.

The simplified methods of reinforced concrete elements calculation, which also laid the basis for a universal diagram of their state are offered. Using the analytical dependence  $M = f(1/r)$  allows to approximate deformation and force

model of their resistance to the finite element technique model and to keep at the same time the relative simplicity of the software and the ability to engineering implementation the majority of calculations for compact algorithms.

The obtained results of the dissertation research have found application in design practice of a number of building objects. Appropriate recommendations, adopted for implementation in normative documents, have been developed on their basis.

The **introduction** identifies the relevance, purpose and objectives of the research, sets out the general characteristics, scientific novelty and practical significance of the work.

The **first chapter** is devoted to the review of the development stages of the deformation theory of concrete and reinforced concrete elements, the thorough analysis of the current state of experimental and theoretical studies, related to the deformation models development. The direction of scientific research and solving ways of the most important tasks of dissertation work are outlined on its basis.

In the **second chapter**, the most important provisions of the developed deformation and force model of concrete and reinforced concrete resistance, which are based on diagrams "moment-curvilinear" of the reinforced concrete elements real state, are described. The universal dependence of the latter was obtained on the basis of stiffness "nonlinearity" hypothesis and the possibility of its transformation into a concrete state diagram, laid down in the current Eurocode-2, was proved. It is demonstrated how a similar diagrams transformation in the deformation and strength model provides the disclosure of the internal static uncertainty of the reinforced concrete elements cross-section and the methodological unity of their calculations by the boundary states. A number of characteristic problems, the solution of which it is expedient to carry out with the use of state diagrams the "moment-curvilinear", are outlined. The application of the criteria for the limiting state of reinforced concrete elements is well-grounded.

The **third chapter** is devoted to the study of the most important laws concrete deformation in non-reinforced elements on the basis of the stiffness "nonlinearity" hypothesis. It is proved that the implementation of the latter with the

help of a deformation module allows us to obtain a concrete state diagram laid in Eurocode-2. Critical deformations of compressed concrete for this diagram are proposed to be determined by elastic and plastic components. The application of the Fermat criterion to the state diagram the "moment-curvilinear" allowed to obtain dependence on the prediction of compressed concrete boundary deformations level.

In the **fourth chapter**, the main provisions of the general theory of reinforced concrete elements deformation are considered in accordance with the accepted deformation and force model of their resistance. It is noted that the concrete deformation in reinforced concrete elements is close to or similar to its deformation in concrete analogues. However, due to reinforcement concrete in the section of such elements, even for their axial load, can work not only on the ascending, but also on the descending branches of the diagram of its state. A universal function is obtained for determining the level of concrete boundary deformations, depending on the heterogeneity degree of its deformation in the section and reinforced concrete element reinforcement parameters.

The **fifth chapter** is devoted to the calculation of reinforced concrete elements normal sections at the boundary states of the first group. Appropriate dependencies were obtained for the calculation of plane bent and eccentric compressed elements; precise and approximate methods of oblique bending and oblique compressed elements calculating were developed for cases: full use of strength properties of all reinforcing rods; elastic deformation of all reinforcing rods; achievement of the yield strength only in the part of reinforcing rods and in the absence of such in others.

The **sixth chapter** outlines the basic provisions for the calculation of reinforced concrete elements normal sections at the boundary states of the second group. Due to the state diagram the "moment-curvilinear", the deflections and the normal cracks opening width in the reinforced concrete elements are related to the most important parameters of their stress and strain state (including the parameters of reinforcement adhesion the with concrete) through the equations system of the deformed solid mechanics, which significantly improves efficiency appropriate calculations. The dependence on the coefficient determination, which takes into

account the reinforcement profile according to the Rehm's criterion, is proposed.

The **seventh chapter** presents the main tasks types in the calculation of reinforced concrete elements and briefly describes the sequence of their solution. The reliability of the developed methods for calculating reinforced concrete elements according to the deformation and force model of resistance is confirmed by experimental and statistical of the calculation results estimation of more than 360 elements, tested by domestic and foreign researchers.

**Key words:** reinforced concrete elements, resistance model, stiffness, state diagrams, limit deformations, bearing strength, crack resistance, deflections.

### **СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Ромашко В.М. Деформаційно-силова модель опору бетону і залізобетону: монографія / В.М. Ромашко. – Рівне: О. Зень, 2016. – 424 с.
2. Ромашко В.М. Розрахунок залізобетонних елементів і конструкцій за деформаційно-силовою моделлю: рекомендації / В.М. Ромашко. – Рівне: НУВГП, 2016. – 126 с.

*у наукових періодичних виданнях іноземних держав та у наукових виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз:*

3. Romashko, V. The construction peculiarities of the deformation and power model of concrete and reinforced concrete resistance / V. Romashko, O. Romashko // MATEC Web of Conf. 116, 02028, 1-8 (2017). (*Автору належить модель опору та методика розрахунку*). (SCOPUS).
4. Ромашко В. Н. Критерии исчерпания несущей способности железобетонных элементов и конструкций / В. Н. Ромашко // Budownictwo o zoptymalizowanym potencjale energetycznym: Construction of Optimized Energy Potential. – Częstochowa: Politechniki Częstochowskiej, 2015. – №2(16). – s. 75-83. (Index Copernicus).
5. Бабич Є. М. Особливості розрахунку косозавантажених елементів з використанням діаграм їх стану «момент-кривина» / Є. М. Бабич, В. М. Ромашко // Зб. наук. праць УкрДУЗТ. – Харків: УкрДУЗТ, 2017. – Вип.

171. – С. 62-69. *(Автору належить методика розрахунку)*. (Index Copernicus).
6. Ромашко В. М. Деформування бетону та критерії вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПНТУ, 2014. – Вип. 3 (42), т. 2. – С. 108-114. (Index Copernicus, ResearchBib).
7. Ромашко В. М. Основи розрахунку залізобетонних елементів та конструкцій за деформаційно-силовою моделлю їх опору / В. М. Ромашко // Зб. наук. праць УкрДУЗТ. – Харків: УкрДУЗТ, 2017. – Вип. 168. – С. 103-110. (Index Copernicus).
8. Ромашко В. Н. Обобщенная модель деформирования железобетонных элементов и конструкций / В. Н. Ромашко // International Scientific Journal (Міжнародний науковий журнал), 2016. – № 3. – С. 84-86. (ResearchBib, Google Scholar).
9. Ромашко В. Н. Расчет прогибов сложнодеформирующихся железобетонных элементов и конструкций / В. Н. Ромашко // Міжнародний науковий журнал (International Scientific Journal), 2016. – №10(20), 1 т. – С. 126-129. (ResearchBib, Google Scholar).

*у наукових фахових виданнях України:*

10. Бабич Є. М. Методологія розрахунку залізобетонних елементів за деформаційно-силовою моделлю / Є. М. Бабич, В. М. Ромашко // Наука та будівництво. – 2017. – № 3(13). – С. 16-21. *(Автору належить загальна методологія та методика розрахунку)*.
11. Ромашко В. М. Визначальні особливості деформування бетону в залізобетонних елементах та конструкціях / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП. – 2014. – Вип. 29. – С. 334-340.
12. Ромашко В. М. Гранична деформативність бетону в залізобетонних елементах за осьового стиску / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні

- матеріали, конструкції будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП. – 2008. – Вип. 16(2). – С. 325-331.
13. Ромашко В. М. Гранична деформативність бетону в позацентрово розтягнутих бетонних елементах / В. М. Ромашко, О. В. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип. 2(46), ч.1. – С. 200-205. *(Автору належить модель деформування)*.
  14. Ромашко В. М. Гранична рівновага та граничні стани в деформуванні бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2014. – Вип. 28. – С. 284-289.
  15. Ромашко В. М. Деякі особливості визначення моменту утворення нормальних тріщин в бетонних елементах / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2011. – Вип. 21. – С. 317-322.
  16. Ромашко В. М. Деякі особливості діаграми деформування бетону / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2006. – Вип. 14. – С. 294-301.
  17. Ромашко В. М. До визначення граничних деформацій бетону / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2006. – Вип. 65. – С. 193-198.
  18. Ромашко В. М. Жорсткість залізобетонних елементів і конструкцій за умов неоднорідного деформування / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2010. – Вип. 20. – С. 286-291.
  19. Ромашко В. М. Жорсткість та гранична деформативність бетону в позацентрово стиснутих бетонних елементах / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2008. – Вип. 70. – С. 229-236.
  20. Ромашко В. М. Методика експериментальних досліджень роботи косостиснутих залізобетонних елементів за змінних рівнів навантажень /

- В. М. Ромашко, С. С. Гомон // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне, 2005. – Вип. 12. – С. 280-288. *(Автору належить методика випробувань)*.
21. Ромашко В. М. Напружено-деформований стан косостиснутих залізобетонних елементів за змінних рівнів тривалого навантаження / В. М. Ромашко, С. С. Гомон // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне, 2000. – Вип. 5. – С. 258-262. *(Автору належить методика досліджень)*.
22. Ромашко В. М. Основи деформаційно-силової моделі залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2015. – Вип. 30. – С. 247-254.
23. Ромашко В. М. Основи загальної моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип. 3(47), ч.2. – С. 118-123.
24. Ромашко В. М. Основи загальної теорії деформування бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2012. – Вип. 24. – С. 229-234.
25. Ромашко В. М. Основи та особливості деформування залізобетонних елементів за відцентрового стиску / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2012. – Вип. 23. – С. 403-409.
26. Ромашко В. М. Основи теорії тріщиностійкості залізобетонних елементів та конструкцій / В. М. Ромашко // Теорія і практика будівництва: Вісник НУ «Львівська політехніка». – Львів, 2013. – № 755. – С. 357-363.
27. Ромашко В. М. Особливості деформування відцентрово стиснутих бетонних елементів / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2011.–



Вип. 22. – С. 473-478.

28. Ромашко В. М. Особливості деформування залізобетонних елементів з тріщинами / В. М. Ромашко // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПНТУ, 2009. – Вип. 3(25), т. 3. – С. 153-156.
29. Ромашко В. М. Оцінка роботи розтягнутого бетону в блоці між тріщинами / В. М. Ромашко // Вісник ОДАБА: зб. наук. праць. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. – Вип. №33. – С. 135-139.
30. Ромашко В. М. Повна діаграма деформування бетону в бетонних та залізобетонних елементах / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2007. – Вип. 67. – С. 299-309.
31. Ромашко В. М. Повна діаграма деформування розтягнутого бетону в бетонних та залізобетонних елементах / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип. 18. – С. 296-303.
32. Ромашко В. М. Режими роботи та завантаження стиснутих залізобетонних елементів в реальних умовах / В. М. Ромашко, С. С. Гомон // Вісник УДУВГП: зб. наук. праць. Ч. 3. – Рівне: УДУВГП, 2002. – Вип. 5(18). – С. 47-53. *(Автору належить постановка задач та наукове обґрунтування).*
33. Ромашко В. М. Розрахункова модель утворення тріщин в залізобетонних елементах та конструкціях / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: ДП НДІБК, 2013. – Вип. 78 (ч. 2). – С. 161-168.
34. Ромашко В. М. Тріщиноутворення в залізобетонних елементах та конструкціях за загальною моделлю їх деформування / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2013. – Вип. 25. – С. 418-424.
35. Ромашко В. М. Узагальнена діаграма стану бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Вісник ОДАБА: зб. наук. праць. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2015. – Вип. №57. – С. 387-393.
36. Ромашко В. М. Узагальнений критерій вичерпання несучої здатності

- залізобетонних та сталезалізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПНТУ, 2012. – Вип. 3(33). – С. 202-206.
37. Ромашко В. М. Щодо визначення модуля деформацій бетону / В. М. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2007. – Вип. 4(40), ч. 2. – С. 292-297.
38. Ромашко В. М. Щодо визначення моменту утворення нормальних тріщин в згинальних залізобетонних елементах / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: ДП НДІБК, 2011. – Вип. 74 (ч. 1). – С. 365-372.
39. Ромашко В. М. Щодо екстремального критерію міцності бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Вісник ОДАБА: зб. наук. праць. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2012. – Вип. 46. – С. 305-310.
40. Ромашко В. М. Щодо параметричних точок діаграми деформування бетону / В. М. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2006. – Вип. 4(36), ч. 1. – С. 207-212.
- у виданнях, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:*
41. Ромашко В. М. До розрахунку поздовжньозігнутих залізобетонних елементів / В. М. Ромашко, А. В. Подворний // Вісник УДАВГ: зб. наук. праць. – Рівне: УДАВГ, 1998. – Вип. 1, ч. 2. – С. 171-174. *(Автору належить методика розрахунку).*
42. Ромашко В. Н. Жесткость и кривизна железобетонных элементов и конструкций в обобщенной модели их деформирования / В. Н. Ромашко // *Methods of effective science-based satisfaction of the increasing social needs in the field of engineering, construction and architecture: Peer-reviewed materials digest (collective monograph) published following the results of the CXXIII International Research and Practice Conference and I stage of the Championship in Technical sciences, Architecture and Construction (London, May 12 – May 17, 2016).* – London: IASHE, 2016. – P. 57-59.

43. Ромашко В. Н. Прогибы железобетонных элементов и конструкций по обобщенной модели их деформирования / В. Н. Ромашко // Solving problems of optimal combination of standards of quality, innovative technical solutions and comfort of operation when developing and producing devices and construction objects: Peer-reviewed materials digest (collective monograph) published following the results of the CXXX International Research and Practice Conference and II stage of the Championship in Technical sciences, Architecture and Construction (London, September 13 – September 19, 2016). – London: IASHE, 2016. – P. 41-45.
44. Romashko V. N. The reinforced concrete elements and structures stiffness during their deformation / V. N. Romashko // European Conference on Innovations in Technical and Natural Sciences. Proceedings of the 11th International scientific conference (June 02, 2016). – Vienna: East West, 2016. – P. 64-69.

*у інших виданнях:*

45. Гомон С. С. Розрахунок стиснутих залізобетонних елементів за малоциклових навантажень з використанням деформаційної моделі / С. С. Гомон, В. М. Ромашко, Д. В. Кочкар'юв, С. С. Гомон // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне, 2006. – Вип. 14. – С. 151-158. (*Автору належить постановка задач та методика розрахунку*).
46. Ромашко В. М. Величина критичних деформацій розтягнутого бетону / В. М. Ромашко, О. В. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип. 18. – С. 304-309. (*Автору належить наукове обґрунтування*).
47. Ромашко В. М. Деформування бетону та арматури косостиснутих елементів при дії малоциклових навантажень / В. М. Ромашко, С. С. Гомон // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2006. – Вип. 65. – С. 187-192. (*Автору належить постановка задач та методика досліджень*).

48. Ромашко В. М. До моделей нелінійного деформування бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2016. – Вип. 33. – С. 200-205.
49. Ромашко В. М. Жорсткість та модуль деформацій бетону в деформаційній моделі / В. М. Ромашко // Бетон и железобетон в Украине. – 2007. – № 6. – С. 2-6.
50. Ромашко В. М. Модуль деформацій бетону за дії тривалих та малоциклових навантажень / В. М. Ромашко, О. В. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2008. – Вип. 70. – С. 143-150. *(Автору належить наукове обґрунтування та модель деформування).*

## ЗМІСТ

Перелік умовних позначень, символів, одиниць скорочень, визначень та термінів.....	22
ВСТУП .....	26
РОЗДІЛ 1. РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ДЕФОРМУВАННЯ БЕТОННИХ ТА ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	38
1.1. Загальні етапи розвитку теорії деформування залізобетонних елементів.....	38
1.2. Моделі опору залізобетонних елементів конструкцій силовим впливам.....	41
1.3. Діаграми стану залізобетонних елементів конструкцій.....	46
1.4. Жорсткість залізобетонних елементів.....	49
1.5. Модуль деформацій бетону.....	52
1.6. Діаграми деформування стиснутого бетону.....	53
1.7. Критичні деформації стиснутого бетону.....	59
1.8. Граничні деформації стиснутого бетону.....	61
1.9. Основні закономірності деформування розтягнутого бетону.....	63
1.10. Врахування роботи розтягнутого бетону між тріщинами.....	64
1.11. Кривина залізобетонних елементів.....	68
1.12. Основні методи визначення прогинів.....	69
1.13. Відстань між тріщинами в залізобетонних елементах.....	71
1.14. Ширина розкриття тріщин .....	74
1.15. Висновки .....	76
РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ДЕФОРМАЦІЙНО-СИЛОВОЇ МОДЕЛІ ОПОРУ БЕТОНУ ТА ЗАЛІЗОБЕТОНУ.....	79
2.1. Сутність деформаційно-силової моделі: основні положення, гіпотези та передумови.....	79
2.2. Стадії напружено-деформованого стану залізобетонних елементів.....	85
2.3. Гранична рівновага та граничні стани в деформуванні елементів	91

2.4.	Загальні критерії граничного стану залізобетонних елементів....	94
2.5.	Основи перерозподілу напружень та зусиль в залізобетонних елементах, конструкціях і системах.....	96
2.6.	Основи моделювання роботи бетону.....	102
2.7.	Жорсткість бетонних та залізобетонних елементів.....	104
2.8.	Узагальнена діаграма стану залізобетонних елементів.....	112
2.9.	Зв'язок діаграм стану залізобетонних елементів з діаграмами деформування бетону .....	120
2.10.	Висновки.....	127
<b>РОЗДІЛ 3. ОСНОВНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ</b>		
	<b>БЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ .....</b>	<b>129</b>
3.1.	Загальні положення.....	129
3.2.	Деформування центрально стиснутих елементів.....	131
3.2.1.	Жорсткість бетонних елементів.....	131
3.2.2.	Модуль деформацій бетону.....	133
3.2.3.	Діаграма стану бетону.....	146
3.2.3.1.	Еталонна та режимні діаграми стану бетону .....	146
3.2.3.2.	Параметричні точки діаграм стану бетону .....	153
3.3.	Особливості деформування позацентрово стиснутих елементів..	162
3.4.	Розтягнуті бетонні елементи.....	172
3.4.1.	Центрально розтягнуті елементи.....	172
3.4.2.	Деформування позацентрово розтягнутих елементів.....	177
3.5.	Висновки.....	187
<b>РОЗДІЛ 4. ОСНОВИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ДЕФОРМУВАННЯ</b>		
	<b>ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ.....</b>	<b>189</b>
4.1.	Загальні положення.....	189
4.2.	Основні характеристики деформування арматури.....	192
4.3.	Стиснуті залізобетонні елементи.....	195
4.3.1.	Деформування центрально стиснутих елементів.....	195
4.3.2.	Модель деформування позацентрово стиснутих елементів.....	203

4.3.3.	Особливості деформування косостиснутих елементів.....	206
4.4.	Згинальні елементи.....	214
4.4.1.	Деформування залізобетонних елементів за плоского згину.....	214
4.4.2.	Особливості деформування косозігнутих елементів .....	220
4.5.	Висновки.....	223
<b>РОЗДІЛ 5. РОЗРАХУНОК НОРМАЛЬНИХ ПЕРЕРІЗІВ</b>		
<b>ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА</b>		
<b>ГРАНИЧНИМИ СТАНАМИ ПЕРШОЇ ГРУПИ.....</b>		
		<b>225</b>
5.1.	Основні гіпотези та передумови розрахунку .....	225
5.2.	Розрахунок згинальних елементів.....	226
5.2.1.	Плоский згин.....	226
5.2.1.1.	Перевірка несучої здатності.....	226
5.2.1.2.	Розрахунок площі перерізу арматури.....	231
5.2.2.	Косий згин.....	235
5.2.2.1.	Визначення несучої здатності.....	235
5.2.2.2.	Знаходження площі перерізу арматури.....	243
5.3.	Розрахунок стиснутих елементів.....	244
5.3.1.	Позацентровий стиск.....	244
5.3.1.1.	Визначення несучої здатності.....	244
5.3.1.2.	Розрахунок площі перерізу арматури.....	249
5.3.2.	Косий стиск.....	252
5.3.2.1.	Перевірка несучої здатності.....	252
5.3.2.2.	Визначення площі перерізу арматури.....	262
5.4.	Врахування гнучкості елементів.....	263
5.4.1.	Центрально та позацентрово стиснуті елементи.....	263
5.4.2.	Косостиснуті елементи.....	264
5.5.	Висновки.....	268
<b>РОЗДІЛ 6. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ</b>		
<b>ЕЛЕМЕНТІВ І КОНСТРУКЦІЙ ЗА ГРАНИЧНИМИ</b>		
<b>СТАНАМИ ДРУГОЇ ГРУПИ.....</b>		
		<b>270</b>

6.1.	Загальні положення та основні гіпотези і передумови.....	270
6.2.	Жорсткість та кривина залізобетонних елементів конструкцій...	272
6.3.	Оцінка напружено-деформованого стану залізобетонних елементів на стадіях деформування.....	276
6.4.	Утворення тріщин в залізобетонних елементах.....	278
6.4.1.	Загальні положення .....	278
6.4.2.	Особливості розрахунку утворення тріщин.....	285
6.4.2.1.	Центрально розтягнуті елементи.....	285
6.4.2.2.	Плоскозавантажені елементи.....	285
6.4.2.3.	Косозавантажені елементи.....	286
6.5.	Розвиток та розкриття тріщин в елементах конструкцій.....	289
6.5.1.	Загальні положення .....	289
6.5.2.	Врахування роботи розтягнутого бетону .....	290
6.5.3.	Розрахунок розкриття тріщин.....	292
6.6.	Розрахунок прогинів залізобетонних елементів.....	301
6.6.1.	Методи розрахунку прогинів .....	301
6.6.2.	Згинальні елементи.....	309
6.6.3.	Стиснуті елементи.....	310
6.6.3.1.	Центрально та позацентрово стиснуті елементи.....	310
6.6.3.2.	Косостиснуті елементи.....	313
6.7.	Висновки.....	315
<b>РОЗДІЛ 7. РЕКОМЕНДАЦІЇ З РОЗРАХУНКУ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ.....</b>		
		317
7.1.	Види задач з розрахунку залізобетонних елементів.....	317
7.2.	Послідовність розв'язку задач з розрахунку залізобетонних елементів.....	318
7.2.1.	Загальні положення.....	318
7.2.2.	Розв'язок оберненої задачі.....	319
7.2.2.1.	Визначення та перевірка несучої здатності.....	319
7.2.2.2.	Розрахунок та перевірка утворення тріщин.....	322



7.2.2.3. Розрахунок та перевірка розкриття тріщин.....	323
7.2.2.4. Розрахунок та перевірка розвитку прогинів.....	324
7.2.3. Розв'язок прямої задачі.....	325
7.3. Експериментальна перевірка загальної моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів конструкцій.....	326
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	334
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ.....	337
ДОДАТОК А. До розвитку теорії опору бетону і залізобетону силовим впливам .....	397
ДОДАТОК Б. Рівні граничних деформацій стиснутого та розтягнутого бетону.....	440
ДОДАТОК В. До визначення зусиль в бетоні залізобетонних елементів.....	445
ДОДАТОК Г. Приклади розрахунку залізобетонних елементів конструкцій.....	455
ДОДАТОК Д. Алгоритми розрахунку залізобетонних елементів.....	508
ДОДАТОК Е. Впровадження результатів досліджень.....	516
ДОДАТОК Ж. Список опублікованих праць за темою дисертації .....	523
ДОДАТОК И. Відомості про апробацію результатів дисертації .....	531

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ СКОРОЧЕНЬ, ВИЗНАЧЕНЬ ТА ТЕРМІНІВ

*Визначення та терміни:*

**Граничні деформації стиснутого бетону** – максимальні значення відносних деформацій бетону стиснутої зони в бетонних та залізобетонних елементах і конструкціях на момент втрати ними несучої здатності.

**Діаграма деформування стиснутого бетону** – діаграма, що відображає функціональний зв'язок між напруженнями та відносними деформаціями бетону, отримувана шляхом випробування на стиск стандартних зразків з унормованими геометричними характеристиками за стандартних (унормованих) режимів завантаження.

**Діаграма стану стиснутого бетону** – діаграма, що відображає функціональний зв'язок між напруженнями і відносними деформаціями бетону стиснутої зони в бетонних та залізобетонних елементах і конструкціях залежно від режиму та характеру діючого навантаження.

**Діаграма стану елемента (конструкції)** – діаграма, що відображає функціональний зв'язок між визначальними силовими ( $N$ ,  $M$  і т.п.) та деформаційними ( $\varepsilon$ ,  $1/r$  і т.п.) параметрами поведінки залізобетонного елемента (конструкції) під навантаженням.

**Жорсткість залізобетонного елемента (конструкції)** – загальна інтегральна характеристика, якою визначається причинно-наслідковий зв'язок між визначальними силовими ( $N$ ,  $M$  і т.п.) та деформаційними ( $\varepsilon$ ,  $1/r$  і т.п.) параметрами поведінки залізобетонного елемента (конструкції) під навантаженням.

**Критичні деформації стиснутого бетону** – значення відносних деформацій стиснутого бетону, що відповідають максимальним напруженням в ньому за реальною діаграмою деформування  $\sigma_c - \varepsilon_c$ .

**Модуль деформацій стиснутого бетону (січний)** – інтегральна характеристика (параметр змінної пропорційності), що відображає причинно-

наслідковий зв'язок між напруженнями і відносними деформаціями бетону стиснутої зони в бетонних та залізобетонних елементах і конструкціях залежно від режиму та характеру діючого навантаження.

**Несуча здатність елемента (конструкції)** – спроможність несучої конструкції або конструктивного елемента протистояти впливам без їх механічного руйнування чи втрати стійкості. Визначається за максимальним навантаженням (зусиллям), що може сприйняти несуча конструкція або конструктивний елемент без втрати їх функціональних властивостей.

**Стійкість залізобетонного елемента (конструкції)** – здатність конструктивного елемента (несучої конструкції) протистояти навантаженням та впливам без порушення стійкої рівноваги між внутрішніми і зовнішніми силовими факторами та надмірного зростання деформацій.

*Умовні позначення:*

- $A_c$  - площа поперечного перерізу бетону;
- $A_{st}, A_{sc}$  - площа поперечного перерізу, відповідно розтягнутої та стиснутої арматури;
- $A_{s, min}$  - мінімальна площа поперечного перерізу арматури;
- $C$  - клас бетону;
- $D$  - жорсткість перерізу елемента;
- $E_{cc}$  - модуль деформацій бетону;
- $E_{co}$  - початкове значення модуля пружності бетону;
- $E_{cm}$  - середнє значення модуля пружності бетону;
- $E_s$  - розрахункове значення модуля пружності арматурної сталі;
- $EI$  - згинальна жорсткість;
- $I_{cc}$  - момент інерції площі перерізу бетону стиснутої зони;
- $I_{ct}$  - момент інерції площі перерізу бетону розтягнутої зони;
- $I_s$  - момент інерції площі перерізу арматури;
- $M$  - згинальний момент;
- $M_{Ed}$  - розрахункове значення зовнішнього згинального моменту;
- $N$  - осьова поздовжня сила;

- $N_{Ed}$  - розрахункове значення зовнішньої прикладеної осьової сили;
- $a$  - геометричні дані;
- $a, b, c$  - параметри діаграми деформування бетону;
- $b_n$  - загальна ширина поперечного перерізу;
- $d$  - робоча висота поперечного перерізу;
- $e$  - розрахунковий ексцентриситет прикладання сили;
- $e_a, e_o$  - випадковий та початковий ексцентриситет прикладання сили;
- $f_{bd}$  - граничне значення середніх напруг зчеплення арматури з бетоном;
- $f_{cd}$  - розрахункове значення міцності бетону на стиск;
- $f_{ck}$  - характеристичне значення міцності бетону на стиск у віці 28 діб;
- $f_{ctd}$  - розрахункове значення міцності бетону на осьовий розтяг;
- $f_{ctk}$  - характеристичне значення міцності бетону на розтяг;
- $f_{p0,1}$  - 0,1 % умовна границя текучості попередньо напруженої арматури;
- $f_{p0,1k}$  - характеристична 0,1% умовна границя текучості попередньо напруженої арматури;
- $f_{p0,2k}$  - характеристична 0,2% умовна границя текучості арматури;
- $f_y$  - значення міцності арматури на границі текучості;
- $f_{yd}$  - розрахункове значення міцності арматури на границі текучості;
- $f_{yk}$  - характеристичне значення міцності арматури на границі текучості;
- $h$  - загальна висота перерізу;
- $h_n$  - висота перерізу елемента прямокутного профілю;
- $k$  - коефіцієнт, стала величина;
- $l$  - ( $l$  або  $L$ ) довжина, проліт;
- $m$  - коефіцієнт;
- $n_{so}$  - відношення модулів пружності арматури і бетону  $E_s / E_{co}$ ;
- $1/r$  - кривина елемента в певному перерізі;
- $s_r$  - базова відстань між нормальними тріщинами;
- $x, y, z$  - координати;
- $x_c, x_t$  - висота стиснутої та розтягнутої зон перерізу, відповідно;
- $y$  - переміщення;

- $z$  - плече пари внутрішніх сил;
- $\alpha, \beta, \delta$  - кути, множники, коефіцієнти, характеристики;
- $\varepsilon_c$  - значення відносних деформацій стиску бетону;
- $\varepsilon_{c1}$  - значення відносних деформацій стиску бетону при максимальних напруженнях  $f_c$  за криволінійної діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$ ;
- $\varepsilon_{cu}$  - значення відносних граничних деформацій стиску бетону за криволінійної діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$ ;
- $\varepsilon_{ct,1}$  - значення відносних деформацій розтягу бетону при максимальних напруженнях  $f_{ct}$  за відповідними діаграми  $\sigma_{ct} - \varepsilon_{ct}$ ;
- $\varepsilon_{ctu}$  - значення відносних граничних деформацій розтягу бетону за відповідними діаграми  $\sigma_{ct} - \varepsilon_{ct}$ ;
- $\varepsilon_s$  - відносні деформації видовження арматури;
- $\varepsilon_{so}$  - відносні деформації видовження арматури при досягненні напружень розрахункового опору  $f_{yd}$  ( $f_{yk}$ );
- $\varepsilon_{yk}, \varepsilon_{uk}$  - значення відносних граничних деформацій видовження арматури на межі її текучості та на межі її розриву, відповідно;
- $\varphi$  - коефіцієнт;
- $\eta$  - рівень завантаження, деформування;
- $\theta$  - кут;
- $\rho_i$  - параметр армування;
- $\rho_l$  - коефіцієнт армування для поздовжньої арматури;
- $\sigma_c$  - напруження стиску у бетоні;
- $\sigma_{cu}$  - напруження стиску у бетоні при граничній деформації стиску  $\varepsilon_{cu}$ ;
- $\sigma_s$  - напруження в арматурі;
- $\tau_{bd}$  - напруження зчеплення арматури з розтягнутим бетоном;
- $w_k$  - ширина розкриття нормальних тріщин;
- $\psi$  - коефіцієнт;
- $\emptyset$  - діаметр арматурного стержня

## ВСТУП

Весь накопичений досвід зведення будівель та споруд лишній раз підтверджує той факт, що бетон і залізобетон завжди були та, очевидно, залишаться й надалі одними з найпоширеніших конструкційних матеріалів у будівельній практиці. За різними оцінками [85] загальний об'єм щорічного світового виробництва бетону та залізобетону сьогодні коливається в межах 5-10 млрд. м<sup>3</sup>. Таке широке розповсюдження бетону і залізобетону зі сталим нарощуванням об'ємів та темпів будівництва з однієї сторони, нині супроводжується зростаючою конкурентною спроможністю різноманітних будівельних матеріалів в несучих конструкціях з іншої. Звичайно, зазначена ситуація вимагає не тільки підвищення якості зведення та виготовлення бетонних і залізобетонних конструкцій, але й постійного вдосконалення та застосування ефективних методів їх проектування або розрахунку. Останні, зазвичай, пов'язують з розвитком загальної теорії бетону та залізобетону, яка виступає в ролі основного інструменту у відповідних дослідженнях при вирішенні згаданих задач. Її пріоритетним завданням залишається і нині максимально точне відображення дійсного напружено-деформованого стану бетонних та залізобетонних елементів в реальних умовах.

Однак, сучасна теорія залізобетону так і не перетворилася на подібний інструмент в повній мірі, оскільки в ній і досі допускається неоднозначність понять по відношенню до свого основного об'єкту – залізобетону [129]. Одні науковці в рамках вищезгаданої теорії визнають існування двох об'єктів: залізобетону-матеріалу та залізобетону-конструкції. Інші ж розглядають залізобетон лише як композитний матеріал, якому властиві нелінійний зв'язок між напруженнями і деформаціями, повзучість, мікро- та макроутворення тріщин тощо. Подібна ситуація є неприпустимою в рамках справжньої наукової теорії і в даному випадку характеризує лише одне – сучасна теорія деформування бетону і залізобетону та елементів із них залишається ще надто далекою від досконалості.

Зрозуміло, що реальний напружено-деформований стан будь-якого залізобетонного елемента неможливо оцінити без глибокого вивчення та теоретичного узагальнення специфічних властивостей вищезгаданого композитного матеріалу. А оскільки він завжди є частиною конструкції, то теорія деформування такого матеріалу повинна бути лише частиною більш загальної теорії деформування бетонних та залізобетонних елементів [129]. Таким чином, теорія, однозначним об'єктом якої буде конструкція (елемент), вимагатиме чітких, послідовних та логічних операцій від дослідників і дозволить їм цілеспрямовано працювати над узагальненою моделлю деформування бетонних та залізобетонних елементів. Без побудови такої моделі вести мову про принципове вдосконалення методів розрахунку залізобетонних конструкцій та розробку загальної теорії їх деформування, буде надто складно, а ще точніше – просто неможливо.

Чинні нормативні документи в цілому дозволяють розраховувати залізобетонні елементи конструкцій за двома групами граничних станів з достатньою надійністю. Але окремі методи розрахунку, покладені в основу і вітчизняних [122], і зарубіжних норм [243; 248; 295; 303; 335; 369; 376; 382], залишаються суттєво насиченими емпіричними коефіцієнтами, параметрами та залежностями. Із-за такої фрагментарності досить часто втрачається не тільки фізична сутність, але й універсальність та точність зазначених методів. Тому й не дивно, що сьогодні значна увага багатьох вітчизняних та зарубіжних вчених направлена на удосконалення так званих «деформаційних моделей» та розробку універсальних методик розрахунку бетонних і залізобетонних елементів.

**Актуальність теми.** Розробка моделей деформування залізобетонних елементів, що сприяли б розкриттю внутрішньої статичної невизначеності їх поперечного перерізу з забезпеченням методологічної єдності всіх розрахунків за граничними станами залишається і нині одною з найважливіших проблем в теорії бетону та залізобетону.

В «силовій» моделі, що ґрунтується на використанні «пластичного

шарніру» з прямокутною епюрою напружень в стиснутому бетоні, ця проблема практично не була вирішена. Адже із-за різних вихідних передумов розрахунки залізобетонних елементів за граничними станами першої та другої групи залишилися повністю автономними.

Особливі сподівання у вирішенні зазначеної проблеми були покладені на «деформаційну» модель. Однак, не дивлячись на певні успіхи в її побудові, вона так і не забезпечила оптимального вирішення вказаної проблеми, оскільки в її рамках залишаються не розв'язаними наступні задачі:

- внутрішня статична невизначеність елементів, що зазнають неоднорідного деформування, навіть у граничному стані в більшості випадків розкривається за допомогою численних ітерацій, а у розрахунках за граничними станами другої групи виникає необхідність не тільки в численних ітераційних операціях, але й у використанні різного роду емпіричних параметрів, залежностей та коефіцієнтів;
- на сьогодні для залізобетонних елементів практично відсутні не тільки точні, але й наближені аналітичні рішення інтегральних залежностей  $M = f(1/r)$  за екстремальним критерієм Ферма  $dM/d(1/r) = 0$ , що дозволяло б прогнозувати не тільки саму кривину  $1/r$ , але й відносні деформації крайових фібр стиснутого бетону  $\varepsilon_{c2}$  (включно з граничними  $\varepsilon_{cu}$ ).

Певно, що за допомогою лише самих діаграм деформування матеріалів, які закладаються в основу деформаційних моделей, перераховані задачі вирішити доволі складно. Водночас, в усіх моделях розрахунки залізобетонних елементів за граничними станами другої групи завжди пов'язувалися безпосередньо з їх жорсткістю. Тому в загальній теорії деформування бетонних та залізобетонних елементів мову доцільно вести не про деформаційну, а про деяку «жорсткісну» модель. Її правильніше називати деформаційно-силовою, адже саме жорсткість  $D = M/(1/r)$  функціонально зв'язує між собою силові та деформаційні параметри процесу деформування. На основі такої моделі і пропонується вести подальшу розбудову загальної теорії деформування бетонних та залізобетонних



елементів.

Таким чином, до вирішення ставиться проблема удосконалення загальної моделі деформування залізобетонних елементів на основі гіпотези, що поєднує силові фактори з деформаційними параметрами залізобетонних елементів, забезпечуючи тим самим інтегральну оцінку напружено-деформованого стану їх поперечного перерізу з розкриттям внутрішньої статичної невизначеності при методологічній єдності всіх розрахунків за граничними станами.

Дана робота являється першим вихідним етапом (рис.) на шляху створення повномасштабної деформаційно-силової моделі, що розвиває та удосконалює попередні моделі в загальній теорії бетону та залізобетону.

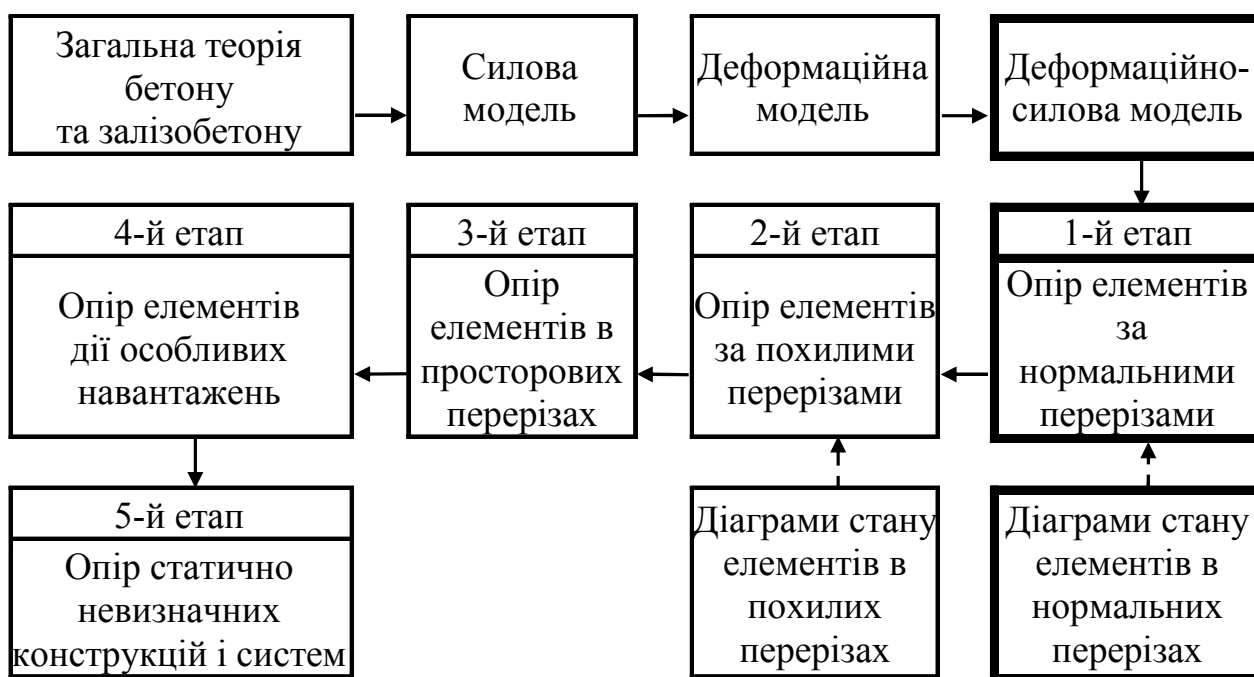


Рисунок – Місце деформаційно-силової моделі в загальній теорії деформування бетону та залізобетону

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тема дисертації відповідає концепції реалізації державної політики з нормативного забезпечення будівництва в Україні на період до 2015 року, схваленої розпорядженням Кабінету Міністрів України від 14.07.2010 р. (№ 1436-р), і стратегії сталого розвитку "Україна – 2020", схваленої указом президента України від 12.01.2015 року (№ 5/2015).

Основні дослідження теоретичного та прикладного характеру виконані в рамках держбюджетних робіт кафедр: інженерних конструкцій за темою «Дослідження роботи та удосконалення методів розрахунків будівельних конструкцій при різних режимах зовнішніх впливів» (державний реєстраційний номер 0107U004181); промислового, цивільного будівництва та інженерних споруд за темою «Розробити нові та удосконалити існуючі методики розрахунку будівельних конструкцій, включаючи підсилені, при дії одноразових і повторних навантажень» (державний реєстраційний номер 0112U001122); міського будівництва і господарства за комплексною темою «Реконструкція та утримання міських територій, будівель і інженерних комунікацій» (державний реєстраційний номер 0108U009332); основ архітектурного проектування, конструювання та графіки за темою «Геометричне та фізичне моделювання в архітектурі, будівництві та техніці» (державний реєстраційний номер 0114U001154).

Всі вищезазвані теми, розробка яких здійснювалася за участю автора, слугували базовими для виконання дисертаційної роботи.

**Мета роботи** – розробка основ загальної деформаційно-силової моделі опору бетону і залізобетону, заснованої на діаграмах реального стану залізобетонних елементів в нормальних перерізах та направленої на розкриття їх внутрішньої статичної невизначеності при забезпеченні методологічної єдності всіх розрахунків за граничними станами, та запровадження отриманих результатів в практику проектування.

Для досягнення поставленої мети були сформульовані наступні **задачі досліджень**:

1. Розробка основ деформаційно-силової моделі опору нормальних перерізів залізобетонних елементів конструкцій, згідно яких методологічна єдність їх розрахунків за граничними станами забезпечується діаграмами стану  $M - 1/r$ .
2. Отримання універсальної аналітичної залежності  $M - 1/r$ , здатної не тільки відтворювати діаграми реального стану залізобетонних елементів,

але й, за певних початкових (вихідних) умов, трансформуватися у діаграми стану матеріалів, зокрема бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$ .

3. Виявлення найважливіших закономірностей і особливостей деформування бетону в залізобетонних елементах залежно від основних параметрів їх армування та ступеню неоднорідності деформування бетону в перерізі.
4. Надання обґрунтованих рекомендацій з визначення відносних деформацій стиснутого (розтягнутого) бетону в характерних або параметричних точках діаграм його стану.
5. В рамках деформаційно-силової моделі опору залізобетонних елементів розробка основних положень теорії їх тріщиностійкості, обґрунтованих за фізичною сутністю, максимально позбавлених емпіризму і зосереджених на розрахунках відстані між нормальними тріщинами та ширини їх розкриття.
6. У розрахунках залізобетонних елементів за деформаціями отримання замкнутих рішень з визначення їх жорсткості, кривини та прогинів (переважно з використанням енергетичних методів).
7. Розробка в рамках пропонованої моделі деформування залізобетонних елементів конструкцій точних та спрощених методів їх розрахунку, що могли б слугувати в якості експрес-методів оцінки НДС елементів.
8. Експериментально-статистична оцінка методів розрахунку залізобетонних елементів конструкцій, розроблених за узагальненою деформаційно-силовою моделлю їх опору.
9. Апробація точних та спрощених методів розрахунку залізобетонних елементів за розробленою моделлю їх деформування в практиці проектування реальних об'єктів.

**Об'єкт дослідження** – опір стержневих бетонних та залізобетонних елементів з різних класів важкого бетону і арматури силовим впливам.

**Предмет дослідження** – напружено-деформований стан (НДС) і жорсткість нормальних перерізів бетонних та залізобетонних елементів за

діаграмами їх реального стану при дії будь-якого стиску, згину чи розтягу.

**Методи дослідження** – вивчення та аналіз результатів відомих експериментальних та теоретичних досліджень, висвітлених у відкритих літературних джерелах; синтез, абстрагування, фізичне та математичне моделювання основних фізико-механічних властивостей бетону та визначальних характеристик і параметрів напружено-деформованого стану стержневих залізобетонних елементів конструкцій; методи числового аналізу НДС бетонних та залізобетонних елементів за дії різних силових впливів; методи теорії ймовірностей та математичної статистики обробки результатів експериментальних та теоретичних досліджень.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в тому, що у розробленій деформаційно-силової моделі опору бетону і залізобетону *вперше*:

- на основі гіпотези нелінійності жорсткості отримано діаграму стану залізобетонного елемента  $M-1/r$ , яка має функціональну єдність з діаграмами деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$  та забезпечує методологічну єдність розрахунків залізобетонних елементів за граничними станами з розкриттям внутрішньої статичної невизначеності їх перерізів на будь-якій стадії деформування;
- континуальну (неперервну) функцію діаграми стану залізобетонного елемента  $M-1/r$  отримано аналітичним способом, а не шляхом апроксимації дослідних даних, та доведено можливість її трансформації в діаграму стану бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$ ;
- граничні деформації стиснутого бетону в залізобетонних елементах отримано у вигляді функції, залежної від параметрів армування та ступеню неоднорідності деформування бетону в їх поперечному перерізі  $\varepsilon_{cu} = f(\varepsilon_{si}, \rho_{li}, x_{si}, m_h, m_b)$ , що сприяє розкриттю внутрішньої статичної невизначеності перерізу залізобетонних елементів в граничній стадії деформування;

*удосконалено*:

- загальну модель деформування залізобетонних елементів конструкцій шляхом її наближення до моделей методу скінчених елементів (МСЕ) за допомогою діаграм стану  $M-1/r$  з одночасним збереженням: фізичної сутності процесів деформування залізобетонних елементів; відносної простоти програмного забезпечення та можливості інженерної реалізації більшості розрахунків за компактними алгоритмами;
- спосіб розкриття внутрішньої статичної невизначеності залізобетонних елементів конструкцій через доповнення системи статичних, геометричних та фізичних співвідношень механіки деформованого твердого тіла діаграмами стану  $M-1/r$  і функціями граничних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu} = f(\varepsilon_{si}, \rho_{li}, x_{si}, m_h, m_b)$ , що веде до суттєвого скорочення ітераційних операцій;
- спосіб визначення кривини залізобетонних елементів завдяки її знаходженню безпосередньо з діаграм стану  $M-1/r$ , чим суттєво підвищено ефективність енергетичних методів розрахунку прогинів; методика розрахунку тріщиностійкості залізобетонних елементів за допомогою діаграми стану  $M-1/r$ , якою базову відстань між нормальними тріщинами та ширину їх розкриття пов'язано з основними (визначальними) параметрами напружено-деформованого стану залізобетонних елементів в системі статичних, геометричних та фізичних співвідношень за максимального уникнення емпіризму;

*отримали подальший розвиток:*

- критерії вичерпання несучої здатності перерізу залізобетонного елемента за причинно-наслідковим зв'язком з параметрами деформування, чим забезпечено їх трансформацію в критерії досягнення граничного стану залізобетонних елементів;
- способи врахування впливу розтягнутого бетону на загальний стан осередненого перерізу окремих ділянок залізобетонного елемента за допомогою діаграми  $M-1/r$ , чим забезпечено інтегральну оцінку їх напружено-деформованого стану до та після виникнення тріщин;

- методика визначення базової відстані між нормальними тріщинами за рахунок параметрів зчеплення арматури з бетоном, чим виключено її залежність від низки емпіричних параметрів та коефіцієнтів;
- залежність з врахування профілю розтягнутої арматури за критерієм зминання її поперечних ребер, чим уточнено вплив параметрів зчеплення арматури з бетоном на інтегральну оцінку стану елементів;
- методика розрахунку прогинів косозавантажених залізобетонних елементів з її суттєвим спрощенням завдяки залученню універсальних діаграм стану  $M - 1/r$ .

**Практичне значення одержаних результатів.** Отримані результати досліджень: розвивають загальну теорію деформування бетонних та залізобетонних елементів; удосконалюють методи розрахунку їх нормальних перерізів та забезпечують єдині методологічні передумови для їх виконання; створюють передумови для об'єктивної оцінки напружено-деформованого стану та несучої здатності тих конструктивних елементів, що експлуатуються тривалий час і потребують відповідного підсилення із-за зменшення власного ресурсу.

За результатами досліджень розроблені інженерні методи розрахунку нормальних перерізів бетонних та залізобетонних елементів за граничними станами, які не потребують складного програмного забезпечення і дозволяють виконувати більшість розрахунків за простими компактними алгоритмами. На їх основі підготовлені рекомендації щодо внесення відповідних змін в нормативні документи з проектування залізобетонних конструкцій (ДСТУ Б В.2.6-156:2010) при їх перегляді. Зазначені рекомендації передані тим науковим установам і колективам, де розглядалась дисертаційна робота та прийняті НДІБК до впровадження.

Загалом результати дисертаційних досліджень знайшли застосування в:

- Волинській філії державного підприємства «Український державний науково-дослідний інститут проектування міст “Діпромісто”» при розрахунку основних несучих конструкцій залізобетонних каркасів

наступних об'єктів: «Агропромисловий комплекс по зберіганню та переробці сільськогосподарської продукції в смт Велика Димерка Броварського району Київської області. Овочесховище»; Проект «Супермаркет на вул. Калиновій, 39 в с. Рованці Боратинської сільської ради Луцького району Волинської області»;

– Рівненській філії державного підприємства «Український державний науково-дослідний інститут проектування міст “Діпромисто”» при розрахунку основних несучих конструкцій залізобетонних каркасів житлового кварталу з об'єктами соцпобуту по вулиці Гагаріна в м. Рівному;

– товаристві з обмеженою відповідальністю «Галицька основа» (м. Львів) при розрахунку основних несучих конструкцій залізобетонних каркасів наступних об'єктів: «34-квартирний 11-поверховий житловий будинок на Студентській набережній в м. Ужгород»; «Реконструкція з розширенням існуючих будівель на вул. Промисловій, 52б за рахунок добудови під автосалон та СТО з даховою котельнею та технічними приміщеннями з КТП»;

– приватному акціонерному товаристві «Рівнеінвестпроект» при розрахунку основних несучих конструкцій залізобетонних каркасів наступних об'єктів: «Робочий проект підземних переходів з торговим центром в м. Рівне, площа Театральна»; «Робочий проект II-черги реконструкції готелю «Україна» – торгово-офісний комплекс на вул. Соборній, 112В в м. Рівне»; «Робочий проект будівництва багатоквартирного житлового будинку на вул. Соборна, 5 в м. Рівне»; «Реконструкція з перепрофілюванням незавершеного будівництва будинку культури в м. Острог під навчальний корпус Національного університету “Острозька Академія”».

Матеріали дисертаційних досліджень запроваджені в лекційні курси окремих навчальних дисциплін. Авторська монографія та рекомендації використовуються в якості навчальних посібників аспірантами, магістрами та студентами спеціальності «Промислове та цивільне будівництво»

Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне) та Одеської державної академії будівництва та архітектури.

**Особистий внесок здобувача.** Всі ідеї, викладені в дисертації, наукові розробки та практичні результати отримані автором особисто. У дослідженнях, виконаних і опублікованих зі співавторами, особистий внесок здобувача полягає в постановці завдань, науковому обґрунтуванні, розробці моделі деформування і методів розрахунку та деталізований в роботах [3; 5; 10; 13; 20; 21; 32; 41; 45-47; 50] списку публікацій.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення дисертаційної роботи оприлюднювались на: п'ятій (5 – 8 вересня 2006 р.), шостій (8 – 11 січня 2008 р.) та восьмій (13 – 16 жовтня 2014 р.) науково-технічних конференціях «Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди» (м. Рівне); сьомій (9 – 11 жовтня 2006 р., м. Кривий Ріг), десятій ювілейній (8 – 12 жовтня 2012 р., м. Полтава) та одинадцятій (27 – 31 жовтня 2014 р., м. Полтава) міжнародних науково-технічних конференціях «Сталезалізобетонні конструкції: дослідження, проектування, будівництво, експлуатація; п'ятій (2 – 5 жовтня 2007 р., м. Полтава) та шостій (24 – 27 травня 2011 р., м. Одеса) Всеукраїнських науково-технічних конференціях «Науково-технічні проблеми сучасного залізобетону»; міжнародних науково-технічних конференціях «Актуальні проблеми водного господарства і природокористування» (21 – 22 листопада 2007 р. і 21 – 23 жовтня 2009 р., м. Рівне); міжнародній науково-технічній конференції «Динаміка та міцність машин, будівель і споруд» (16 – 19 червня 2009 р., м. Полтава); міжнародному багатогалузевому науково-технічному форумі «Инженерная стратегия-инновация» в рамках конференції «Инженерные решения и инновации в строительстве и архитектуре» (22 травня 2009 р., м. Одеса); міжнародних конференціях «Структурообразование, прочность и механика разрушения композитных строительных материалов и конструкций» (20 – 21 вересня 2012 р. і 16 – 17 квітня 2015 р., м. Одеса); XIV міжнародній науковій конференції «Актуальні проблеми будівництва та інженерії докiлля «Львiв – Кошице – Жешув (3 – 5 вересня 2013 р., м. Львiв);



European Conference on Innovations in Technical and Natural Sciences. The 11<sup>th</sup> International Scientific Conference (02 June 2016, Vienna, Austria); CXXIII International Research and Practice Conference and I stage of the Championship in Technical sciences, Architecture and Construction (12 – 17 May 2016, London, UK); CXXX International Research and Practice Conference and II stage of the Championship in Technical sciences, Architecture and Construction (13 – 19 September 2016, London, UK); 6-й міжнародній науково-технічній конференції «Проблеми надійності та довговічності інженерних споруд та будівель на залізничному транспорті» (19 – 21 квітня 2017, м. Харків); міжнародній науково-технічній конференції «Науково-технічні проблеми сучасного залізобетону» (18 – 20 жовтня 2017 р., м. Полтава).

У повному обсязі робота доповідалась і отримала схвалення на: розширеному засіданні кафедри основ архітектурного проектування, конструювання та графіки Національного університету водного господарства та природокористування; розширеному засіданні кафедри будівельних конструкцій Харківського національного університету міського господарства ім. О. М. Бекетова; засіданні кафедри залізобетонних та кам'яних конструкцій Одеської державної академії будівництва і архітектури.

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 50 робіт. Основні результати досліджень викладені в монографії [1], рекомендаціях [2], в 34-х статтях у друкованих виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України [5; 6; 7; 10-40], у 2-х наукових періодичних виданнях іноземних держав та у 5-ти наукових виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз, а також в інших журналах і збірниках..

**Структура і обсяг роботи.** Дисертація складається із вступу, семи розділів, загальних висновків, списку використаної літератури (551 найменування) і 8-ми додатків. Робота викладена на 533 сторінках, з яких 336 сторінок основного тексту, 60 сторінок списку літератури, 137 сторінок додатків. Основна частина дисертації містить 144 рисунки і 21 таблицю на 52-х повних сторінках.

# РОЗДІЛ 1

## РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ДЕФОРМУВАННЯ БЕТОННИХ ТА ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

### 1.1. Загальні етапи розвитку теорії деформування залізобетонних елементів

На ранній стадії розвитку теорії залізобетону, завдяки роботам [320; 406; 450; 464] першим сформувався метод розрахунку залізобетонних елементів за допустимими напруженнями. В його основу була покладена 2-га стадія напружено-деформованого стану та прийняті наступні гіпотези:

- бетон стиснутої зони деформується пружно за законом Гука [406];
- напруження в бетоні розтягнутої зони приймають рівними нулю;
- напруження в бетоні і арматурі обмежуються допустимими величинами;
- в перерізах нормальних до поздовжньої осі елемента справедлива гіпотеза плоских перерізів [320].

Однак вагомими недоліками вищевказаного методу, основними серед яких були ті, що бетон розглядався як пружний матеріал, а дійсний розподіл напружень в бетоні по висоті перерізу в стадії 2 не відповідав трикутній епюрі напружень, призводили до суттєвих перевитрат матеріалів.

Тому в 1933р. Лолейт А. Ф. [141] висунув гіпотезу граничної рівноваги, за якою приймалося, що перед самим руйнуванням матеріал конструкції перебуває в граничному стані, а переріз залізобетонних елементів знаходиться в рівновазі. Згодом ця гіпотеза стала базовою для нового методу розрахунку перерізів залізобетонних конструкцій за руйнуючими зусиллями, що з 1938 р. був запроваджений у нормативних документах. В основу зазначеного методу були закладені:

- 3-тя стадія напружено-деформованого стану залізобетонного елемента при згині;
- гіпотеза граничної рівноваги;

- граничні напруження в матеріалах, за які в розрахункових формулах стали приймати межу міцності бетону на стиск та межу текучості арматури;
- нульові напруження в бетоні розтягнутої зони.

Даний метод став певним проривом у розвитку теорії залізобетону. Він більш точно відображав дійсну роботу перерізів елементів конструкцій під навантаженням, оскільки почав враховувати пружнопластичні властивості залізобетону. Розрахунок внутрішніх зусиль  $M$ ,  $N$  і  $Q$  у стадії руйнування конструкцій з урахуванням утворення шарнірів пластичності дозволив більш точно визначати дійсні коефіцієнти запасу їх міцності. Для багатьох видів залізобетонних плит, нерозрізних балок та рам розрахунки такого роду дали значний економічний ефект, оскільки забезпечили істотно менші витрати арматурної сталі порівняно з методом допустимих напружень. Згодом задля спрощення розрахунків Пастернак П. Л. [180] запропонував використовувати прямокутну епюру напружень в стиснутій зоні бетону.

Однак метод розрахунку перерізів залізобетонних елементів конструкцій за руйнуючими зусиллями не міг охопити питання їх жорсткості та тріщиностійкості. Серед інших недоліків цього методу можна назвати й те, що можливі відхилення фактичних навантажень і міцнісних характеристик матеріалів від їх розрахункових значень не можна було врахувати одним синтезуючим коефіцієнтом запасу міцності. Оскільки останній об'єднував в собі коефіцієнти різного роду, то при необхідній заміні будь-якого з них, доводилося корегувати всі коефіцієнти, що входили до загального коефіцієнту запасу.

Та найбільшим методологічним недоліком методу розрахунку за руйнуючими зусиллями було те, що використання моделі пластичного шарніру віддаляло теорію залізобетону від методів будівельної механіки.

Подальший розвиток теорії деформування залізобетонних елементів конструкцій пов'язується з методом розрахунку перерізів конструкцій за граничними станами [70; 74; 159]. Реалізується він за допомогою системи розрахункових коефіцієнтів, які гарантують, що подібні стани не наступлять

ні за найбільш несприятливого поєднання всіх навантажень, ні за найменших значень міцнісних характеристик матеріалів. Несуча здатність перерізів теж визначається за стадією руйнування при використанні основних гіпотез попереднього методу, але безпечна робота конструкції під навантаженням забезпечується не одним синтезуючим коефіцієнтом запасу, а зазначеною вище системою розрахункових коефіцієнтів.

І хоча в розрахунках за граничними станами почали використовувати призмову міцність бетону, а не опір бетону на стиск при згинанні, як це було у розрахунках за руйнуючими зусиллями, в основі розрахунків за граничними станами першої групи збереглася та ж сама гіпотеза граничної рівноваги.

Введення системи розрахункових коефіцієнтів надійності дозволило розробити методики розрахунку залізобетонних елементів за жорсткістю та тріщиностійкістю, але на жаль не забезпечило методологічної (діалектичної) єдності розрахунків конструкцій за граничними станами.

Наступним етапом удосконалення методу граничних станів, з метою забезпечення подібної єдності розрахунків, варто вважати запровадження так званої «деформаційної моделі» перерізів залізобетонних елементів конструкцій [23; 72; 83; 93; 403; 493; 539]. Можна не сумніватися, що повернення до гіпотези плоских перерізів, заміна ідеалізованої прямокутної епюри напружень бетону реальною криволінійною та використання всіх інших класичних гіпотез методу граничної рівноваги – все це сприятиме наближенню загальної теорії залізобетону до методів будівельної механіки.

Однак подальший розвиток методу граничних станів чи методу граничної рівноваги, які за своєю суттю являються «опором матеріалів» та «будівельною механікою» залізобетону, необхідно все ж таки пов'язувати не стільки з деформаційною моделлю перерізів, як із узагальненою моделлю деформування залізобетонних елементів конструкцій. Якщо першу пов'язують з гіпотезою плоских перерізів та діаграмами деформування матеріалів  $\sigma_c = f(\varepsilon_c)$  і  $\sigma_s = f(\varepsilon_s)$ , то другу необхідно пов'язувати з

реальними діаграмами стану елементів  $M = f(1/r)$  чи  $N = f(\varepsilon_c)$ . Адже поведінка самого матеріалу в елементі чи конструкції під навантаженням визначається ще й діаграмами стану останніх.

Загалом відомо, що діаграма деформування бетону встановлює функціональний зв'язок між напруженнями та відносними деформаціями бетону. Тому цілком очевидно, що її доцільно моделювати за відповідним модулем деформацій ( $E_{cc}$ ), оскільки він характеризує причинно-наслідковий зв'язок між силовими ( $\sigma_c$ ) та деформаційними параметрами ( $\varepsilon_c$ ) поведінки зазначеного матеріалу. Що ж до діаграми стану елементу, котра встановлює функціональний зв'язок між визначальними силовими ( $M$ ,  $N$ ) та деформаційними і навіть геометричними ( $1/r = \varepsilon/x$ ,  $\varepsilon$ ) параметрами поведінки залізобетонного елементу під навантаженням, то її по аналогії варто моделювати за жорсткістю ( $D$ ), оскільки остання характеризує подібний причинно-наслідковий зв'язок між вищевказаними параметрами деформування елементу конструкції. Більше того, сама жорсткість залізобетонних елементів доволі тісно пов'язана з розвитком їх прогинів ( $f$ ) та процесами і параметрами тріщиноутворення ( $\varepsilon_{ctu}$ ,  $S_{rm}$ ,  $w_k$ ).

Таким чином, діаграма стану залізобетонного елементу конструкції в найбільшій мірі є залежною від вищеназваних факторів та параметрів, а тому може бути побудована лише за їх допомогою.

## **1.2. Моделі опору залізобетонних елементів конструкцій силовим впливам**

Загалом під моделлю розуміють деякий прообраз або аналог, що знаходиться у стадії подібності до реального об'єкту, процесу чи явища. Тому під моделлю опору бетону та залізобетону силовим впливам будемо розуміти певний прообраз процесу деформування бетонних та залізобетонних елементів, що відтворює їх реальний напружено-

деформований стан. Подібна модель в більшості випадків є математичною, а тому формується трьома групами умов (повною системою рівнянь) механіки деформованого твердого тіла [258]:

- статичними співвідношеннями або рівняннями (умовами) рівноваги;
- геометричними співвідношеннями або рівняннями спільності деформацій;
- фізичними співвідношеннями або рівняннями стану матеріалів.

Виходячи з цих умов, всі відомі на сьогодні моделі опору бетону та залізобетону силовим впливам можна розділити за декількома ознаками, найважливішими серед яких є форма представлення основних параметрів стану матеріалів та форма представлення стану залізобетонних елементів в певному перерізі (дод. А, табл. А.1). Варто зауважити, що формування зазначених моделей практично розпочалося з моменту, відколи в розрахунках залізобетонних елементів стали враховувати пластичні властивості бетону і арматури.

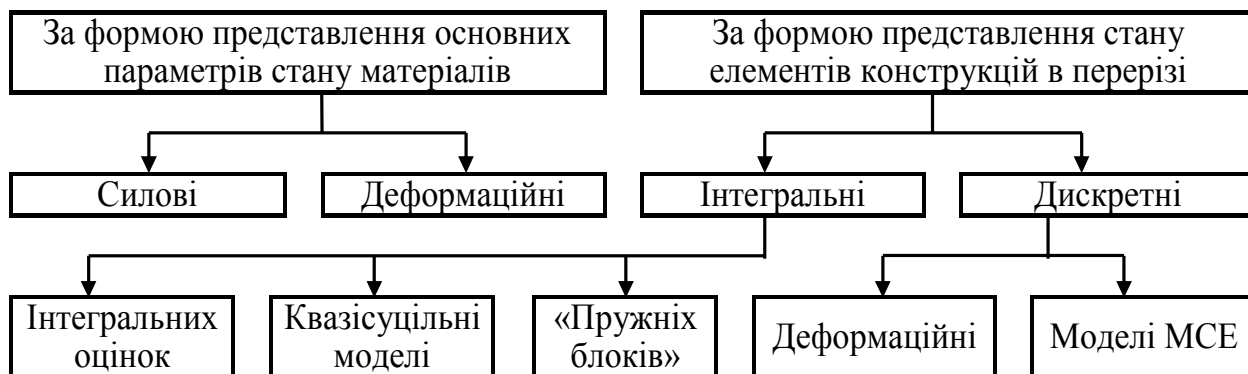


Рисунок 1.1 – Класифікація моделей опору залізобетонних елементів конструкцій силовим впливам

За формою представлення основних параметрів стану матеріалів розрізняють силові та деформаційні моделі. В силових моделях основні статичні співвідношення (рівняння рівноваги) реалізуються за допомогою напружень, в деформаційних – через деформації матеріалів.

Для силових моделей [59; 70; 141; 159; 164; 180; 250] основними стали наступні недоліки:

– при недотриманні принципу пластичного руйнування в розрахунках

позацентрово стиснутих елементів (випадок малих ексцентриситетів) неможливо уникнути «емпіризму» [250];

- без реальних діаграм деформування матеріалів розрахункові залежності в переважній більшості випадків не відтворюють фізичний зміст модельованих явищ;
- розрахунки залізобетонних елементів за граничними станами обох груп є доволі автономними і навіть не пов'язаними між собою, оскільки спираються на різні вихідні передумови.

Разом з тим для деформаційних моделей, що реалізуються за допомогою спрощених діаграм деформування матеріалів [72; 277; 403; 493; 518], інтегрування цих діаграм [21; 23; 83; 150] чи на підставі формування матриць жорсткості [103; 107], властиві інші недоліки:

- залишається доволі обмеженою реалізація зазначених моделей в практичних розрахунках (застосовуються переважно до найбільш простих стержневих елементів);
- відсутність чітких критеріїв вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів конструкцій;
- збереження значного емпіризму в розрахунках за граничними станами другої групи.

За формою представлення стану залізобетонних елементів в певному перерізі всі існуючі моделі можна умовно розділити на інтегральні та дискретні (дод. А, табл. А.1).

В інтегральних моделях [50; 51; 55; 71; 72; 181; 187] переріз будь-якого залізобетонного елемента представляється невеликою кількістю його компонентів. Наприклад, в моделі інтегральних оцінок [50; 51] загальна жорсткість залізобетонного елемента визначається як сума жорсткостей стиснутої та розтягнутої зон його перерізу за допомогою інтегральних характеристик загалом та «інтегрального» модуля деформацій бетону зокрема. Однак, не дивлячись на такий прийом, цій моделі властиві два серйозних недоліки:

- поява нових компонентів в комбінованих конструкціях призводить до суттєвих ускладнень у заданні функцій напружень зокрема та відповідних розрахункових залежностей загалом;
- істотне ускладнення рішень для косодеформованих елементів, коли напружений стан змінюється не тільки по висоті, але і по ширині перерізу.

В інтегральних «квазісуцільних» моделях [55; 71; 72; 181; 187] рівнодійні зусиль в бетоні стиснутої та розтягнутої зон визначають шляхом інтегрування відповідних діаграм деформування бетону за напруженнями або ж за деформаціями. Основними недоліками зазначених моделей є те, що:

- за умов неоднорідного деформування елементів в них неможливо врахувати «градієнтні ефекти» силового опору бетону;
- суттєво зростає число ітерацій в розрахунках залізобетонних елементів, що зазнають складного неоднорідного деформування.

У блокових моделях залізобетонні елементи з тріщинами розглядають у вигляді системи пружних блоків, котрі взаємодіють між собою по стиснутій зоні та розтягнутій арматурі [39; 52; 56; 60; 69; 97; 108; 548]. Тут напруження та деформації визначаються за розв'язком контактної задачі в суміжних блоках з урахуванням зчеплення арматури з бетоном, а напруження в вершині тріщини моделюються методами механіки руйнування. Безперечно, що блокові моделі дозволяють розширити коло вирішуваних задач з силового опору залізобетонних елементів конструкцій та деталізувати їх розрахунки [258]. Однак їх практична реалізація ускладнюється тим, що:

- існують окремі прогалини в дослідженнях основних характеристик процесу утворення тріщин в бетоні;
- рішення контактної задачі, представлені системою інтегральних рівнянь, отримати без допомоги ЕОМ вкрай важко навіть за наближеними числовими методами.

В дискретних моделях переріз елемента чи конструкції відтворюється великою кількістю елементарних ділянок, в межах кожної з яких властивості матеріалу приймаються постійними. І оскільки в цих моделях основна увага



акцентується на деформаціях [21; 23; 83; 93; 103; 107; 150; 538; 539], то в переважній більшості вони є деформаційними з уже згаданими раніше недоліками. Крім того варто відзначити, що на сьогодні ці моделі застосовуються лише до найпростіших стержневих елементів.

Більш широкі можливості в моделюванні опору бетонних та залізобетонних елементів надає метод скінчених елементів (МСЕ), за яким переріз моделюється сукупністю кінцевих елементів певної форми, з'єднаних між собою у вузлах кінцевим числом зв'язків [79; 96; 111; 117; 131; 166; 237; 453]. Застосування моделей, заснованих на використанні МСЕ, є найбільш виправданим для складних залізобетонних конструкцій і систем (просторових, багаторазово статично невизначених і т.д.) за складних видів їх деформування (згину з крученням, стиску з крученням тощо). Разом з тим, зазначеним моделям властиві і певні недоліки, пов'язані з самим МСЕ:

- точність та достовірність результатів розрахунку багато в чому залежить від апроксимуючої функції форми кінцевого елемента, якою задають зв'язок між вузловими зсувами та переміщеннями точок тіла;
- аби уникнути розривності деформацій (переміщень, кутів повороту і т.д.) та зусиль (згинальних моментів, поперечних сил тощо) між сусідніми кінцевими елементами, необхідно на межах між ними здійснювати сполучення функцій переміщень не тільки за значеннями зазначених функцій, але й їх похідних певного порядку;
- у розрахунках за МСЕ значною мірою втрачається не тільки їх інженерна осяжність, але й фізична сутність процесів деформування бетонних та залізобетонних елементів в конструкціях.

З вищенаведеного аналізу випливає, що опір найбільш поширених стержневих залізобетонних елементів силовим впливам все ж таки доцільніше моделювати не за допомогою МСЕ, а більш простими методами, включно з апроксимаційними [1; 2]. Весь накопичений досвід проектування зазначених елементів показує, що методи розрахунку, розроблені за більш простими моделями, в тому числі і деформаційними, успішно реалізуються

за доволі компактними алгоритмами без використання складного програмного забезпечення. При цьому, в таких моделях зберігається фізична сутність процесів деформування, а самі методи розрахунку залишаються осяжними, зрозумілими і доступними для звичайного інженера.

### 1.3. Діаграми стану залізобетонних елементів конструкцій

Загалом поведінка будь-якого бетонного або залізобетонного елемента під дією навантаження може бути відображена діаграмами їх стану, в яких між собою пов'язуються найважливіші силові та деформаційні параметри. Без сумніву, саме їх необхідно покласти в основу узагальненої моделі деформування залізобетонних елементів конструкцій. Зазвичай діаграми стану залізобетонних елементів відображають залежність їх кривини  $1/r$  від згинаючих моментів  $M$  і лише в окремих випадках в якості подібних параметрів можуть виступати відносні деформації матеріалу  $\varepsilon_i$  та поздовжні зусилля  $N$ .

Аналітичних залежностей діаграм стану залізобетонних елементів конструкцій  $M - 1/r$ , що могли б достовірно описати весь процес їхнього деформування, на сьогодні практично не існує. Тому переважна більшість дослідників лише приймає або підтверджує експериментально ту чи іншу форму ідеалізованої діаграми стану. Загалом же всі зазначені діаграми можна розділити на чотири характерні групи (рис.1.2...1.5, табл. А.2 дод. А).

До першої з них варто віднести всі діаграми стану залізобетонних елементів з чітко окресленими горизонтальними чи похилими лінійними ділянками, що відображають появу нормальних тріщин в найбільш напруженому перерізі (рис. 1.2, табл. А.2 дод. А). Згідно цих моделей після появи тріщин діаграми стану елементів можуть бути: лінійними (*а, ж*), криволінійними (*б, и*), ламаними двох- та трьохлінійними (*в, г, к*), ламаними трьохлінійними з низхідною ділянкою (*д*), криволінійними з низхідною ділянкою (*е*). Основним та спільним недоліком діаграм цієї групи є те, що

стрибокподібна зміна кривини залізобетонного елемента в перерізі з тріщиною абсолютно не ув'язується з реальним (плавним) характером розвитку його прогинів.

Другу групу складають діаграми стану з фіксованим моментом появи тріщин (рис. 1.3, табл. А.2 дод. А), які загалом позбавлені вищезгаданого недоліку. Моделі їх форм приймають ламаними двох- або трьохлінійними (а, б, в), криволінійними (д) та комбінованими (з, е). Основним недоліком цих моделей є те, що із-за перелому в точці  $1/r_{cr}$  діаграми стану елементів стають розривними і їх теж неможливо описати єдиною функцією.

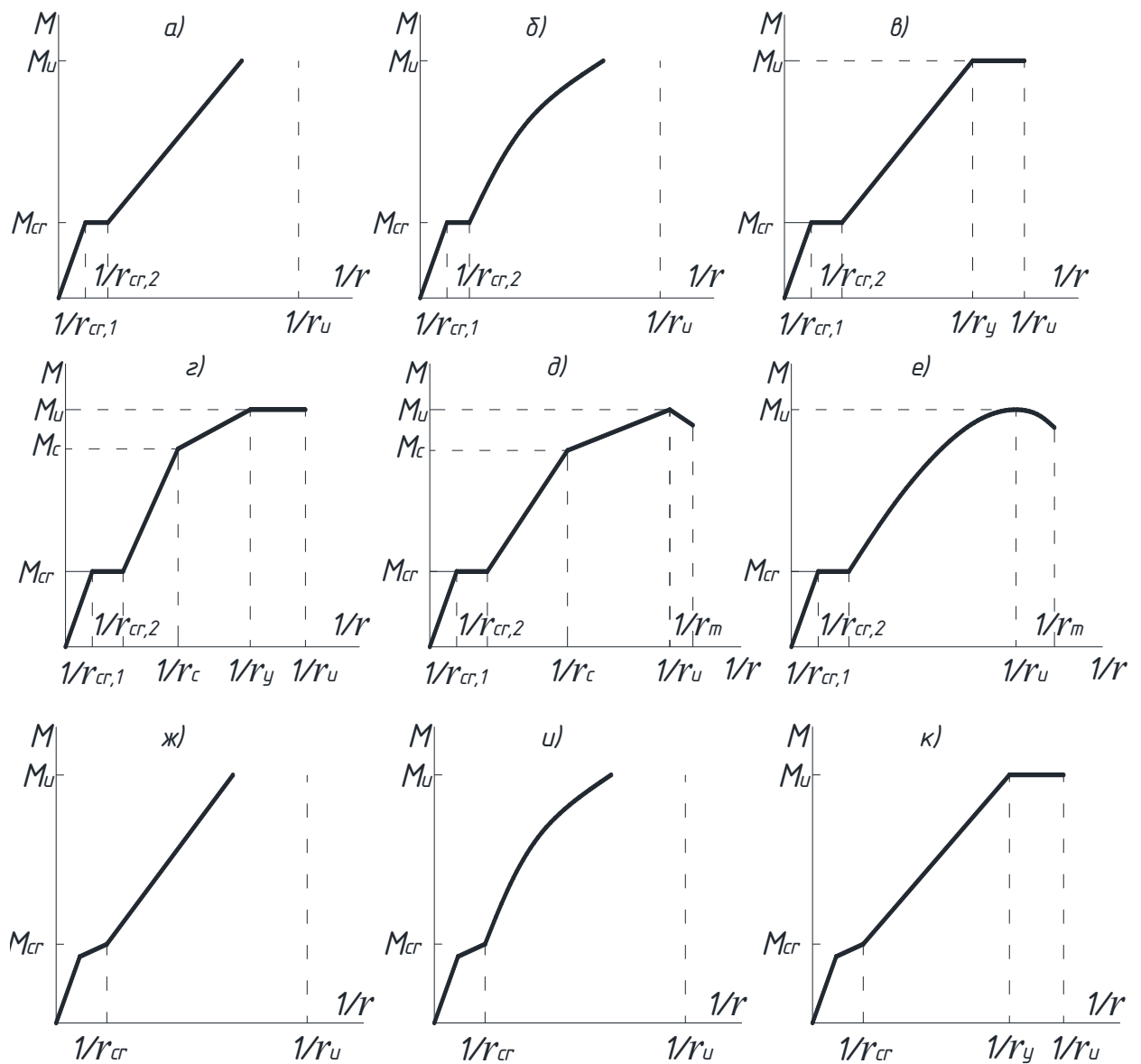


Рисунок 1.2 – Різновиди діаграм стану залізобетонних елементів конструкцій з окресленими ділянками утворення тріщин

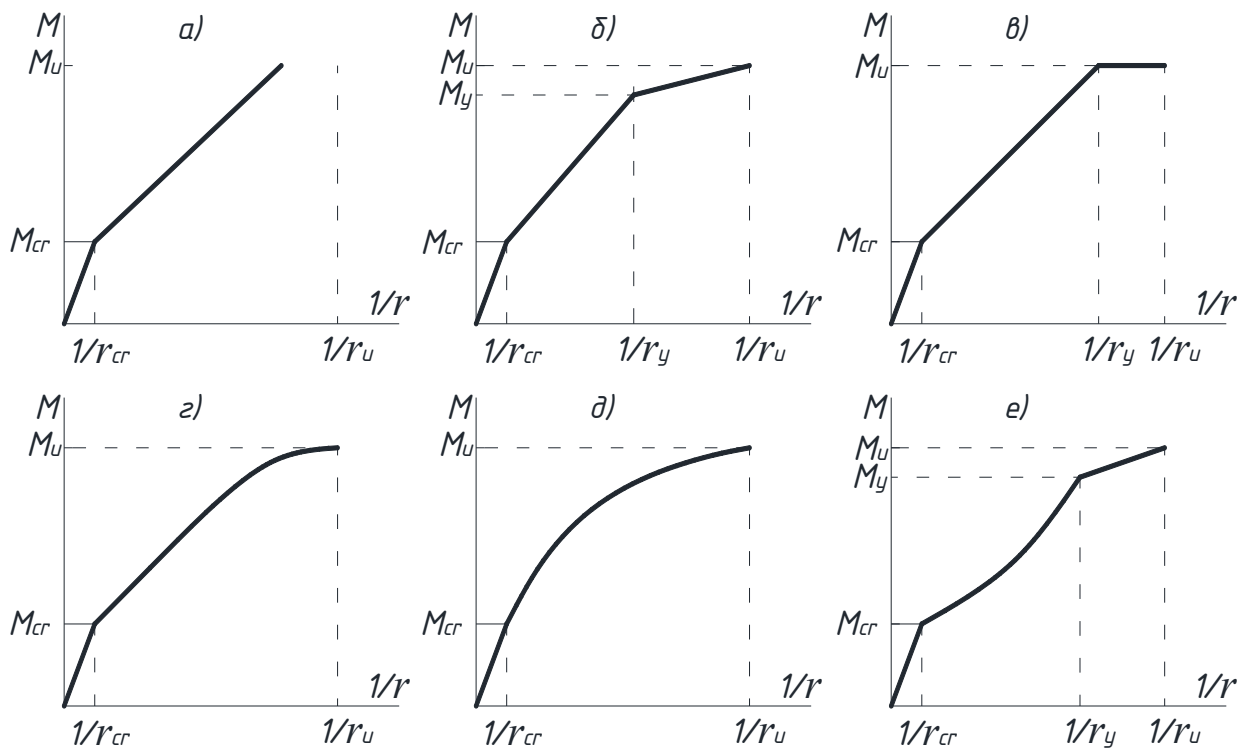


Рисунок 1.3 – Діаграми стану елементів з фіксованим моментом появи тріщин

На думку багатьох дослідників більш досконалішими є ідеалізовані дволінійні (а, в) та комбіновані (б, з, д) діаграми третьої групи (рис. 1.4, табл. 1.2 дод. А). Однак варто відзначити, що окремі з них є прийнятними лише для непереармованих елементів.

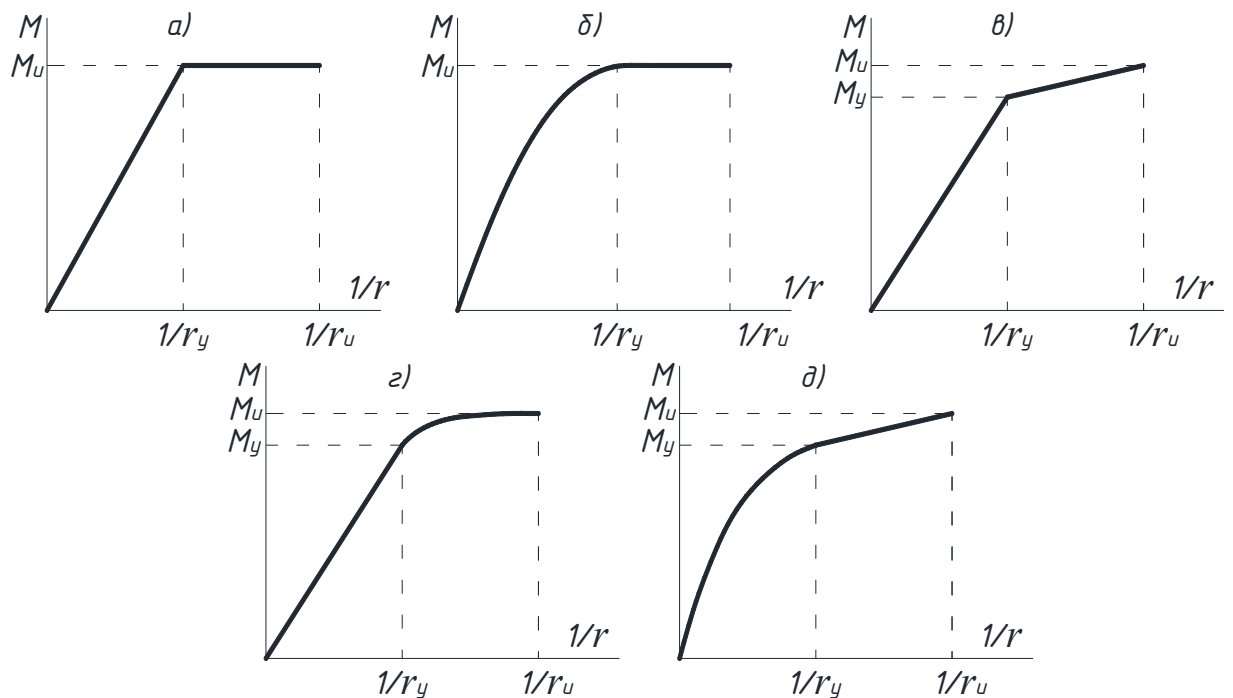


Рисунок 1.4 – Різновиди діаграм стану з вираженими ділянками текучості арматури

Ще більш наближеними до дійсних вважаються криволінійні (а, б, в, з) діаграми стану залізобетонних елементів з четвертої групи (рис. 1.5, табл. 1.2 дод. А). До цієї групи стараються віднести і комбіновану діаграму (д), зважаючи на її потенційну універсальність [151].

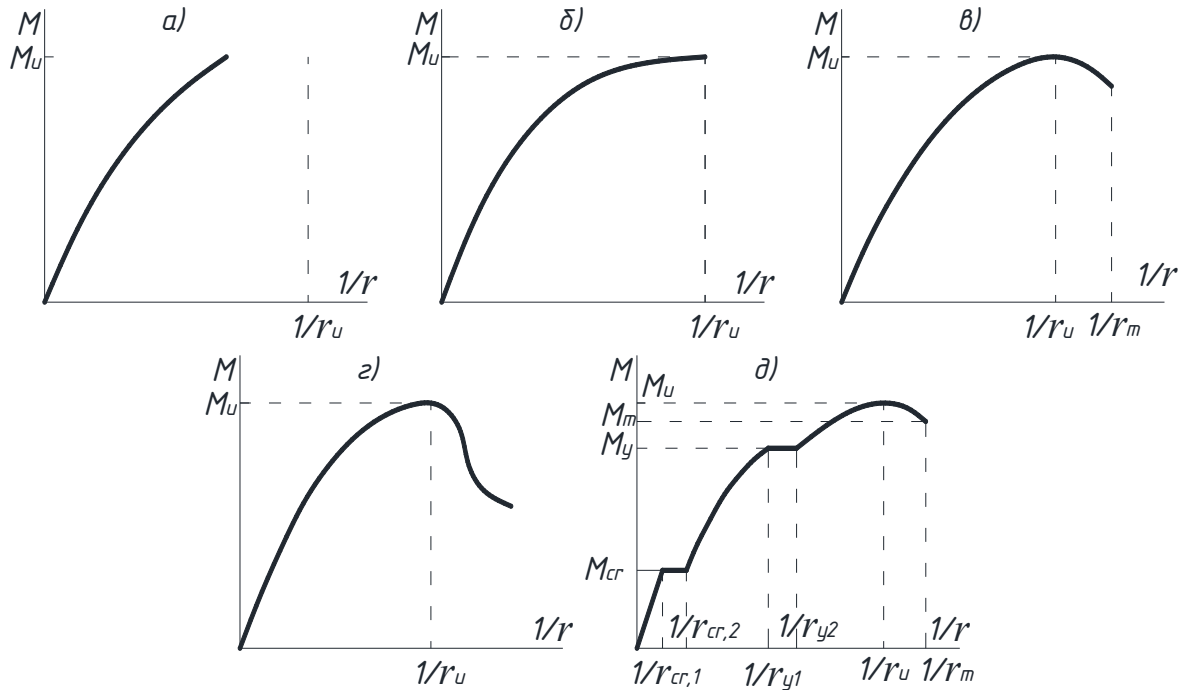


Рисунок 1.5 – Загальні діаграми стану залізобетонних елементів конструкцій

Спільним недоліком проаналізованих вище пропозицій є те, що майже всі вони не надають рекомендацій, щодо відображення діаграм стану залізобетонних елементів конструкцій  $M - 1/r$  функціями аналітичного характеру. Водночас подібні залежності, наведені в окремих дослідженнях [51; 104; 429], не мають належного фізичного обґрунтування.

#### 1.4. Жорсткість залізобетонних елементів

Сьогодні варто визнати, що сучасна теорія бетону та залізобетону все більше і більше схиляється до деформаційної моделі перерізу Євростандартів [382]. Однак гострі дискусії довкола двох основних гіпотез, що лежать в основі цієї моделі, так і не вщухають. Час від часу вони спалахують з новою силою і останні десятиліття не є виключенням з цього правила. Мова іде про

окреслення діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$  та про гіпотезу плоских перерізів (гіпотезу Бернуллі або Нав'є). Число прихильників та противників останньої не зменшується так само, як і не припинялися пошуки нових універсальних залежностей  $\sigma_c - \varepsilon_c$  [9; 25; 37; 92; 134; 153; 191; 418; 492].

Аналіз позицій різних дослідників із вищезазначених питань дає підстави говорити не стільки про розробку деформаційної моделі перерізу, скільки про створення узагальненої моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів, в якій як «деформаційна» так і «силова» моделі перерізу були б лише її різновидами або складовими частинами.

Цілком очевидно, що визначальна роль у побудові подібної узагальненої моделі деформування повинна належати питанням жорсткості. Відомі на сьогодні пропозиції щодо визначення жорсткості залізобетонних елементів конструкцій (табл. А.3 дод. А) можна умовно розділити за 5-ма напрямками.

До першого слід віднести пропозиції [52; 65; 100; 159; 248; 252], в яких жорсткість залізобетонних елементів пов'язується з дослідженнями проф. Мурашова В. І. та з коефіцієнтом  $\psi_s$ , що враховує роботу розтягнутого бетону між тріщинами. Варто однак зазначити, що роль та значення згаданого коефіцієнта у різних дослідників є не однаковою. Зокрема, у формулі В. І. Мурашова [159] він безпосередньо впливає на жорсткість деякого осередненого перерізу залізобетонного елемента. Цілком очевидно, що похибка, допущена при визначенні параметра  $\psi_s$ , завжди буде призводити до адекватної помилки в оцінці його жорсткості. Щодо формули О. О. Гвоздева [65], то в ній коефіцієнт  $\psi_s$  впливає тільки на середні деформації розтягнутої арматури в блоці між тріщинами (табл. А.3 дод. А). Тому й не дивно, що в сучасних російських нормах [248] реалізацію ідеї В.І. Мурашова здійснено через формулу О. О. Гвоздева.

Особливої уваги заслуговують пропозиції другого напрямку [51; 104; 429], у яких відображено континуальний (переважно нелінійний) зв'язок жорсткості залізобетонних елементів лише з рівнем їх завантаження або

виникаючих зусиль  $M / M_u$ . Однак численні результати експериментальних досліджень [130; 190; 236; 340; 378; 439; 460; 495] показують, що задля відтворення реального стану залізобетонних елементів конструкцій функцію їх жорсткості варто пов'язувати не тільки з рівнем зусиль  $M / M_u$ .

Дослідження третього напрямку базуються на інтегральних принципах [51], а тому і зводяться до апроксимації дискретних значень жорсткості залізобетонного елемента уздовж його осі поліномом 4-го степеня [241] або ж до використання середньозважених значень жорсткостей в межах кожної з ділянок, на які умовно розбивається залізобетонний елемент [17; 50].

У залежностях четвертого напрямку [95; 122; 293; 294; 300; 316; 321; 322; 329; 382; 386; 389; 399; 435; 471; 479; 536; 549; 550], запропонованих переважно зарубіжними вченими (див. табл. А.3 і А.4 дод. А) та реалізованих нині в нормативних документах більшості країн Європи, на жаль збережено емпіричні підходи до оцінки жорсткості бетонних та залізобетонних елементів. Тому, по аналогії з пропозиціями першого напрямку, вони є малоприйнятними для використання в узагальненій моделі їх деформування.

Лінеаризацією функцій жорсткості об'єднані пропозиції п'ятого напрямку [89; 90; 125; 447; 459; 465]. Кількість ділянок кусково-лінійної апроксимації зазвичай приймається в межах від 2-х до 5-ти. Однак, незважаючи на достатньо високу точність, подібні функції не можуть бути використані в узагальненій моделі деформування залізобетонних елементів конструкцій, оскільки у вузлових точках стикування вони мають розриви похідних. Загалом же до лінеаризації функцій жорсткості слід відноситись доволі обережно, бо за нею може губитися фізична сутність самого процесу деформування.

Детальний аналіз вищенаведених пропозицій показує, що для їх переважної більшості властивий один спільний і доволі суттєвий недолік – емпіризм. Щоб уникнути його та отримати замкнуті рішення з визначення жорсткості залізобетонного елемента конструкції, основну увагу слід очевидно приділити пропозиціям, близьким до другого напрямку. Лише

близьким тому, що функція жорсткості залізобетонного елемента загалом є залежною не тільки від рівня завантаження (зусиль)  $M / M_u$ , але й від рівня його деформування  $(1/r)/(1/r_u)$ .

### 1.5. Модуль деформацій бетону

Жорсткість бетонних та залізобетонних елементів завжди була в полі зору як вітчизняних, так і зарубіжних дослідників, адже більшість задач в теорії бетону та залізобетону вирішити без неї взагалі неможливо. Сьогодні уже абсолютно очевидним є і той факт, що створення узагальненої моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів поза питаннями їх жорсткості теж є неможливим. Тому цілком зрозуміло, що її формування повинно починатися з основних принципів моделювання діаграми стану бетону.

Відомо, що жорсткість бетонного перерізу як в неармованих, так і в армованих елементах прямо пов'язана з модулем деформацій бетону. Причому, при вирішенні практичних задач зазвичай використовується січний модуль деформацій бетону  $E_{cc}$ . Всі пропоновані на сьогодні вирази з його визначення (табл. А.5 дод. А) можна умовно розділити на дві групи, залежно від характеру впливу основних функціональних параметрів.

До першої з них віднесемо ті аналітичні залежності, в яких січний модуль деформацій  $E_{cc}$  лінійно пов'язаний з рівнем напружень в бетоні  $\eta_c = \sigma_c / f_{cd}$  [9; 94; 149; 159; 173]. Крім певних недоліків, характерних кожному із зазначених виразів, всім їм властивий один спільний і доволі серйозний недолік: за їх допомогою можна описати лише діаграму деформування або висхідну вітку діаграми стану стиснутого бетону.

Функції другої групи, що відображають нелінійну залежність січного модуля деформацій бетону від різних параметрів, можна умовно розділити на три підгрупи. Якщо залежності першої з них функціонально пов'язані



лише з рівнем завантаження бетону  $\eta_c$  [37; 112; 118; 242; 249; 280; 285], то другої – лише з рівнем його деформування  $\eta_\varepsilon = \varepsilon_c / \varepsilon_{cl}$  [23; 92; 269]. Водночас результати численних експериментальних досліджень [25; 188; 189; 283; 473; 499; 535; 543] показують, що дійсна діаграма  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , а значить і січний модуль деформацій бетону  $E_{cc}$ , загалом є залежними від обох вищезгаданих параметрів.

У функціях третьої підгрупи модуль деформацій  $E_{cc}$  пов'язується навіть з окремими геометричними параметрами [106; 255; 276; 281]. Однак ці залежності теж є малоприматними для використання в узагальненій моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів із-за їх відносної складності та відсутності належного фізичного обґрунтування.

Оцінюючи існуючі пропозиції з визначення січного модуля деформацій бетону, необхідно зробити наступні застереження.

1. Моделювання реальної діаграми стану бетону доцільно здійснювати за допомогою характеристики, що зв'язує між собою два основних параметри його напружено-деформованого стану ( $\sigma_c$  і  $\varepsilon_c$ ). Саме такою змінною характеристикою, яка може забезпечити належне фізичне обґрунтування діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , і є січний модуль деформацій бетону  $E_{cc}$ .

2. Лінійними залежностями модуля деформацій бетону  $E_{cc} = f(\eta_c)$  неможливо описати низхідну вітку діаграми його стану  $\sigma_c - \varepsilon_c$ .

3. Застосування принципу Декарта для визначення складових деформацій бетону є допустимим, але для відтворення модуля деформацій бетону при моделюванні залежності  $\sigma_c - \varepsilon_c$  [269] є неприйнятним.

## 1.6. Діаграми деформування стиснутого бетону

Загальновідомо, що запровадження деформаційної моделі перерізу залізобетонних елементів конструкцій прямо пов'язане з реальними діаграмами деформування бетону [11; 14; 20; 25; 30; 38; 45; 46; 92; 138; 146;

153; 161; 178; 255; 278; 281]. Для побудови останніх в теорії залізобетону найчастіше використовували поліноми 2-го...5-го степенів та сплайн-функції, тригонометричні функції і ряди, степеневі та показникові, дробово-лінійні та неправильні дробово-раціональні функції тощо. Водночас багато дослідників переконані, що для практичних розрахунків прийнятною може бути будь-яка функція діаграми деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$  із вищеназваних, бо на точність результатів розрахунків це впливає мало [31; 37; 70; 101; 125; 159; 160; 252; 261]. На превеликий жаль серйозно обґрунтованих контраргументів цим твердженням сьогодні не висунуто. А вони повинні бути, особливо коли мова іде про гнучкі залізобетонні елементи, що зазнають будь-якого стиску. Адже через кривину їх прогини та несуча здатність прямо пов'язані з деформаціями крайніх фібр (волокон) бетонного перерізу таких елементів.

Безперечно, що діаграму  $\sigma_c - \varepsilon_c$  необхідно представляти функцією, котра якнайповніше та якнайточніше відтворювала б суть роботи бетонного перерізу в процесі деформування елемента на всіх його стадіях аж до руйнування. У зв'язку з цим виникає питання щодо основних критеріїв, за якими необхідно оцінювати відомі на сьогодні функції діаграм деформування бетону. Загалом видається очевидним, що універсальна залежність  $\sigma_c - \varepsilon_c$  повинна відповідати таким найважливішим критеріям:

- бути визначеною та неперервною на можливому діапазоні розвитку деформацій;
- мати екстремум за деформацій бетону  $\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}$ ;
- бути монотонною на висхідній та низхідній вітках діаграми;
- дозволяти легко визначати не тільки напруження, але і деформації за довільного рівня навантажень;
- бути зручною для апроксимаційних операцій, особливо інтегрування та диференціювання;
- якнайточніше відповідати діаграмі реального деформування бетону, а отже характерним параметричним точкам цієї діаграми;

- бути здатною відтворювати зміну реального напружено-деформованого стану елементів в процесі їх роботи.

Функція  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , що буде задовольняти всім вищевказаним вимогам, повинна не тільки описувати деформування бетону в перерізі елементів за їх однорідного напружено-деформованого стану, але й:

- характеризувати роботу бетону на висхідній та низхідній вітках за неоднорідного деформування елементів;
- відтворювати «трансформацію» повних діаграм деформування бетону, а не їх просте перенесення на реальні перерізи залізобетонних елементів конструкцій.

Беручи до уваги сказане, спробуємо виконати аналіз найбільш відомих залежностей з відтворення реальних діаграм деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$  (табл. А.6 дод. А) та встановимо методологічну обґрунтованість їхньої відповідності вищенаведеним критеріям.

Всі **степеневі та поліноміальні функції**, що різного часу найбільш часто використовувалися дослідниками для характеристики реальних діаграм деформування стиснутого бетону, можна умовно розділити на чотири групи - степеневі одночлени, функції степеневого характеру, степеневі ряди та поліноми другого і вищих степенів (табл. А.6 дод. А).

Щодо степеневих одночленів [11; 14; 305; 336], то практично всі вони не допускають існування низхідної вітки діаграми деформування  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , а тому унеможливають повноцінне використання в узагальненій моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів.

Зазначений недолік є одним із визначальних і для окремих функцій степеневого характеру [128; 242; 285; 496; 508]. Для інших же подібних залежностей [106; 141; 142; 187; 282; 434; 505; 524], що певною мірою є наближеними до параболічних функцій, властива значна невідповідність дослідним даним і їх відносна складність із-за дробових показників степенів.

Чи не найпоширенішого застосування в діаграмах деформування бетону

набули степеневі ряди або поліноми різних степенів. Так, окремі дослідники вважають цілком виправданим для відображення реальної діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$  використовувати поліноми 2-го степеня [7; 102; 249; 265; 377; 394; 538] (табл. А.6 дод. А). Однак результати експериментальних досліджень показують, що вони суттєво завищують величину деформацій бетонів міцністю  $f_{cd} \leq 40 \text{ МПа}$  за рівнів навантажень, близьких до експлуатаційних. Тому цілком очевидно, що без штучного пониження величини крайових деформацій бетону спеціальними прийомами [7], застосування поліномів другого степеню для діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$  загалом є малопродатним.

Що ж до поліномів вищих (3...5-го) степенів [22; 28; 37; 77; 83; 122; 142; 150; 422], то вони здатні більш точно описати діаграму деформування бетону на висхідній ділянці. Однак на низхідній ділянці діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$  вони втрачають свою монотонність, маючи декілька точок перегину, що не відповідає реальному характеру деформування бетону. Крім того, виникають певні труднощі з визначенням коефіцієнтів зазначених поліномів. Із-за цього в залежностях 3-го степеню екстремум напружень часто виявляється суттєво зміщеним відносно критичних деформацій бетону  $\varepsilon_{c1}$ , що свідчить про необхідність штучного корегування величини деформацій бетону  $\varepsilon_c$ . Тому окремі дослідники вдаються до обмеження низхідної вітки діаграми деформування бетону [22; 28; 83] або ж використовують для описування останньої інші вирази, переходячи до сплайн-функцій [61; 153; 191].

Так звані «сплайн-функції» складаються з рівнянь, кожне з яких є справедливим лише між певними параметричними (вузловими) точками діаграми деформування бетону. Їх теж можна умовно розділити на дві групи. До першої групи слід віднести ті функції, за якими діаграма деформування  $\sigma_c - \varepsilon_c$  не містить низхідної вітки [248; 334; 335; 348375; 376; 382]. Тому, як видно з табл. А.6 (дод. А), вони і нині залишаються відображеними лише в спрощених методиках нормативних документів більшості країн Європи.

«Сплайн-функції» другої групи [61; 92; 153; 155; 191; 295; 296; 352; 403;

512; 521] дозволяють доволі точно описувати процес деформування бетону. Однак їх використання в узагальненій моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів є мало прийнятним із-за штучного переривання та «зшивання» функцій у вузлових точках діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$ .

Всі **показникові залежності**, що використовувалися дослідниками для характеристики реальних діаграм деформування стиснутого бетону варто умовно розділити на дві групи (табл. А.6 дод. А). До першої належить віднести чисто експоненціальні функції [43; 172; 260; 307; 486], що мають один доволі суттєвий недолік. За напружень  $\sigma_c = f_{ck(d)}$  відносні граничні деформації бетону сягають нескінченності, що безперечно не відповідає результатам експериментальних досліджень.

Другу групу складають залежності у вигляді добутку лінійної та експоненціальної функцій [51; 146; 161; 500; 510; 518], що позбавлені вищевказаного недоліку. Однак за їх допомогою дуже складно визначити величину деформацій чи відобразити зміну напружено-деформованого стану елементів за певного рівня навантажень. Крім того, деякі з них значно занижують величину деформацій для окремих класів бетону, а тому при використанні в узагальненій моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів потребують певного корегування [200].

**Тригонометричні залежності** [174; 284; 383] не знайшли широкого застосування у відтворенні реальних діаграм деформування бетону (табл. А.6 дод. А). І тут основна причина полягає в тому, що симетричність висхідної та низхідної віток в цих функціях дозволяє використовувати їх лише для діаграм деформування бетонів, в яких  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{ck} \approx 2$ . До того ж необхідно зауважити, що за їхнього використання суттєво ускладнюється процес визначення відносних деформацій бетону.

Одними з найпоширеніших у відтворенні реальних діаграм деформування бетону стали **дробові функції** (табл. А.6 дод. А), котрі можна умовно розділити на три групи. До першої слід віднести лінійно-дробові залежності [9; 84; 149; 390], які переважно не допускають існування

низхідної вітки на діаграмі  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , а тому суттєво обмежують їх використання в узагальненій моделі деформування бетонних і залізобетонних елементів.

Другу найчисленнішу групу складають правильні дробово-раціональні функції [98; 134; 142; 298; 304; 344; 374; 407; 418; 444; 473; 492; 494; 517; 531; 543; 545]. Детальний аналіз показує, що для їх переважної більшості характерним є існування практично необмеженої низхідної вітки діаграми деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$ . Однак результати експериментальних досліджень засвідчують, що навіть за найбільш неоднорідного деформування бетону в косостиснутих та косозігнутих елементах зазначена ділянка є доволі обмеженою, оскільки супроводжується утворенням так званих «лещадок» в крайових фібрах бетону стиснутої зони [8; 253].

І нарешті до третьої групи необхідно віднести залежності у вигляді неправильної дробово-раціональної функції [36; 348; 382; 499]. Вона позбавлена вищезгаданого недоліку, але наділена, здавалося б, іншим доволі серйозним недоліком математичного характеру – розривністю. Проте детальний аналіз подібних залежностей показує, що їх розривність проявляється лише за межами можливого деформування матеріалу ( $\sigma_{cu} < 0$ ).

В дійсності ж основним недоліком всіх дробових функцій є те, що при їх інтегруванні появляються радикали, а це в свою чергу веде до необхідності розв'язання трансцендентних рівнянь. Щоправда подібні проблеми, хоч і дещо іншого характеру, виникають при використанні показникових функцій та поліноміальних залежностей після їх інтегрування [22; 28; 51; 150].

Вищенаведений аналіз діаграм деформування стиснутого бетону показує, що пропонувані на сьогодні функції  $\sigma_c - \varepsilon_c$  у переважній більшості ґрунтуються на статистичній обробці результатів експериментальних досліджень стандартних бетонних або нестандартних залізобетонних зразків. Однак отримати абсолютно однакові результати випробувань, навіть за

тотожних умов їх проведення, практично неможливо в силу багатьох як об'єктивних, так і суб'єктивних факторів. Саме цим і пояснюється значна різноманітність пропозицій щодо описання діаграм деформування бетону. Тому в цій ситуації напрошується один доволі простий та очевидний висновок: моделювати слід не просто діаграму  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , а сам процес деформування бетону в бетонному або залізобетонному елементі.

### 1.7. Критичні деформації стиснутого бетону

Однією з чи не найважливіших параметричних точок діаграми стану бетону як за однорідного, так і неоднорідного напружено-деформованого стану елементів конструкцій є точка, в якій деформації бетону за максимально можливих напружень  $\sigma_c = f_{ck}$  стають рівними  $\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}$ . Тому і не дивно, що багато вітчизняних та зарубіжних дослідників приділяли особливу увагу верхній точці діаграми деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , а точніше визначенню відповідних критичних деформацій  $\varepsilon_{c1}$  (табл. А.7).

Спробуємо проаналізувати найбільш відомі залежності з визначення  $\varepsilon_{c1}$  та встановити їх методологічну обґрунтованість, виходячи з наступних критеріїв:

- в критичних деформаціях бетону можна легко виділити як пружну, так і пластичну складові, тобто  $\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{c1,el} + \varepsilon_{c1,pl}$ ;
- пружна складова зростає з підвищенням класу бетону (для ідеально пластичних бетонів  $\varepsilon_{c1,el}$  наближається до нуля);
- пластична складова критичних деформацій бетону зменшується з підвищенням його класу (для ідеально пружних бетонів величина  $\varepsilon_{c1,pl}$  наближається до нуля).

Всі існуючі вирази з визначення критичних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{c1}$  доцільно розділити на три умовні групи (табл. А.7 дод. А). До

першої з них необхідно віднести ті функції, за якими величина  $\varepsilon_{c1}$  лінійно залежить тільки від міцнісних властивостей бетону [7; 183; 238; 242; 298; 299; 344; 348; 382; 394; 402; 407; 455; 493]. Практично всі вони жодним чином не відповідають вищезазначеним критеріям, а тому без належного фізичного обґрунтування не можуть бути повноцінно задіяні в загальній моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів. Певне виключення складають лише залежності, представлені в роботах [394; 402; 493]. Однак, із-за рівності пружних та пластичних складових деформацій бетону, їх застосування у вищезгаданій моделі теж є вкрай обмеженим.

Другу найбільш численну групу складають нелінійні залежності (табл. А.7 дод. А), які варто розділити на три основні підгрупи. До першої можна віднести степеневі та дробові вирази з цілим числом степеня [24; 29; 61; 84; 106; 281; 350; 363; 364], а до другої – степеневі функції з дробовим степенем [57; 167; 168; 304; 334; 372; 382; 473; 492; 529; 531; 535; 545]. Як в перших, так і в других виділити пружну та пластичну складові критичних деформацій бетону практично неможливо. А оскільки останні теж залежать переважно від міцнісних властивостей бетону, то для них загалом характерні ті ж самі недоліки, що і для лінійних залежностей.

Окремої уваги заслуговують степеневі та дробові функції третьої підгрупи, в яких прямо чи опосередковано можна виділити пружну та пластичну складові критичних деформацій бетону  $\varepsilon_{c1}$  [87; 162; 240; 275; 283]. Цікаво, що Шейкин А. Е. [275], на відміну від всіх інших, отримав свою залежність не емпіричним шляхом, а на основі певних гіпотез та фізичних уявлень. Правда з неї випливає, що пластичні деформації бетону з підвищенням його класу зростають, та ще й непропорційно. Однак, це явно суперечить результатам експериментальних досліджень [162; 283].

Що ж до виразів третьої групи, яку представляють фіксовані числові значення критичних деформацій бетону  $\varepsilon_{c1}$  (табл. А.7), то їх використання може бути частково виправдане лише в спрощених методиках або в нормативних документах [248; 296; 306; 365; 375; 452; 500].



Таким чином, результати вищенаведеного аналізу показують, що пріоритетним для використання в узагальненій моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів варто вважати класичний підхід до визначення деформацій бетону на будь-якій стадії його деформування. За ним в критичних деформаціях, як і в будь-яких інших, повинна легко виділятися їх пружна та пластична складові. При цьому залежності з визначення критичних деформацій  $\varepsilon_{c1}$  повинні мати належне фізичне обґрунтування.

### 1.8. Граничні деформації стиснутого бетону

Повнота діаграми стану бетону або ж протяжність її низхідної вітки залежить від однієї з найбільш важливих параметричних точок діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$ . Характеризує вона граничну або максимальну деформативність бетону  $\varepsilon_{cu}$  в елементах конструкцій за їх певного напружено-деформованого стану.

Слідуючи класичним рішенням, граничні деформації бетону необхідно було б визначати, керуючись тими ж критеріями, що і для критичних деформацій:

- в граничних деформаціях бетону можна легко виділити пружну та пластичну складові, тобто  $\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{cu,el} + \varepsilon_{cu,pl}$ ;
- пружна складова зростає з підвищенням класу бетону (для ідеально пластичних бетонів  $\varepsilon_{cu,el}$  наближається до нуля);
- пластична складова зменшується з підвищенням класу бетону (для ідеально пружних бетонів  $\varepsilon_{cu,pl}$  наближається до нуля).

Однак, зважаючи на складність процесів деформування бетону у закритичній стадії, зробити це досі так і не видається можливим.

Всі існуючі вирази з визначення граничних деформацій стиснутого бетону варто розділити на три групи (табл. А.8 дод. А). Першу групу

складають залежності, в яких граничні деформації  $\varepsilon_{cu}$  лінійно залежать від міцнісних [61; 92; 105; 143; 326; 348; 382; 497] або деформаційних [10] властивостей бетону. На жаль вони не мають в своїй основі якогось аналітичного обґрунтування, а тому важко ув'язуються з загальною моделлю деформування бетонних та залізобетонних елементів. Певне виключення складають лише залежності, запропоновані Бабичем В. І. і Кочкар'євим Д. В. [10]. Отримані вони за так званим екстремальним критерієм міцності лише для окремого випадку деформування елементів конструкцій, а тому і є придатними тільки для важкого бетону з  $k = E_c \cdot \varepsilon_{c1} / f_{ck} = 2$ .

До другої групи (табл. А.8 дод. А) віднесемо залежності, в яких граничні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  нелінійно пов'язані з його міцнісними чи деформаційними характеристиками [20; 29; 167; 175; 178; 270; 271; 304; 342; 362; 416; 427; 455; 491]. Отримані вони переважно експериментальним шляхом, причому: одні – за результатами досліджень на осьовий стиск бетонних призм [29], другі – завдяки енергетичному підходу до руйнування бетонного зразка за осьового навантаження [167; 342; 362; 427], треті ж – за результатами прямих вимірювань деформацій на стиснутих гранях залізобетонних зразків [20; 270; 271; 304; 455]. Однак слід зауважити, що а ні в першому, а ні в другому випадках величина граничних деформацій бетону не може слугувати критерієм руйнування залізобетонного елементу, оскільки деформації  $\varepsilon_{cu}$  пов'язуються не з його граничним станом, а лише з видом та класом самого бетону. Крім того, існують певні застереження та сумніви [153] в достатній жорсткості дослідних установок, а отже і в точності відтворення відповідного режиму завантаження бетонних зразків. Для третього випадку, при всіх його позитивах, пов'язаних з характером експериментальних досліджень [20; 270; 271; 304; 455], вплив багатьох важливих факторів, у тому числі і арматури, на граничні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  залишився не визначеним.

Окремої уваги в другій групі заслуговує функція Павлікова А. М. [178]. Очевидно це перша аналітична залежність, отримана за екстремальним

критерієм міцності  $dM / d\varepsilon = 0$ , котрий спочатку був запропонований Байковим В. Н. і Горбатовим С. В. [18], а пізніше функціонально обґрунтований Митрофановим В. П. і Арцевим С. І. [154]. Однак в ній також не визначений вплив арматури на граничні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$ .

Стосовно ж виразів третьої групи, що представлені фіксованими значеннями граничних деформацій бетону  $\varepsilon_{cu}$  (табл. А.8 дод. А), то їх обмежене використання може бути доцільним лише в нормативних документах [248; 296; 306; 334; 375] чи в спрощених методиках розрахунку.

Зважаючи на результати вищенаведеного аналізу, варто зауважити, що граничні деформації стиснутого бетону не можуть бути визначені з класичних позицій подібно до критичних деформацій [229]. Спроможність бетонних та залізобетонних елементів опиратися дії зовнішніх навантажень залежить не тільки від геометричних параметрів їх перерізу, міцнісних та деформаційних властивостей матеріалів, але й від багатьох інших факторів. Тому цілком очевидно, що потенційні можливості деформування бетону у закритичній стадії (тобто його максимальну деформативність) необхідно пов'язувати з характером напружено-деформованого стану самого елемента та визначати за екстремальним критерієм несучої здатності  $dM / d(1/r) = 0$ .

### **1.9. Основні закономірності деформування розтягнутого бетону**

Загальновідомо, що всі сучасні деформаційні моделі перерізів залізобетонних елементів конструкцій ґрунтуються на використанні гіпотези плоских перерізів та повних діаграм деформування стиснутого бетону. Робота ж розтягнутого бетону в більшості зазначених моделей взагалі не враховується. Однак подібна ситуація є абсолютно неприйнятною, якщо мова йде про узагальнену модель деформування бетонних та залізобетонних елементів. В рамках останньої важливо знати основні закономірності деформування не тільки стиснутого, але й розтягнутого бетону.

Слід відзначити, що лише окремі дослідники враховували роботу

розтягнутого бетону (табл. А.9 дод. А) та описували діаграму його деформування переважно сплайн-функціями [95; 314; 315; 348; 409; 458; 487; 502; 536; 538; 539; 551], поліноміальними залежностями [20; 29] або ж дробово-раціональними функціями [344; 423]. Зазначеним виразам властиві ті ж самі недоліки, що і для діаграм стиснутого бетону.

Критичні деформації розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ct1}$  пов'язуються переважно з його міцнісними характеристиками за допомогою лінійних [7; 20; 25; 95; 139; 155; 191; 244; 345; 409; 487], степеневих [286] або лінійно-дробових функцій [110] з тими ж самими недоліками, що і для стиснутого.

Детальний аналіз вищезгаданих залежностей з визначення критичних деформацій розтягнутого бетону (табл. А.9 дод. А) показує, що жодна з них не може бути використана в загальній моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів. Всі згадані залежності практично не мають належного фізичного обґрунтування та не відповідають класичним рішенням, де можна легко виділяти пружну та пластичну складові деформацій бетону на будь якій стадії його деформування.

Що ж до граничних деформацій  $\varepsilon_{ctu}$ , то їх описують за допомогою лінійних [122; 155; 248] або поліноміальних функцій [528] та теж пов'язують переважно з міцнісними характеристиками розтягнутого бетону.

Таким чином варто відзначити, що діаграму стану розтягнутого бетону  $\sigma_{ct} - \varepsilon_{ct}$  теж доцільно моделювати за функцією модуля його деформацій по аналогії зі стиснутим бетоном. До визначення критичних деформацій розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ct1}$  теж необхідно підходити з класичних позицій, а величину граничних деформацій  $\varepsilon_{ctu}$  слід обчислювати за діаграмою стану елемента, використовуючи екстремальний критерій міцності  $dN_{ct} / d\varepsilon_{ct} = 0$ .

### **1.10. Врахування роботи розтягнутого бетону між тріщинами**

Узагальнена модель деформування бетону в бетонних та залізобетонних

елементах конструкцій не може бути побудована лише за допомогою повних діаграм деформування або діаграм стану матеріалів. Важливе місце в її побудові повинно належати питанням жорсткості та тріщиностійкості, які прямо чи опосередковано пов'язані з оцінкою впливу роботи розтягнутого бетону між тріщинами, якщо такі виникають. Зазначений бетон практично не впливає на несучу здатність залізобетонних елементів конструкцій, однак їх дійсний напружено-деформований стан без врахування впливу розтягнутого бетону встановити практично неможливо. Водночас в більшості існуючих на сьогодні деформаційних моделей вплив розтягнутого бетону на роботу залізобетонних елементів, після появи в них тріщин, практично не враховується або ж враховується надто наближено.

Залежно від прийнятих вихідних передумов та припущень, всі найбільш відомі нині пропозиції (табл. А.10 дод. А), щодо урахування роботи розтягнутого бетону між тріщинами, можна умовно розділити за трьома напрямками.

Перший напрямок складають дослідження, пов'язані з використанням традиційної моделі деформування залізобетонного елемента з тріщинами «стиснутий бетон – пустота – розтягнута арматура», запропонованої ще в кінці XIX століття та значно скорегованої відтоді. В свою чергу, всі дослідження зазначеного напрямку можуть бути розділені на чотири групи. Серед робіт першої з них [51; 52; 59; 88; 110; 112; 117; 158; 159; 164; 248; 250; 292] визначальними стали пропозиції проф. Мурашова В. І. [159], за якими вплив розтягнутої зони бетону на жорсткість залізобетонних елементів після появи тріщин враховується не безпосередньо, а оцінюється інтегрально через осереднені деформації арматури  $\varepsilon_{sm}$  (або напруження  $\sigma_{sm}$ ) за допомогою коефіцієнта  $\psi_s$ . Щоправда згодом Немировський Я. М. [164] відмовився від використання розрахункових деформацій арматури в перерізі з тріщиною  $\varepsilon_s$ , наближаючи їх до дійсних через врахування роботи розтягнутого бетону над самою тріщиною ( $M_{ct} / M$ ).

Задля забезпечення методологічної єдності розрахунків залізобетонних

елементів, що працюють з тріщинами в розтягнутій зоні чи без них, Бондаренко В. М. [51] узагальнює функцію коефіцієнта  $\psi_s$  для всього діапазону деформування за допомогою емпіричних параметрів  $a$ ,  $b$  і  $c$  (табл. А.10 дод. А). Зважаючи на відносну складність функції  $\psi_s$ , автор вдається до її лінеаризації двочленом першого степеня ( $c = 1$ ).

Сьогоднішні російські норми [248] практично повернулися до пропозицій Мурашова В. І. з фіксованим значенням коефіцієнта повноти епюри напружень розтягнутого бетону  $\omega$  на ділянці між тріщинами. Однак Клованич С. Ф. [117], справедливо вважаючи, що зазначений коефіцієнт не може залишатися сталим внаслідок утворення («підростання») нових тріщин та поступового виключення з роботи розтрісканого бетону, пропонує обчислювати його за формулою

$$\omega = \omega_0 \cdot k = \omega_0 \cdot \eta \cdot e^{-(\eta-1)} \quad (1.1)$$

при значеннях параметра  $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c,cr} \geq 1$ .

У пропозиціях другої групи [42; 157; 245] вплив розтягнутої зони бетону на жорсткість залізобетонних елементів конструкцій є доволі наближеним та пов'язується з так званим «радіусом армування –  $R_r$ » без належного фізичного обґрунтування.

До третьої групи слід віднести доволі цікаві дослідження НДІБК [257], за якими вплив розтягнутого бетону між тріщинами пропонується визначати на підставі гіпотези Томаса через відносні взаємні зміщення арматури і бетону на зазначеній ділянці. Подібна пропозиція є доволі заманливою, а отримана залежність з визначення коефіцієнта  $\psi_s$  є неприйнятною із-за неточностей, пов'язаних з визначенням основних параметрів зчеплення.

З фізичної точки зору пропозиції четвертої групи [83; 100; 112; 147; 244; 247] особливої зацікавленості не викликають, оскільки отримані вони на основі статистичної обробки результатів експериментальних досліджень.

Пропозиції другого напрямку ґрунтуються на полярно іншому підході до осереднення деформацій розтягнутої зони. Тут залізобетон замість

традиційної моделі розглядається як суцільне тіло не тільки до, але й після утворення тріщин. Процес тріщиноутворення та порушення сумісної роботи бетону і арматури моделюється коефіцієнтом  $\psi_{ct}$ , що зменшує напруження в розтягнутому бетоні пропорційно до діючих зусиль [25; 35; 181] або ж до деформацій розтягнутої грані елемента [314; 315; 348; 458; 502]. По суті зазначений коефіцієнт відображає рівень або стадію напружено-деформованого стану всього блоку між тріщинами вцілому після їх утворення. Цікаво, що його функціональний зв'язок з коефіцієнтом Мурашова В. І., котрий може бути представлений залежністю

$$\psi_{ct} = (1 - \psi_s) \cdot M / M_{ct,cre} , \quad (1.2)$$

показує, що  $\psi_{ct}$  загалом являється коефіцієнтом повноти епюри напружень розтягнутого бетону  $\omega$ .

До третього напрямку варто віднести пропозиції, що взагалі виключають необхідність використання коефіцієнтів  $\psi_s$  чи  $\psi_{ct}$ . Їх теж можна умовно розділити на дві групи. До першої з них відносяться рішення [273], що базуються на інтегральних принципах [50; 51] та пов'язуються з депланацією плоских перерізів. Тут жорсткість залізобетонного елемента визначається окремо для стиснутої та розтягнутої зон бетону як для перерізу з тріщиною ( $D_{min}$ ), так і для середнього перерізу в блоці між тріщинами ( $D_{max}$ ). Потреба у використанні коефіцієнтів  $\psi_s$  чи  $\psi_{ct}$  відпадає із-за прийняття передумови, що жорсткість балки уздовж осі змінюється за косинусоїдою. Та все ж, зниження жорсткості залізобетонного елемента, що оцінюється в цьому випадку за допомогою отриманого коефіцієнта депланації  $n_s$ , навіть без врахування взаємного зміщення бетону і арматури, описується надто складними математичними залежностями.

До другої групи цього напрямку слід віднести пропозиції [122; 243; 381], в яких вплив розтягнутої зони бетону на роботу залізобетонних елементів оцінюється опосередковано та надто наближено через осереднення деякого деформаційного параметру  $\alpha$ .

На завершення вищенаведеного аналізу необхідно зазначити, що робота розтягнутого бетону, особливо після появи тріщин, загалом супроводжується адекватним перерозподілом зусиль з бетону на арматуру в розтягнутій зоні залізобетонного елемента. Тому подібний перерозподіл було б доцільніше відображати не одним параметром  $\psi_s$  чи  $\psi_{ct}$ , а відтворювати за допомогою обох коефіцієнтів одночасно.

### **1.11. Кривина залізобетонних елементів**

Якщо в силовій моделі кривина залізобетонних елементів конструкцій завжди пов'язувалась лише з прогинами, то в рамках деформаційної моделі вона використовується і в розрахунках за граничними станами першої групи. Тому цілком очевидно, що методологічну єдність розрахунків за граничними станами обох груп може забезпечити тільки така модель деформування залізобетонних елементів конструкцій, основними та визначальними параметрами якої будуть їх кривина та жорсткість.

Існуючі нині пропозиції щодо оцінки кривини залізобетонних елементів (табл. А.11 дод. А) можна умовно розділити на чотири групи. До першої з них необхідно віднести пропозиції з розрахунку кривини зазначених елементів за параметрами їх розтягнутої або стиснутої зони [101; 130; 147; 159; 250; 312]. Основним недоліком такого підходу до визначення кривини є доволі суттєві розходження отриманих при цьому теоретичних величин з результатами експериментальних досліджень.

Певно більш досконалыми слід вважати пропозиції другої групи [20; 68; 73; 83; 100; 101; 147; 165; 248; 252], де кривина визначається одночасно за параметрами розтягнутої та стиснутої зон перерізу залізобетонного елемента за опосередкованого чи прямого використання гіпотези плоских перерізів.

Третю групу складають пропозиції, де кривина розглядається як деяка осереднена інтегральна характеристика напружено-деформованого стану елемента з певним ефективним або приведеним перерізом [10; 348; 395; 424].



Момент інерції зазначеного перерізу може бути визначений у тому числі і на основі пропозицій, наведених в табл. А. 4 дод. А. Але такий підхід може бути виправданим лише в практичних розрахунках залізобетонних елементів за спрощеними методиками. Він не може бути використаний повноцінно в рамках узагальненої моделі їх деформування.

Що ж до пропозицій четвертої групи, то тут розрахункове значення кривини залізобетонного елемента рекомендується обчислювати за її осередненим значенням в блоці між тріщинами [112; 243; 288; 343; 348; 381; 395; 513]. Подібний прийом по відношенню до кривини цілком логічний, але пропонувані аналітичні залежності слабо обґрунтовані з фізичної точки зору.

Загалом же слід усвідомлювати, що кривина є одним із визначальних параметрів діаграми стану елементів конструкцій. Останню ж доцільно моделювати за допомогою жорсткості, яка зв'язує між собою геометричні характеристики елементів та міцнісні і деформаційні властивості матеріалів. Водночас кривину пов'язують ще й з іншим параметром інтегрального характеру – прогином. Тому розрахункову кривину залізобетонного елемента загалом варто розглядати ще й як певну інтегральну величину в деякому осередненому перерізі блоку між тріщинами.

### **1.12. Основні методи визначення прогинів**

Загалом відомо, що прогин є інтегральною характеристикою і відноситься до тих основних параметрів напружено-деформованого стану елементів конструкцій, значення яких можна виміряти або визначити прямо при експериментальних дослідженнях. Що ж до теоретичних значень прогинів, то їх обчислюють зазвичай за допомогою різних методів і способів (табл. А.12 дод. А). Пропозиції, що закладені в основу розрахунку прогинів, доцільно було б згрупувати наступним чином.

До першої групи слід віднести залежності, що базуються на спрощених методиках визначення прогинів [47; 159; 186; 248; 250; 272; 291; 292; 323;

370; 443]. Вони забезпечують доволі хорошу збіжність теоретичних прогинів з результатами відповідних експериментальних досліджень шарнірно опертих та консольних елементів. Однак для більш складних схем закріплення залізобетонних елементів конструкцій така збіжність у більшості випадків є незадовільною.

В основі пропозицій другої групи лежать так звані енергетичні методи визначення переміщень, пов'язані з точними [73; 247; 248] або ж з наближеними [73; 100; 101; 127; 147; 248] способами обчисленнями інтегралу Мора. Слід зауважити, що точний розв'язок останнього являє собою доволі складну задачу, а спрощені методики розрахунку доволі часто обумовлюють обмежене використання отриманих рішень.

Стосовно ж пропозицій третьої групи, то варто відзначити, що вони пов'язані з прямим інтегруванням диференційного рівняння зігнутої осі балки, а точніше зі спрощеними способами розв'язку зазначеного рівняння графоаналітичними методами [259] чи методами початкових параметрів [276]. Однак математичні рішення, отримані за допомогою останніх, все одно залишаються доволі складними.

За пропозиціями четвертої групи, реалізованими переважно в нормативних документах [122; 243; 382], величина розрахункового прогину залізобетонного елемента оцінюється деяким осередненим значенням за двома можливими випадками його деформування: за відсутності та наявності тріщин в розрахунковому перерізі. Подібний прийом щодо визначення прогинів хоч і можна визнати допустимим, але запропонована залежність з їх визначення практично не обґрунтована з фізичної точки зору, а тому є неприйнятною для реалізації в узагальненій моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів.

Таким чином, аналіз вищенаведених залежностей з обчислення прогинів та переміщень показує, що доволі перспективним для використання в узагальненій моделі деформування залізобетонних елементів конструкцій може бути певне поєднання пропозицій другої та четвертої груп. Для цього

необхідно знати аналітичну залежність або епюру осередненої кривини залізобетонного елемента уздовж його осі. Наявність такої функції дозволить будувати епюру кривини елемента за її осередненими значеннями на окремих ділянках чи в межах окремих блоків між тріщинами, що суттєво підвищить ефективність використання загальновідомих енергетичних методів як в точних, так і в наближених обчисленнях інтегралу Мора.

### **1.13. Відстань між тріщинами в залізобетонних елементах**

Описати процеси деформування залізобетонних елементів конструкцій з позицій механіки твердого тіла, що деформується, у більшості випадків буває надзвичайно складно. І викликано це в першу чергу процесами тріщиноутворення в залізобетоні, які ведуть до порушення його суцільності. Тому оцінку напружено-деформованого стану залізобетонних елементів конструкцій здійснюють переважно з позицій механіки руйнування, основні положення якої стосовно залізобетону нині активно розвиваються.

Дослідженням тріщиностійкості залізобетонних елементів присвячена значна кількість робіт зарубіжних та вітчизняних вчених. Завдяки їм встановлено, що довжина блоків, на які послідовно розділяється залізобетонний елемент в процесі тріщиноутворення, є змінною та залежить від багатьох чинників. Вплив кожного із них оцінюється зазвичай феноменологічно через залучення основних гіпотез про спільну роботу двох матеріалів. Тому більшість відомих нині пропозицій з визначення відстаней між тріщинами (табл. А.13 дод. А) можна умовно згрупувати за двома напрямками, залежно від прийнятих гіпотез та підходів до отримання відповідних аналітичних залежностей.

До першого напрямку віднесемо всі ті пропозиції, за якими відстань між тріщинами безпосередньо пов'язується з параметрами зчеплення арматури з бетоном. В свою чергу їх можна умовно розділити на чотири групи. Відповідно до пропозицій першої групи [497; 498; 544] відстань між

тріщинами залежить не тільки від міцнісних характеристик розтягнутого бетону, ступеню його насиченості арматурними стержнями та діаметру останніх, але й від напружень зчеплення, що пов'язані з напруженнями в самій арматурі. Однак певний емпіризм та недостатнє фізичне обґрунтування цих пропозицій стали їх основними недоліками, яких практично не вдалося позбутися і іншим дослідникам [19; 351; 371; 373; 454; 488; 511].

Пропозиції другої групи [126; 156; 159; 163; 318; 412] ґрунтуються на положеннях загальновідомої теорії тріщиностійкості Мурашова В. І. [159], суттєво розвинутої Немировським Я. М. [163]. Тут відстань між тріщинами визначається виходячи з того, що різниця зусиль в арматурі у перерізі з тріщиною та в перерізі між тріщинами, врівноважується силами зчеплення арматури з бетоном на зазначеній ділянці. Окремі дослідники, залишаючись в рамках зазначеної теорії, пропонують спрощені прийоми визначення відстані між тріщинами [19, 82, 99, 101, 112, 244, 246], посиляючись на суттєві розбіжності теоретичних величин  $s_{r,\max}$ , обчислених за формулою Мурашова В. І. [159], з результатами експериментальних досліджень. Однак для більшості із них властива переобтяженість емпіричними параметрами та коефіцієнтами, що є вкрай небажаним в узагальненій моделі деформування залізобетонних елементів конструкцій.

Третю групу складають пропозиції Берга О. Я. [41], що знайшли своє відображення в окремих нормативних документах [157; 245]. Згідно його досліджень відстань між тріщинами залежить не тільки від кількості та діаметру арматурних стержнів, але й від площі розтягнутого бетону, обмеженого зовнішнім контуром перерізу і величиною радіусу взаємодії  $r$ . Інакше кажучи, відстань між тріщинами залізобетонного елемента пропонується визначати за величиною радіусу армування його перерізу  $R_r$ , незалежно від напружено-деформованого стану самого елемента. Однак остання теза доволі часто спростовується результатами експериментів.

До четвертої групи слід віднести дослідження, в яких відстань між тріщинами обчислюється через накопичення відносних взаємних зсувів

бетону і арматури уздовж її осі на ділянці між тріщинами [115; 136]. За такої ситуації дотичні напруження на поверхні контакту бетону і арматури в середньому перерізі між тріщинами стрибкоподібно зменшуються до нуля. Відобразити це в аналітичних рішеннях надзвичайно складно. Тому кінцеві вирази з визначення кроку тріщин, хоч функціонально і пов'язані з основними параметрами арматури та характеристиками її зчеплення, на жаль не позбавлені різних емпіричних коефіцієнтів (наприклад  $\theta_s$ ).

За пропозиціями другого напрямку відстань між тріщинами ні безпосередньо, ні опосередковано не пов'язується з параметрами зчеплення арматури з бетоном. Всі пропоновані тут залежності можна умовно розділити за двома групами. До першої віднесемо чисто емпіричні залежності, отримані на підставі доволі обширних експериментальних досліджень [330; 331; 410; 413; 414; 415; 419; 546]. Вони представляють певний інтерес лише тому, що дозволяють визначити основні чинники та ступінь їх впливу на процеси тріщиноутворення в залізобетоні. Однак кожній із зазначених формул, окрім своїх недоліків, властивий один спільний - обмеженість застосування.

Дещо більшої уваги заслуговують пропозиції другої групи, що представлені переважно напівемпіричними залежностями (табл. А.13 дод. А). Вони мають певне фізичне обґрунтування та пов'язують відстань між тріщинами переважно з основними параметрами армування залізобетонних елементів [313; 325; 357; 358; 360; 387; 388; 404; 432; 445; 457]. Тому й не дивно, що ці пропозиції, навіть не дивлячись на значний емпіризм, отримували в свій час відображення в нормативних документах багатьох країн світу [122; 243; 248; 346; 347; 348; 369; 381; 382; 485].

Оцінюючи вищенаведені залежності з визначення відстані між нормальними тріщинами, можна констатувати, що найбільш привабливими з фізичної точки зору є пропозиції першого напрямку. За комплексного поєднання пропозицій першої та другої груп цього напрямку відстань між тріщинами залізобетонного елементу можна було б пов'язати не тільки з напруженнями в розтягнутому бетоні та напруженнями зчеплення арматури з

бетоном, але й зі зміною напружень в розтягнутій арматурі уздовж її осі. Реалізація такого шляху дозволила б повністю або максимально уникнути емпіризму в розрахункових формулах з визначення не тільки відстані  $s_{r, \max}$ , але й інших параметрів тріщиностійкості залізобетонних елементів.

#### 1.14. Ширина розкриття тріщин

Цілком очевидно, що ширина розкриття тріщин  $w_k$  за своєю природою є не чим іншим як абсолютним зміщенням (переміщенням) розтягнутого бетону відносно розтягнутої арматури. Тому, виходячи зі способів визначення подібного переміщення, всі існуючі пропозиції щодо обчислення ширини розкриття нормальних тріщин в залізобетонних елементах конструкцій можна умовно розділити за двома основними напрямками (табл. А.14 дод. А).

Згідно пропозицій першого напрямку ширина розкриття тріщин в залізобетонних елементах і конструкціях загалом є інтегральним параметром їх тріщиностійкості. В рамках такого підходу всі пропозиції цього напрямку варто розділити на три групи. До першої з них варто віднести дослідження [52; 73; 80; 112; 135; 171; 498; 530], в яких ширина розкриття тріщин визначається переважно за накопиченням взаємних відносних зсувів бетону і арматури уздовж її осі на ділянці між тріщинами (гіпотеза Томаса). Рішення за цими дослідженнями зводяться зазвичай до встановлення зв'язку між дотичними напруженнями та деформаціями взаємного зсуву. Необхідно відзначити, що в дійсності подібний зв'язок є доволі складним. І навіть якщо його описувати лінійною функцією, аналітичні залежності з визначення ширини розкриття тріщин залишаються доволі складними, а при спрощенні втрачають свій фізичний зміст [136; 461].

Другу групу складають пропозиції [101; 122; 159; 243; 248; 347; 348; 351; 355; 381; 382; 388; 412; 431; 449; 454; 456; 457; 478; 497; 509; 511; 544], за якими ширина розкриття тріщин визначається як різниця видовжень

розтягнутого бетону і арматури уздовж її осі на ділянці між тріщинами. Безперечно, що серед вказаних робіт найбільш важливими є загальновідомі дослідження Мурашова В. І. [159], в яких ширину розкриття тріщин пропонується обчислювати через основні параметри деформування арматури з урахування роботи розтягнутого бетону між тріщинами ( $\psi_s$ ). На жаль у всіх вищезгаданих роботах, включаючи навіть дослідження Немировського Я. М. [163] питання зчеплення арматури з бетоном зачіпаються лише опосередковано. Саме за допомогою зчеплення, використовуючи надійні експериментальні дані, можна було б у повній мірі використати пропозицій цієї групи. Однак узгодження основних положень теорії тріщиностійкості з питаннями зчеплення арматури з бетоном завжди було доволі непростим завданням.

В основі пропозицій третьої групи лежать розробки Берга О. Я. [41], за якими ширина розкриття тріщин пов'язується лише з найважливішими параметрами армування конструкцій (деформаціями стержнів, їх діаметром та кількістю). Зчеплення арматури з бетоном враховується опосередковано за допомогою деякого емпіричного коефіцієнта  $\beta$ . Однак слід зауважити, що у такий спосіб неможливо достовірно оцінити вплив розтягнутого між тріщинами бетону на процеси деформування елементів конструкцій. Адже цілком очевидно, що вищезгадані параметри армування, які безпосередньо визначають ширину розкриття тріщин, абсолютно не пов'язані з характером розподілу дотичних напружень уздовж самого стержня. Ймовірно, що саме із-за цього вищезгадані пропозиції знайшли своє застосування лише в окремих вітчизняних документах нормативного характеру [157; 245].

Мабуть саме складністю відображення процесів тріщиноутворення обумовлені пропозиції другого напрямку, де використані емпіричні (статистичні) підходи до оцінки визначальних чинників, що впливають на характер утворення тріщин та на ширину їх розкриття. Всі вони можуть бути розділені за двома умовними групами наступним чином.

До першої з них слід віднести ті роботи, в яких при обчисленні ширини

розкриття тріщин зважають лише на осереднені деформації арматури в блоці між тріщинами. Тут повністю або майже повністю нехтують осередненими деформаціями бетону на зазначеній ділянці із-за їх малості [73; 82; 101; 308; 309; 311; 313; 330; 331; 356; 358; 391; 405; 408; 413; 484; 503; 526; 533]. Подібний підхід до питань тріщиностійкості залізобетонних елементів знайшов відображення в ряді нормативних документів [244; 246; 290; 315; 333; 338]. Однак слід зауважити, що для більшості пропозицій цієї групи властива суттєва обмеженість та навіть деяка взаємна суперечливість їхнього застосування.

Пропозиції другої групи мало чим відрізняються від пропозицій першої. Тут ширина розкриття тріщин пов'язується не з осередненими деформаціями арматури, а з напруженнями в ній [287; 289; 337; 360; 393; 420; 421; 428; 451; 481; 504; 519; 525; 532; 541; 542]. Що ж до розтягнутого бетону, то його участь в процесі деформування залізобетонних елементів враховується наближено лише в окремих роботах [393; 421; 451; 481; 504; 525; 532]. Зрозуміло, що за таких обставин вищенаведені емпіричні залежності є мало прийнятними для використання в узагальненій моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів.

На завершення вищенаведеного аналізу необхідно зазначити, що для залізобетонних елементів пріоритетними у визначенні ширини розкриття нормальних тріщин є пропозиції першого напрямку. З точки зору практичної реалізації найбільшої уваги серед них все ж таки заслуговують залежності другої групи. За їх допомогою, пов'язуючи ширину розкриття тріщин прямо чи опосередковано з параметрами зчеплення арматури з бетоном, можна було б повністю або максимально уникнути емпіризму в розрахункових залежностях з визначення ширини розкриття тріщин  $w_k$ .

## **1.15. Висновки**

1. Узагальнена деформаційно-силова модель опору бетону та залізобетону



повинна ввібрати в себе основні переваги силових та деформаційних, дискретних та інтегральних моделей. Одним з основних її елементів, здатним об'єднати чи примирити між собою існуючі на сьогодні моделі, можна вважати діаграму стану залізобетонних елементів  $M - 1/r$ .

2. Аналітична залежність виду  $M - 1/r$  повинна бути здатною не тільки відтворювати реальний напружено-деформований стан залізобетонних елементів, але й за певних вихідних умов трансформуватися в діаграми стану і навіть діаграми деформування матеріалів, зокрема бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$ .
3. Діаграму стану елемента конструкції  $M - 1/r$  доцільно моделювати за допомогою інтегральної жорсткості осередненого перерізу в блоці між тріщинами. Функція жорсткості залізобетонного елемента загалом є залежною не тільки від рівня його завантаження чи зусиль  $M / M_u$ , але й від рівня деформування елемента  $(1/r)/(1/r_u)$ .
4. Задля отримання замкнених рішень кривину, яка по аналогії з жорсткістю пов'язує між собою основні геометричні характеристики елементів та фізико-механічні властивості матеріалів, слід визначати за діаграмою стану елемента  $M - 1/r$ .
5. Існуючі на сьогодні різновиди діаграм деформування стиснутого бетону обумовлені неминучими відмінностями в результатах випробування дослідних зразків навіть за абсолютно тотожних умов їх проведення. Тому моделювати слід не просто залежність  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , а сам процес деформування бетону.
6. Процес деформування бетону, а значить і реальну діаграму його стану  $\sigma_c - \varepsilon_c$  варто відтворювати за допомогою січного модуля деформацій бетону  $E_{cc}$ , оскільки він зв'язує між собою два основних параметри стану матеріалу ( $\sigma_c$  і  $\varepsilon_c$ ).
7. В узагальненій моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів критичні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{c1}$  доцільно визначати за класичним принципом через їх пружну та пластичну складові. Граничні

деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  слід пов'язувати з характером напружено-деформованого стану елемента та визначати за екстремальним критерієм несучої здатності  $dM/d(1/r)=0$ .

8. Діаграму стану розтягнутого бетону  $\sigma_{ct} - \varepsilon_{ct}$  та її основні параметричні точки бажано моделювати аналогічно до стиснутого бетону. Однак величину граничних деформацій  $\varepsilon_{ct,u}$  слід обчислювати за екстремальним критерієм міцності  $dN_{ct} / d\varepsilon_{ct} = 0$ .
9. Вплив розтягнутого бетону на жорсткість залізобетонного елемента після появи в ньому тріщин доцільно оцінювати інтегральним способом, який може бути реалізований лише за відомої аналітичної залежності діаграми стану елемента  $M-1/r$  для осередненого перерізу в блоці між тріщинами.
10. Пріоритет у визначенні переміщень необхідно надавати енергетичним методам. Для точного або наближеного обчислення інтегралу Мора варто знати аналітичну функцію чи епюру осередненої (інтегральної) кривини залізобетонного елемента уздовж його осі.
11. Задля повного чи максимального уникнення емпіризму в розрахункових формулах з визначення відстані між нормальними тріщинами та ширини їх розкриття, зазначені величини необхідно безпосередньо чи опосередковано пов'язувати з напруженнями в розтягнутому бетоні, зі зміною напружень в розтягнутій арматурі уздовж її осі та з параметрами зчеплення арматури з бетоном.

Саме завдяки вищенаведеному аналізу літературних джерел та зробленим висновкам були окреслені мета та основні задачі даних досліджень (див. ВСТУП).

Матеріали розділу опубліковані в роботах [14; 15: 77; 192-202; 204-206; 208; 210-220; 222; 224-235; 489; 490].

## РОЗДІЛ 2

### ОСНОВИ ДЕФОРМАЦІЙНО-СИЛОВОЇ МОДЕЛІ ОПОРУ БЕТОНУ ТА ЗАЛІЗОБЕТОНУ

#### **2.1. Сутність деформаційно-силової моделі: основні положення, гіпотези та передумови**

Перш за все уточнимо, що під деформаційно-силовою моделлю опору бетону та залізобетону силовим впливам розумітимемо певний образ реального процесу деформування залізобетонних елементів конструкцій, відтворюваний за допомогою деякої узагальненої діаграми їх стану.

Проведений детальний аналіз стану сучасних досліджень бетонних та залізобетонних елементів (розділ 1) показує, що теорія бетону та залізобетону в цілому продовжує розвиватися в напрямку дотримання загальноприйнятих принципів та передумов механіки деформованого твердого тіла (МДТТ). І хоча проблема створення загальної теорії опору бетону та залізобетону іще далека від остаточного розв'язання, сьогодні уже можна говорити про існування певних шляхів та підходів до її вирішення. Ґрунтуючись на базі специфічних моделей залізобетону або загальних моделей і методів МДТТ, у переважній більшості випадків вони є навіть конкуруючими, але реалізуються зазвичай з дотриманням загальноприйнятих принципів МДТТ.

Примирити, а можливо і об'єднати зазначені підходи покликана пропонована деформаційно-силова модель опору бетону та залізобетону. Безперечно, в її основу, як і в основу більшості існуючих нині моделей, покладаються загальноприйняті принципи МДТТ. Однак її центральною об'єднуючою ланкою виступає узагальнена діаграма стану залізобетонних елементів конструкцій у вигляді континуальної функції без розривів, переламів та стрибків. Така модель може претендувати на роль узагальненої з наступних міркувань.

В деформаційно-силовій моделі, на відміну від чисто деформаційної, особлива роль відводиться гіпотезі граничної рівноваги [141], котра безпосередньо задіяна у формуванні критеріїв вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів та зв'язує пропоновану модель з колишньою силовою. Разом з тим, статичні відношення МДТТ (рівняння рівноваги) в деформаційно-силовій моделі записуються подібно до деформаційної в переміщеннях (деформаціях) за дотримання гіпотези плоских перерізів.

Варто відзначити також, що пропонована модель наділена загальними властивостями інтегральних моделей. Зокрема, при інтегруванні діаграм стану матеріалів з використанням гіпотези граничної рівноваги появляється можливість врахувати градієнтні ефекти [52; 106; 145; 255] силового опору бетону за його неоднорідного деформування. Більше того, деформаційно-силову модель певною мірою можна вважати і блоковою, оскільки в ній напружено-деформований стан елемента конструкції оцінюється за деяким осередненим перерізом блоку між тріщинами. Щоправда, в звичайних блокових моделях [39; 56; 60; 97; 108; 182] ця проблема вирішується у вигляді контактної задачі між суміжними блоками з урахуванням зчеплення арматури з бетоном. У пропонованій же моделі подібна задача розв'язується інтегральними методами за допомогою уже згадуваної узагальненої діаграми стану залізобетонних елементів конструкцій (рис.2.1).

Зазвичай в традиційних моделях опору бетону і залізобетону елемент або конструкцію представляють деякою сукупністю ділянок стержня, кожна з яких приймається рівною відстані між тріщинами, а за їх відсутності визначається умовно. За вказаних обставин, на межі ділянок елемента, обумовлених тріщинами, функція кривини неминуче матиме розриви (переломи). Зазначеного недоліку доволі просто позбуваються в дискретних моделях, що базуються на методі скінчених елементів (МСЕ). Цей метод не розглядає окремі перерізи, бо вся конструкція задається сукупністю певних (кінцевих) елементів. Спільність (нерозривність) деформацій в ньому забезпечується умовою рівності кутових та лінійних переміщень вузлів

суміжних елементів без залучення гіпотези плоских перерізів.

Пропонована деформаційно-силова модель теж є дискретною, оскільки в ній переріз елемента чи конструкції відтворюється великою кількістю елементарних ділянок, в межах кожної з яких властивості матеріалу приймаються постійними. Нерозривність функції кривини на межі тріщин забезпечується тою ж таки узагальненою діаграмою стану залізобетонних елементів у вигляді континуальної залежності без розривів, переламів та стрибків. Тому, в цьому контексті, деформаційно-силову модель можна вважати найбільш наближеною до моделей, заснованих на МСЕ, та рекомендувати до застосування в інженерних розрахунках, оскільки вона:

- успішно реалізується за доволі простими компактними алгоритмами розрахунку;
- не вимагає використання складного програмного забезпечення;
- зберігає фізичну сутність процесів деформування бетонних та залізобетонних елементів;
- загалом залишається осяжною, зрозумілою та доступною для звичайного інженера.

В існуючих на сьогодні деформаційних моделях реальний напружено-деформований стан залізобетонних елементів конструкцій відтворюється шляхом перенесення діаграм деформування матеріалів на їх перерізи. Такий прийом на думку багатьох дослідників є не надто переконливим і викликає низку застережень з їхньої сторони. Тому в пропонованій деформаційно-силовій моделі весь процес деформування бетонних та залізобетонних елементів відтворюється за допомогою діаграм їх стану (рис. 2.1). У цьому випадку відпадає необхідність у будь-якому перенесенні вищезгаданих діаграм на перерізи зазначених елементів, оскільки вони за певних обставин трансформуються одна в одну.

Весь процес деформування бетонних та залізобетонних елементів, а отже і реальні діаграми їх стану, будемо відтворювати в деформаційно-силовій моделі за допомогою функції жорсткості. Саме остання зв'язує між

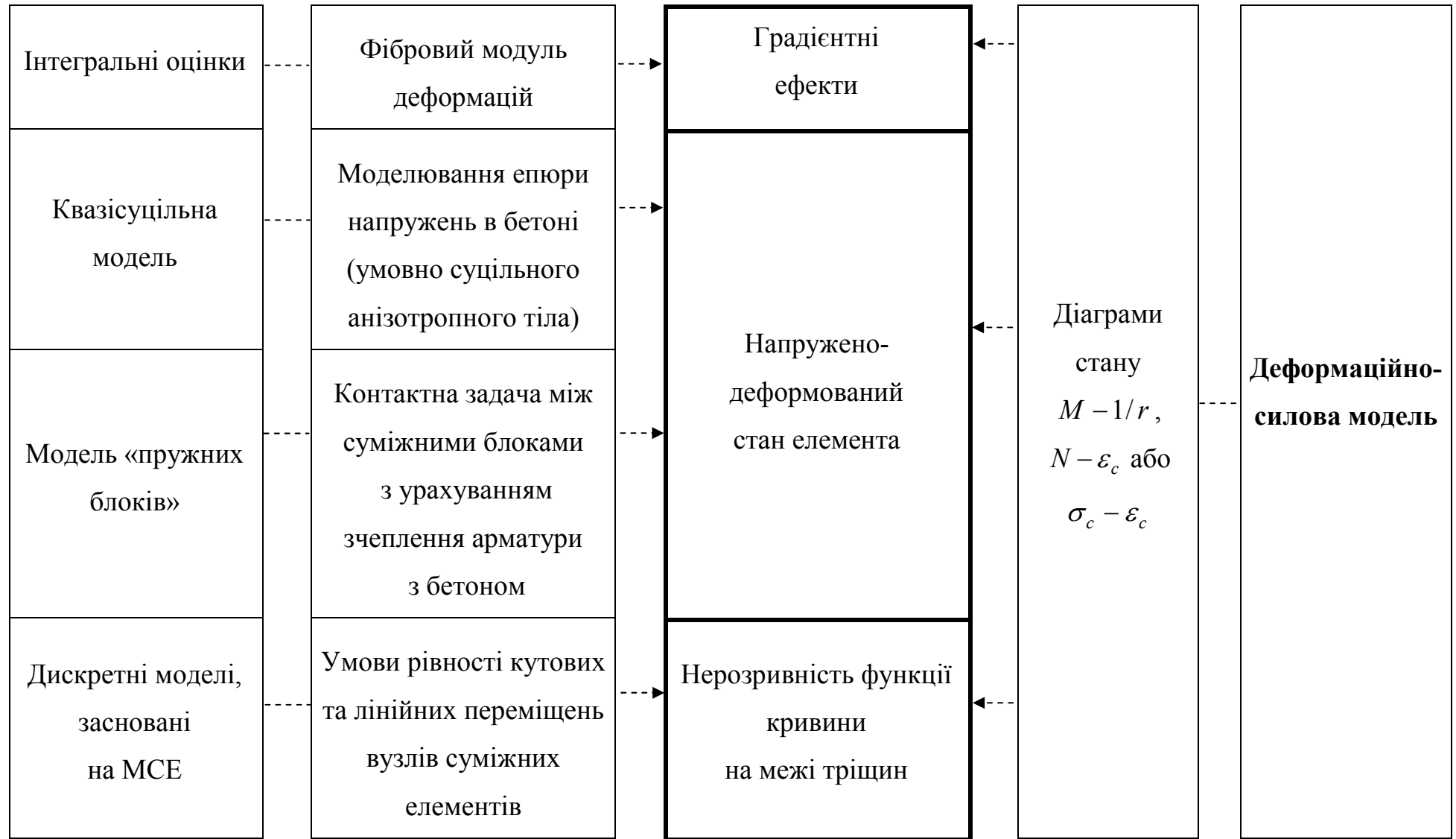


Рисунок 2.1 – Зв'язок деформаційно-силової моделі з іншими моделями

собою основні силові та деформаційні параметри напружено-деформованого стану зазначених елементів. При цьому досліди показують, що аж до втрати несучої здатності елементів вона залежить від зазначених параметрів нелінійно. Власне із-за цього пропонувану модель і варто називати деформаційно-силовою. Застосування ж екстремального критерію, що фіксує момент втрати несучої здатності залізобетонного елемента та обмежує граничні значення силових параметрів деформування, лише підкреслює силову направленість розроблюваної моделі. Деформаційна ж направленість цієї моделі реалізується за допомогою деформацій в рівняннях рівноваги та закону їх розподілу по висоті перерізу (гіпотези плоских перерізів). Однак самі деформації не виступають критерієм вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів, як це зроблено в деформаційній моделі.

Оскільки в пропонованій деформаційно-силовій моделі основний акцент зосереджується на діаграмі стану залізобетонного елемента загалом та діаграмі стану бетону зокрема, то особливу увагу слід звернути і на причини існування в них так званих низхідних віток. Цілком очевидно, що наявність останніх свідчить про внутрішній перерозподіл напружень між окремими фібрами в певному перерізі залізобетонного елемента, а за умов статичної невизначеності ще й про можливість перерозподілу зусиль між окремими перерізами елемента та навіть між окремими елементами конструкції чи всієї системи загалом. Зазначений перерозподіл напружень та зусиль найбільш повно може проявлятися саме в статично невизначених залізобетонних конструкціях і системах.

Загалом же варто зауважити, що в основу сучасних деформаційних моделей опору залізобетонних елементів конструкцій силовим впливам закладається дискретизація розрахункових схем та їх уявлення у вигляді сукупності елементів певних структурних рівнів. Зокрема, Боровських А. В. виділяє три ієрархічних рівні об'єктів дослідження [55]: матеріали, елементи конструкцій, конструкції та споруди. Водночас Бондаренко В. М. [53] пропонує класифікувати об'єкти досліджень за 4-ма структурними рівнями:

матеріал, переріз (елемент), конструкція, конструктивна система будівлі або споруди. Та все ж видається правильним вести класифікацію об'єктів дослідження за 5-ма наступними взаємопов'язаними структурними рівнями ієрархічного підпорядкування:

- матеріал;
- переріз (сукупність або комбінація матеріалів);
- елемент (сукупність або комбінація перерізів);
- конструкція (сукупність або комбінація елементів);
- конструктивна система будівлі або споруди (сукупність або комбінація елементів та конструкцій).

Тому, виходячи зі сказаного, спробуємо більш детально обґрунтувати найважливіші положення пропонованої деформаційно-силової моделі опору бетону та залізобетону, в основу якої закладаються реальні діаграми стану елементів конструкцій на базі загальноприйнятих принципів механіки деформованого твердого тіла (МДТТ):

- статичних співвідношень або рівнянь (умов) рівноваги;
- геометричних співвідношень або рівнянь спільності деформацій;
- фізичних співвідношень або рівнянь стану матеріалів.

Моделювання ж реальних діаграм стану залізобетонних елементів конструкцій здійснюватимемо з дотриманням:

- гіпотези граничної рівноваги;
- гіпотези плоских перерізів;
- гіпотези «нелінійності» (нелінійної зміни) жорсткості перерізу;
- екстремального критерію несучої здатності.

При цьому варто прийняти до уваги те, що зазначена діаграма повинна описувати всі стадії напружено-деформованого стану залізобетонних елементів аж до настання граничної рівноваги. Вона повинна відтворювати характер та вказувати як на умови можливого деформування залізобетонних елементів конструкцій у закритичних стадіях, так і на причини вичерпання їх несучої здатності. Крім того, узагальнена діаграма стану залізобетонних



елементів конструкцій повинна бути здатною за певних вихідних умов трансформуватися в діаграми стану матеріалів і навіть в діаграми їх деформування.

## **2.2. Стадії напружено-деформованого стану залізобетонних елементів**

Сьогодні теорія опору або деформування бетонних та залізобетонних елементів залишається, як і раніше [70; 74; 159], направленою на оптимальне вирішення чотирьох найважливіших задач:

- точне визначення моменту появи перших тріщин;
- розрахунок ширини розкриття тріщин в експлуатаційній стадії, починаючи з моменту їх появи;
- визначення жорсткості та величини прогинів, у тому числі і гранично допустимих;
- розрахунок максимально можливої несучої здатності (за міцністю або стійкістю елементів).

Правильність та повнота вирішення зазначених задач завжди залежала від точності відтворення реального напружено-деформованого стану перерізу елемента на відповідних стадіях його роботи, а саме:

- до та в момент появи перших тріщин (початку руйнування бетону розтягнутої зони);
- від моменту появи тріщин до моменту утворення шарніру пластичності (початку руйнування елемента);
- на момент втрати несучої здатності (завершення руйнування елемента).

Загалом відомо, що за дії зовнішніх навантажень та впливів внутрішні зусилля в найбільш напруженому перерізі залізобетонного елемента, так само як і деформації бетону в його крайових фібрах, зростають від нуля до деяких граничних значень. І якщо епюра напружень при цьому є двозначною, то зазначений переріз у своєму деформуванні зазвичай проходить три

характерних стадії напружено-деформованого стану (рис. 2.2).

**Стадія 1** (робота без тріщин) має місце при малих деформаціях матеріалів в нормальному перерізі, а саме: коли відносні видовження бетону розтягнутої зони менші граничних величин  $\varepsilon_{cti}$  (рис. 2.2, а). Дослідження реального напружено-деформованого стану в характерному перерізі на зазначеній стадії дозволить розраховувати жорсткість та величину прогинів малоармованих елементів, що працюють за експлуатаційних навантажень без тріщин в розтягнутій зоні.

**Стадія 1а** загалом відображає граничний стан стадії 1 та характеризує закінчення стадії деформування залізобетонного елемента без тріщин. Вона настає в той момент, коли відносні деформації крайніх фібр розтягнутого бетону досягають граничних значень  $\varepsilon_{cti}$  (рис. 2.2, б). Саме з цього моменту бетон в розтягнутій зоні починає розриватися і у місцях появи тріщин виключатися з роботи, заставляючи більш напружено працювати арматуру. Точна оцінка напружено-деформованого стану перерізів на цій стадії дозволить визначати зусилля, що викликають появу перших тріщин в бетоні розтягнутої зони, та розраховувати мінімальну жорсткість іще суцільного перерізу (до появи тріщин).

**Стадія 2** (робота з тріщинами) настає після появи першої тріщини в бетоні розтягнутої зони (рис. 2.2, в). Загалом вона є основною робочою стадією деформування згинальних залізобетонних елементів. Дослідження дійсного напружено-деформованого стану на зазначеній стадії дозволить визначати ширину розкриття тріщин та розраховувати жорсткість і величину прогинів залізобетонних елементів за дії експлуатаційних навантажень.

**Стадія 2а** загалом відображає граничний стан стадії 2 та характеризує критичний напружено-деформований стан залізобетонного елемента. Вона настає тоді (рис. 2.2, г), коли напруження в розтягнутій арматурі досягають характеристичних значень міцності на межі її текучості  $f_{yk}$  або напруження в крайніх фібрах стиснутого бетону – характеристичного значення міцності

на стиск  $f_{ck}$ . В цей момент в перерізі залізобетонного елемента розпочинає утворюватися так званий «шарнір пластичності» (початок руйнування).

Кінцева **стадія 3** відображає граничний напружено-деформований стан залізобетонного елемента та характеризує його повне руйнування. Настає вона тоді, коли рівновага зусиль в найбільш напруженому перерізі елементу вже не може бути забезпечена. При цьому відносні деформації крайніх фібр стиснутого бетону досягають величин  $\varepsilon_{cu} > \varepsilon_{c1}$  (рис. 2.2,  $\partial$ ), а розтягнута арматура може працювати як до, так і на межі своєї текучості за її видовження, відповідно  $\varepsilon_s < \varepsilon_{so}$  та  $\varepsilon_{so} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{uk}$  ( $\varepsilon_{ud}$ ).

Слід зауважити, що саме стадії 2а та 3 закладені в основу розрахунків несучої здатності залізобетонних елементів. Таким чином, дослідження реального напружено-деформованого стану залізобетонних елементів на цих стадіях дозволить визначати реальну величину руйнуючих зусиль.

Загалом відомо, що напружено-деформований стан залізобетонного елемента на будь-якій із вищевказаних стадій визначається напруженнями в арматурі, епюрами напружень в стиснутій і розтягнутій зонах бетону та характером зміни деформацій уздовж висоти його перерізу. Тому, згідно основних принципів МДГТ, для вирішення будь-яких задач, пов'язаних з розрахунком залізобетонних елементів, необхідно мати 2-і основні та 4-і додаткові умови. Основними традиційно виступають два рівняння рівноваги, оскільки нормальний переріз залізобетонного елемента за своєю статичною схемою є плоскою системою. У якості ж допоміжних умов варто залучати закон розподілу деформацій уздовж висоти його перерізу  $1/r = (\varepsilon_c + \varepsilon_s)/d$  та фізичні залежності між напруженнями і деформаціями в арматурі  $\sigma_s = f(\varepsilon_s)$ , в стиснутому та розтягнутому бетоні  $\sigma_c = f(\varepsilon_c)$  і  $\sigma_{ct} = f(\varepsilon_{ct})$ .

Зауважимо, що відображення стадій напружено-деформованого стану залізобетонних елементів конструкцій за силовою моделлю колишніх норм [244] має ряд серйозних недоліків, основними серед яких є:

- спрощений спосіб врахування пластичних деформацій бетону у

розрахунках міцності залізобетонних елементів не дозволяє отримувати загальні рішення їх опору, оскільки він ґрунтується на використанні прямокутної епюри напружень та знехтуванні кривою епюри напружень в бетоні стиснутої зони;

- зазначений спосіб врахування пластичних деформацій бетону може використовуватися у розрахунках міцності лише тих залізобетонних

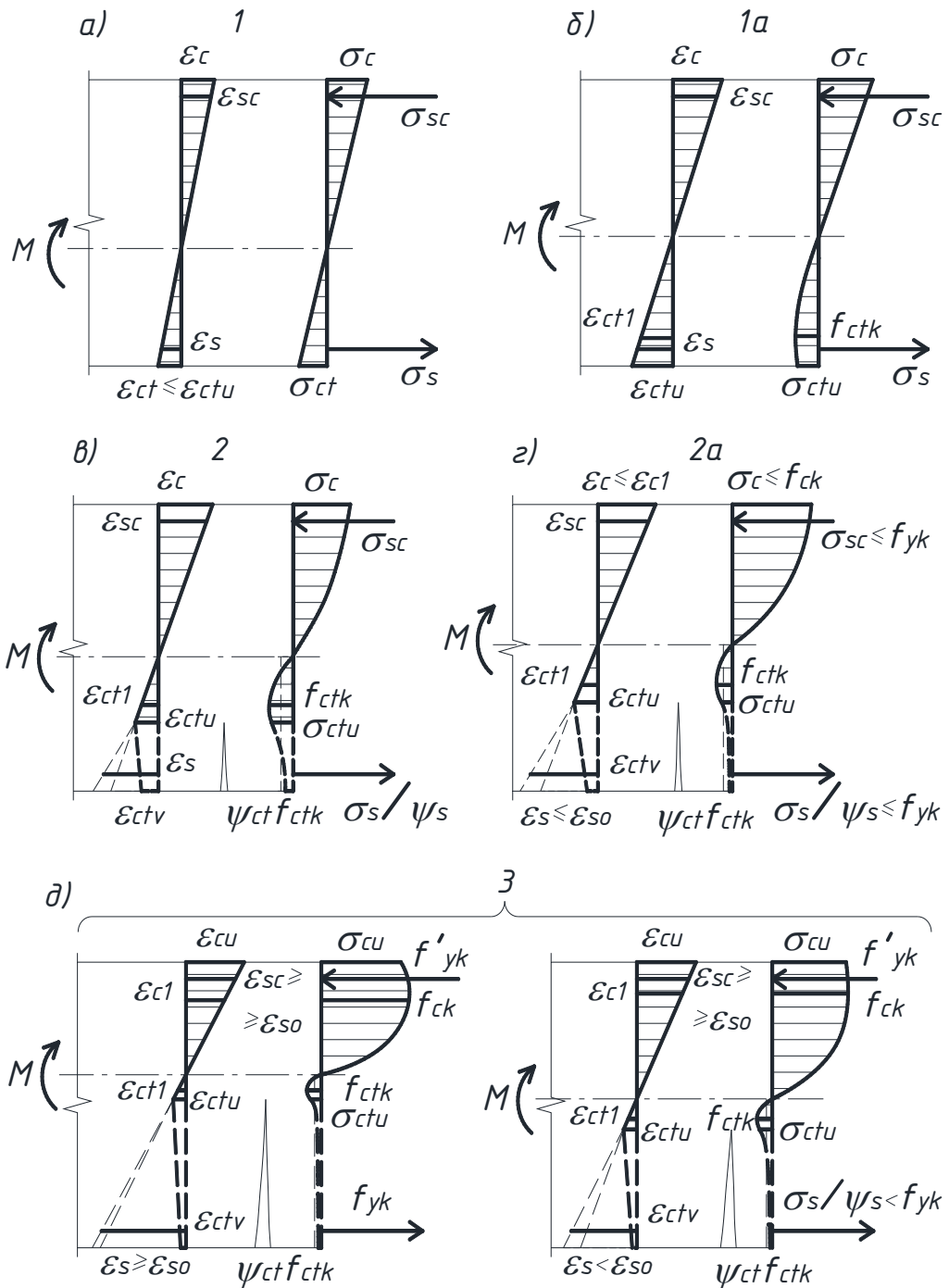


Рисунок 2.2 – Стадії напружено-деформованого стану згинального залізобетонного елемента за деформаційно-силовою моделлю

елементів, які виготовлені з бетонів та арматури низьких і середніх класів [159];

- прийнятий підхід щодо врахування пластичних деформацій бетону у розрахунках залізобетонних елементів за міцністю, неможливо реалізувати у розрахунках за жорсткістю і тріщиностійкістю;
- спосіб врахування впливу роботи розтягнутого між та над тріщинами бетону на загальний напружено-деформований стан залізобетонного елемента слабо відображає процес перерозподілу зусиль між розтягнутим бетоном та розтягнутою арматурою при їх деформуванні;
- характеристичне значення міцності розтягнутої арматури на межі її текучості  $f_{yk}$  або характеристичне значення міцності бетону на стиск  $f_{ck}$  в його крайніх фібрах не можуть виступати критеріями вичерпання несучої здатності залізобетонного елемента.

Позбутися трьох перших недоліків неможливо без відображення процесу деформування бетону реальною діаграмою  $\sigma_c - \varepsilon_c$ . Саме з цих міркувань в сучасних деформаційних моделях чинних норм [122; 248; 382] використовуються повні діаграми деформування бетону з низхідною віткою (діаграми стану). Однак недолік, пов'язаний з повнотою відображення впливу роботи розтягнутого бетону між та над тріщинами на загальний напружено-деформований стан залізобетонного елемента, в більшості з них зберігся і навіть поглибився.

Щодо критеріїв втрати несучої здатності, то в деформаційних моделях, на відміну від силових, вони більш точно відображають напружено-деформований стан залізобетонних елементів конструкцій у граничній стадії. Однак в цих моделях і досі не вироблений загальний критерій вичерпання несучої здатності, а його поняття часто ототожнюється з обмеженням деформацій розтягнутої арматури або стиснутого бетону граничними значеннями. Тому в деформаційно-силовій моделі мову варто вести про критерії настання граничних станів.

Що ж до реального стану залізобетонного елемента, то в рамках

деформаційно-силової моделі він не може бути відображений тільки епюрою напружень або тільки епюрою деформацій. Це може бути зроблено лише за спільного використання обох епюр (рис.2.1), оскільки зростання деформацій матеріалів завжди супроводжується певним перерозподілом внутрішніх напружень між складовими компонентами перерізу елемента. Зазначеному перерозподілу повинна бути приділена особлива увага, а тому прослідкуємо за особливостями його проходження.

Протягом всієї стадії *I* є справедливою гіпотеза плоских перерізів, оскільки епюри деформацій бетону як у стиснутій, так і в розтягнутій зонах залишаються практично лінійними. Епюра напружень в бетоні розтягнутої зони дуже швидко змінюється з прямолінійної на криволінійну з низхідною віткою. І коли деформації бетону в крайніх фібрах розтягнутої зони досягають граничних значень  $\varepsilon_{ctu}$ , залізобетонний елемент переходить у стадію *Ia*, що передуює появі тріщин. На цей момент епюра напружень в бетоні стиснутої зони ще залишається близькою до лінійної, а напруження в розтягнутій зоні лише починають перерозподілятися з бетону на арматуру.

З появою перших тріщин залізобетонний елемент переходить у стадію 2. У перерізі з тріщиною перестає бути справедливою гіпотеза плоских перерізів, оскільки порушується лінійність епюри деформацій внаслідок виключення з роботи бетону розтягнутої зони. Та все ж на цій стадії вплив нерозтрісканого розтягнутого бетону над тріщиною та в блоці між тріщинами на загальний напружено-деформований стан залізобетонного елемента залишається іще суттєвим. Тому для деякого осередненого перерізу в блоці між тріщинами зазначена гіпотеза в цілому залишається справедливою. Щодо напружень, то в розтягнутій зоні вони інтенсивно перерозподіляються з бетону на арматуру. По мірі виключення з роботи розтягнутого бетону та зменшення висоти стиснутої зони бетону кривина епюри напружень в останній поступово збільшується. При подальшому зростанні зусиль, коли напруження в розтягнутій арматурі досягають характеристичних значень міцності на межі її текучості  $f_{yk}$  або напруження в крайніх фібрах

стиснутого бетону – характеристичного значення його міцності на стиск  $f_{ck}$ , залізобетонний елемент переходить в стадію 2a. Саме в цей момент і розпочинається процес руйнування або утворення «шарніру пластичності».

Тривалість процесу руйнування залежить від багатьох факторів, але по суті, визначається протяжністю низхідної вітки діаграми деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$  або протяжністю ділянки текучості арматури. Отже стадія 3 або граничний напружено-деформований стан залізобетонного елемента загалом може наступати навіть одночасно зі стадією 2a. Тому в момент повного руйнування відносні деформації крайніх фібр стиснутого бетону завжди досягають граничних значень  $\varepsilon_{cu} \geq \varepsilon_{c1}$ . Напруження в них починають падати ( $\sigma_{cu} \leq f_{ck}$ ), перерозподіляючись на суміжні менш деформовані фібри. При інтенсивному «підростанні» старих та появі і розкритті нових тріщин, вплив роботи розтягнутого бетону на загальний напружено-деформований стан залізобетонного елемента практично зводиться до мінімуму. Напруження в розтягнутій зоні майже повністю перерозподіляються з бетону на арматуру, яка в непереармованих елементах працює на межі своєї текучості  $\sigma_s = f_{yk}$  за відносних видовжень  $\varepsilon_{so} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{uk}$ . В переармованих елементах напруження в найбільш розтягнутих арматурних стержнях зазвичай не досягають межі текучості  $\sigma_s / \psi_s < f_{yk}$  при  $\varepsilon_s < \varepsilon_{so}$ .

Таким чином, узагальнена модель деформування будь-якого бетонного чи залізобетонного елемента повинна бути здатною в однаковій мірі відображати як характер зростання відносних деформацій матеріалів, так і процес постійного перерозподілу напружень між фібрами перерізу особливо на стадіях, близьких до граничної рівноваги.

### **2.3. Гранична рівновага та граничні стани в деформуванні елементів**

Втрата залізобетонними елементами конструкцій несучої здатності в їх

нормальних перерізах характеризується порушенням одного із двох загальновідомих рівнянь рівноваги  $\Sigma N = 0$  та  $\Sigma M = 0$ . Зазвичай більш жорстким є друге рівняння, з якого випливає визначальна умова (гіпотеза) граничної рівноваги [141]

$$M_{Ed} = M_u, \quad (2.1)$$

де  $M_{Ed}$  – розрахункове значення згинаючого моменту від зовнішнього навантаження;

$M_u$  – граничне значення моменту внутрішніх зусиль в перерізі залізобетонного елемента.

Зауважимо, що на всіх стадіях деформування бетонних та залізобетонних елементів (аж до порушення граничної рівноваги) вищезгадані рівняння мають аналітичні та графічні рішення, які зазвичай пов'язують з діаграмами їх стану та діаграмами стану матеріалів. Загалом, якщо вдається до змістового аналізу діаграм стану бетонного чи залізобетонного елемента, то варто зауважити, що вони можуть бути характеристичними (нормативними) або розрахунковими. Цілком очевидно, що перші з них можна отримати лише за використання дійсних (характеристичних) властивостей вихідних матеріалів: бетону та арматури (рис. 2.3). А тому і використовувати їх варто для оцінки реального напружено-деформованого стану елементів за результатами натурних обстежень або експериментальних досліджень (випробувань) [196]. За цими діаграмами можуть бути визначені базові (характеристичні) параметри напружено-деформованого стану залізобетонного елемента: несуча здатність  $M_{u,II} = M_o$ , ширина розкриття тріщин  $w_{II} = w_o$  та прогин  $y_{II} = y_o$  (рис. 2.4).

Однак у практиці проектування залізобетонних елементів все ж таки варто покладатися на розрахункові діаграми їх стану. Адже, внаслідок можливої мінливості міцнісних та деформаційних властивостей матеріалів із-за впливу різноманітних технологічних, конструкційних та експлуатаційних факторів, дійсні або реальні характеристики напружено-деформованого



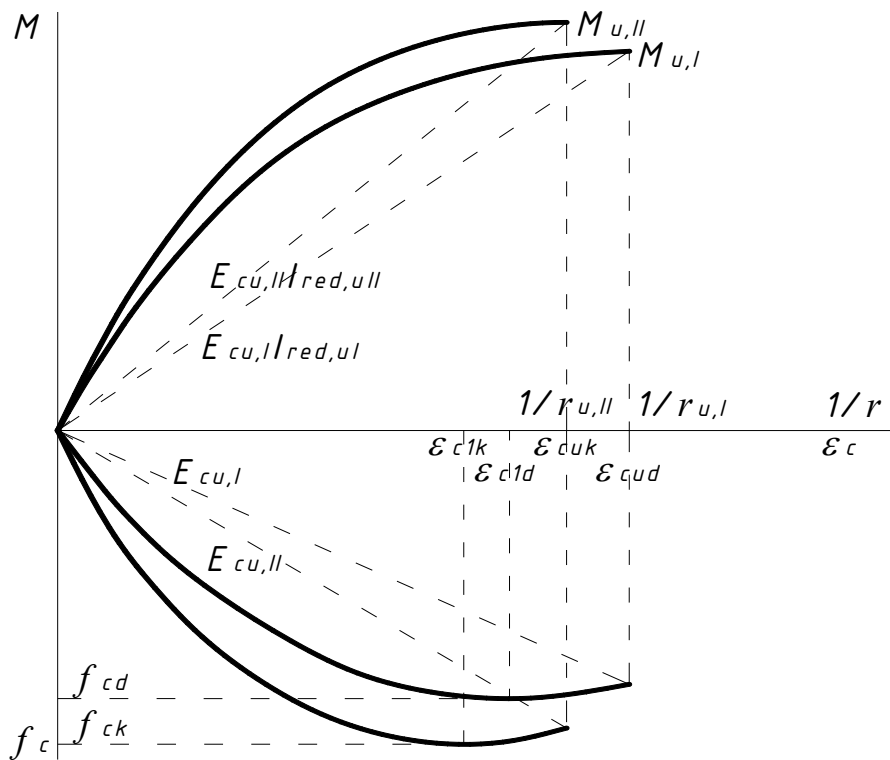


Рисунок 2.3 – Зв'язок характеристичних та розрахункових діаграм стану стиснутого бетону з характеристичними та розрахунковими діаграмами стану залізобетонних елементів

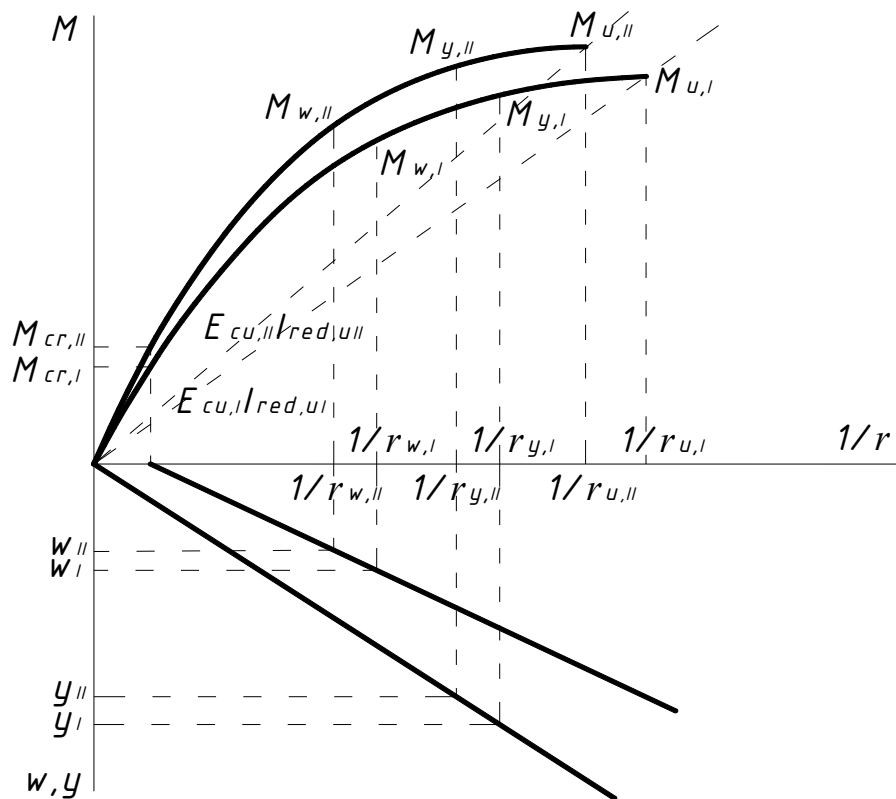


Рисунок 2.4 – Характеристичні та розрахункові діаграми стану залізобетонних елементів

стану залізобетонних елементів  $M_{u,I} = M_u$ ,  $w_I = w_k$  та  $y_I = y_k$  можуть суттєво відрізнятися від базових величин  $M_o$ ,  $w_o$  та  $y_o$ .

Таким чином, розрахункові діаграми стану залізобетонних елементів конструкцій загалом передбачають ймовірне послаблення бетону з одночасним підвищенням параметрів його деформативності. За подібних обставин відпадає будь-яка потреба у використанні різних емпіричних коефіцієнтів, що підвищують базові параметри деформування залізобетонних елементів ( $w_o$ ,  $y_o = f_o$ ) до рівня розрахункових ( $w_k$ ,  $y_k = f_k$ ) [196; 197; 214].

## 2.4. Загальні критерії граничного стану залізобетонних елементів

В силовій моделі опору бетонних та залізобетонних елементів [244] критеріями вичерпання їх несучої здатності виступають розрахункові значення міцності арматури на межі її текучості  $f_{yd}$  або розрахункові значення міцності бетону на стиск  $f_{cd}$ . Тобто пріоритет у визначенні несучої здатності залізобетонних елементів по суті надається стадії 2a напружено-деформованого стану. За прийняття певних гіпотез та вихідних умов це є абсолютно виправданим, оскільки зазначені величини мають чіткі фіксовані значення. Однак численні результати експериментальних досліджень [8; 17; 118; 137; 144; 188; 190; 253; 302; 319; 340; 462; 482; 501] показують: досягнення в розтягнутій арматурі чи в стиснутому бетоні вищевказаних граничних значень дійсно характеризує початок руйнування залізобетонних елементів, але у більшості випадків не є критерієм повного вичерпання їх несучої здатності.

Для більшості сучасних деформаційних моделей характерна інша крайність: критеріями вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів в них приймаються граничні значення деформацій арматури на розтяг  $\varepsilon_{uk}$  або бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$ . Але, на жаль, зазначені величини теж не можуть виступати в якості вищезгаданих критеріїв з наступних причин:

- граничні значення деформацій матеріалів, особливо бетону, загалом є змінними, а не фіксованими величинами;
- деформації залежать від багатьох факторів: умов роботи (випробування) та виду деформування, наявності та відсотка армування або, інакше кажучи, від діаграми стану елемента;
- на відміну від напружень деформації матеріалів на діаграмах стану  $\sigma - \varepsilon$  не мають пікових «екстремальних» значень.

Цілком очевидно, що критеріями повного вичерпання несучої здатності бетонних та залізобетонних елементів можуть виступати незмінні або чітко фіксовані значення певних величин. Подібним критерієм може слугувати і певне явище (момент його настання), що проявляється в процесі деформування (роботи) зазначених елементів. Тому єдиним реальним критерієм повного вичерпання несучої здатності бетонних та залізобетонних елементів (тобто фізичного руйнування) може бути момент порушення рівноваги зусиль в їх перерізах за відповідними рівняннями  $\Sigma N = 0$  і  $\Sigma M = 0$ . Останнє з них є більш загальним (жорстким), оскільки за дії тільки осьових навантажень воно трансформується в перше. Відповідно до другого рівняння рівноваги, задача проектування бетонних та залізобетонних елементів завжди зводиться до пошуку або використання у розрахунках їх максимальної несучої здатності  $M_u$ . При цьому, згідно математичних закономірностей, реалізацію такої задачі доцільно виконувати за допомогою відомого критерію Ферма – екстремального критерію несучої здатності  $dM / d(1/r) = 0$ , який за осьового завантаження залізобетонних елементів трансформується до вигляду  $dN / d\varepsilon = 0$  [226; 232]. Саме цей критерій і є основним як для деформаційної, так і для деформаційно-силової моделі. Що ж до граничних деформацій матеріалів, то, за причинно-наслідковим зв'язком параметрів деформування, вони не можуть слугувати критерієм вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів. За певних обставин їх можна використовувати в якості деякого похідного критерію задля

гармонізації вітчизняних норм з Єврокод-2.

Інакше кажучи, в деформаційно-силовій моделі увага акцентується не на критеріях вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів, а на критеріях настання їх граничного стану (табл. 2.1).

Таблиця 2.1 – Критерії граничного стану елементів за 1-ю групою

Модель	Критерії		
	Загальний	Основний	Похідний
Силова		$\sigma_c = f_{cd}; \sigma_s = f_{yd}$	
Деформаційна		$dM/d(1/r) = 0; dN/d\varepsilon = 0;$ $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}; \varepsilon_s = \varepsilon_{yk}$	
Деформаційно-силова	Силовий $M_{Ed} \leq M_u$ $(N_{Ed} \leq N_u)$	Деформаційно-силовий $dM/d(1/r) = 0$ $(dN/d\varepsilon = 0)$	(Деформаційний) $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}; \varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu};$ $\varepsilon_s = \varepsilon_{yk}$

## 2.5. Основи перерозподілу напружень та зусиль в залізобетонних елементах, конструкціях і системах

Характерною особливістю сучасного етапу розвитку теорії бетону та залізобетону можна вважати відповідний перехід в проектуванні бетонних та залізобетонних елементів від силової до так званої деформаційної моделі. І базується він в основному на використанні у розрахунках гіпотези плоских перерізів та повних діаграм деформування стиснутого бетону з так званою «низхідною віткою». Загалом же сама низхідна вітка діаграми стану бетону та ступінь її реалізації в реальних залізобетонних елементах і конструкціях залежить від багатьох факторів. Однак обумовлена вона, в першу чергу, пластичними деформаціями бетону та неоднорідністю його напружено-деформованого стану і відображає можливість перерозподілу напружень між окремими фібрами в перерізі елемента чи конструкції подібно до перерозподілу зусиль між елементами чи конструкціями в певній системі.

Явище перерозподілу зусиль вперше було досліджене та теоретично

обґрунтоване в статично невизначних залізобетонних конструкціях на початку ХХ-го століття Kazinczy G. [425]. Однак із-за відсутності відповідних теоретичних основ перерозподіл згинаючих моментів у той час так і не знайшов застосування на практиці, оскільки проектування залізобетонних конструкцій здійснювали за допустимими напруженнями на основі теорії пружності.

Ситуація кардинально змінилася лише в кінці 30-х на початку 40-х років минулого століття, коли відбувся перехід до проектування будівельних конструкцій за руйнуючими зусиллями з відповідними коефіцієнтами запасу міцності. Проведені у цей період дослідження щодо перерозподілу зусиль у статично невизначних системах і конструкціях дозволили з'ясувати дійсну поведінку залізобетонних елементів конструкцій за інтенсивного розвитку пластичних властивостей бетону [67].

Ще більше активізувалися зазначені дослідження в кінці 50-х років після запровадження у практику проектування будівельних конструкцій методу граничних станів. Варто відзначити, що завдяки результатам численних експериментально-теоретичних досліджень [50; 52; 66; 91; 109; 119; 132; 252; 279], направлених на поглиблене вивчення дійсного напружено-деформованого стану елементів конструкцій статично невизначних систем, на сьогодні вирішені основні задачі, пов'язані з проблемами перерозподілу зусиль:

- визначені найбільш вагомі фактори, що впливають на перерозподіл зусиль в елементах подібних систем;
- розроблені методи та способи перерозподілу (регулювання) зусиль в певних елементах і конструкціях у разі виникнення такої потреби;
- запропоновані методи розрахунку перерозподілу (регулювання) зусиль, що враховують пластичні властивості матеріалів;
- розроблені нові конструктивні форми для зниження матеріаломісткості конструкцій і раціонального використання матеріалів (особливо арматури).

Тим не менше, в унормованій донедавна силовій моделі деформування

бетонних та залізобетонних елементів [244], залишалася одна суттєва прогалина, що прямо чи опосередковано стосувалася і перерозподілу зусиль в елементах та конструкціях статично невизначених систем, а саме – відносна спрощеність та певна обмеженість фізичного обґрунтування процесу перерозподілу зусиль як закономірного явища.

Тому сьогодні стає все більш очевидним, що без використання у розрахунках повних діаграм деформування бетону повноцінно обґрунтувати та відобразити процес перерозподілу зусиль в залізобетонних елементах і конструкціях, у тому числі і в статично невизначених системах, практично неможливо. Підставою для такого висновку слугують наступні міркування.

Як уже зазначалося, основною причиною перерозподілу зусиль в залізобетонних елементах і конструкціях виступають пластичні деформації матеріалу. Розвиток останніх може значно впливати не тільки на несучу здатність елементів конструкцій, але й на їх жорсткість та тріщиностійкість. З одного боку процес перерозподілу зусиль призводить до підвищення несучої здатності системи загалом, а тому його врахування може сприяти суттєвій економії матеріалів. З іншого боку розвиток непружних деформацій матеріалів, що супроводжується зазвичай утворенням та розкриттям тріщин, знижує її жорсткість. Зумовлена цим явищем затримка приросту зусиль у одних елементах системи за рахунок прискореного зростання зусиль в інших може як запобігати, так і сприяти утворенню тріщин чи їх розкриттю [50; 52; 66; 91; 113; 132]. Таким чином, врахування перерозподілу зусиль дозволяє більш точно оцінювати експлуатаційні властивості всієї системи та може вказувати на доцільність прийняття певних заходів, направлених на підвищення жорсткості та тріщиностійкості її окремих елементів. Однак слід пам'ятати, що явище перерозподілу напружень може проявлятися в пружно-пластичному елементі лише тоді, коли він має неоднорідну структуру або перебуває в умовах неоднорідного напружено-деформованого стану.

Уявімо відносно короткий бетонний елемент у вигляді системи з нескінченного числа фібр (стержнів), зв'язаних між собою та закріплених від

втрати стійкості. За осьового навантаження така система є статично визначеною, оскільки за однакових зусиль (напружень) всі її стержні працюють однаково (рис.2.5, *а*). Звісно, що перерозподіл напружень між стержнями цієї системи у даному випадку є просто неможливим. Інша ситуація складається при позацентровому стиску, коли всі фібри працюють по різному, а сама система стає статично невизначеною. При втраті несучої здатності найбільш напружених стержнів (фібр) система продовжуватиме опиратися зростаючому навантаженню, бо зусилля з найбільш напружених фібр передаватимуться (перерозподілятимуться) на менш напружені (рис.2.5, *б*). Подібний характер деформування притаманний і центрально стиснутому залізобетонному елементу. Арматурні стержні, маючи значно більшу жорсткість за жорсткість окремих бетонних волокон, здатні до певної пори продовжувати перебирати на себе частину зростаючого на систему навантаження при падаючій спроможності фібр бетону (рис.2.5, *в*) [212]. Ще більш яскраво процес перерозподілу напружень між окремими фібрами перерізу проявляється в згинальних елементах (рис.2.6, *а*). За статичної визначеності таких елементів перерозподіл напружень в їх перерізах на стадії граничної рівноваги уже не може забезпечити зростання внутрішніх зусиль, що веде до виколювання бетону в стиснутій зоні (рис.2.6, *б*) та формування пластичного шарніру в неявній [131] чи явній (за текучості арматури) формі.

Цілком очевидно, що максимальне зусилля, яке виникає у найбільш напруженому перерізі статично невизначеного елемента, не призводить до його негайного чи миттєвого руйнування. Це зусилля, по аналогії з напруженнями у фібрах, протягом певного часу може перерозподілятися на суміжні перерізи, «довантажуючи» їх (рис.2.7, *а*). Подібний процес триватиме до тієї пори, поки сама система поступово не перетвориться в статично визначену (рис.2.7, *б*), а згодом і в геометрично змінювану.

Оскільки природа перерозподілу напружень у найбільш напруженому перерізі елемента є такою ж, як і перерозподіл зусиль між окремими елементами статично невизначеної системи, то стає зрозумілим, що саме

використання повних діаграм деформування бетону з так званою «низхідною віткою» дозволяє говорити про певну ієрархію перерозподілу напружень і зусиль в залізобетонних елементах і конструкціях як закономірного процесу (рис. 2.8) та обґрунтувати з фізичної точки зору природу його існування.

Загальновідомо, що процес деформування бетонних та залізобетонних елементів є доволі складним та неоднозначним. Цілком очевидно, що пов'язано це в першу чергу з фізичною, геометричною [239] та конструкційною нелінійністю явищ, які його супроводжують. Якщо говорити про окремі фібри перерізу, то при їх деформуванні проявляється фізична нелінійність, пов'язана з різною зміною фізико-механічних характеристик бетону, зокрема - модуля деформацій бетону  $E_{cc}$ . Деформування перерізів залізобетонних елементів на окремих ділянках пов'язане крім того ще й з геометричною нелінійністю (непропорційною зміною висоти стиснутої зони бетону, площі її перерізу тощо). Стосовно ж статично невизначених конструкцій та систем, то їх деформування ускладнюється ще й проявом конструкційної нелінійності (включаючи зміну розрахункових схем внаслідок утворення «шарнірів пластичності»).

Безперечно, питання перерозподілу зусиль в статично невизначених системах заслуговують окремого розгляду. І варто їх досліджувати в логічній послідовності за наведеною ієрархією перерозподілу напружень та зусиль (рис. 2.8): між окремими фібрами певного перерізу, між окремими перерізами певного елемента, між окремими елементами системи загалом. При цьому, не зважаючи на зазначений перерозподіл, процес деформування окремих елементів аж до моменту втрати їх несучої здатності чи руйнування може бути описаний загальними рівняннями рівноваги. Зрозуміло, що в такому разі деформації бетону (матеріалів) можуть бути різними, оскільки залежатимуть від умов роботи елементів та характеру напружено-деформованого стану їх перерізів. Тому критерій повного вичерпання (фізичної втрати) несучої здатності бетонних та залізобетонних елементів необхідно пов'язувати не просто з певними напруженнями чи деформаціями,



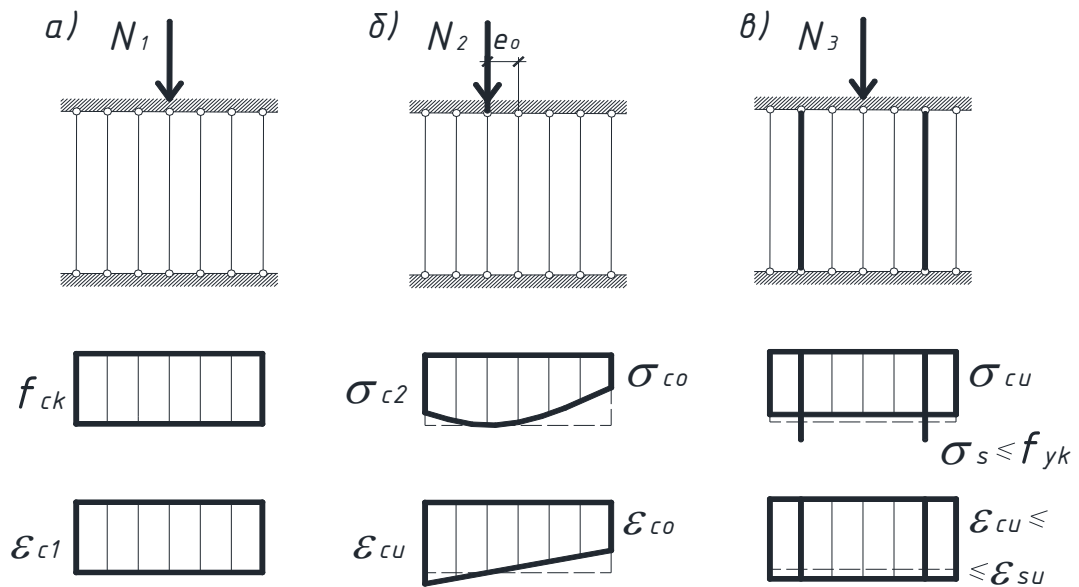


Рисунок 2.5 – До перерозподілу напружень в перерізах стиснутих бетонних та залізобетонних елементів

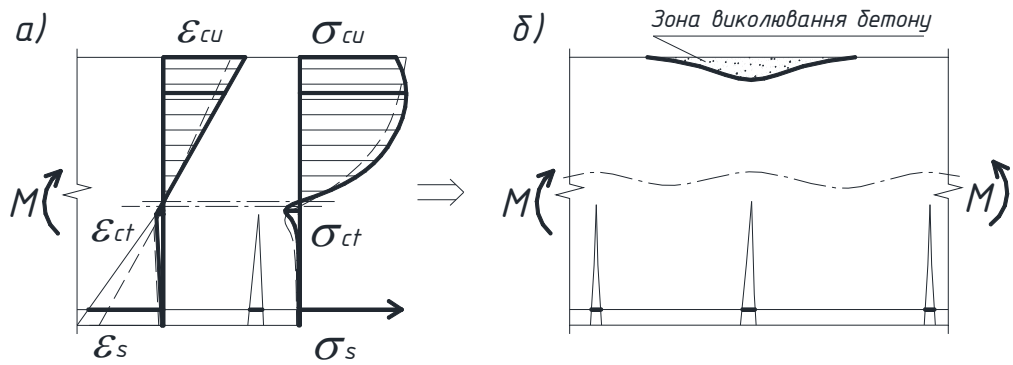


Рисунок 2.6 – До граничної стадії деформування згинальних елементів

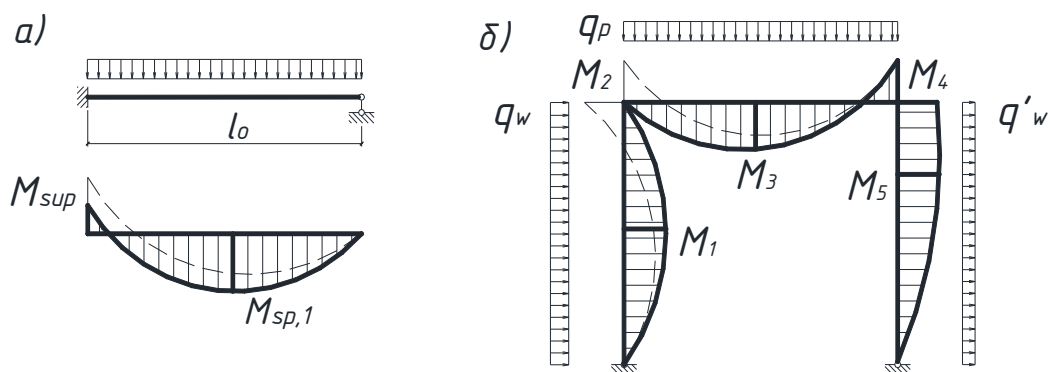


Рисунок 2.7 – До перерозподілу зусиль в залізобетонних елементах конструкцій

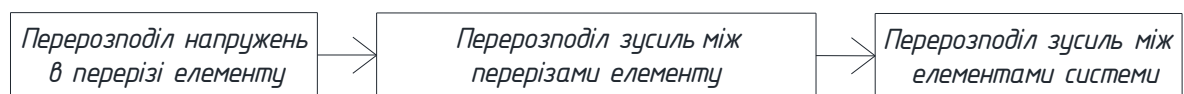


Рисунок 2.8 – Послідовність перерозподілу напружень та зусиль в залізобетонних елементах, конструкціях і системах

а з порушенням рівноваги між зовнішніми силами та внутрішніми зусиллями в перерізах елементів конструкцій за фізичної, геометричної та конструкційної нелінійності їх деформування. За цих обставин використання у розрахунках реальних діаграм стану або повних діаграм деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$  з низхідною віткою не тільки дозволить з єдиних позицій вирішувати експлуатаційні задачі, але й сприятиме пошуку резервів несучої здатності залізобетонних елементів конструкцій загалом [116; 119; 121].

Таким чином зі сказаного випливає, що із-за перерозподілу напружень та зусиль в залізобетонних елементах і конструкціях модель їх опору силовим впливам апріорі не може бути чисто деформаційною. Насправді вона завжди буде деформаційно-силовою, а тому і потребує відповідного відношення до себе при її створенні або формуванні.

## **2.6. Основи моделювання роботи бетону**

Останніми роками особливо активізувались дослідження вітчизняних та зарубіжних вчених щодо побудови та розвитку загальної теорії залізобетону з використанням «повних» діаграм деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$ . І в цьому немає нічого дивного, оскільки у разі успішного вирішення поставленої задачі з'явиться реальна можливість більш точно оцінювати та моделювати напружено-деформований стан залізобетонних конструкцій на всіх стадіях їх роботи аж до руйнування.

Сьогодні всі дослідження з моделювання напружено-деформованого стану згинальних та позацентрово навантажених залізобетонних елементів, що ґрунтуються на використанні «повних» діаграм деформування бетону, можна умовно розділити на дві групи. До першої з них слід віднести роботи [16; 18; 25; 34; 38; 50; 52; 78; 114; 120; 146; 152; 176; 177; 191; 278], в яких напружено-деформований стан залізобетонних елементів моделюється за допомогою еталонних діаграм деформування бетону при його осьовому навантаженні. Правомірність такого кроку автори досліджень обґрунтовують

результатами відповідних експериментальних випробувань та розрахунків. Однак, навіть за таких умов, окремі з них визнають існування певних відмінностей між діаграмами стану бетону в згинальних чи позакентрово навантажених елементах та діаграмами деформування бетону еталонної призми за осьового стиску.

До другої групи варто віднести роботи [9; 92; 106; 133; 255; 256; 263; 267; 268], в яких продемонстровано дещо інший підхід до даного проблемного питання. В своїх дослідженнях автори вказують на те, що еталонна діаграма деформування бетону за осьового стиску загалом може використовуватися в якості розрахункової діаграми стану бетону в залізобетонних елементах конструкцій. Однак аналітичні залежності, що описують цю діаграму, все ж таки повинні бути здатними відобразити зазначені відмінності в основних параметричних точках діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$ . Подібний перехід від стандартних діаграм деформування бетону до реальних серед науковців прийнято називати «трансформацією» еталонних діаграм стану бетону в розрахунку.

Цілком очевидно, що протиріччя між двома вищезазначеними напрямками буде знято у тому випадку, коли буде аналітично доказаний та фізично обґрунтований факт трансформації (перетворення) діаграм як певного явища. До речі, питання пошуку зазначених доказів трансформації діаграм деформування бетону сформульоване в монографії [178].

Для вирішення вищезгаданої проблеми повернемося до понять діаграми деформування матеріалу та діаграми стану елемента. Поняття останньої введене Бачинським В.Я. [33] та розвинуте Бамбурою А.М. [27] для розрахунку стійкості деформування стержневих залізобетонних елементів. Діаграма стану елемента є важливою не тільки для задач оцінки стійкості чи несучої здатності вцілому, але й для моделювання напружено-деформованого стану залізобетонних конструкцій загалом. Без неї побудова узагальненої моделі деформування залізобетонних елементів конструкцій є практично неможливою. Застосування діаграми стану елемента в теорії деформування

бетонних та залізобетонних конструкцій дозволить не тільки пояснити суть трансформації еталонної діаграми деформування бетону в розрахункову як явища, але й отримувати реальні діаграми стану бетону в залізобетонних елементах конструкцій за різних видів силового деформування. Інакше кажучи, використання діаграм стану елемента дозволить говорити не про перенесення еталонних діаграм деформування бетону на переріз залізобетонного елемента, а про їх трансформацію в розрахунку.

Саме, виходячи з діаграми стану елемента, за допомогою рівнянь рівноваги та використання ряду загальних гіпотез [205; 219] можна отримати аналітичні залежності розрахункових діаграм реального стану бетону в залізобетонних елементах конструкцій за будь-якого виду їх деформування.

## **2.7. Жорсткість бетонних та залізобетонних елементів**

Загальновідомо, що діаграма стану бетонного чи залізобетонного елемента відображає прямий зв'язок між його міцнісними ( $M$ ,  $N$ ) та деформаційними ( $1/r$ ,  $\varepsilon$ ) параметрами. А раз так, то цілком очевидно, що подібну діаграму доцільно було б моделювати за допомогою характеристики, яка зв'язує між собою два вищезазначені параметри. Безперечно, такою характеристикою може слугувати жорсткість елемента в певному перерізі.

В теорії деформування бетонних та залізобетонних елементів особлива роль завжди відводилась питанням їх жорсткості. Знання закономірностей зміни жорсткості є визначальними не тільки у розрахунках залізобетонних елементів за тріщиностійкістю та прогинами, але й при визначенні їх несучої здатності.

Загалом відомо, що жорсткість бетонного чи залізобетонного елемента є інтегральною характеристикою. Абсолютно очевидним є і те, що за осьового навантаження (стиску чи розтягу) вона змінюється переважно або лише за рахунок модуля деформацій бетону, оскільки всі геометричні параметри перерізу залишаються незмінними або змінюються несуттєво. Якщо ж

говорити про січний модуль деформацій, то він виступає параметром пропорційності між напруженнями та деформаціями бетону  $E_{cc} = \sigma_c / \varepsilon_c \cdot I$ , як показують численні результати експериментальних досліджень [20; 25; 188; 283; 298; 304; 344; 407; 473; 494; 499; 543], ця пропорційність загалом має нелінійний характер.

Таким же, очевидно, залишиться і характер зміни січного модуля деформацій бетону зокрема та жорсткості бетонного елемента загалом, стиснутого з малими чи випадковими ексцентриситетами (рис. 2.9). При цьому останню можна було б визначати за спрощеним виразом

$$D_{cc} = E_{cc}^{\text{int}} \cdot I_{cc}, \quad (2.2)$$

де  $E_{cc}^{\text{int}}$  – інтегральний модуль деформацій стиснутого бетону;

$I_{cc}$  – момент інерції перерізу бетону стиснутої зони.

Все вищесказане абсолютно у повній мірі стосується і бетонного елемента, розтягнутого з малими або випадковими ексцентриситетами (рис. 2.10). Його жорсткість могла б бути обчислена за аналогічним виразом

$$D_{ct} = E_{ct}^{\text{int}} \cdot I_{ct}, \quad (2.3)$$

де  $E_{ct}^{\text{int}}$  – інтегральний модуль деформацій розтягнутого бетону;

$I_{ct}$  – момент інерції перерізу бетону розтягнутої зони.

Для згинальних та позацентрово стиснутих чи позацентрово розтягнутих з великими ексцентриситетами залізобетонних елементів характерною є двозначна еюра напружень та деформацій. Із-за наявності стиснутої та розтягнутої зон в перерізі зазначених елементів їх деформування суттєво ускладнюється. Сприяє цьому не тільки поява та розвиток тріщин, але й порушення зчеплення розтягнутої арматури з бетоном та його поступове виключення з роботи. Звісно, що за таких обставин значно ускладнюється і характер зміни жорсткості вищевказаних елементів, особливо в перерізах з тріщиною. Величина інтегральної жорсткості залізобетонного елемента у цьому випадку складатиметься із жорсткостей стиснутої та розтягнутої зон бетону, стиснутої  $\Sigma E_{sc} I_{sc}$  та розтягнутої  $\Sigma E_{st} I_{st}$  арматури

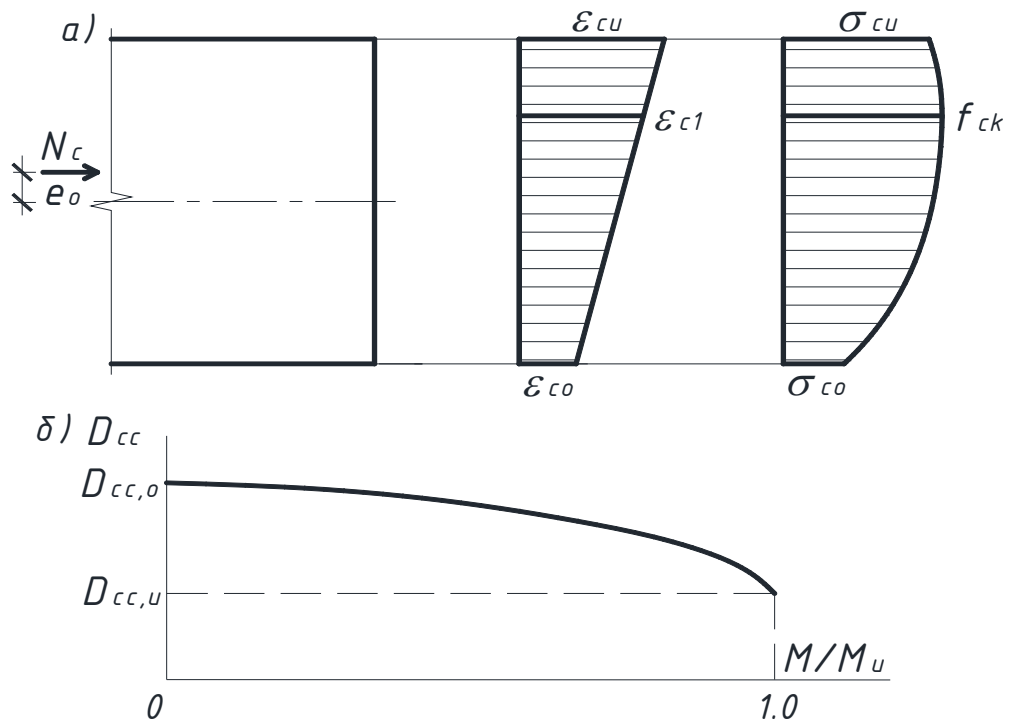


Рисунок 2.9 – Напружено-деформований стан (а) та характер зміни жорсткості (б) бетонного елемента, стиснутого з малими або випадковими ексцентриситетами

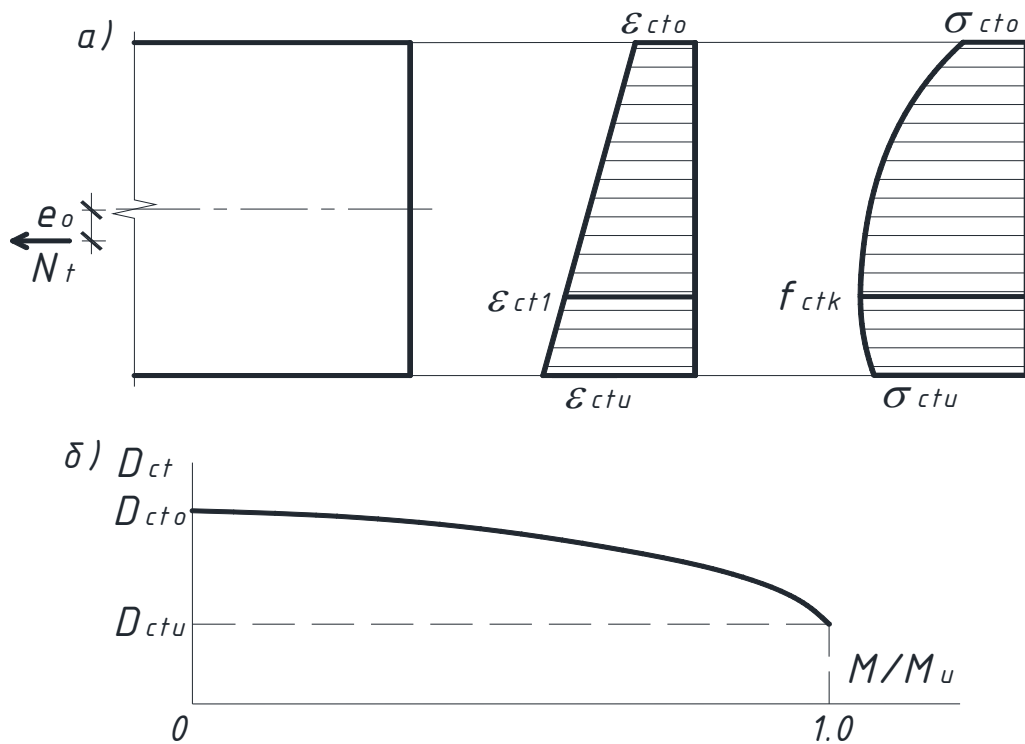


Рисунок 2.10 – Напружено-деформований стан (а) та характер зміни жорсткості (б) бетонного елемента, розтягнутого з малими або випадковими ексцентриситетами

$$D = E_{cc}^{int} I_{cc} + E_{ct}^{int} I_{ct} + \Sigma E_{sc} I_{sc} + \Sigma E_{st} I_{st}. \quad (2.4)$$

Крім того, її функція в перерізі з тріщиною (рис. 2.11) повинна відображати відносно швидке (майже раптове) виключення з роботи переважної частини розтягнутого бетону та відповідний перерозподіл зусиль в розтягнутій зоні з бетону на арматуру. У блоці ж між тріщинами вплив нерозтрісканого розтягнутого бетону на жорсткість залізобетонного елемента залишається доволі суттєвим (рис. 2.12, а). Оскільки тут працює весь переріз, то остання змінюється переважно за рахунок не геометричних, а деформаційних характеристик, зокрема модуля деформацій бетону, і теж могла б бути відображена за допомогою виразу (2.4). Тоді загальна функція інтегральної жорсткості залізобетонного елемента в зазначеному перерізі, на відміну від перерізу з тріщиною, теж буде плавною (рис. 2.12, б).

Загалом відомо, що при вичерпанні несучої здатності руйнується не переріз елемента, а бетон в його певному об'ємі або арматура на певній ділянці [25; 212]. Отже можна передбачити, що напружено-деформований стан залізобетонного елемента на зазначеній ділянці повинен описуватися характеристиками деякого розрахункового (осередненого) перерізу всього блоку між тріщинами, у тому числі і осередненою інтегральною жорсткістю (рис. 2.13). Цілком зрозуміло, що остання (крива 3) буде змінюватися більш інтенсивно ніж інтегральна жорсткість залізобетонного елемента у перерізі між тріщинами (крива 2) [210]. Також очевидно, що її теж можна описувати за допомогою виразу (2.4) і змінюватися вона буде теж відносно плавно, якщо зважити на загальний характер розвитку прогинів згинальних або позацентрово завантажених залізобетонних елементів. На користь подібного твердження говорить факт відсутності в експериментальних діаграмах прогинів  $M - f$  та кривини  $M - 1/r$  будь-яких стрибків, що відображають момент появи тріщин в згинальних (рис. 2.14, 2.15), стиснутозігнутих (рис. 2.16) чи позацентрово стиснутих (рис. 2.17) елементах [130; 190; 236; 495].

Розрахунок осередненої інтегральної жорсткості залізобетонного елемента за виразом (2.4) є доволі складною задачею з багатьма невідомими.

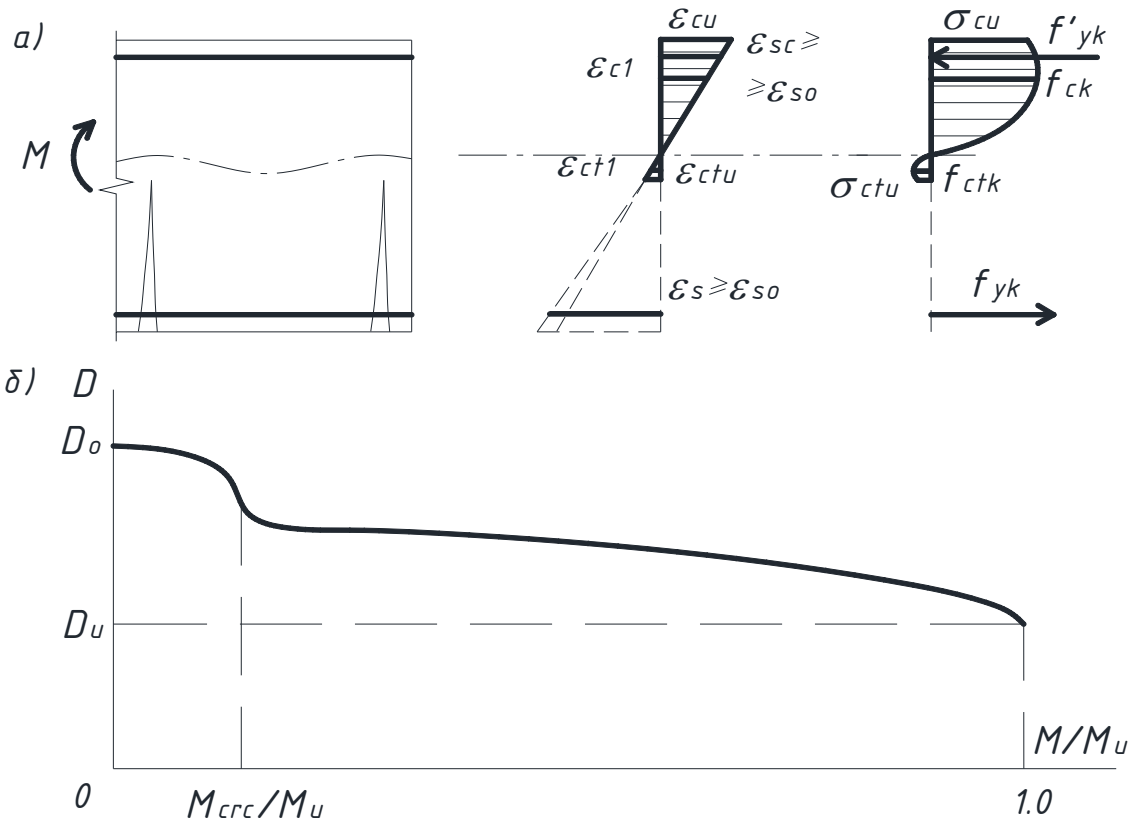


Рисунок 2.11 – Напружено-деформований стан (а) та характер зміни жорсткості (б) згинального залізобетонного елемента у перерізі з тріщиною

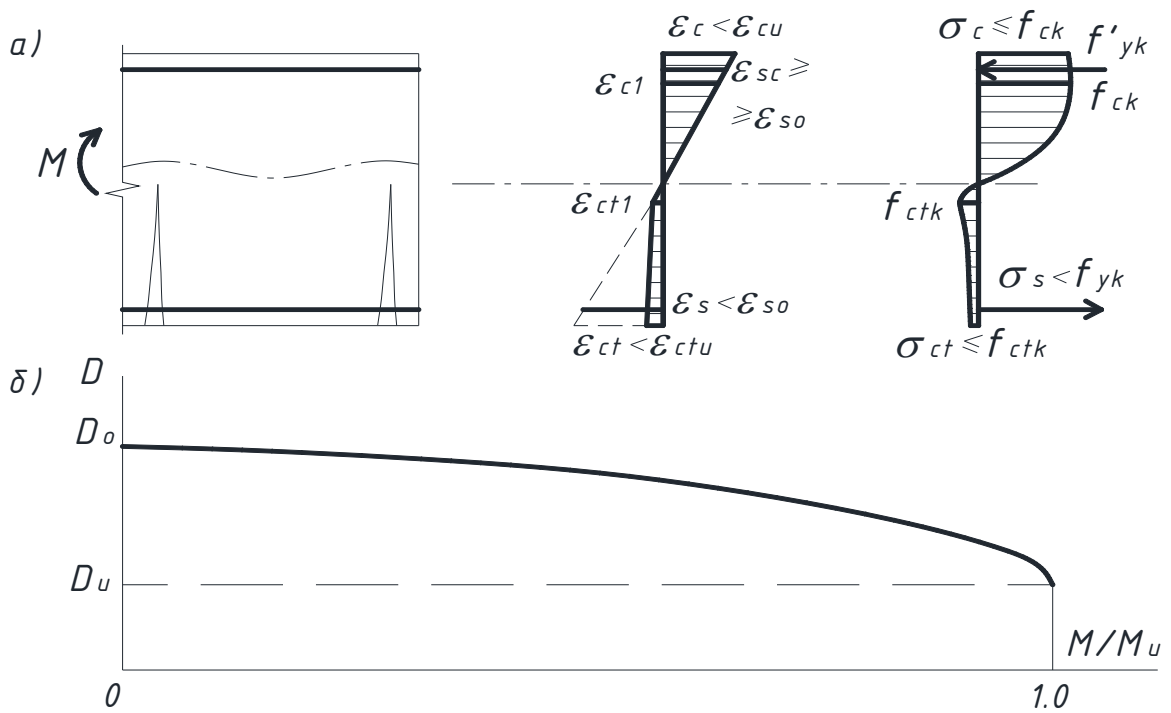


Рисунок 2.12 – Напружено-деформований стан (а) та характер зміни жорсткості (б) згинального залізобетонного елемента у перерізі між тріщинами



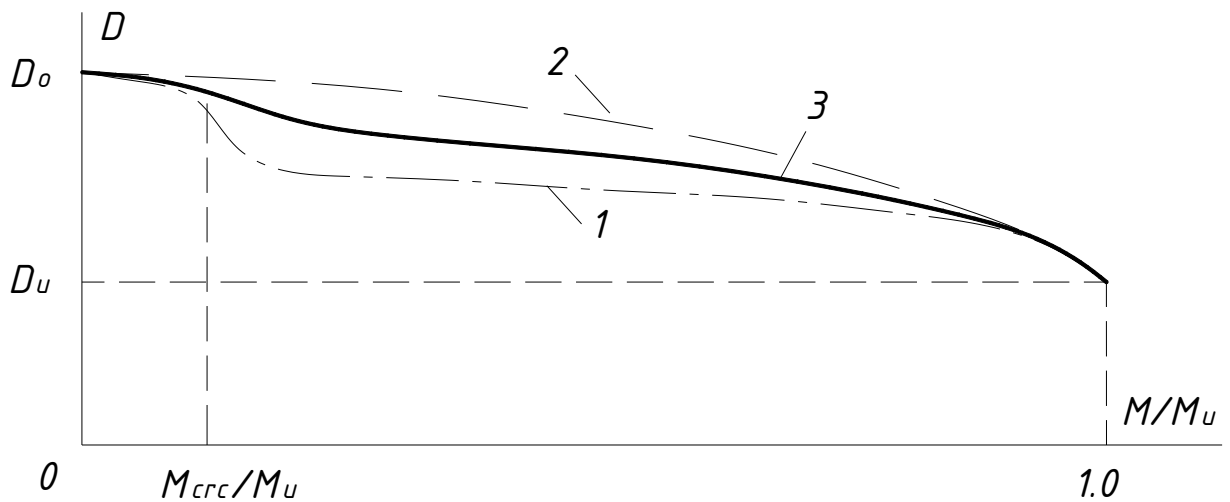


Рисунок 2.13 – Діаграми інтегральної (усередненої) жорсткості згинального залізобетонного елемента в перерізі: 1 – з тріщиною; 2 – між тріщинами; 3 – осередненого блоку між тріщинами

Адже інтегральні модулі деформацій бетону стиснутої та розтягнутої зон загалом пов'язані не тільки з деформаційними характеристиками матеріалу, але й з геометричними параметрами перерізу елементів. Зокрема, якщо діаграми деформування бетону в зазначених зонах прийняти у вигляді неправильних дробово-раціональних функцій [197; 219; 220], то зазначені модулі деформацій стиснутого і розтягнутого бетону слід було б визначати за формулами, відповідно [197; 204]

$$E_{cc}^{\text{int}} = \frac{E_{co} - f_{ck} \cdot \varepsilon_c / (2 \cdot \varepsilon_{cl}^2)}{1 + (E_c / f_{ck} - 2 / \varepsilon_{cl}) \cdot (\varepsilon_c + (z_c - h/2) \cdot \varepsilon_c / x)}; \quad (2.5)$$

$$E_{ct}^{\text{int}} = \frac{E_{co} - f_{ctk} \cdot \varepsilon_{ct} / (2 \cdot \varepsilon_{ct1}^2)}{1 + (E_c / f_{ctk} - 2 / \varepsilon_{ct1}) \cdot (\varepsilon_{ct} + (z_{ct} - h/2) \cdot \varepsilon_{ct} / (h - x))}, \quad (2.6)$$

де  $E_{co}$  і  $E_c$  – модулі пружності (деформацій) бетону за напружень  $\sigma_c = 0$  та

$\sigma_c = 0,3f_{ck}$ , відповідно;

$\varepsilon_c$  і  $\varepsilon_{ct}$  – відповідно, поточні значення відносних деформацій крайніх стиснутих та розтягнутих фібр бетону;

$\varepsilon_{cl}$  і  $\varepsilon_{ct1}$  – відповідно, критичні значення відносних деформацій крайніх стиснутих та розтягнутих фібр бетону;

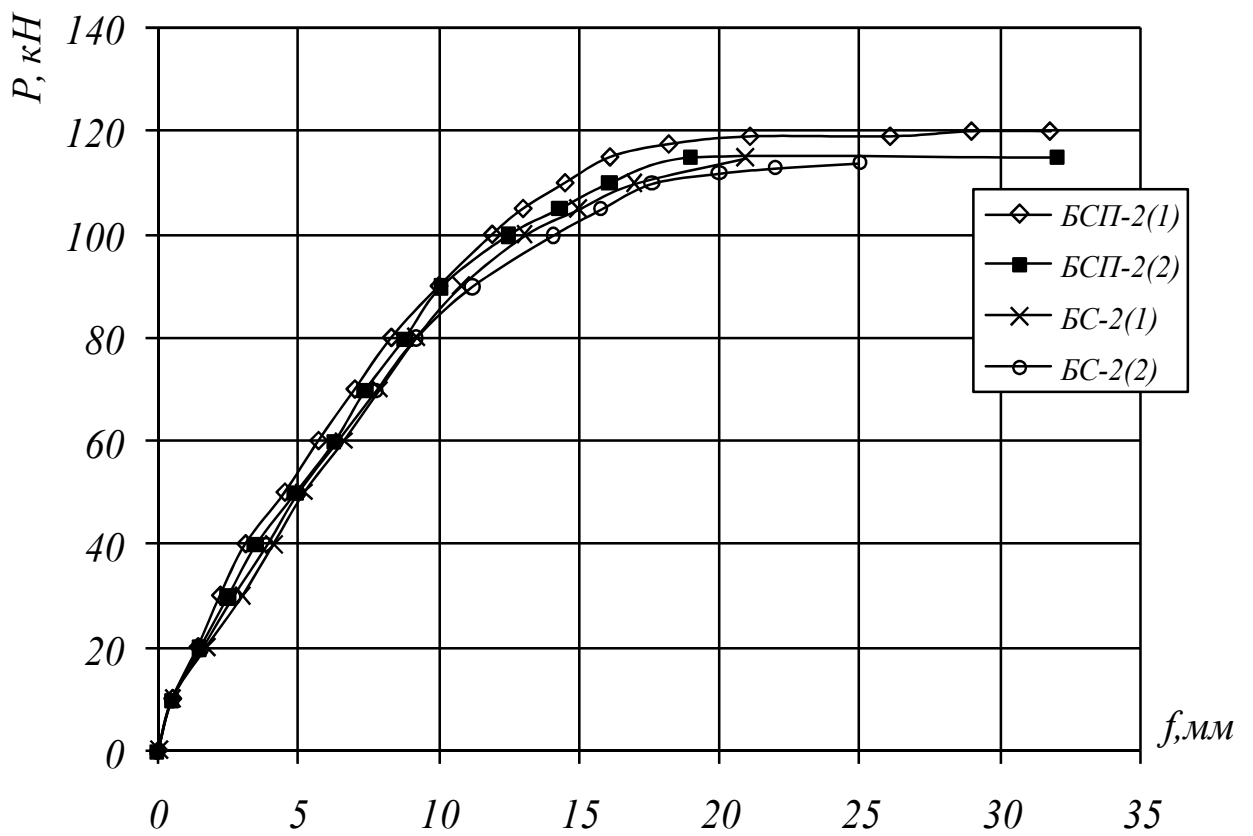


Рисунок 2.14 – Характер розвитку експериментальних прогинів залізобетонних балок [236]

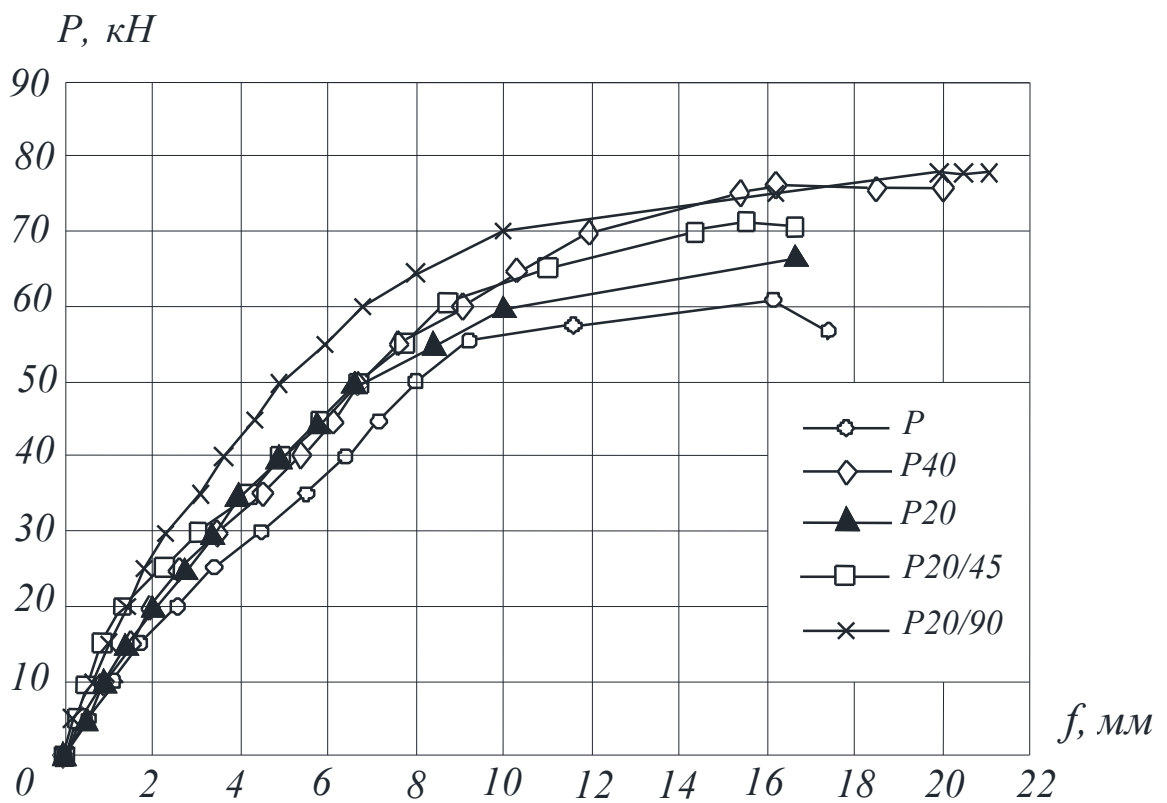


Рисунок 2.15 – Характер розвитку експериментальних прогинів фібрзалізобетонних балок [495]

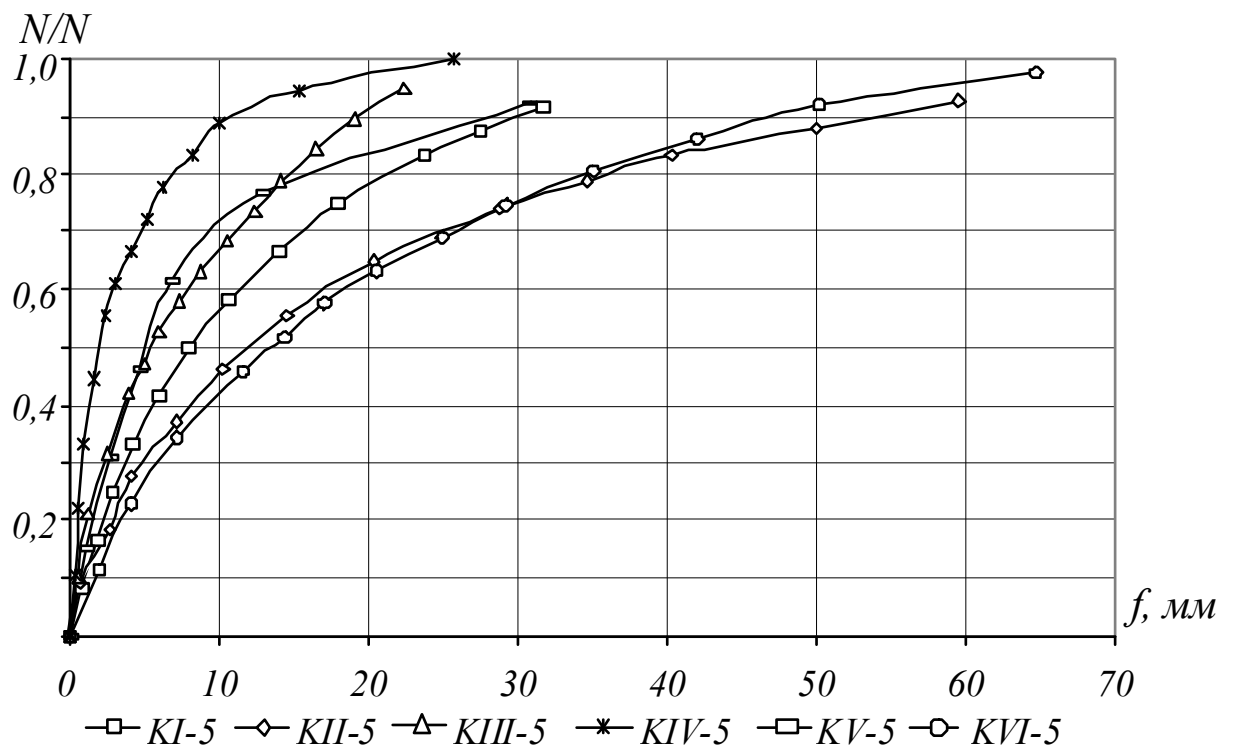


Рисунок 2.16 – Характер розвитку експериментальних прогинів стиснутозігнутих елементів [190]

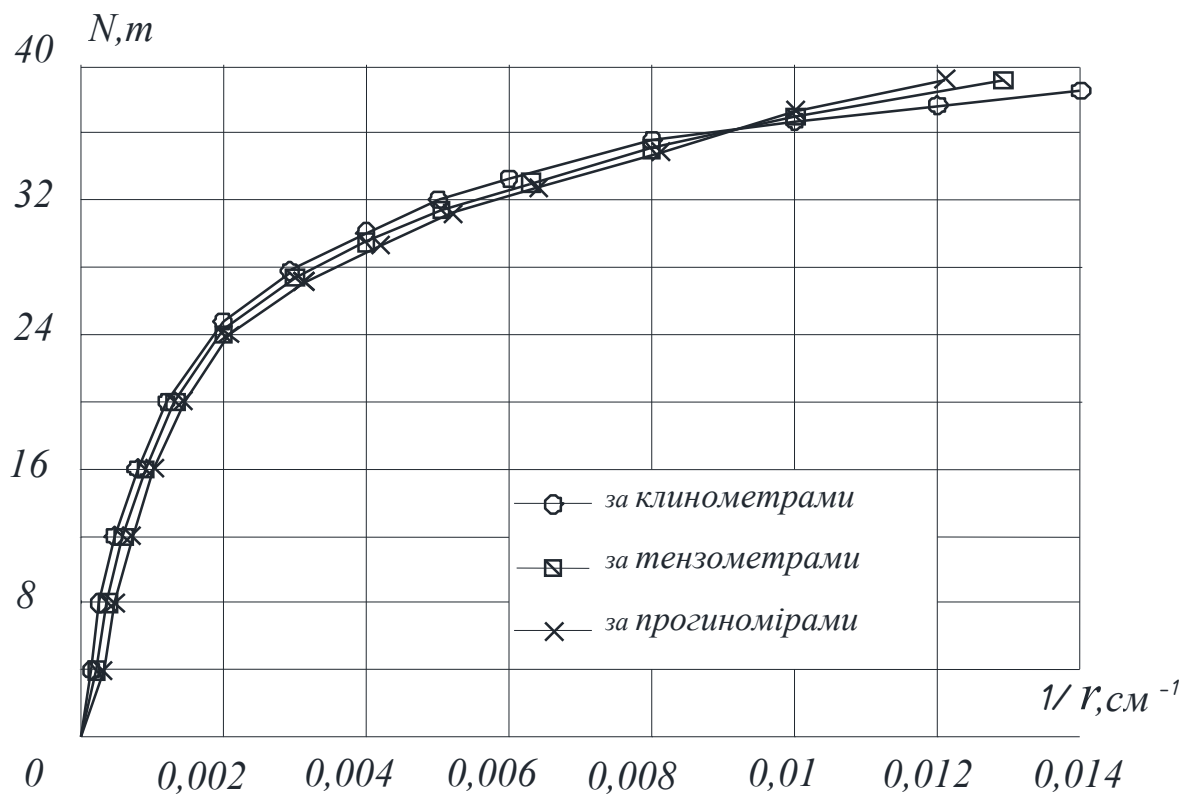


Рисунок 2.17 – Зміна кривини колони К1-4 в експериментальних дослідженнях [130]

$f_{ck}$  і  $f_{ctk}$  – характеристичні значення міцності бетону на стиск та розтяг;  
 $z_c$  і  $z_{ct}$  – відстань від нейтральної лінії до центру ваги стиснутого та розтягнутого бетону, відповідно;  
 $h$  і  $x$  – висота поперечного перерізу та стиснутої зони елемента, відповідно.

Однак детальний аналіз залежностей (2.4), (2.5) та (2.6) показує, що загалом вони є малоприйнятними для використання навіть у практичних розрахунках. Тому осереднену інтегральну жорсткість залізобетонного елемента все ж таки доцільніше знаходити відповідно до її класичного визначення за відомим виразом (2.7)

$$D = M / (1/r). \quad (2.7)$$

Для реалізації зазначеного шляху необхідно знати характер зв'язку вищевказаної жорсткості з виникаючими внутрішніми зусиллями в елементі та з його кривиною. Якщо зважити, що процес деформування бетонних та залізобетонних елементів загалом супроводжується фізичною, геометричною та конструкційною нелінійністю, та врахувати результати уже згаданих експериментальних досліджень [20; 25; 188; 283; 298; 304; 344; 407; 473; 494; 499; 543], то можна впевнитися, що зазначений зв'язок теж є нелінійним.

## 2.8. Узагальнена діаграма стану залізобетонних елементів

Серед основних завдань, що завжди стояли перед теорією деформування бетонних та залізобетонних елементів, найважливішими були питання максимально точного та повного відтворення їх дійсного напружено-деформованого стану в реальних умовах. Якщо в колишній «силовій» моделі [244] пріоритет у подібному відображенні надавався напруженням і міцнісним характеристикам матеріалів, то в «деформаційній» моделі – деформаційним параметрам матеріалів [122; 243; 382].

Однак, як уже зазначалося раніше (пп.1.9, 2.6), робота залізобетонних елементів а ні на проміжних стадіях, а ні в граничному стані не проходить за

чисто «силовою» чи то «деформаційною» схемою і, як наслідок, не може обмежуватися лише напруженнями чи лише деформаціями. Реальний напружено-деформований стан залізобетонних елементів можна моделювати лише за допомогою двох характеристик – силових та деформаційних одночасно. Але цілком очевидно, що робити це можна за допомогою і одного параметру, якщо він зв'язуватиме між собою дві вищезазначені характеристики. У загальному випадку таким параметром завжди є жорсткість. За осьового навантаження, коли всі фібри бетонного або залізобетонного елемента працюють рівномірно, мова може йти лише про модуль деформацій бетону  $E_{cc} = \sigma_c / \varepsilon_c$ , оскільки він повністю відображає зміну жорсткості зазначеного елемента під навантаженням.

Загалом же жорсткість перерізу елемента чи конструкції описується не тільки деформаційними характеристиками, але й певними геометричними параметрами. За неоднорідного напружено-деформованого стану останні теж змінюються нерівномірно, оскільки всі елементарні ділянки перерізу елемента деформуються по різному. Тому, в силу різних технологічних недосконалостей чи то випадкових ексцентриситетів, жорсткість всіх залізобетонних елементів в реальних умовах, навіть при їх осьовому завантаженні, змінюється як за рахунок деформаційних характеристик матеріалів ( $E$ ), так і за рахунок геометричних параметрів їх перерізу ( $I$ ), тобто  $M / (1/r) = EI$ .

Цілком очевидно, що жорсткість певного елемента загалом зв'язана не тільки з рівнем сприйнятих зусиль  $M / M_u$ , але й з рівнем деформування або викривлення його деформованої осі  $(1/r)/(1/r_u)$ . Тому, зважаючи на вищесказане, приймемо зміну жорсткості бетонного або залізобетонного елемента у вигляді функції [210 – 213; 225]

$$M / (1/r) = A - B \cdot \frac{1/r}{1/r_u} - C \cdot \frac{M}{M_u}, \quad (2.8)$$

де  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – параметри, що відображають міцнісні, деформаційні та

геометричні характеристики перерізу залізобетонного стержня.

У такому випадку зусилля, яке повинне сприйматися елементом, можна обчислювати залежно від рівня його деформування за формулою

$$M = \left( A \cdot \frac{1}{r} - \frac{B}{1/r_u} \cdot \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right) / \left( 1 + \frac{C}{M_u} \cdot \frac{1}{r} \right). \quad (2.9)$$

Застосувавши до функції (2.9) наступні граничні умови: а) при  $1/r = 0$   $dM/d(1/r) = E_{co}I_{red,o}$ ; б)  $dM/d(1/r) = 0$  за  $1/r = 1/r_u$ ; в) при  $1/r = 1/r_u$   $M = M_u$ , визначимо величину коефіцієнтів  $A$ ,  $B$  і  $C/M_u$ . Після відповідних обчислень матимемо:

$$A = E_{co}I_{red,o}; \quad B = E_{cu}I_{red,u} = \frac{M_u}{1/r_u}; \quad \frac{C}{M_u} = \frac{E_{co}I_{red,o}}{M_u} - \frac{2}{1/r_u}. \quad (2.10)$$

Підставивши ці значення у формулу (2.9), отримаємо залежність, що зв'язує зусилля в елементі з його кривиною

$$M = \frac{E_{co}I_{red,o} \cdot \frac{1}{r} - M_u \cdot \left( \frac{1/r}{1/r_u} \right)^2}{1 + \left( \frac{E_{co}I_{red,o}}{M_u} - \frac{2}{1/r_u} \right) \cdot \frac{1}{r}}, \quad (2.11)$$

де  $M_u$  – несуча здатність бетонного чи залізобетонного стержня;

$1/r_u$  – кривина елемента в граничному стані;

$E_{co}I_{red,o}$  – початкове значення приведеної або повної ( $\Sigma E_i I_i$ ) жорсткості перерізу бетонного або залізобетонного елемента.

Нескладно помітити, що вираз (2.11) описує не що інше, як діаграму стану елемента. З рис. 2.18 видно, що цій діаграмі загальною властиві висхідна та низхідна вітки деформування. Виникає лише запитання: чи можлива реалізація низхідної вітки діаграми стану елемента в реальних умовах? Якщо говорити про бетонні елементи, то це є малоімовірним. Неможливою є низхідна вітка діаграми стану і у статично визначених залізобетонних елементах, оскільки досягнення граничного стану в найбільш напруженому перерізі призводить до їх геометричної змінюваності та негайного

руйнування (рис. 2.19).

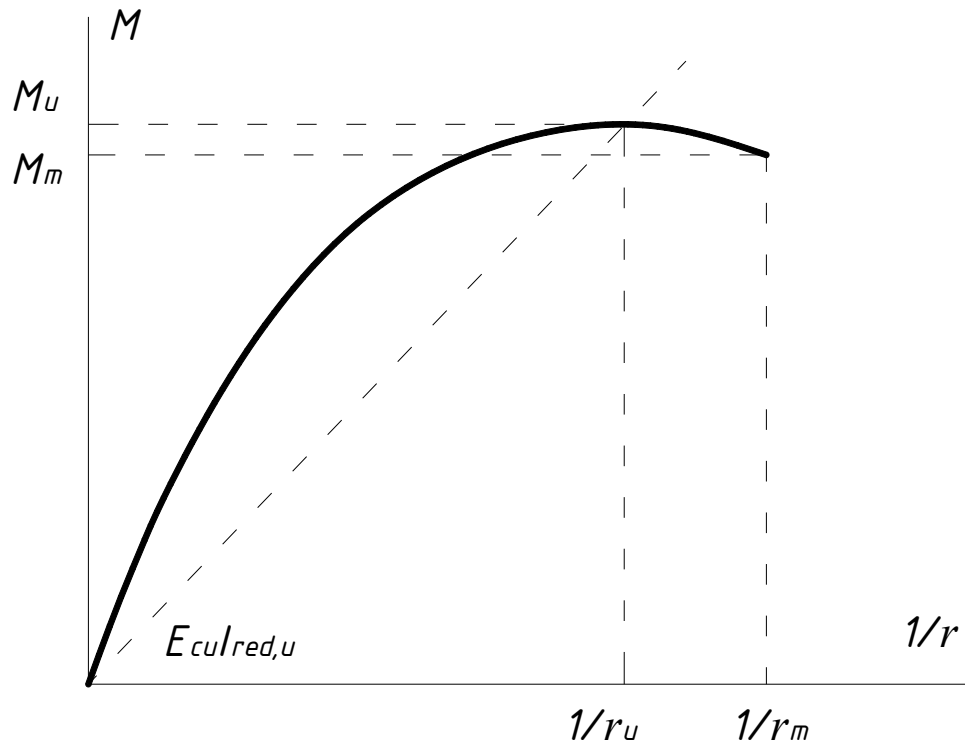


Рисунок 2.18 – Повна діаграма стану залізобетонного елемента

Внаслідок можливого перерозподілу зусиль в статично невизначених конструкціях та системах деформування елемента на низхідній вітці діаграми стану є цілком ймовірним. Воно може закінчуватися лише в момент утворення останнього шарніру пластичності, з яким система або конструкція перетворюється в геометрично змінювану (рис.2.20).

Таким чином, за допомогою залежності (2.11) можна загалом оцінювати напружено-деформований стан будь-яких бетонних та залізобетонних елементів в нормальному перерізі, котрі працюють у складі як статично визначених, так і статично невизначених конструкцій та систем. Водночас необхідно зробити певні застереження стосовно використання залежності (2.11) в розрахунках залізобетонних елементів конструкцій. Структурний аналіз функції (2.11) показує, що вона є плавною та монотонною на висхідній та низхідній вітках діаграми деформування, а тому може беззастережно застосовуватися до залізобетонних елементів, які працюють без утворення тріщин в розтягнутій зоні.

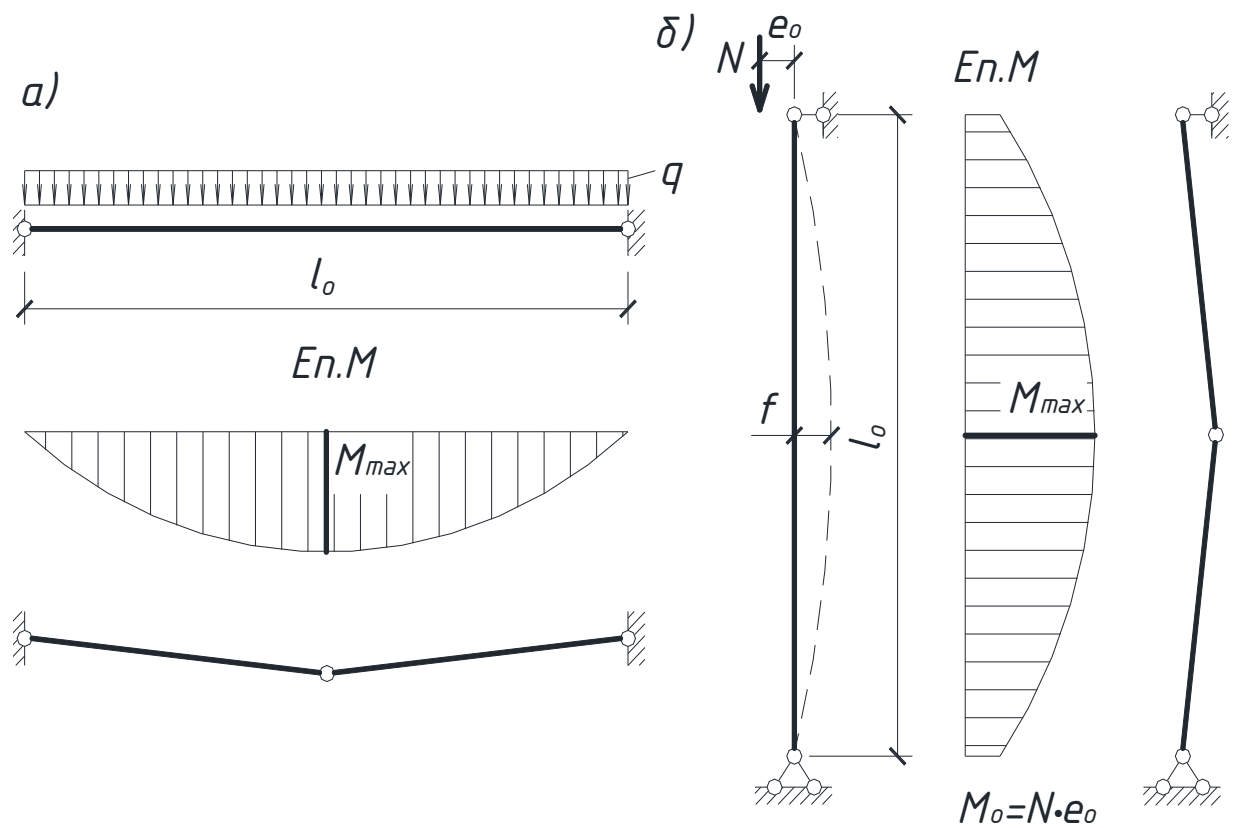


Рисунок 2.19 – Схеми деформування статично визначених залізобетонних елементів конструкцій

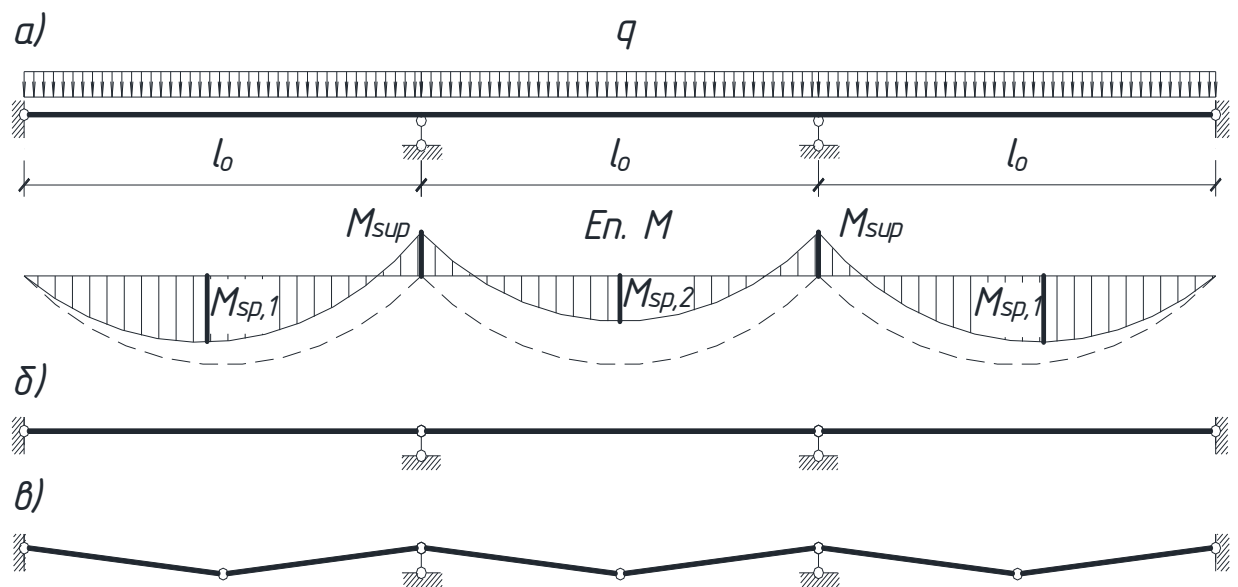


Рисунок 2.20 – Деформування статично невизначених залізобетонних елементів конструкцій на етапах: а) – статичної невизначеності; б) – статичної визначеності; в) – геометричної змінюваності



З появою в залізобетонних елементах тріщин, їх жорсткість почне змінюватися більш інтенсивно за рахунок прискореного виключення з роботи розтягнутого бетону. Із двох вищеназваних параметрів, що входять до діаграми стану елемента, саме кривина зазнаватиме прискореного зростання і потребуватиме певного корегування до величини  $1/r^*=(1/r) \cdot \psi_i$ . Безперечно, відтворити функціонально цей процес вкрай складно, але можливо, якщо повернутися до аналізу розвитку експериментальних прогинів згинальних та позацентрово стиснутих елементів (рис. 2.14 ... 2.17).

Раніше уже зазначалося, що прискорене падіння жорсткості (зростання кривини) елемента відбувається внаслідок інтенсивної зміни геометричних характеристик його перерізу. І тут варто відзначити, що переважна більшість закордонних дослідників пов'язують жорсткість залізобетонних елементів з так званим «ефективним моментом інерції» (п. 1.9, табл. 1.9), який є залежним від рівня їх завантаження. Зазвичай передбачається корегування ефективного моменту інерції  $I_e$  за допомогою різних степеневих залежностей [293; 294; 300; 316; 322; 329; 382; 399; 435; 471; 479; 536; 549].

Цілком очевидно, що в подібний спосіб доцільно корегувати і саму кривину залізобетонних елементів з розтягнутою зоною та тріщинами в ній. Щоправда, враховуючи граничні умови для узагальненої діаграми стану (2.11), здійснюватимемо це за допомогою наступної поліноміальної функції

$$\psi_\rho = 1 + \frac{\rho_{lt}}{\alpha_s} \cdot \left(1 - \frac{M}{M_u}\right) \cdot \frac{M}{M_u}, \quad (2.12)$$

де  $\alpha_s$  – відносне значення модуля пружності арматури,  $\alpha_s = E_s / 200000$  ;

$\rho_{lt}$  – відсоток армування перерізу елемента розтягнутими стержнями, %.

Якщо в залежності (2.11) здійснити заміну  $1/r=(1/r^*)/\psi_\rho$ , то вона суттєво ускладниться і перетвориться в непросте рівняння типу

$$a_1 y^5 + a_2 y^4 + a_3 y^3 + a_4 y^2 + a_5 y + a_6 y^2 x + a_7 y \cdot x + a_8 x^2 + a_9 x = 0, \quad (2.13)$$

де  $x=1/r^*$ , а  $y=M$ .

Звичайно, що розв'язок цього рівняння відносно зусилля  $M$  є доволі

складним та трудомістким, але відносно скорегованої (реальної) кривини  $1/r^*$  він є дуже простим і зводиться до розв'язку звичайного квадратного рівняння. До речі варто зауважити, що діаграму стану залізобетонних елементів традиційно представляють функцією  $M = f(1/r)$ , оскільки в її основу закладають внутрішні зусилля, які можуть сягати граничних значень  $M_u$ . Однак, виходячи з математичної точки зору, дану діаграму можна описувати й залежністю  $1/r = f(M)$ , якщо при цьому зважити на рівновагу внутрішніх та зовнішніх зусиль. У цьому випадку зовнішнє зусилля  $M$  завжди буде причиною (аргументом), а кривина – наслідком (функцією) процесу деформування. В практичних же розрахунках, зазвичай, варто зберігати традиційний запис діаграми стану у вигляді

$$M = \frac{E_{co} I_{red,o} \cdot \frac{1/r^*}{\psi_\rho} - M_u \cdot \left( \frac{1/r^*}{\psi_\rho \cdot 1/r_u} \right)^2}{1 + \left( \frac{E_{co} I_{red,o}}{M_u} - \frac{2}{1/r_u} \right) \cdot \frac{1/r^*}{\psi_\rho}} \quad (2.14)$$

Говорячи про узагальнену діаграму стану бетонних та залізобетонних елементів, варто згадати про так звану гіпотезу «лінійності» жорсткості, основи якої свого часу [149] так і не знайшли широкого застосування в теорії бетону та залізобетону. Сьогоднішнє повернення до цієї гіпотези [125] є надто непереконливим. І проблема тут не тільки в тому, що вона забезпечує меншу точність відтворення дійсної діаграми стану залізобетонних елементів порівняно з гіпотезою «нелінійності» жорсткості (рис. 2.21, табл. 2.2), закладеної в основу залежностей (2.11) і (2.14).

Справа в тому, що з фізичної точки зору гіпотеза «лінійності» жорсткості взагалі є несумісною як з «деформаційною», так і з узагальненою моделлю деформування бетонних та залізобетонних елементів.

Причинами цього слугує те, що гіпотеза «лінійності» жорсткості:

- не допускає деформування бетону на низхідній вітці діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$ ;
- виключає можливість деформування залізобетонного елементу на

низхідній вітці діаграми його стану  $M - 1/r$ , а тому не може бути застосована до статично невизначних елементів, конструкцій чи систем;

- принципово унеможливує використання в розрахунках екстремального критерію несучої здатності;
- при визначенні критичних деформацій бетону статистичним методом не просто вибраковує окремі «анормальні» результати випробування стандартних зразків, а повністю нехтує початковими та прикінцевими експериментальними точками [125] в кількості (40...50)% від їх загального об'єму, що є абсолютно неприпустимим.

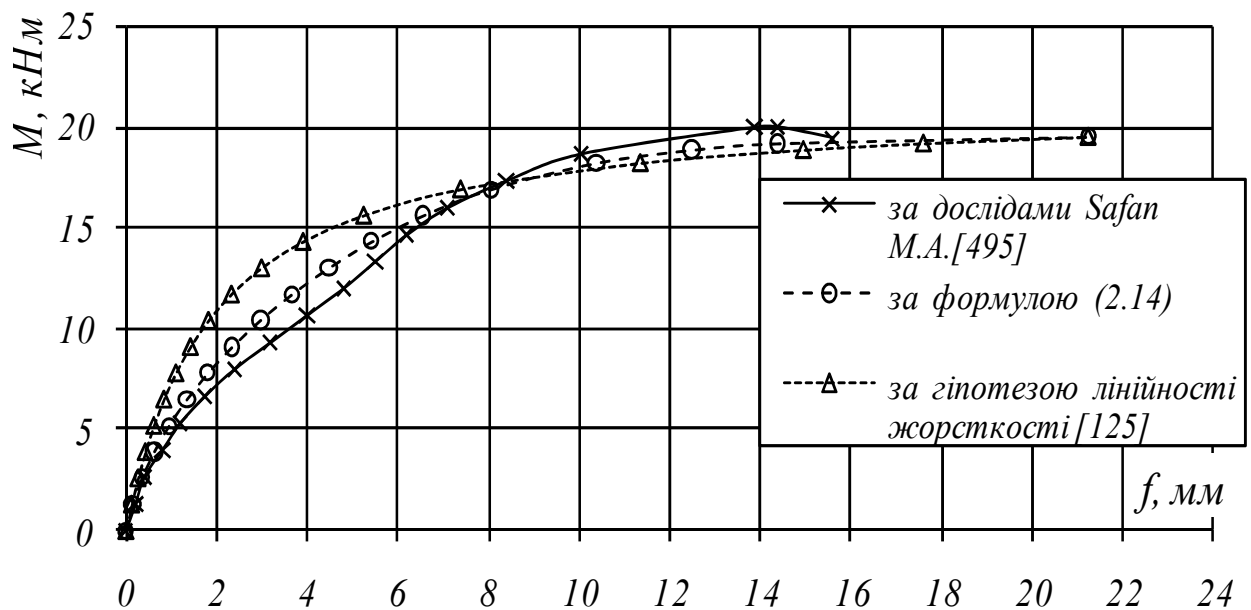


Рисунок 2.21 – Експериментальна та теоретичні діаграми деформування залізобетонної балки C20/90 [495]

Таблиця 2.2 – До статистичної оцінки теоретичних діаграм деформування залізобетонної балки C20/90 [495]

Відхилення	Відхилення експериментальних даних [495] від теоретичних, отриманих за гіпотезою жорсткості	
	«лінійності» [125]	«нелінійності», ф-ла (2.14)
Середньоарифметичні $\Delta$	0,746	0,893
Стандартні $\sigma$	0,295	0,151
Коефіцієнт варіації $\nu$ , %	39,6	16,88

Статистичний спосіб визначення критичних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{c1}$  міг би бути виправданий лише при апроксимації всього масиву експериментальних даних різними залежностями [140], а не його штучним «притягуванням» до лінійної функції через вищезгадане нехтування певної частини результатів експериментальних досліджень.

## **2.9. Зв'язок діаграм стану залізобетонних елементів з діаграмами деформування бетону**

Детальний аналіз численних залежностей, запропонованих сьогодні для діаграм деформування бетону (п.1.2), дозволяє зробити один дуже простий і водночас дуже важливий висновок: підбір універсальної функції  $\sigma_c = f(\varepsilon_c)$  за результатами експериментальних досліджень стандартних зразків навряд чи може закінчитись успіхом. Скоріше за все такий пошук в самій своїй основі буде приреченим раз і назавжди з наступних міркувань.

В силу багатьох факторів та причин у природі не існує двох однакових залізобетонних елементів, конструкцій чи систем, напружено-деформований стан яких був би абсолютно тотожним. А отже не може бути і двох абсолютно однакових чи тотожних експериментальних діаграм стану матеріалу, наділеного пружно-пластичними властивостями. Поведінка такого матеріалу загалом і діаграма його стану зокрема кожен раз будуть залежати від особливостей напружено-деформованого стану самого елемента в конструкції чи системі. Тому стає очевидним, що шукати варто узагальнену (універсальну) функцію не для діаграми деформування бетону  $\sigma_c = f(\varepsilon_c)$ , а для діаграми стану залізобетонного елемента  $M - 1/r$  загалом.

Раніше уже було показано (п.2.8), що залежність  $M = f(1/r)$  може бути представлена неправильною дробово-раціональною функцією (2.11) або (2.14). Вона дозволяє описати напружено-деформований стан не тільки згинального, але й центрально чи позацентрово стиснутого або розтягнутого

бетонного та залізобетонного елемента. І стає це можливим саме завдяки тісному зв'язку діаграм стану елементів конструкцій з діаграмами деформування матеріалів. А тому, виходячи зі сказаного, слід чітко розрізняти основні відмінності між вищезазначеними діаграмами.

Загалом діаграма стану будь-якого бетонного чи залізобетонного елемента завжди відображає процес його деформування залежно від режиму та характеру діючого навантаження. Що ж до діаграми деформування самого матеріалу, то її отримують шляхом випробування стандартних зразків з унормованими геометричними характеристиками за стандартних (унормованих) режимів завантаження. Інакше кажучи, діаграма деформування матеріалу являє собою діаграму стану стандартного зразка за стандартних умов його випробування.

Таким чином, звідси випливає, що за вихідних умов більш загальна функція  $M = f(1/r)$  повинна трансформуватися в залежність  $\sigma_c = f(\varepsilon_c)$ .

Аби переконатися у вищесказаному, представимо узагальнену діаграму стану залізобетонного елемента (2.11) дещо видозміненою залежністю

$$M = M_u \cdot \frac{\frac{E_{co} I_{red,o}}{E_{cu} I_{red,u}} \cdot \frac{1/r}{1/r_u} - \left(\frac{1/r}{1/r_u}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{co} I_{red,o}}{E_{cu} I_{red,u}} - 2\right) \cdot \frac{1/r}{1/r_u}}, \quad (2.15)$$

де  $E_{cu} I_{red,u}$  – розрахункова жорсткість перерізу залізобетонного елемента в граничній стадії (рис.2.22), що рівна

$$E_{cu} I_{red,u} = M_u / (1/r_u) . \quad (2.16)$$

Для позацентрово стиснутого бетонного або залізобетонного елемента (рис. 2.23) діаграма його стану (2.15) може бути записана у вигляді

$$N \cdot e = N_u \cdot e_u \cdot \frac{\frac{E_{co} I_{red,o}}{E_{cu} I_{red,u}} \cdot \frac{1/r}{1/r_u} - \left(\frac{1/r}{1/r_u}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{co} I_{red,o}}{E_{cu} I_{red,u}} - 2\right) \cdot \frac{1/r}{1/r_u}}, \quad (2.17)$$

де  $N$  та  $N_u$  – поточне та граничне значення поздовжнього стискаючого зусилля в елементі, відповідно;

$e$  та  $e_u$  – поточне та граничне значення ексцентриситету поздовжньої стискаючої сили, що діє на залізобетонний елемент (з урахуванням прогинів).

За стандартного режиму випробування стандартного бетонного зразка (призми або іншого відносно короткого елемента) осьовим стискаючим навантаженням ( $e_o = 0$ ) висота стиснутої зони бетону залишається незмінною  $x_u = x = h$ . А коли врахувати ще й відсутність прогинів ( $f_u = f = 0$ ), то можна стверджувати, що  $e_u = e = x - h/2 + e_o + f$ ,  $(1/r)/(1/r_u) = \varepsilon_c / \varepsilon_{cu}$ ,  $I_{red,u} = I_{red,o}$  та  $A_{cu} = A_c = b \cdot h$ .

Оскільки за осьового стиску  $N/N_u = \sigma_c / f_{ck}$ , то залежність (2.17) з урахуванням вищенаведених тотожностей прийме остаточний вигляд

$$\sigma_c = f_{ck} \cdot \frac{\frac{E_{co} \cdot \varepsilon_c}{E_{cu} \cdot \varepsilon_{cu}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}}\right)^2}{1 + (E_{co} / E_{cu} - 2) \cdot \varepsilon_c / \varepsilon_{cu}}, \quad (2.18)$$

де  $E_{cu}$  – граничне значення січного модуля деформацій бетону за осьового стиску, обчислюється за виразом  $E_{cu} = E_{cf} = f_{ck} / \varepsilon_{cu}$ ;

$\varepsilon_{cu}$  – граничні деформації бетону, за осьового стиску (рис.2.24) рівні критичним  $\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1}$ .

Все вищесказане можна в повній мірі віднести і до позацентрово розтягнутого бетонного або залізобетонного елемента. Для нього функцію (2.11) можна записати в наступному вигляді

$$N_t \cdot e = N_{tu} \cdot e_u \cdot \frac{\frac{E_{co} I_{red,o}}{E_{ctu} I_{red,u}} \cdot \frac{1/r}{1/r_u} - \left(\frac{1/r}{1/r_u}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{co} I_{red,o}}{E_{ctu} I_{red,u}} - 2\right) \cdot \frac{1/r}{1/r_u}}, \quad (2.19)$$

де  $N_t$  та  $N_{tu}$  – поточне та граничне значення поздовжнього розтягуючого зусилля в елементі, відповідно;

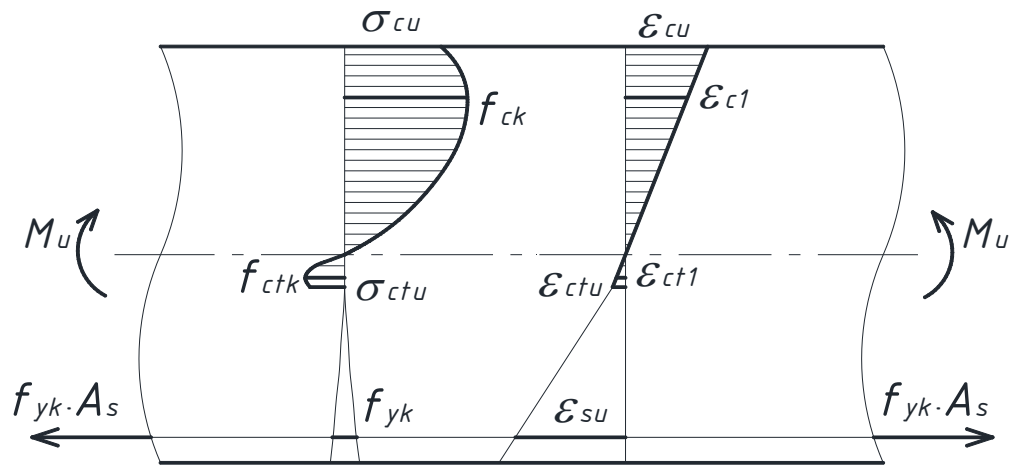


Рисунок 2.22 – Напружено-деформований стан згинального залізобетонного елемента в найбільш напруженому перерізі у граничній стадії

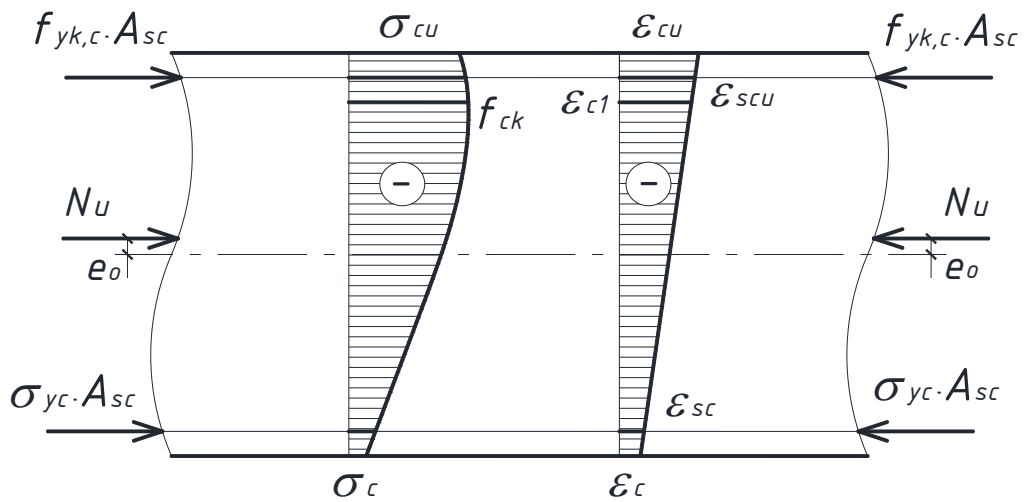


Рисунок 2.23 – Напружено-деформований стан позацинтового стиснутого залізобетонного елемента у граничній стадії

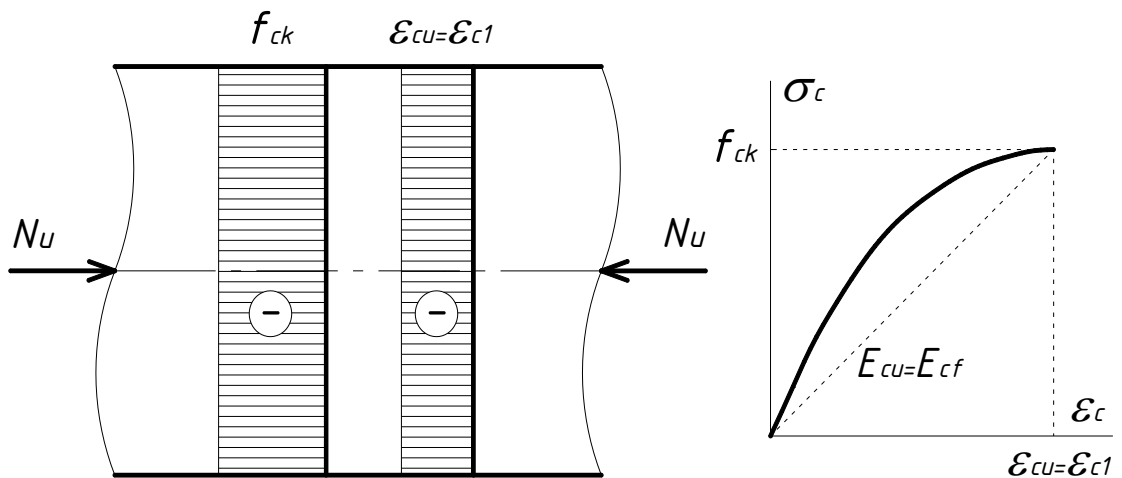


Рисунок 2.24 – Напружено-деформований стан центрально стиснутого бетонного елемента у граничній стадії

$e$  та  $e_u$  – відповідно, поточне та граничне значення ексцентриситету поздовжньої розтягуючої сили (з урахуванням прогинів).

За стандартних умов випробування стандартного бетонного зразка у вигляді призми чи «вісімки» осьовим розтягуючим навантаженням ( $e_o = 0$ ) висота розтягнутої зони бетону залишатиметься незмінною  $x_{ut} = x_t = h$ . Тоді за відсутності прогинів ( $f_u = f = 0$ ) матимуть місце наступні рівності  $e_u = e = x_t - h/2 + e_o + f$ ,  $(1/r)/(1/r_u) = \varepsilon_{ct} / \varepsilon_{ctu}$ ,  $A_{ctu} = A_{ct} = b \cdot h$  і  $I_{red,u} = I_{red,o}$ .

Зважаючи, що за осьового розтягу  $N_t / N_{tu} = \sigma_{ct} / f_{ctk}$ , залежність (2.19) з урахуванням вищенаведених тотожностей прийме вигляд

$$\sigma_{ct} = f_{ctk} \cdot \frac{\frac{E_{co}}{E_{ctu}} \cdot \frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{ctu}} - \left( \frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{ctu}} \right)^2}{1 + \left( \frac{E_{co}}{E_{ctu}} - 2 \right) \cdot \frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{ctu}}}, \quad (2.20)$$

де  $E_{ctu}$  – граничне значення січного модуля деформацій бетону за осьового розтягу, обчислюється за виразом  $E_{ctu} = E_{ctf} = f_{ctk} / \varepsilon_{ctu}$ ;

$\varepsilon_{ctu}$  – граничні деформації бетону, за осьового розтягу  $\varepsilon_{ctu} = \varepsilon_{ct1}$ ;

$\varepsilon_{ct}$  – поточні деформації бетону за осьового розтягу.

Отже, застосовуючи до узагальненої діаграми стану залізобетонного елемента  $M - 1/r$  гіпотезу граничної рівноваги та екстремальний критерій несучої здатності  $dM / d(1/r) = 0$ , в рамках деформаційно-силової моделі можна отримувати реальні діаграми стану та діаграми деформування стиснутого і розтягнутого бетону. Таким чином, у подібний спосіб підтверджується не тільки діалектична єдність діаграм стану елемента з діаграмами деформування матеріалу (рис. 2.25 та 2.26), але й можливість трансформування еталонних діаграм деформування стиснутого чи розтягнутого бетону в реальні (розрахункові) як закономірного явища.

Інакше кажучи, можна вважати повністю доказаним сам факт послідовної «трансформації» діаграм стану залізобетонних елементів конструкцій в діаграми стану та діаграми деформування бетону і навпаки.



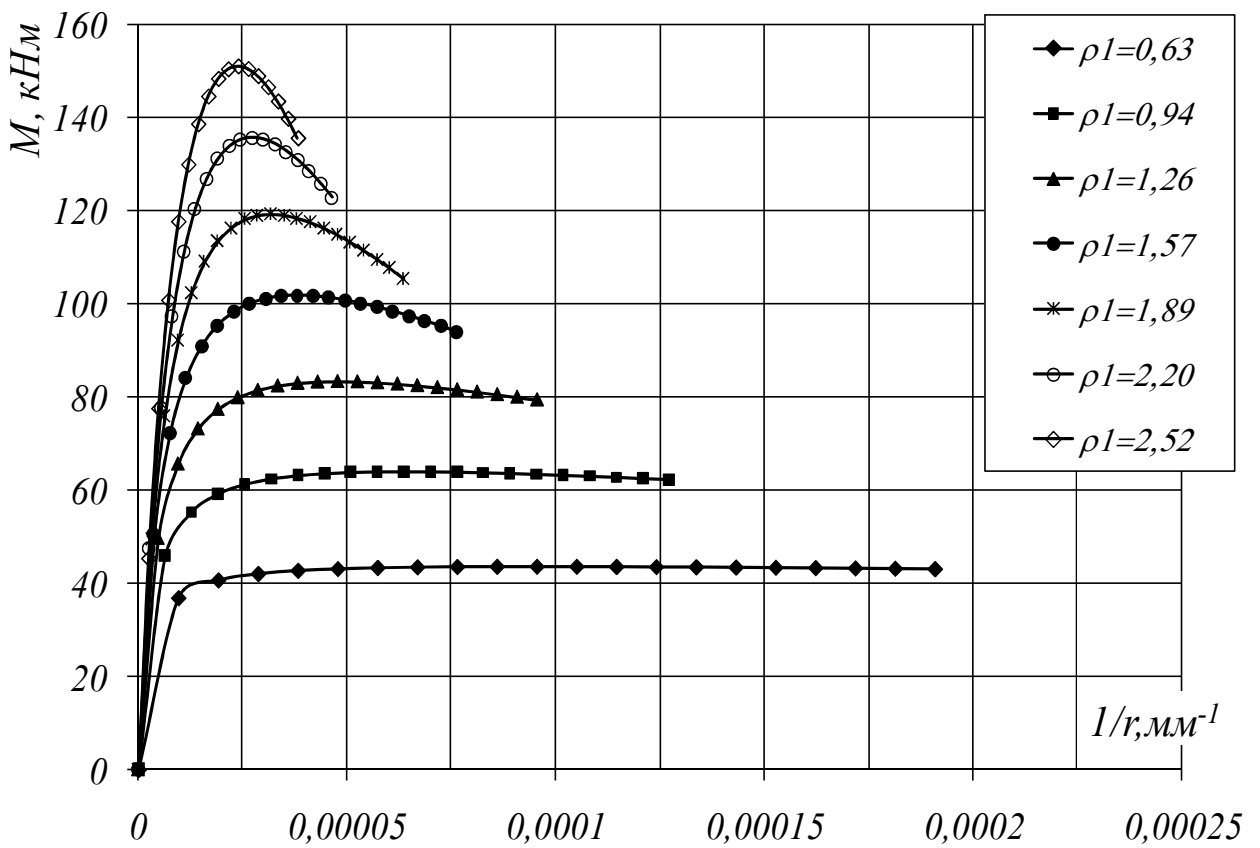


Рисунок 2.25 – Форми діаграм стану згинального залізобетонного елемента залежно від відсотка його армування

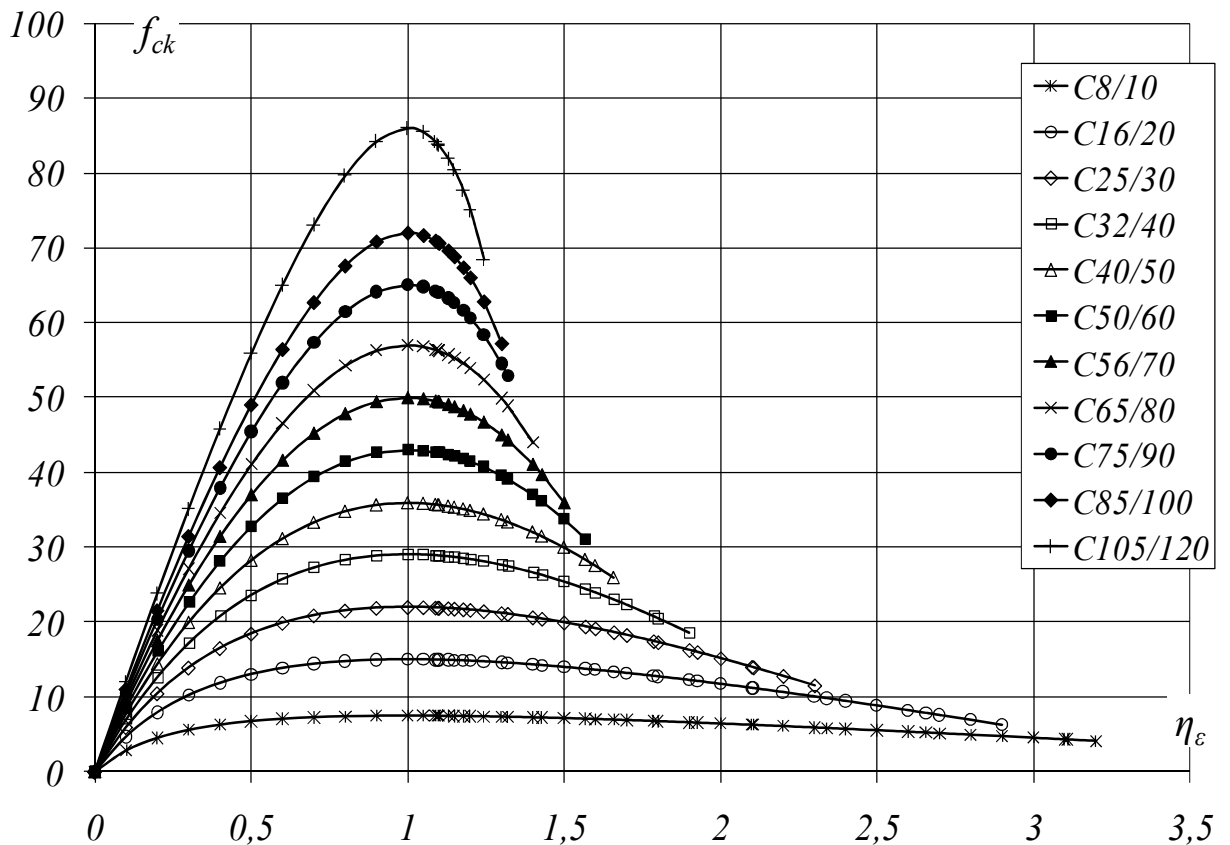


Рисунок 2.26 – Форми діаграм деформування стиснутого бетону залежно від його класу

Крім того необхідно зазначити, що подібна трансформація діаграм в деформаційно-силовій моделі (рис. 2.27) якраз і забезпечує методологічну єдність розрахунків залізобетонних елементів за граничними станами.

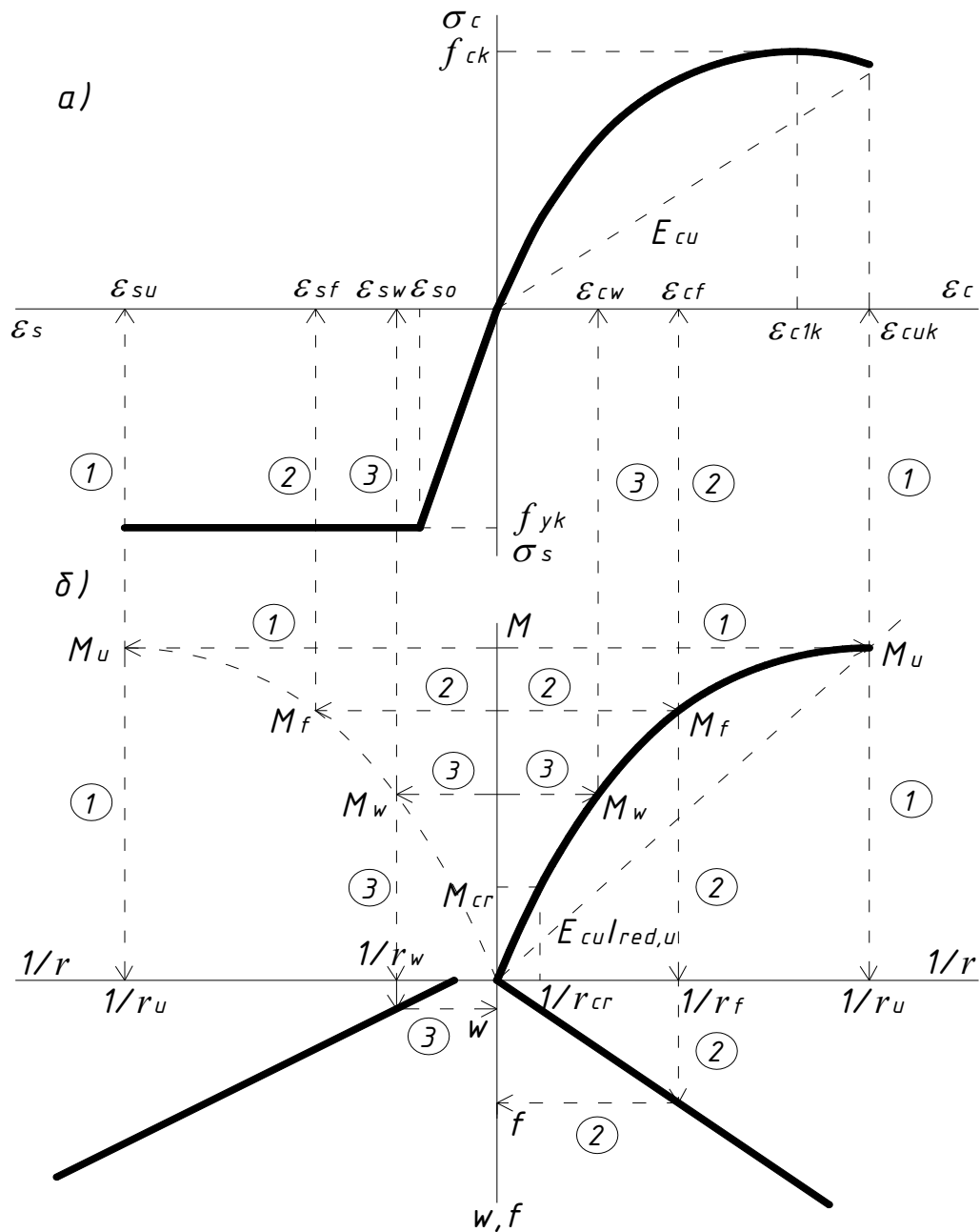


Рисунок 2.27 – Зв'язок діаграм стану матеріалів (а) з діаграмами стану елементів (б) у розрахунках за: 1 - несучою здатністю; 2 – прогинами; 3 – тріщиностійкістю

Завдяки вищенаведеним положенням деформаційно-силової моделі, висвітленим в публікаціях [196-198; 200; 202; 210-213; 223; 225; 226; 231-233; 489; 490], можна сформулювати низку важливих висновків.

## 2.10. Висновки

1. В деформаційно-силовій моделі фізична, геометрична та конструкційна нелінійність процесів деформування бетонних та залізобетонних елементів враховується через інтегральну жорсткість їх осередненого перерізу. Завдяки цьому задачі з врахування градієнтних ефектів, спільності деформацій бетону і арматури, нерозривності функцій кривини в перерізах з тріщинами, що розв'язуються лише в окремих моделях спеціальними прийомами, в деформаційно-силовій моделі вирішуються інтегрально за допомогою діаграм стану самих елементів  $M - 1/r (N - \varepsilon)$ .
2. Узагальнена модель деформування будь-якого залізобетонного елемента не може бути чисто деформаційною або чисто силовою, оскільки повинна бути здатною в однаковій мірі відображати як характер зростання відносних деформацій матеріалів, так і процес постійного перерозподілу напружень між фібрами його перерізу.
3. Перерозподіл напружень між фібрами певного перерізу та перерозподіл зусиль між окремими перерізами залізобетонних елементів конструкцій, що супроводжують процес їх неоднорідного деформування, неможливо повноцінно обґрунтувати та відобразити без використання діаграм стану бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$  та діаграм стану самих елементів  $M - 1/r$ .
4. Трансформація діаграм деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$  з еталонних в розрахункові (діаграми стану) обумовлена особливостями напружено-деформованого стану залізобетонних елементів. Тому в деформаційно-силовій моделі діаграми деформування стиснутого та розтягнутого бетону, що являють собою діаграми стану стандартних зразків за стандартних умов їх випробування, можна отримувати з діаграм стану залізобетонних елементів конструкцій, застосовуючи до них гіпотезу граничної рівноваги та екстремальний критерій несучої здатності  $dM / d(1/r) = 0$ .
5. В деформаційно-силовій моделі стан граничної рівноваги елемента є

вихідним для нормування його граничних станів за несучою здатністю, прогинами (жорсткістю) та тріщиностійкістю. При цьому діаграма стану залізобетонного елемента  $M - 1/r$ , що використовується в розрахунках за граничними станами, може бути характеристичною чи розрахунковою.

6. В теорії деформування залізобетонних елементів та конструкцій слід розрізняти поняття «вичерпання» та «обмеження» несучої здатності. Граничні значення відносних деформацій матеріалів можуть виступати лише критеріями обмеження несучої здатності залізобетонних елементів.
7. В деформаційно-силовій моделі діаграма стану залізобетонного елемента здатна відображати процес його деформування залежно від режиму та характеру завантаження та може бути в однаковій мірі представлена залежностями  $M = f(1/r)$  або  $1/r = f(M)$ .
8. Універсальною може бути така залежність  $M = f(1/r)$ , яка не тільки трансформується в діаграми деформування (стану) бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , але й дозволяє оцінювати загальний напружено-деформований стан будь-яких залізобетонних елементів в нормальному перерізі, що працюють у складі як статично визначених, так і статично невизначених конструкцій та систем.

Матеріали розділу опубліковані в роботах [14; 15; 196-198; 200; 202; 210-213; 223; 225; 226; 231-233; 489; 490].

## РОЗДІЛ 3

# ОСНОВНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ БЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

### 3.1. Загальні положення

Загальновідомо, що характер деформування будь-якого матеріалу в найбільшій мірі залежить від його фізико-механічних властивостей. Якщо говорити про бетон, то процес його деформування в цьому плані вирізняється надзвичайною складністю. І проявляється вищесказане не тільки в особливостях пружно-пластичних властивостей бетону, але й і в доволі значній структурній неоднорідності матеріалу, котра безперервно змінюється в процесі деформування внаслідок інтенсивного мікро- та макроутворення тріщин.

Одною з основних особливостей пропонованої деформаційно-силової моделі є те, що і зміну фізико-механічних властивостей, і зміну внутрішньої структури бетону рекомендується відслідковувати за допомогою січного модуля його деформацій. Зазначений параметр дозволяє враховувати фізичну нелінійність процесу деформування бетону навіть незважаючи на властивий для нього інтегральний характер. Але найважливішим є те, що моделювання процесу деформування бетону за допомогою січного модуля деформацій  $E_{cc}$  дозволяє прямо встановлювати функціональний зв'язок між його напруженнями та деформаціями. Характер подібного зв'язку визначається переважно пластичними деформаціями бетону, котрі в значній мірі залежать від режиму навантаження. Як відомо, останній може бути «м'яким» з ступеневим навантаженням дослідних зразків за сталої швидкості приросту напружень  $d\sigma_c / dt = const$  або ж «жорстким» ступеневим навантаженням зі сталим приростом відносних деформацій  $d\varepsilon_c / dt = const$ . Дійсний же режим навантаження елементів конструкцій в реальних умовах завжди є нестандартним зі змінними швидкостями приросту як напружень, так і

деформацій. Саме за допомогою січного модуля деформацій бетону  $E_{cc}$  можна відобразити всі вищезгадані режими завантаження та змоделювати процес його деформування в цілому за дії короткочасних, довготривалих чи циклічних навантажень (рис. 3.1).

Зміну внутрішньої структури бетону при завантаженні зазвичай досліджують за допомогою ультразвуку та пов'язують з його міцнісними характеристиками [43]. Та все ж швидкість поширення пружної деформації в твердому тілі, структура якого постійно змінюється, а отже і параметричні точки діаграми деформування бетону, що характеризують утворення та розвиток мікротріщин, доцільно було б теж пов'язувати з модулем деформацій бетону. З цієї причини в моделях деформування бетону параметричними точками діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$  повинна відводитись особлива увага. Якщо критичні та граничні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{cl}$  і  $\varepsilon_{cu}$  пов'язуються з повними діаграмами його деформування та точними методиками розрахунку, то деформації, що відповідають рівням тривалої міцності бетону  $\sigma_{cl} / f_c$  чи початку утворення макротріщин  $\sigma_c^v / f_c$ , за використання певних енергетичних критеріїв, можуть слугувати основою для розробки спрощених методів розрахунку.

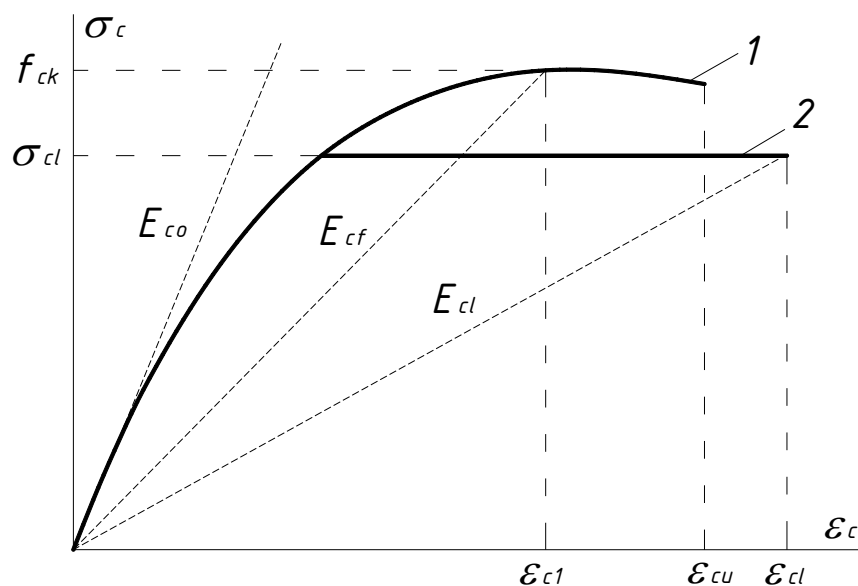


Рисунок 3.1 – Діаграми деформування бетону за дії навантажень:

1 – короткочасних; 2 – довготривалих

Загалом же особливість процесу дослідження властивостей бетону характеризується тим, що в силу багатьох об'єктивних причин навіть стандартні зразки за стандартних умов осевого завантаження зазнають неоднорідного деформування. Дійсний же стан реальних бетонних елементів ускладнюється ще й тим, що до фізичної нелінійності часто додається геометрична і обійтися одним модулем деформацій бетону в цьому випадку вже просто-на-просто неможливо. За подібних обставин мова повинна йти про деяку інтегральну характеристику елемента, в якості якої, перш за все, слід назвати осереднену жорсткість його перерізу.

Разом з тим, осереднена жорсткість перерізу бетонного елемента є одним із тих визначальних параметрів, які необхідно контролювати задля оцінки потенційних можливостей деформування стиснутого бетону. Тому в цій ситуації особливої актуальності в процесах деформування набуває узагальнена діаграма стану елемента  $M - 1/r$  з екстремальним критерієм несучої здатності  $dM / d(1/r) = 0$ .

Все вищесказане в однаковій мірі стосується і розтягнутого бетону з тією лише різницею, що він є менш пластичним матеріалом порівняно зі стиснутим бетоном. Крім того, потенційні можливості деформування розтягнутого бетону, на відміну від стиснутого, доцільніше пов'язувати з діаграмою стану  $N - \varepsilon_{ct}$  та екстремальним критерієм міцності  $dN / d\varepsilon_{ct} = 0$ .

## **3.2. Деформування центрально стиснутих елементів**

### **3.2.1. Жорсткість бетонних елементів**

Вище уже зазначалося (пп. 2.7, 2.8), що процес деформування будь-якого бетонного чи залізобетонного елемента, в першу чергу, слід пов'язувати зі зміною його жорсткості. Шляхом простих перетворень загальний вираз жорсткості (2.7) для центрально стиснутого бетонного елемента (рис.3.2) приведемо до вигляду

$$N/\varepsilon_c = D = E_{cc} A_c, \quad (3.1)$$

де  $E_{cc}$  – січний модуль деформацій бетону за осьового стиску;

$A_c$  – площа поперечного перерізу бетонного елемента.

Нескладно помітити, що початкова жорсткість зазначеного елемента  $D_{co} = E_{co} \cdot A_c$  може зменшуватися до граничної величини  $D_{cf} = E_{cf} \cdot A_c$  (рис. 3.2) лише за рахунок деформативних властивостей бетону, оскільки геометричні характеристики перерізу залишаються практично незмінними. Інакше кажучи, зміна жорсткості бетонного перерізу неармованих елементів за осьового стиску визначатиметься модулем деформацій бетону.

Ймовірно, що саме зазначений факт та результати досліджень [149] лягли в основу пропозицій [9] оцінювати зміну жорсткості стиснутих бетонних елементів лінійною залежністю

$$N/\varepsilon_c = A - C \cdot N/N_u. \quad (3.2)$$

де  $A$  і  $C$  – параметри, якими відображаються міцнісні, деформаційні та геометричні характеристики бетонного елемента;

$N/N_u$  – рівень завантаження стиснутого бетонного елемента.

Однак для моделювання процесу деформування бетону ці пропозиції є недостатніми з наступних міркувань. По-перше, функція січного модуля деформацій бетону  $E_{cc} - \sigma_c$  отримана Л. П. Макаренком і Г. А. Фенком [149] на основі обробки результатів випробування бетонних зразків за сталих режимів завантаження ( $d\sigma_c/dt = 0$ ). При цьому, достовірність лінійного зв'язку між величинами  $E_{cc}$  та  $\sigma_c$  підтверджена результатами численних експериментальних досліджень переважно тільки в межах напружень  $0,2f_{ck} (0,3f_{ck}) \leq \sigma_c \leq 0,8f_{ck} (0,9f_{ck})$ . За вказаними межами нелінійність зв'язку між  $E_{cc}$  та  $\sigma_c$  стає доволі помітною і з віддаленням від них посилюється. Зауважимо, що для такої поведінки січного модуля деформацій бетону існує чітке фізичне обґрунтування. По-друге, лінійна залежність  $E_{cc} - \sigma_c$  не може відобразити можливість роботи бетону за сталих режимів



деформування ( $d\varepsilon_c/dt = 0$ ) або, інакше кажучи, взагалі спростовує здатність бетону деформуватися на низхідній вітці. І по-третє, чи не найголовніше. В реальних умовах роботи лінійність зв'язку між  $E_{cc}$  та  $\sigma_c$  буде порушуватися ще в більшій мірі, оскільки режими завантаження ( $N/N_u$ ) та деформування бетону ( $\varepsilon_c/\varepsilon_{c1}$ ) в дійсності не залишаються сталими [207; 209; 221]. І це, так чи інакше, повинно бути враховано при побудові узагальненої моделі деформування залізобетонних елементів конструкцій.

Підсумовуючи сказане та ставлячи за мету усунення вищевказаних неузгодженостей лінійної залежності  $E_{cc} - \sigma_c$ , зміну жорсткості перерізу центрально стиснутого бетонного елемента (рис.3.3) моделюватимемо функцією

$$N/\varepsilon_c = A - B \cdot \varepsilon_c/\varepsilon_{c1} - C \cdot N/N_u, \quad (3.3)$$

де  $A, B, C$  – параметри, що відображають міцнісні, деформаційні та геометричні характеристики бетонного стержня;

$\varepsilon_c/\varepsilon_{c1}$  – рівень деформування стиснутого бетонного елемента.

Таким чином, виходячи з аналізу напружено-деформованого стану бетонних елементів, що зазнають однорідного (осьового) стиску, можна сформулювати одну із основних та визначальних гіпотез узагальненої моделі їх деформування: жорсткість перерізу бетонного елемента навіть під дією короткочасного навантаження змінюється нелінійно як відносно рівня його завантаження  $N/N_u$ , так і відносно рівня деформування елемента  $\varepsilon_c/\varepsilon_{c1}$ .

### 3.2.2. Модуль деформацій бетону

При вирішенні практичних задач, пов'язаних з оцінкою жорсткості бетонного перерізу найчастіше використовують січний модуль деформацій бетону. Аналітична залежність для його визначення була запропонована Л. П. Макаренком і Г. А. Фенком [149] у вигляді наступної функції

$$E_{cc} = E_{co} - (E_{co} - E_{cf}) \cdot \eta_c, \quad (3.4)$$

де  $E_{co}$  – початковий модуль пружності бетону;

$E_{cf}$  – модуль деформацій бетону за критичних напружень  $\sigma_c = f_{ck}$ ;

$\eta_c$  – рівень напружень в бетоні.

Як уже зазначалось вище, достовірність лінійної залежності (3.4) підтверджена результатами численних експериментальних досліджень. В той же час, багатьма дослідниками помічено, що початкові експериментальні точки за рівнів напружень в бетоні  $\eta_c < 0,1 \dots 0,2(0,3)$  явно відхиляються від зазначеної функції, знаходячись нижче неї. Те ж саме стосується і прикінцевих дослідних точок за рівнів напружень  $\eta_c > (0,7) 0,8 \dots 0,9$ .

Зазначені відхилення пояснюються багатьма дослідниками, в тому числі і авторами залежності (3.4), наступним чином: за дуже низьких рівнів напружень, при малих деформаціях бетону та неминучих об'єктивних похибках вимірювальних приладів, результати експериментальних досліджень наділені високим рівнем випадковості; за високих рівнів напружень, при стрімкому зростанні деформацій бетону, суб'єктивний фактор в оцінці деформаційних властивостей бетону різко посилюється, а тому до прикінцевих точок діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$  необхідно відноситись дуже і дуже обережно. Абсолютно заперечувати такі твердження не варто, але й повністю погоджуватися з ними теж неможливо.

Спробуємо проаналізувати та встановити реальні причини відхилень між дослідними і теоретичними значеннями січного модуля деформацій бетону за вищезгаданих рівнів напружень. З прийняттям функції (3.4) автоматично встановлюється лінійний зв'язок між рівнем пластичних деформацій бетону  $\varepsilon_{cpl} / \varepsilon_c$  та рівнем напружень

$$\varepsilon_{cpl} / \varepsilon_c = (1 - E_{cf} / E_{co}) \cdot \eta_c. \quad (3.5)$$

Це означає, що з кожним ступенем рівномірного завантаження рівень пластичних деформацій і січний модуль деформацій бетону змінюються однаково (рис. 3.4). З цим дуже важко погодитись, якщо розглядати деформування бетону, починаючи з самих низьких рівнів напружень. При

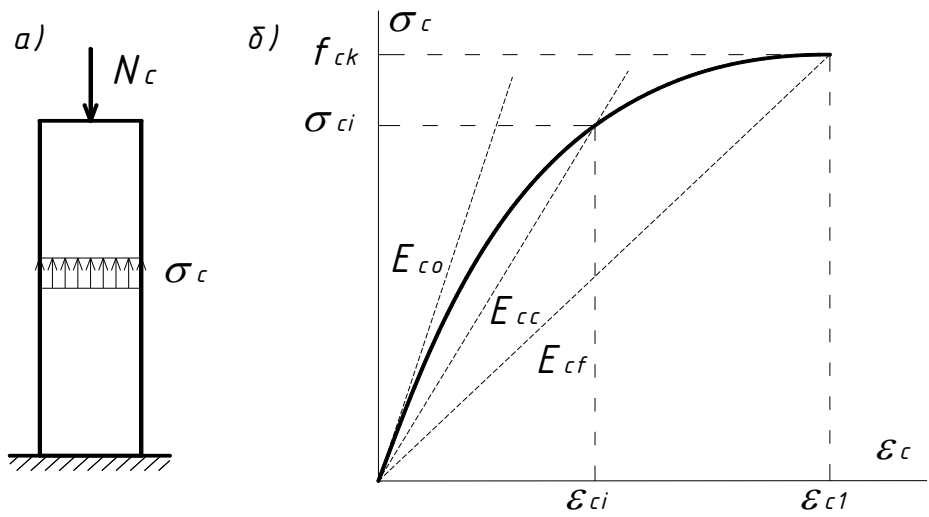


Рисунок 3.2 – Напружено-деформований стан бетонного елемента за осьового стиску: *a* – схема зусиль; *б* – діаграма деформування  $\sigma_c - \epsilon_c$

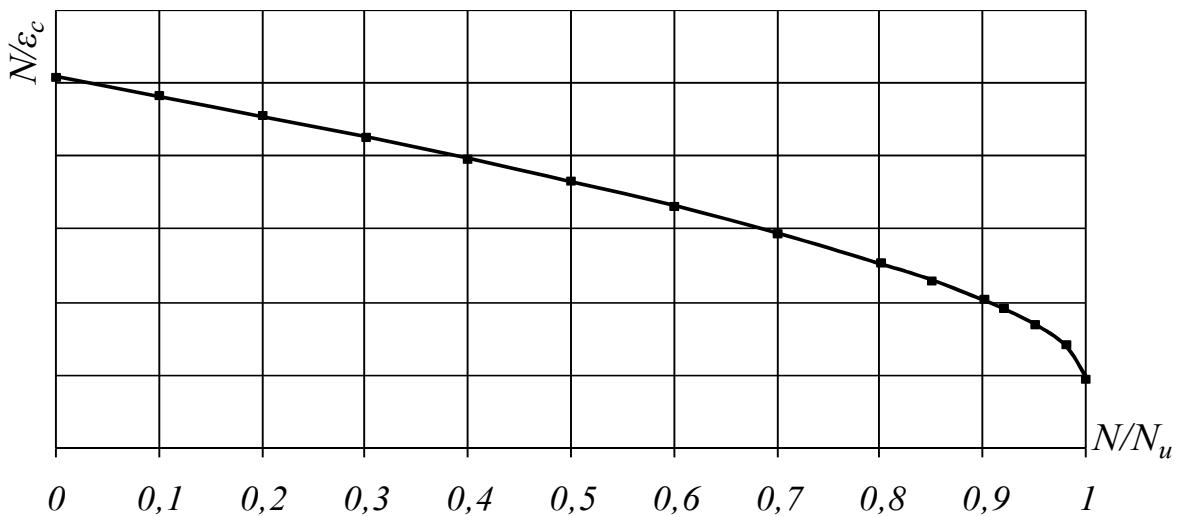


Рисунок 3.3 – Характер зміни жорсткості перерізу центрально стиснутого бетонного елемента

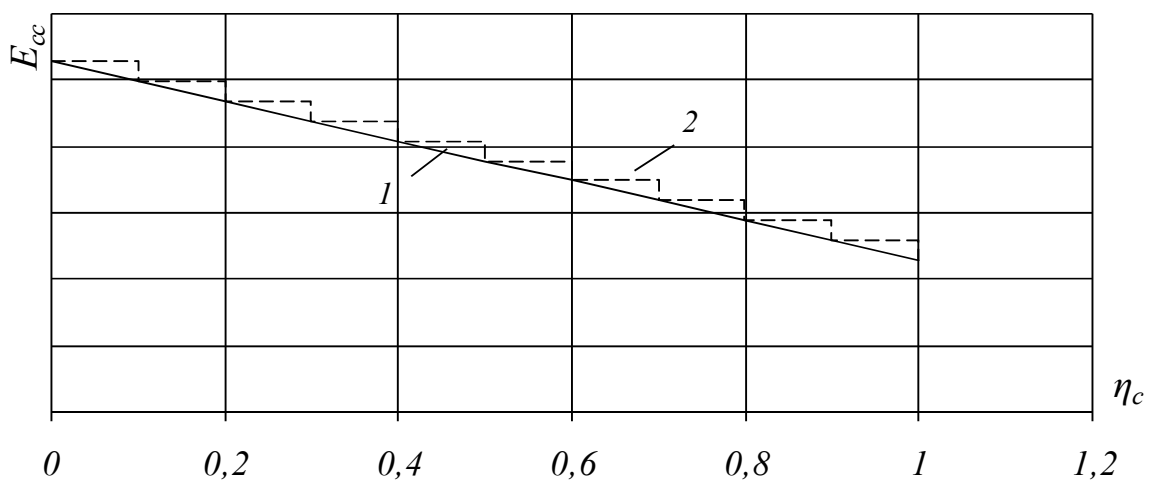


Рисунок 3.4 – Характер зміни січного модуля деформацій бетону за функцією (3.4) при завантаженні: *1* – безперервному; *2* – ступінчастому

$\eta_c < 0,1 \dots 0,2(0,3)$  пластичні деформації проявляються дуже слабо, а отже інтенсивність зміни модуля деформацій бетону тут буде відносно найнижчою. Саме тому початкові точки діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$  не знаходять узгодження з функцією (3.4). Подібна ситуація складається з деформуванням бетону і за високих рівнів напружень. При навантаженнях  $\eta_c > (0,7)0,8 \dots 0,9$  інтенсивність розвитку пластичних деформацій бетону помітно зростає, стаючи лавиноподібною в момент близький до руйнування. Цілком очевидно, що за таких обставин прикінцеві точки діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$  теж не будуть ув'язуватися з вищезгаданою лінійною залежністю  $E_{cc} - \eta_c$ .

Таким чином, лінійна залежність січного модуля деформацій бетону (3.4) не може в повній мірі описати процес деформування бетону в центрально стиснутому елементі від самого початку його завантаження аж до моменту руйнування. Тому в узагальненій моделі деформування зв'язок січного модуля деформацій бетону з рівнем напружень  $E_{cc} - \eta_c$ , все ж таки, повинен описуватися іншою функцією.

Функція січного модуля деформацій бетону, що лінійно залежить тільки від рівня деформування  $\eta_\varepsilon = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$

$$E_{cc} = E_{co} - (E_{co} - E_{cf}) \cdot \eta_\varepsilon, \quad (3.6)$$

теж є неприйнятною, оскільки дає серйозні розбіжності з результатами експериментальних досліджень. Зокрема, залежність (3.6) суттєво знижує деформації бетону за експлуатаційних рівнів навантажень та значно обмежує критичні значення модуля деформацій бетону величиною  $E_{cf} = E_{co} / 2$ . Нею не можна врахувати й те, що одного і того ж рівня деформування бетону можна досягти за різних рівнів напружень та навпаки.

Щоб уникнути більшості із зазначених недоліків, зв'яжемо січний модуль деформацій бетону не тільки з рівнем завантаження чи напружень ( $N/N_u = \sigma_c / f_{ck}$ ), але й з рівнем деформування ( $\varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$ ) та представимо його за функцією жорсткості (3.3) у вигляді [197; 204-206, 227]

$$E_{cc} = a - b_1 \cdot \varepsilon_c / \varepsilon_{c1} - c_1 \cdot \sigma_c / f_{ck}, \quad (3.7)$$

де  $a = A/A_c$ ,  $b_1 = B/A_c$ ,  $c_1 = C/A_c$  – параметри, що відображають міцнісні та деформаційні характеристики стиснутого бетону з площею перерізу  $A_c$ .

Оскільки січний модуль деформацій бетону визначає функціональний зв'язок між його напруженнями та деформаціями, то з урахуванням певних перетворень запропонований вираз (3.7) відтворить цей зв'язок наступною неправильною дробово-раціональною функцією

$$\sigma_c = \frac{a \cdot \varepsilon_c - b_1 \cdot \varepsilon_c^2 / \varepsilon_{c1}}{1 + c_1 \cdot \varepsilon_c / f_{ck}} = \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c}. \quad (3.8)$$

Для визначення параметрів  $a$ ,  $b$  і  $c$  застосуємо до виразу (3.8) наступні граничні умови: а) при  $\varepsilon_c = 0$   $d\sigma_c/d\varepsilon_c = E_{co}$ ; б) при  $\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}$   $d\sigma_c/d\varepsilon_c = 0$ ; в) при  $\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}$   $\sigma_c = f_{ck}$ .

З розв'язку отриманої системи рівнянь встановлено, що

$$a = E_{co}; \quad b = b_1 / \varepsilon_{c1} = f_{ck} / \varepsilon_{c1}^2; \quad c = c_1 / f_{ck} = E_{co} / f_{ck} - 2 / \varepsilon_{c1}. \quad (3.9)$$

Підстановка параметрів  $a$ ,  $b$  і  $c$  у формулу (3.7) надасть залежності модуля деформацій бетону наступного вигляду

$$E_{cc} = E_{co} - (E_{co} - E_{cf}) \cdot \eta_c + E_{cf} \cdot (\eta_c - \eta_\varepsilon). \quad (3.10)$$

Щоб виявити реальний характер функції січного модуля деформацій бетону, побудуємо графіки виду  $E_{cc} - \eta_c$  за вищенаведеними формулами (3.4), (3.6), (3.10) та порівняємо їх з результатами експериментальних досліджень, опублікованими в роботах [149; 534]. З рис. 3.5, 3.6 і 3.7 видно, що за рівнів напружень  $\eta_c \approx 0,2 \dots 0,8$  графіки залежностей (3.4) та (3.10) майже в однаковій мірі наближені до експериментальних даних як при безперервному, так і при ступінчастому завантаженнях.

Однак за дуже низьких та дуже високих рівнів напружень ступінь наближення експериментальних даних до графіків функції (3.10) суттєво зростає порівняно з (3.4), підвищуючи точність першої загалом (табл. 3.1). Залежність (3.10) відрізняється від (3.4) наявністю третього доданка, пов'язаного з рівнем деформування бетону  $\eta_\varepsilon$ . Контроль за цим рівнем в

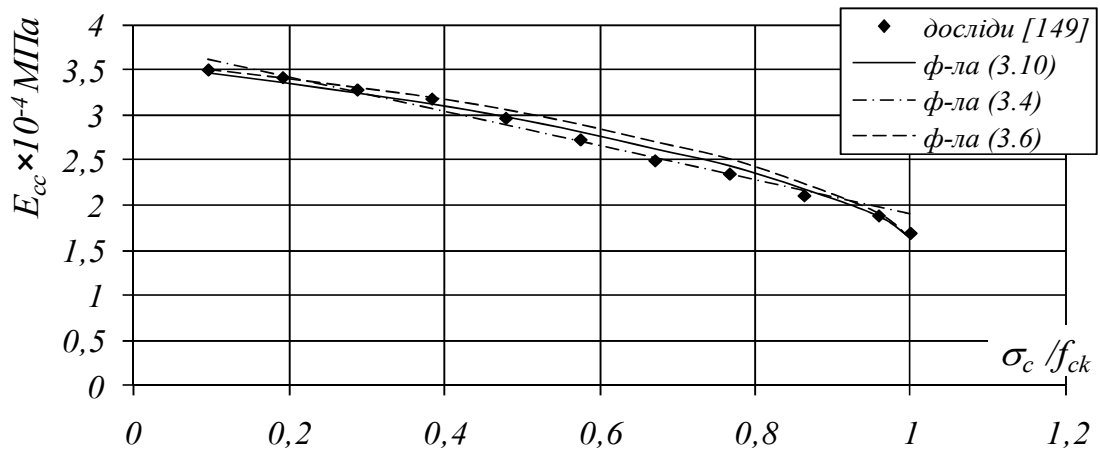


Рисунок 3.5 – Відповідність теоретичних значень січного модуля деформацій бетону дослідним даним Л.П. Макаренка і Г.А. Фенка [149] за високих швидкостей завантаження

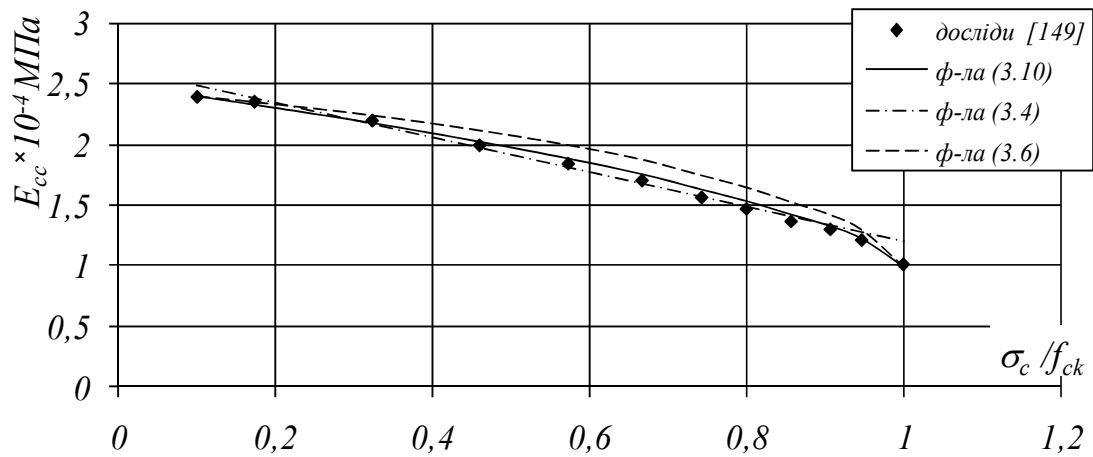


Рисунок 3.6 – Відповідність теоретичних значень січного модуля деформацій бетону дослідним даним Л. П. Макаренка і Г. А. Фенка [149] за ступінчастого завантаження

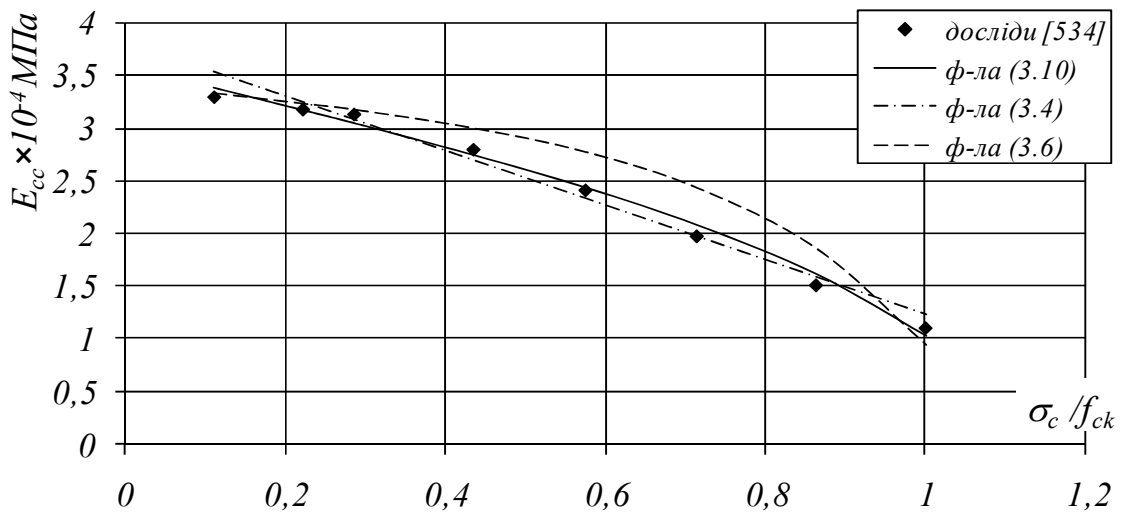


Рисунок 3.7 – Відповідність теоретичних значень січного модуля деформацій бетону дослідним даним L. G. Tulin [534]

Таблиця 3.1 – До статистичної оцінки різних залежностей з визначення січного модуля деформацій бетону  $E_{cc}$

Вид залежності $E_{cc} - \eta_c(\eta_\varepsilon)$	Позначення	Відхилення від експериментальних даних, %		
		Макаренка Л. П. [149], 19 зразків	Tulin L. G. [534], 12 зразків	Загальні
Лінійна $E_{cc} - \eta_c$ , формула (3.4)	$\Delta_{\varepsilon, \min}$	-12,94	-18,63	-18,63
	$\Delta_{\varepsilon, \max}$	3,81	1,77	3,81
	$\Delta_\varepsilon$	-2,06	-2,47	<b>-2,22</b>
	$\sigma_\varepsilon$	5,21	6,15	<b>5,49</b>
Лінійна $E_{cc} - \eta_\varepsilon$ , формула (3.6)	$\Delta_{\varepsilon, \min}$	-23,76	-12,00	-23,76
	$\Delta_{\varepsilon, \max}$	13,64	1,96	13,64
	$\Delta_\varepsilon$	-4,89	-6,34	<b>-5,45</b>
	$\sigma_\varepsilon$	10,08	8,31	<b>9,29</b>
Нелінійна $E_{cc} - \eta_c(\eta_\varepsilon)$ , формула (3.10)	$\Delta_{\varepsilon, \min}$	-6,84	-3,90	-6,84
	$\Delta_{\varepsilon, \max}$	7,28	2,94	7,28
	$\Delta_\varepsilon$	-0,69	-1,20	<b>-0,88</b>
	$\sigma_\varepsilon$	3,59	2,51	<b>3,17</b>
Примітки: в таблиці $\Delta_{\varepsilon, \min}$ та $\Delta_{\varepsilon, \max}$ – нижня та верхня межі відхилень від дослідних даних, а $\Delta_\varepsilon$ і $\sigma_\varepsilon$ – середньоарифметичні та стандартні значення цих відхилень.				

більшості заводських лабораторій є надто проблематичним або просто неможливим. Щоб уникнути зазначеного контролю, визначимо з формули (3.7) рівень деформування бетону  $\eta_\varepsilon$  та підставимо його в (3.10). Тоді залежність січного модуля деформацій бетону прийме остаточний вигляд

$$E_{cc} = \frac{E_{co}}{2}(1 - \eta_c) + E_{cf}\eta_c \pm \sqrt{\left(\frac{E_{co}}{2}(1 - \eta_c) + E_{cf}\eta_c\right)^2 - E_{co}^2\eta_c}. \quad (3.11)$$

Варто наголосити, що функція (3.11) загалом наділена всіма тими ж можливостями, що і залежність (3.4):

- початковий модуль пружності бетону  $E_{co}$  не залежить від швидкості його завантаження;
- за будь-якими трьома експериментальними точками можна побудувати графік залежності  $E_{cc} - \eta_c$  та спрогнозувати як початковий модуль пружності  $E_{co}$ , так і критичне значення модуля деформацій бетону  $E_{cf}$ ;
- сукупності графіків  $E_{cc} - \eta_c$  за різних швидкостей завантаження утворюють так звані «віялові» діаграми [149] січного модуля деформацій бетону (рис. 3.8).

До речі, аналіз віялових діаграм наглядно показує, що з переходом до жорсткого режиму плавного чи ступінчастого завантаження викривлення (нелінійність) функції  $E_{cc} - \eta_c$  ще в більшій мірі посилюється (рис. 3.9).

Зупинимось ще на одному надзвичайно важливому моменті. З аналізу графіків вищенаведених функцій січного модуля деформацій бетону (рис. 3.5, 3.6 і 3.7) видно, що залежність (3.4) в окремих випадках суттєво завищує величину початкового модуля пружності бетону  $E_{co}$ . Тому нормативні рекомендації [123] щодо визначення модуля пружності бетону  $E_{cm}$  за рівня напружень  $\eta_c = 0,3$  можна вважати в певній мірі виправданими. Більш точно величину початкового модуля пружності бетону можна обчислити з формули (3.11), перетворивши її до вигляду

$$E_{co} = \frac{(E_{cc})^2 - E_{cf} \cdot \eta_c \cdot (2 \cdot E_{cc} - E_{cf})}{E_{cc} \cdot (1 - \eta_c)}. \quad (3.12)$$

Так само можна спрогнозувати і критичне значення січного модуля деформацій бетону  $E_{cf}$ , якщо залежність (3.11) після певних перетворень представити в наступному вигляді

$$E_{cf} = E_{cc} \cdot \left(1 - \sqrt{1 + \left(\frac{E_{co}}{E_{cc}} \cdot (1 - \eta_c) - 1\right) / \eta_c}\right). \quad (3.13)$$



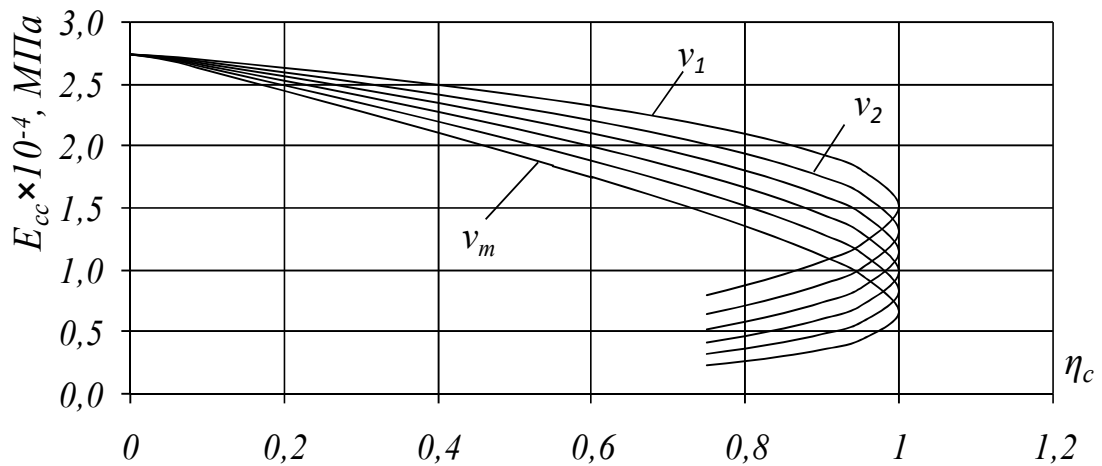


Рисунок 3.8 – Характер зміни січного модуля деформацій бетонну за функцією (3.11) при різних швидкостях завантаження ( $v_1 > v_2 > \dots > v_m$ )

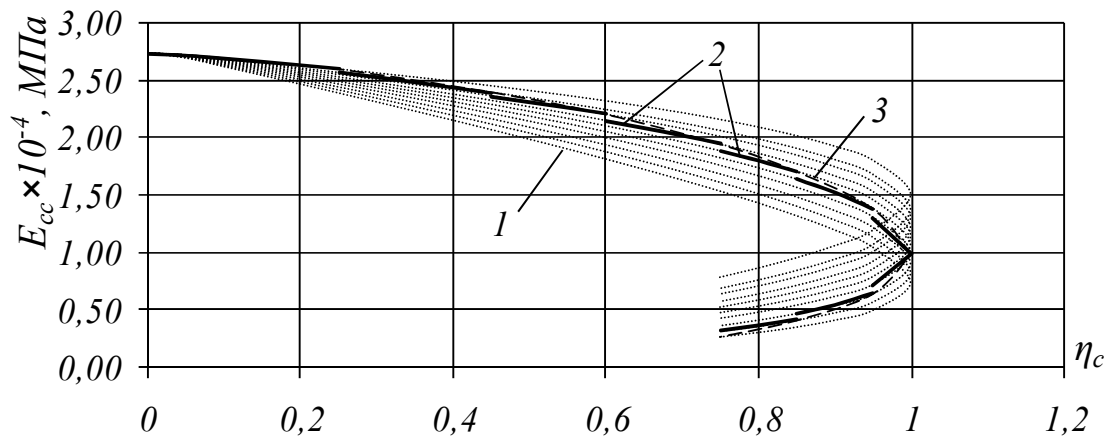


Рисунок 3.9 – Характер зміни січного модуля деформацій бетонну за: 1 – сталих режимів м'якого завантаження; 2 – жорсткого ступінчастого завантаження; 3 – жорсткого безперервного завантаження

Важливість знання початкового модуля пружності бетону обумовлена запровадженням у розрахунках залізобетонних елементів конструкцій деформаційних моделей. В окремих нормах [123; 382] початковий модуль пружності бетону  $E_{co}$  рекомендується визначати шляхом 5-ти відсоткового підвищення середнього (унормованого) значення модуля пружності бетону  $E_{cm}$ . Однак, зважаючи, що бетони різних класів мають різні пружно-пластичні властивості, такий прийом не можна визнати коректним. Проведені дослідження та відповідні розрахунки показують (табл. 3.2), що

Таблиця 3.2 – Залежність між середніми (нормованими)  $E_{cm}$  та початковими  $E_{co}$  значеннями модуля пружності бетону

Клас бетону	$f_{ck,prism}$ , МПа	$E_{cm}$ , МПа	$E_{co}$ , МПа	$k_o = \frac{E_{co}}{E_{cm}}$	$E_{co}^m$ , МПа	$k_m = \frac{E_{co}^m}{E_{cm}}$	$\frac{E_{co}^m}{E_{co}}$
1	2	3	4	5	6	7	8
C8/10	7,5	18140	22602	1,246	23216	1,280	1,027
C12/15	11	22880	28051	1,226	28908	1,263	1,031
C16/20	15	26897	32383	1,204	33518	1,246	1,035
C20/25	18,5	29600	35135	1,187	36473	1,232	1,038
C25/30	22	31778	37244	1,172	38741	1,219	1,040
C30/35	25,5	33570	38874	1,158	40514	1,207	1,042
C32/40	29	35070	40155	1,145	41920	1,195	1,044
C35/45	32	36174	41021	1,134	42903	1,186	1,045
C40/50	36	37440	42008	1,122	43966	1,174	1,047
C45/55	39,5	38393	42692	1,112	44714	1,165	1,048
C50/60	43	39228	43229	1,102	45330	1,156	1,048
C53/65	46,5	39967	43724	1,094	45838	1,147	1,048
C56/70	50	40625	44119	1,086	46260	1,139	1,048
C60/75	54	41294	44515	1,078	46657	1,130	1,048
C65/80	57,5	41818	44787	1,071	46942	1,123	1,048
C70/85	61	42293	45042	1,065	47180	1,116	1,047
C75/90	65	42785	45309	1,059	47405	1,108	1,046
C80/95	68	43122	45451	1,054	47546	1,103	1,046
C85/100	72	43535	45668	1,049	47702	1,096	1,044
C90/105	75,5	43866	45840	1,045	47814	1,090	1,043
C95/110	79	44172	45983	1,041	47906	1,085	1,042
C100/115	83	44495	46141	1,037	47993	1,079	1,041
C105/120	86	44720	46240	1,034	48045	1,074	1,039
Середні значення коефіцієнтів				1,074		1,123	1,046

співвідношення між початковим та нормативним модулями пружності бетону суттєво залежать від класу бетону і коливаються в межах  $k_o = 1,034...1,246$  (за середнього значення  $k_o = 1,074$ ). Крім того було встановлено, що лінійна залежність модуля деформацій (3.4) завищує величину початкового модуля пружності бетону в середньому на 4,6% ( $E_{co}^m / E_{co} = 1,046$ ) [193; 197].

Необхідно зазначити, що функціям (3.10) і (3.11) властиві декілька особливих можливостей, які можна віднести до їх основних переваг у порівнянні з іншими залежностями. Перша з них полягає в тому, що формула Макаренка-Фенка (3.4) виключає саму можливість існування низхідної вітки деформування бетону, а тому її використання для моделювання процесу деформування бетону в армованих [9] або відцентрово стиснутих елементах видається мало виправданою. Залежність (3.11) не тільки допускає можливість існування вищезазначеної вітки, але й дозволяє обчислювати значення січного модуля деформацій бетону на всьому діапазоні його деформування: від початку завантаження аж до руйнування. Для цього, при визначенні модуля деформацій бетону за його роботи на висхідній вітці діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$  у формулу (3.11) необхідно підставляти знак (+), а на низхідній вітці – знак (-).

Наступна характерна особливість отриманих залежностей пов'язана з деформуванням бетону за дії довготривалих та багатократно повторюваних навантажень (рис.3.10). Описати процес повзучості бетону за допомогою функції (3.4) практично неможливо. В той же час, залежність (3.10) дозволяє відтворювати зміну січного модуля деформацій бетону за сталої або циклічної дії напружень певного рівня  $\eta_c$  через зростання рівня деформацій бетону  $\eta_\varepsilon$  (рис.3.11).

Повні деформації бетону за дії тривалого або малоциклового навантаження можна представити у вигляді

$$\varepsilon_{cl} = \varepsilon_c + \Sigma \varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cel} + \varepsilon_{cpl} + \Sigma \varepsilon_{cc}, \quad (3.14)$$

де  $\varepsilon_{cel}$  – пружні деформації бетону;

$\varepsilon_{cpl}$  – пластичні деформації бетону за швидкоплинної повзучості;

$\Sigma\varepsilon_{cc}$  – деформації повзучості бетону за тривалої чи малоциклової дії навантаження.

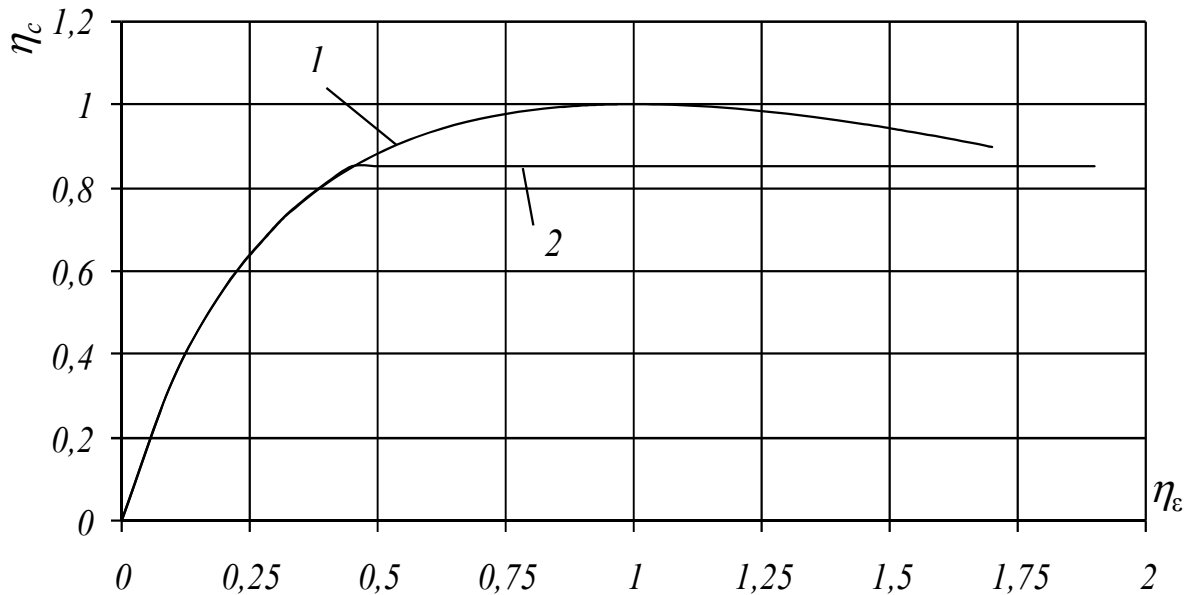


Рисунок 3.10 – Характер діаграми деформування бетону в умовах завантаження: 1 – короткочасного; 2 – довготривалого

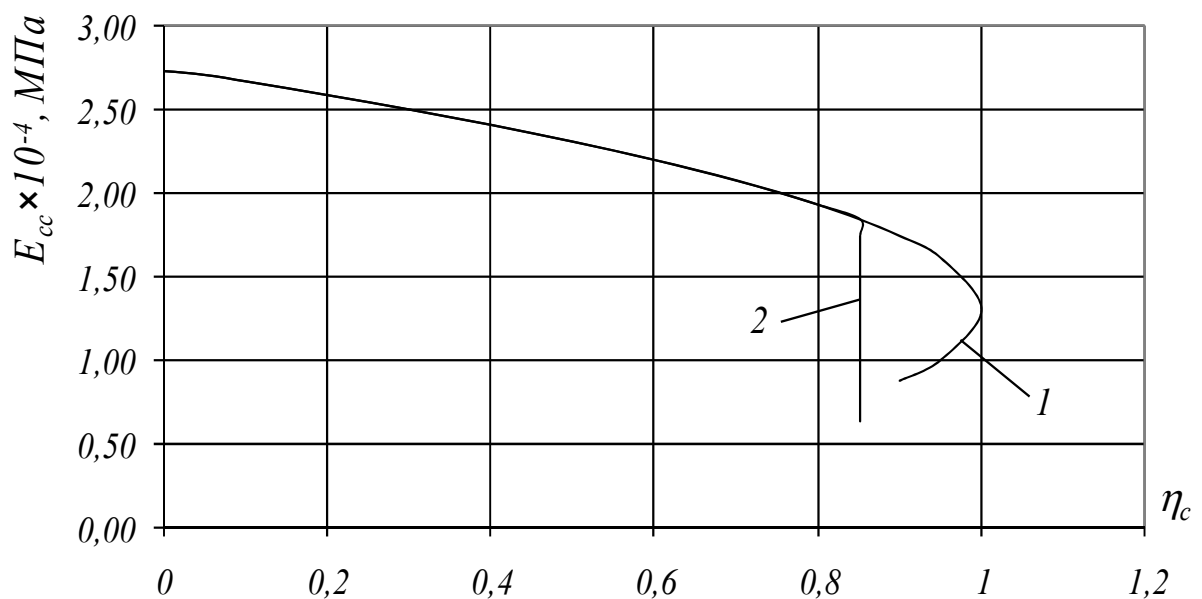


Рисунок 3.11 – Характер зміни січного модуля деформацій бетону за функцією (3.11) при завантаженні: 1 – короткочасному; 2 – довготривалому

Оскільки для модуля деформацій бетону з його визначення маємо

$$E_{cc} = \eta_c \cdot f_{ck} / (\varepsilon_{cel} + \varepsilon_{cpl}), \quad (3.15)$$

то за тривалої чи малоциклової дії навантаження січний модуль деформацій бетону можна знаходити за формулою [191]

$$E_{cl} = E_{cc} / (1 + \Sigma \varepsilon_{cc} / \varepsilon_c). \quad (3.16)$$

Якщо врахувати, що відносні деформації за короткочасного навантаження можна обчислювати за виразом

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_{cl}}{2} \left[ (k \cdot (1 - \eta_c) + 2 \cdot \eta_c) - \sqrt{(k \cdot (1 - \eta_c) + 2 \cdot \eta_c)^2 - 4 \cdot \eta_c} \right], \quad (3.17)$$

то формула (3.16) з урахуванням (3.11) і (3.17) прийме остаточний вигляд

$$E_{cl} = \frac{E_{co} \cdot \eta_c}{\frac{k}{2} \left[ (k \cdot (1 - \eta_c) + 2 \cdot \eta_c) - \sqrt{(k \cdot (1 - \eta_c) + 2 \cdot \eta_c)^2 - 4 \cdot \eta_c} + \eta_{\varepsilon} \right]}, \quad (3.18)$$

де  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{cl} / f_{ck}$  – характеристика деформативності бетону;

$\eta_{\varepsilon} = \Sigma \varepsilon_{cc} / \varepsilon_{cl}$  – рівень деформацій повзучості.

З формули (3.18) видно, що січний модуль деформацій бетону за тривалої чи малоциклової дії навантаження падає за рахунок зростання деформацій повзучості. Тому, одним із основних завдань для дослідників, що вивчають роботу бетону за дії вищевказаних навантажень [12; 26; 75; 76], може бути встановлення зв'язку між рівнем деформування (повзучості) бетону  $\eta_{\varepsilon}$  та модулем його деформацій  $E_{cl}$ . Саме це, вимагає детального дослідження впливу вищезгаданих факторів (верхнього рівня завантаження  $\eta_{c,max}$ , коефіцієнта асиметрії  $\rho$ , кількості циклів завантаження  $n$  тощо) на зростання рівня повзучості та зміну січного модуля деформацій бетону.

Задля перевірки вищесказаного були проаналізовані результати експериментальних досліджень бетонних призм за різних режимів прикладання малоциклових навантажень [76]. Наявність нелінійного зв'язку між січним модулем деформацій бетону та рівнем напружень була підтверджена для всіх призм, випробуваних за наступних рівнів завантаження:  $\sigma_c = (0,3...0,6)f_{ck}$ ;  $\sigma_c = (0,3...0,8)f_{ck}$  та  $\sigma_c = (0,3...0,6...0,8)f_{ck}$ . Як видно з рис.

3.12, 3.13 та 3.14, ця нелінійність проявляється як за відносно високих, так і за відносно низьких рівнів навантаження або напружень в бетоні.

Таким чином, все вищесказане дає змогу сформулювати ряд основних висновків та наступних гіпотез:

- січний модуль деформацій бетону  $E_{cc}$  змінюється під дією короткочасного, тривалого чи малоциклового навантаження нелінійно;
- січний модуль деформацій бетону є залежним як від рівня напружень в ньому  $\eta_c = \sigma_c / f_{ck}$ , так і від рівня його деформування  $\eta_\varepsilon = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$ ;
- зміна січного модуля деформацій бетону під дією тривалого чи малоциклового навантаження відбувається внаслідок накопичення деформацій повзучості;
- функція січного модуля деформацій бетону в цілому повинна відображати процеси, пов'язані з його повзучістю за дії короткочасних, тривалих чи багатократно повторюваних навантажень;
- початковий модуль пружності бетону  $E_{co}$  є незмінюваною величиною і змінюватися під дією короткочасного, тривалого чи малоциклового навантаження не може.

### 3.2.3. Діаграма стану бетону

#### 3.2.3.1. Еталонна та режимні діаграми стану бетону

В сучасній теорії бетону та залізобетону поширеними є терміни «еталонна» та «трансформовані» діаграми стану бетону. Не вдаючись до дискусії щодо суті та назви останніх, слід зазначити, що будь-які діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , перш за все, є режимними. Стандартні умови випробування еталонних (стандартних) зразків забезпечують отримання еталонних діаграм стану бетону або просто діаграм деформування бетону. Зміна умов (режиму) випробування дослідних зразків вносить відповідні зміни в процес їх деформування.

Виникає питання: як ці зміни відображаються на діаграмі стану бетону?

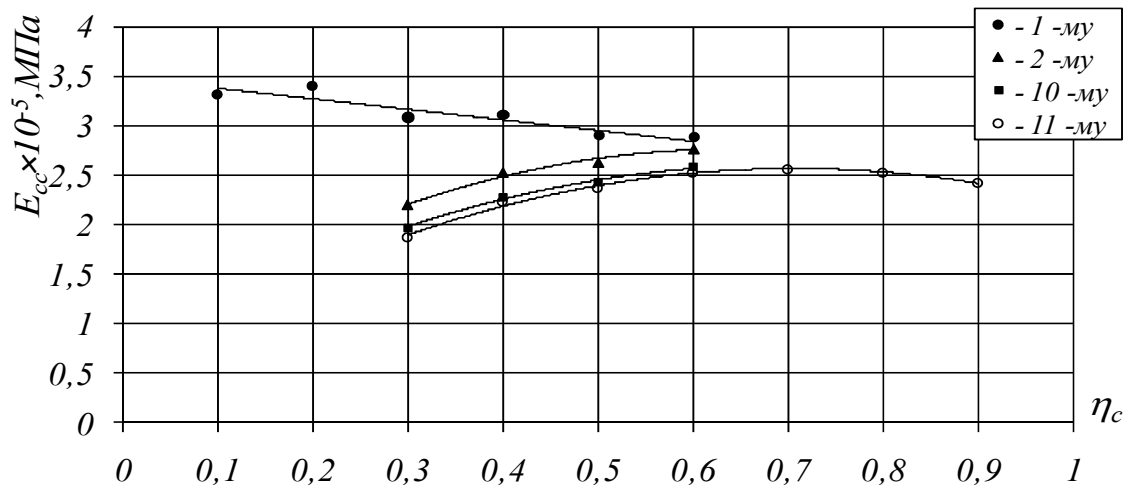


Рисунок 3.12 – Зміна січного модуля деформацій бетону за рівнів напружень (0,3...0,6) $f_{ck}$  в циклах

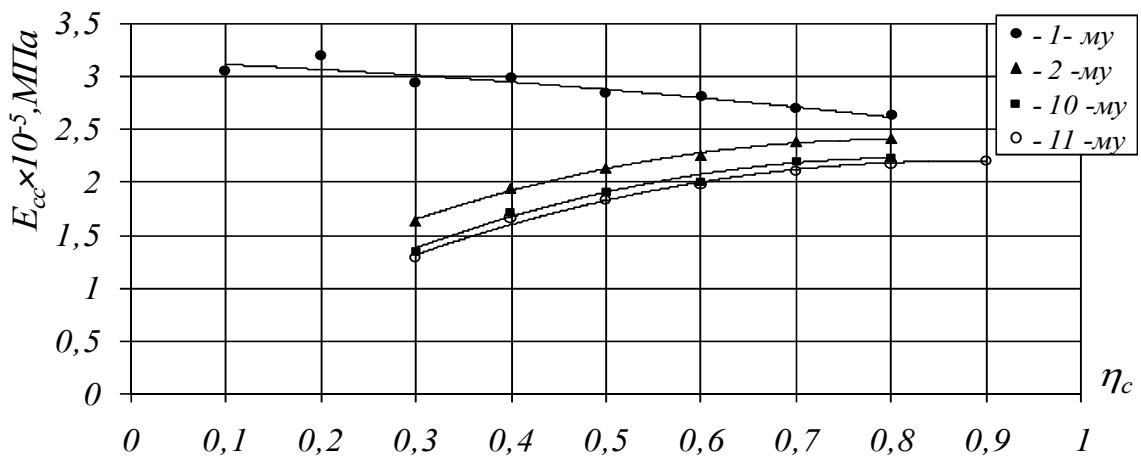


Рисунок 3.13 – Зміна січного модуля деформацій бетону за рівнів напружень (0,3...0,8) $f_{ck}$  в циклах

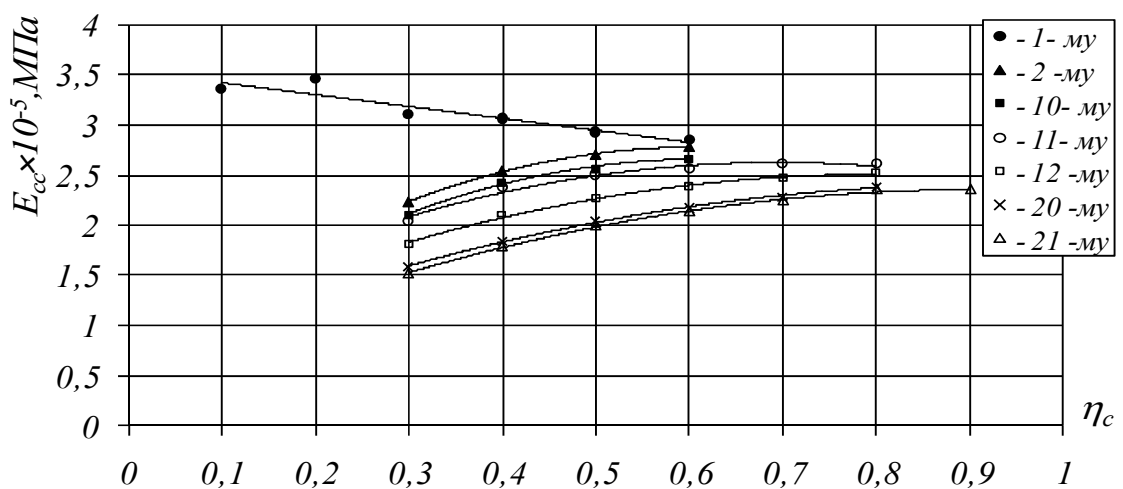


Рисунок 3.14 – Зміна січного модуля деформацій бетону за рівнів напружень в циклах (0,3...0,6...0,8) $f_{ck}$

Відповідь на це запитання може бути знайдена при застосуванні до вказаної діаграми принципів єдності та спадкоємності рішень. Відповідно до цих принципів, форма функції  $\sigma_c - \varepsilon_c$  залишається єдиною та незмінною для всіх режимів завантаження. Змінюватися можуть лише параметри характерних точок режимних діаграм стану бетону.

Моделювання процесу деформування бетонних та залізобетонних елементів, як і їх проектування, потребує якнайточнішого визначення реальних міцнісних та деформативних характеристик самого бетону. Відповідно до діючих нормативних документів ці характеристики визначають за результатами випробування стандартних бетонних зразків короткочасним осьовим навантаженням. При цьому, стандартні умови випробувань передбачають ступеневе завантаження дослідних зразків у гідравлічних пресах з постійною швидкістю приросту напружень  $d\sigma_c / dt = const$ . Такий режим навантаження прийнято називати «м'яким». В умовах однорідного напружено-деформованого стану він дозволяє отримувати діаграми деформування бетону лише з висхідною віткою. Основні деформаційні характеристики і параметри зазначених діаграм  $E_{co}$ ,  $E_{cf}$ ,  $\varepsilon_{c1}$  та  $k = 1/\nu_{cf}$  багатьма дослідниками визначаються, а точніше прогнозуються за допомогою лінійної функції січного модуля деформацій бетону (3.4), яка відображає гіперболічний зв'язок між напруженнями та деформаціями

$$\sigma_c = \frac{E_{co} \cdot \varepsilon_c}{1 + \left( \frac{E_{co} \cdot \varepsilon_{c1}}{f_{ck}} - 1 \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} \quad (3.19)$$

Раніше (п.3.2.1 та п.3.2.2) вже було обґрунтовано, чому навіть за «м'якого» режиму завантаження функції (3.4), а отже і (3.19), не можуть у повній мірі відобразити процес деформування бетону, особливо за дуже низьких та дуже високих рівнів напружень ( $\eta_c < 0,1 \dots 0,2(0,3)$  і  $\eta_c > (0,7)0,8 \dots 0,9$ ). До того ж, численні експериментальні дослідження



показують, що при випробуванні бетонних призм в момент їх руйнування можна спостерігати інтенсивне зростання деформацій бетону  $\varepsilon_c$  за практично сталих напружень  $\sigma_c = f_{ck}$  (рис. 3.15, горизонтальна ділянка  $AB$ ). Зафіксувати протяжність такої ділянки на діаграмі  $\sigma_c - \varepsilon_c$  практично неможливо навіть за допомогою вимірювальних приладів. Та все ж помічено, що зростає вона пропорційно до пластичних властивостей бетону. Варто зауважити, що відобразити зазначену горизонтальну ділянку залежностями (3.4) і (3.19) теж не видається можливим.

Протяжність горизонтальної ділянки визначимо, виходячи із гіпотези незмінності та незалежності від режиму завантаження повної енергії силового деформування бетону в одиниці об'єму, витраченої на його руйнування [134].

Нехай деформування бетону відбувається за гіперболічною функцією (3.4) з урахуванням деякої прикінцевої горизонтальної ділянки на діаграмі  $\sigma_c - \varepsilon_c$  (рис. 3.15). Тоді повна енергія деформування бетону, витрачена на його руйнування в одиниці об'єму, складатиме

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \int_0^{\varepsilon_{c1,M}} \sigma_c d\varepsilon_c + f_{ck}(\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c1,M}) = \int_0^{\varepsilon_{c1,M}} \left[ E_{co} \cdot \varepsilon_c / \left( 1 + (k_1 - 1) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1,M}} \right) \right] \times \\
 &\times d\varepsilon_c + f_{ck}(\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c1,M}) = \frac{E_{co}}{k_1 - 1} \cdot \varepsilon_{c1,M}^2 - \frac{E_{co} \cdot \varepsilon_{c1,M}^2}{(k_1 - 1)^2} \ln(1 + (k_1 - 1)) + \\
 &+ f_{ck}(\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c1,M}) = f_{ck} \left[ \varepsilon_{c1} + \frac{\varepsilon_{c1,M}}{k_1 - 1} - \frac{k_1 \cdot \varepsilon_{c1,M}}{(k_1 - 1)^2} \cdot \ln k_1 \right], \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

де  $k_1 = E_{co} \varepsilon_{c1,M} / f_{ck}$  – характеристика деформативності стиснутого бетону.

Якщо ж деформування бетону відбувається за неправильною дробово-раціональною функцією

$$\sigma_c = \frac{E_{co} \cdot \varepsilon_c - f_{ck} \cdot (\varepsilon_c / \varepsilon_{c1})^2}{1 + (E_{co} / f_{ck} - 2 / \varepsilon_{c1}) \cdot \varepsilon_c}, \quad (3.21)$$

то повна енергія деформування бетону, витрачена на його руйнування в одиниці об'єму, буде рівною

$$\begin{aligned}
W_2 &= \int_0^{\varepsilon_{c1}} \sigma_c d\varepsilon_c = \int_0^{\varepsilon_{c1}} \left[ \left( E_{co} \cdot \varepsilon_c - \frac{f_{ck}}{\varepsilon_{ck}^2} \cdot \varepsilon_c^2 \right) / \left( 1 + (k-2) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right) \right] d\varepsilon_c = \\
&= -\frac{f_{ck} \varepsilon_{c1}}{2(k-2)} + \frac{f_{ck} \varepsilon_{c1} (k-1)^2}{(k-2)^2} - \frac{f_{ck} \varepsilon_{c1} (k-1)^2}{(k-2)^3} \ln(1 + (k-2)) = \\
&= \frac{f_{ck} \cdot \varepsilon_{c1}}{(k-2)} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{(k-1)^2}{(k-2)} - \left( \frac{k-1}{k-2} \right)^2 \ln(k-1) \right], \quad (3.22)
\end{aligned}$$

де  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{ck}$  – характеристика деформативності стиснутого бетону.

Прирівнявши вирази (3.20) і (3.22), отримаємо трансцендентне рівняння

$$\frac{\varepsilon_{c1,M}}{k_1 - 1} - \frac{k_1 \cdot \varepsilon_{c1,M}}{(k_1 - 1)^2} \cdot \ln k_1 = \frac{\varepsilon_{c1}}{(k-2)} \left[ \frac{3-k}{2} + \frac{(k-1)^2}{(k-2)} - \left( \frac{k-1}{k-2} \right)^2 \ln(k-1) \right], \quad (3.23)$$

наближений розв'язок якого, з достатньо високою точністю (достовірністю апроксимації  $R^2 = 0,9993$ ), може бути представлений функцією

$$\varepsilon_{c1,M} = \varepsilon_{c1} \left[ (k/9)^2 - k/8 + 1 + 0,14^2 \right]. \quad (3.24)$$

Залежність (3.24) дозволяє наглядно продемонструвати ступінь заниження критичних деформацій бетону гіперболічною функцією (3.19) у порівнянні з неправильно дробово-раціональною функцією (3.8) або (3.21). Зауважимо, що результати розрахунків, наведені в табл.3.3, повністю узгоджуються з результатами експериментальних досліджень, проведених у свій час Яшиним А. В. [283].

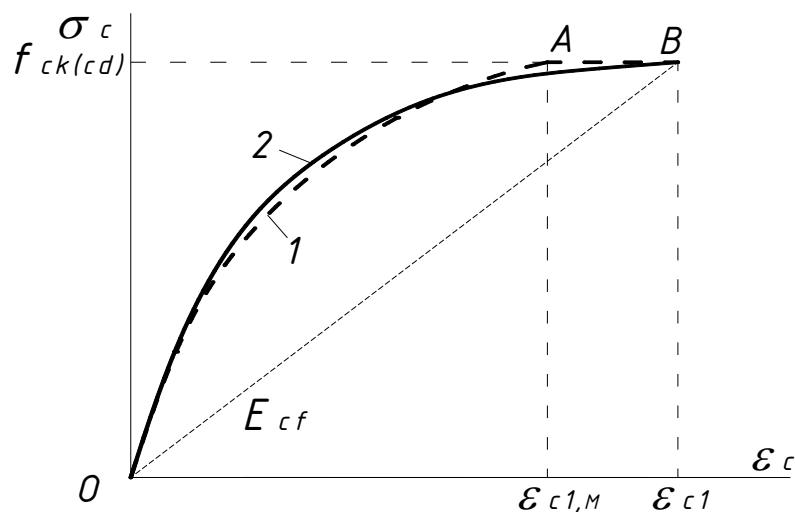


Рисунок 3.15 – Діаграми стану бетону за функціями: 1 – гіперболічною (3.19); 2 – неправильно дробово-раціональною (3.8)

Таблиця 3.3 – Співставлення критичних деформацій бетону за гіперболічною та неправильною дробово-раціональною функціями ( $\varepsilon_{cl,M} / \varepsilon_{cl}$ )

Клас бетону	$f_{ck,prism}$ МПа	$k$	$\varepsilon_{cl,M} \times 10^5$	$\varepsilon_{cl} \times 10^5$	$\frac{\varepsilon_{cl,M}}{\varepsilon_{cl}}$	$\frac{\varepsilon_{cl,M}}{\varepsilon_{cl}}$ за (3.24)
1	2	3	4	5	6	7
C8/10	7,5	5,061	117,3	167,93	0,699	0,703
C12/15	11	4,374	122,5	171,51	0,714	0,709
C16/20	15	3,796	128,4	175,82	0,730	0,723
C20/25	18,5	3,413	133,5	179,70	0,743	0,737
C25/30	22	3,109	138,5	183,67	0,754	0,751
C30/35	25,5	2,862	143,5	187,75	0,765	0,746
C32/40	29	2,657	148,6	191,92	0,774	0,775
C35/45	32	2,508	152,9	195,61	0,782	0,785
C40/50	36	2,340	158,7	200,50	0,791	0,796
C45/55	39,5	2,214	163,7	204,87	0,799	0,804
C50/60	43	2,105	168,8	209,37	0,806	0,811
C53/65	46,5	2,010	173,9	213,80	0,813	0,819
C56/70	50	1,926	179,0	218,33	0,820	0,825
C60/75	54	1,842	184,8	223,51	0,827	0,832
C65/80	57,5	1,777	189,9	228,13	0,833	0,837
C70/85	61	1,718	195,1	232,73	0,838	0,842
C75/90	65	1,659	200,9	237,96	0,844	0,847
C80/95	68	1,618	205,4	242,01	0,849	0,850
C85/100	72	1,568	211,2	247,26	0,854	0,854
C90/105	75,5	1,529	216,3	251,85	0,859	0,858
C95/110	79	1,493	221,5	256,50	0,864	0,861
C100/115	83	1,455	227,4	261,78	0,869	0,864
C105/120	86	1,429	231,8	265,78	0,872	0,866

Таким чином, деформації бетону за стандартного або «м'якого» режиму завантаження пропонується визначати чи «прогнозувати» за допомогою неправильної дробово-раціональної функції (3.8) або (3.21).

Тепер більш детально зупинимось на так званих «жорстких» режимах завантаження, що передбачають ступеневе навантаження дослідних зразків з постійною швидкістю приросту деформацій  $d\varepsilon_c / dt = const$  [3; 4; 29; 298; 473; 494; 499; 531]. Загально прийнято вважати, що низхідну вітку діаграми стану бетону можна отримати тільки за вищевказаного режиму. Однак, таке твердження безперечно потребує певного уточнення, оскільки «жорстке»

завантаження завжди супроводжується одним із двох характерних випадків зміни напружень в бетоні (рис. 3.16).

Якщо завантаження зразка здійснювати із затухаючим приростом напружень в бетоні аж до самого моменту його руйнування ( $d\sigma_c / dt \geq 0$ ), то отримати низхідну вітку діаграми стану  $\sigma_c - \varepsilon_c$  так само неможливо як і за «м'якого» режиму завантаження (рис. 3.16, лінія 1). І лише в тому випадку, коли при випробуваннях допускається падіння напружень в бетоні ( $d\sigma_c / dt < 0$ ), можна отримати низхідну вітку діаграми стану  $\sigma_c - \varepsilon_c$  (рис. 3.16, лінія 2). Довжина цієї вітки теж буде залежати від величини верхнього рівня напружень та швидкості навантаження зразка (рис. 3.16, лінії 2 та 3).

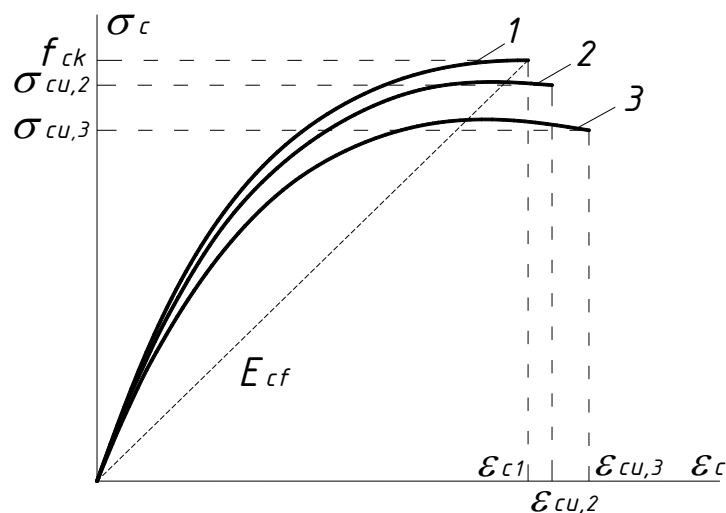


Рисунок 3.16 – Діаграми стану бетону при «жорсткому» завантаженні за можливих випадків зміни напружень на останніх ступенях:

1 – при  $d\sigma_c / dt \geq 0$ ; 2 і 3 – при  $d\sigma_c / dt < 0$

Отже, приймаючи до уваги вищесказане, покладемо в основу загальної методики визначення параметричних точок режимних діаграм стану бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$  ряд наступних передумов та гіпотез, підтверджених численними експериментальними дослідженнями [48; 81; 133; 169; 255; 283]:

- початкове та критичне значення модуля деформацій бетону  $E_{cc}$  ( $E_{co}$  та  $E_{cf} = E_{co} / k$  відповідно), залишаються сталими величинами і не залежать від режиму його разового завантаження;

- повна енергія силового деформування бетону в одиниці об'єму, витрачена на його руйнування, залишається незмінною та не залежить від режиму разового завантаження бетону.

### 3.2.3.2. Параметричні точки діаграм стану бетону

В рамках усіх існуючих на сьогодні «деформаційних моделей» перерізу бетонних та залізобетонних елементів особлива роль відводиться основним параметричним точкам діаграми стану бетону. Однією з найважливіших серед них на діаграмі  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , як за однорідного так і неоднорідного деформування бетону, є точка, що зв'язує максимальні напруження в бетоні  $\sigma_c = f_{ck}$  з відповідними критичними деформаціями бетону  $\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}$ .

Раніше (п. 1.7) вже були проаналізовані основні методологічні недоліки та встановлена методологічна обґрунтованість найбільш відомих функцій з визначення критичних деформацій бетону  $\varepsilon_{c1}$ . Вони стануть ще більш зрозумілими, якщо оцінку залежностей з визначення вказаних деформацій проводити за раніше наведеними критеріями збіжності (п. 1.7).

Відомо, що величина  $\varepsilon_{c1}$  не залишається сталою і залежить від багатьох факторів: режиму та швидкості завантаження або тривалості випробувань, структури та виду бетону, його віку та умов твердіння, масштабу зразків, бази вимірювань тощо. Враховуючи вищесказане та беручи до уваги класичні рішення, критичні деформації бетону  $\varepsilon_{c1}$  за відповідних максимальних напружень  $f_{ck(cd)}$  пропонується визначати за формулою [197; 201]

$$\varepsilon_{c1} = k_{el} \cdot \varepsilon_{c1,el} + k_{pl} \cdot \varepsilon_{c1,pl} \quad (3.25)$$

де  $k_{el}$  і  $k_{pl}$  – коефіцієнти, що враховують особливості роботи бетону в перерізі елемента та розвитку його пружних і пластичних деформацій.

Для «жорсткого» режиму завантаження ( $d\varepsilon_c / dt = const$ ) коефіцієнти  $k_{el}$  і  $k_{pl}$  рекомендується приймати рівними 1,0, а залежність (3.25)

представляти в остаточному вигляді

$$\varepsilon_{c1} = f_{ck} / E_{co} + (140 - 0,7 \cdot f_{ck}) \cdot 10^{-5}. \quad (3.26)$$

Тут перший доданок характеризує пружну, а другий – пластичну складові критичних деформацій бетону, які можна корегувати за допомогою коефіцієнтів  $k_{el}$  і  $k_{pl}$  залежно від вищеперерахованих факторів.

При стандартних умовах випробування за «м'якого» режиму завантаження ( $d\sigma_c / dt = const$ ) критичні деформації важкого бетону  $\varepsilon_{c1}$  рекомендується описувати рівнянням (3.26), прийнявши  $k_{pl} = 0,78$ , а  $k_{el} = 1,05$  для бетонів міцністю  $f_{ck} \leq 40 \text{ МПа}$ ,  $k_{el} = 1,03$  для бетонів міцністю  $40 \text{ МПа} < f_{ck} \leq 80 \text{ МПа}$  і  $k_{el} = 1,0$  при  $f_{ck} > 80 \text{ МПа}$ .

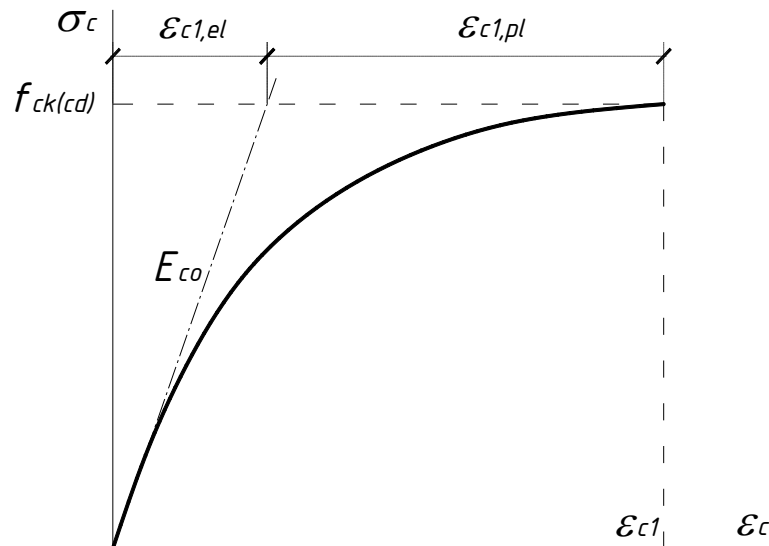


Рисунок 3.17– До визначення величини критичних деформацій стиснутого бетону

З метою оцінки ефективності запропонованих формул (3.25) і (3.26) були оброблені результати експериментальних досліджень, проведених у свій час Яшиним А. В. [283] та Бамбурою А. М. і Подобенком Т. М. [26], та виконаний порівняльний аналіз вищезгаданих функцій з найбільш відомими залежностями різних дослідників (рис. 3.18 і 3.19).

За обробкою результатів вищезгаданих експериментальних досліджень встановлено, що залежність Томашевича А. [531], покладена в основу діючих Євростандартів [382], дає одну з найкращих збіжностей з результатами

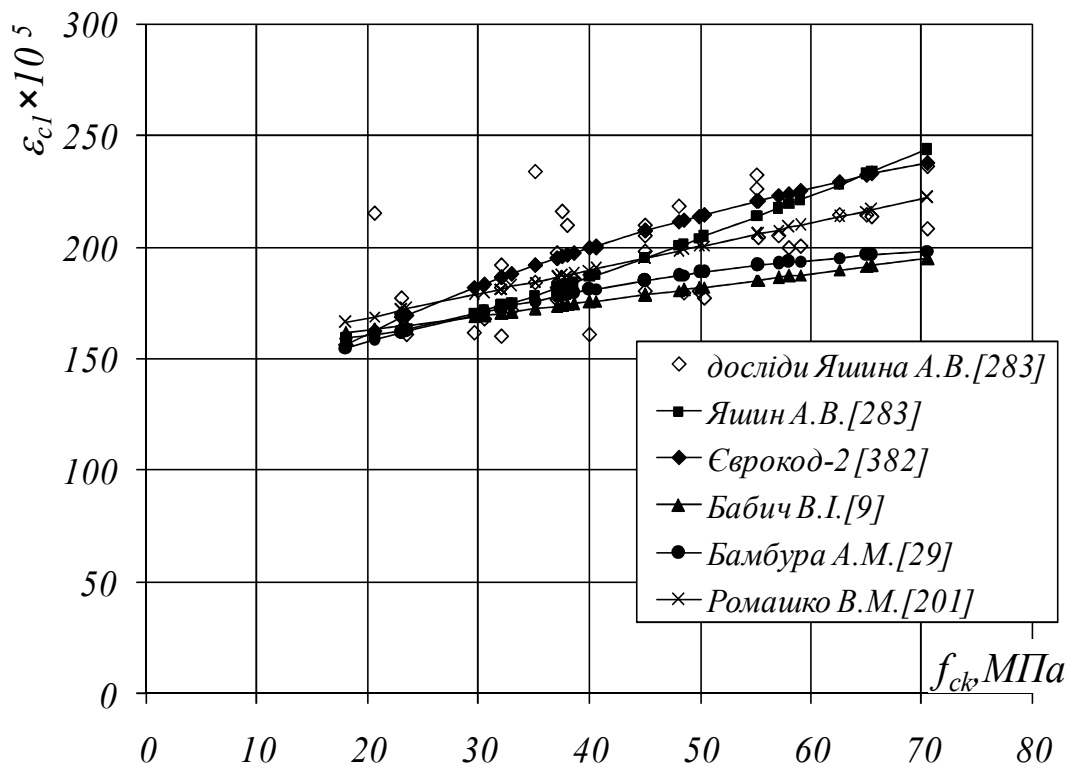


Рисунок 3.18 – Збіжність залежностей різних авторів, щодо визначення критичних деформацій бетону  $\varepsilon_{c1}$ , з результатами експериментальних досліджень Яшина А. В. [283]

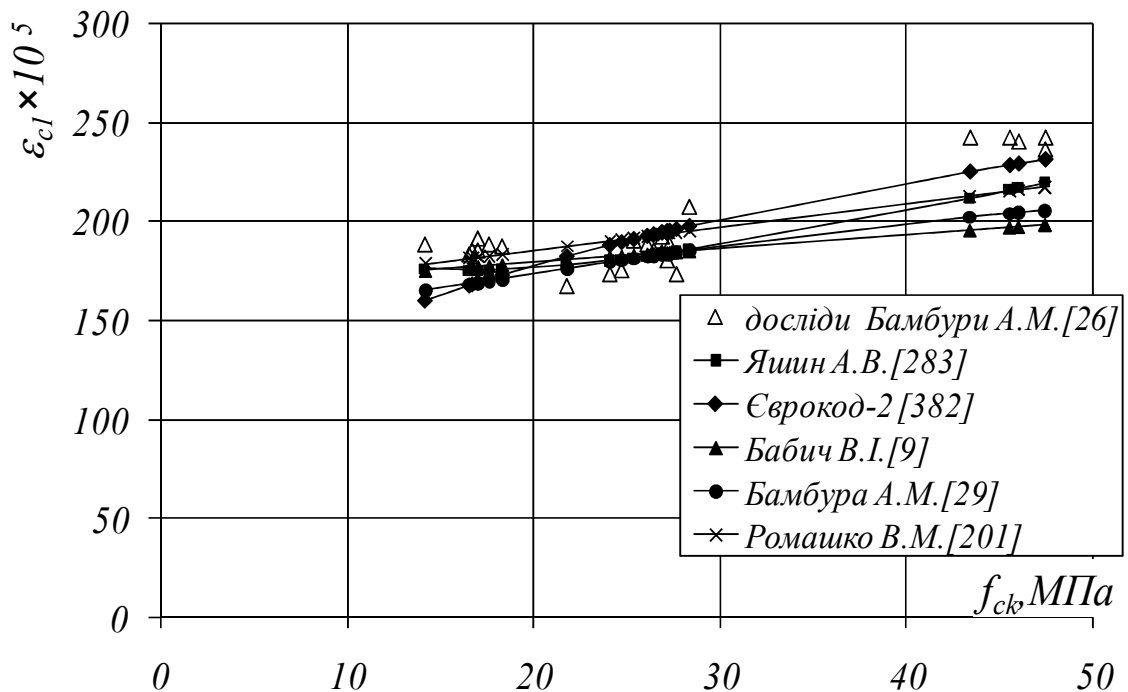


Рисунок 3.19 – Збіжність залежностей різних авторів, щодо визначення критичних деформацій бетону  $\varepsilon_{c1}$ , з результатами експериментальних досліджень Бамбури А. М. та Подобенка Т. М. [26]

експериментальних досліджень. Та все ж для бетонів відносно низьких класів вона стає малоприсадною через суттєве заниження долі пластичних деформацій (рис.3.20).

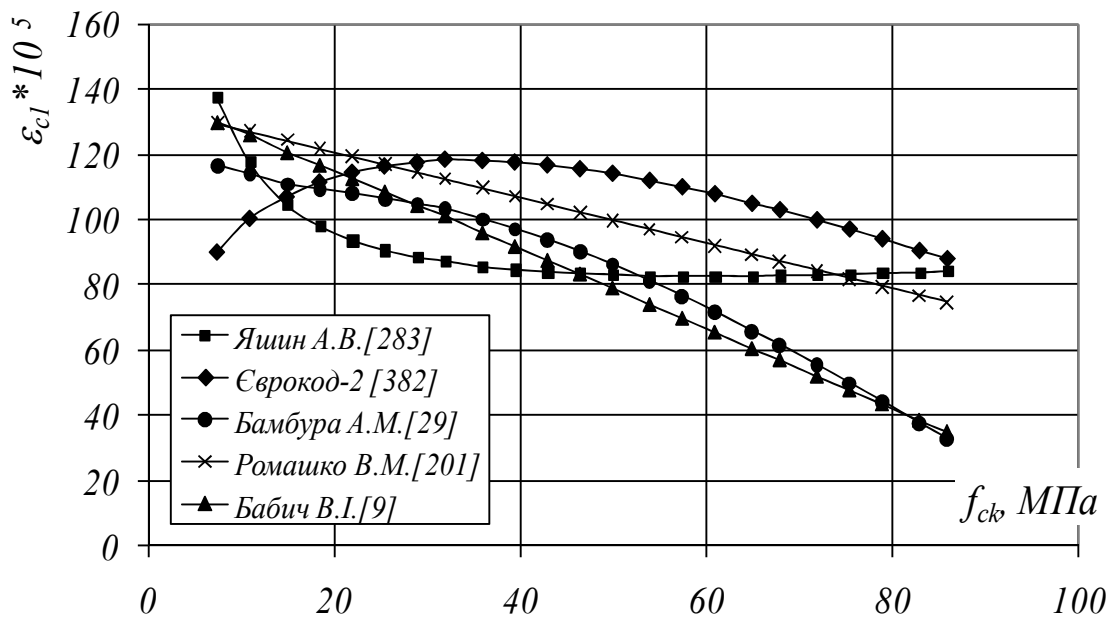


Рисунок 3.20 – Характер зміни пластичних деформацій в залежностях  $\varepsilon_{c1} - f_{ck}$ , запропонованих різними дослідниками

Формулам Бамбури А. М. [29] та Бабича В. І. [9] властива зовсім інша крайність: вони суттєво занижують долю пластичних деформацій для бетонів високих класів ( $f_{ck} \geq 60 \text{ МПа}$ ). А для бетонів міцністю  $f_{ck} \approx 100 \text{ МПа}$  і більше використання зазначених залежностей взагалі може призводити до некоректних результатів: пластичні деформації стають від’ємними (рис.3.20).

На підставі отриманих статистик, наведених в табл.3.4, можна зробити ряд важливих висновків:

- залежності (3.25) та (3.26) забезпечують одні з найкращих збіжностей з результатами експериментальних досліджень;
- у формули (3.25) та (3.26) закладено узагальнений класичний підхід до визначення критичних деформацій бетону;
- зазначені вирази дозволяють відображати вплив режиму та тривалості навантаження, структури та виду бетону, його віку та умов твердіння на величину критичних деформацій бетону  $\varepsilon_{c1}$  в діаграмах його стану;



- вищенаведені функції (3.25) і (3.26) можуть претендувати на певну універсальність, оскільки приводять до коректних результатів практично за будь-яких класів бетону;
- вищевказані залежності вирізняються відносною простотою та зручністю в апроксимаційних чи ітераційних операціях.

Оцінюючи основні параметричні точки діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , зупинимося ще й на тій, котра обмежує граничне деформування стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$ . Застосовуючи екстремальний критерій міцності  $dN / d\varepsilon_c = 0$  до виразу (3.21), отримаємо квадратне рівняння

$$E_{co} - 2 \cdot f_{ck} \cdot \varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c1}^2 - (E_{co} - 2 \cdot f_{ck} / \varepsilon_{c1}) \cdot \varepsilon_{cu}^2 / \varepsilon_{c1}^2 = 0 \quad (3.27)$$

з дійсним коренем  $\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1}$ .

Отже із розв'язку рівняння (3.27) випливає, що коли всі волокна в поперечному перерізі центрально стиснутого бетонного елемента працюють рівномірно, то діаграма  $\sigma_c - \varepsilon_c$  буде закінчуватися критичною точкою  $\varepsilon_{c1}$ . Інакше кажучи, низхідна вітка діаграми деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$  за осевого стиску стандартних зразків існувати просто-напросто не може.

Що ж до інших параметричних точок діаграми стану бетону, то в більшості існуючих деформаційних моделей вони не знайшли свого відображення. А дарма, оскільки з їх допомогою можна було б оцінювати та прогнозувати напружено-деформований стан залізобетонних елементів конструкцій за тривалих та циклічних навантажень [197; 230].

Сучасні уявлення про міцнісні та деформативні властивості бетону ґрунтуються переважно на результатах численних експериментів та їх усереднених даних, котрі приймаються за вихідні при проектуванні залізобетонних конструкцій. Тим не менше, в більшості існуючих теорій міцності бетону його структура практично не враховується, а отже задача встановлення зв'язку між структурою бетону та його властивостями на сьогодні залишається відкритою.

Оскільки перехід до деформаційної моделі розрахунку перерізів

Таблиця 3.4 – До статистичної оцінки залежностей різних авторів з визначення критичних деформацій бетону  $\varepsilon_{c1}$

Автори залежностей	Позначення	Відхилення від експериментальних даних, %		
		Яшина А. В. [283] (зразки 41 серії)	Бамбури А. М. [26] (зразки 24 серій)	Загальні
Яшин А. В., [283]	$\Delta_{\varepsilon, \min}$	-25,39	-12,59	-25,39
	$\Delta_{\varepsilon, \max}$	17,09	6,60	17,09
	$\Delta_{\varepsilon}$	0,19	-4,04	<b>-1,37</b>
	$\sigma_{\varepsilon}$	9,81	6,66	<b>8,78</b>
EUROCOD-2, [382]	$\Delta_{\varepsilon, \min}$	-24,51	-15,25	-24,51
	$\Delta_{\varepsilon, \max}$	24,03	13,26	24,03
	$\Delta_{\varepsilon}$	4,76	-1,41	<b>2,48</b>
	$\sigma_{\varepsilon}$	10,88	7,74	<b>9,84</b>
Бамбура А. М., [26]	$\Delta_{\varepsilon, \min}$	-26,47	-16,50	-26,47
	$\Delta_{\varepsilon, \max}$	12,28	6,45	12,28
	$\Delta_{\varepsilon}$	-5,74	-6,27	<b>-5,93</b>
	$\sigma_{\varepsilon}$	10,14	9,31	<b>9,84</b>
Бабич В. І., Кочкар'юв Д.В. [9]	$\Delta_{\varepsilon, \min}$	-26,38	-19,26	-26,38
	$\Delta_{\varepsilon, \max}$	8,98	7,94	8,98
	$\Delta_{\varepsilon}$	-7,61	-5,22	<b>-6,73</b>
	$\sigma_{\varepsilon}$	11,28	9,45	<b>10,64</b>
Ромашко В. М., формула (3.26)	$\Delta_{\varepsilon, \min}$	-21,45	-12,14	-21,45
	$\Delta_{\varepsilon, \max}$	17,81	12,15	17,81
	$\Delta_{\varepsilon}$	0,25	-0,43	<b>0,00</b>
	$\sigma_{\varepsilon}$	8,71	7,18	<b>8,18</b>
Примітки: в таблиці $\Delta_{\varepsilon, \min}$ та $\Delta_{\varepsilon, \max}$ – нижня та верхня межі відхилень від дослідних даних, а $\Delta_{\varepsilon}$ і $\sigma_{\varepsilon}$ – середньоарифметичні та стандартні значення цих відхилень.				

залізобетонних елементів конструкцій і стержневих систем супроводжується нормуванням діаграм стану бетону, то дуже важливо, щоб в них, прямо чи навіть опосередковано, був якнайповніше відображений вплив структурних змін бетону (рис.3.21), що супроводжують його деформування. Цілком очевидно, що зазначене відтворення та найтісніший зв'язок двох вищезгаданих діаграм можуть забезпечити не тільки основні, але й і проміжні параметричні точки діаграм  $\sigma_c - \varepsilon_c$ .

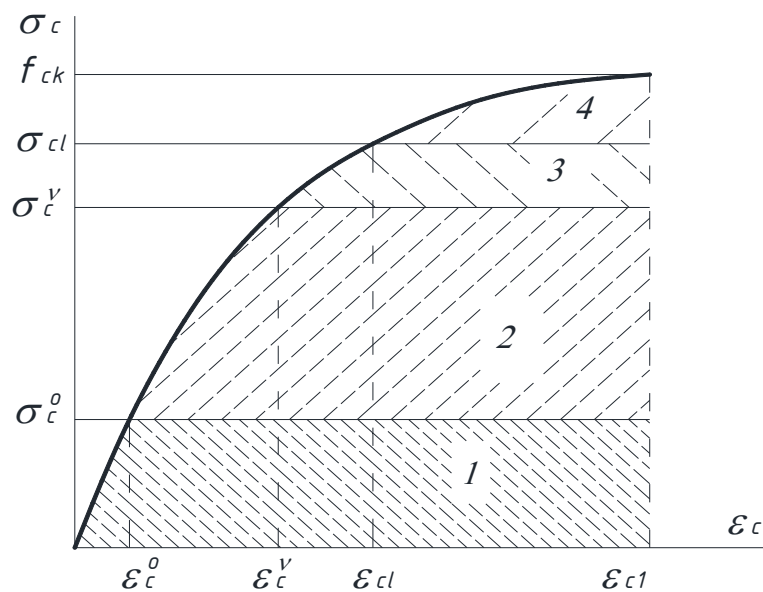


Рисунок 3.21 – Стадії структурних змін та основні параметричні точки діаграми деформування бетону: 1 – стадія ущільнення; 2 – стадія утворення мікротріщин; 3 – стадія інтенсивного накопичення мікротріщин; 4 – стадія утворення макротріщин

Відомо, що ультразвук, як і будь-який інший звук, являє собою механічні коливання, котрі поширюються в пружному середовищі. Отже швидкість його проходження, що характеризує швидкість поширення пружної деформації в твердому тілі, в більшій мірі повинна залежати від модуля пружності бетону  $E_{cm}$ , а ніж від його міцності  $f_{ck}$ . За таких обставин видається доцільним пов'язувати межі утворення мікротріщин в бетоні з модулем його пружності залежністю

$$\sigma_c^i = (a_i \cdot E_{cm} + b_i) \cdot f_{ck}, \quad (3.28)$$

де  $a_i$  і  $b_i$  – коефіцієнти, що залежать від режиму та швидкості випробувань, структури та виду бетону, його віку та умов твердіння, масштабу зразків тощо.

Завдяки обробці результатів експериментальних досліджень різних авторів [40; 86; 155; 283], що досліджували важкий бетон за стандартних умов випробування, були встановлені числові значення зазначених коефіцієнтів. З їх урахуванням формули для нижньої  $\sigma_c^o$  та верхньої  $\sigma_c^v$  меж утворення мікротріщин в стиснутому бетоні набудуть вигляду

$$\sigma_c^o = (1,4 \cdot E_{cm} \cdot 10^{-5} - 0,12) \cdot f_{ck}, \quad (3.29)$$

$$\sigma_c^v = (1,3 \cdot E_{cm} \cdot 10^{-5} + 0,25) \cdot f_{ck}. \quad (3.30)$$

Порівняльний аналіз вищезгаданих функцій з найбільш відомими залежностями різних дослідників (рис. 3.22 і 3.23) показує, що:

- на відміну від залежностей Туркалова Б. Ф. [254] значення нижньої та верхньої меж утворення мікротріщин ( $\sigma_c^o$  і  $\sigma_c^v$ ) за формулами (3.29) і (3.30) є досить близькими до значень, визначених за загальновідомими функціями Берга О. Я. [40];
- зазначені формули не містять радикалів, а тому є дуже простими і зручними для диференціювання та інтегрування;
- вирази (3.29) і (3.30) можна корегувати, відображаючи вплив різних факторів, що визначають роботу бетону в реальних умовах.

Щодо ще однієї проміжної точки на діаграмі деформування, то її варто вводити не тільки для бетонів низьких класів [254]. Характеризувати ця точка може межу тривалої міцності бетону  $\sigma_{cl}$  (рис. 3.24). Загальновідомо, що значення нижньої  $\sigma_c^o$  та верхньої  $\sigma_c^v$  меж утворення мікротріщин є доволі розмитими. Пояснити це можна не тільки впливом режиму та швидкості навантаження, структурою та видом бетону, його віком та умовами твердіння, масштабним фактором тощо. Адже цілком очевидно, що утворення мікротріщин не починається миттєво. Більше того, за сприятливих умов експлуатації цей процес взагалі може припинитися.

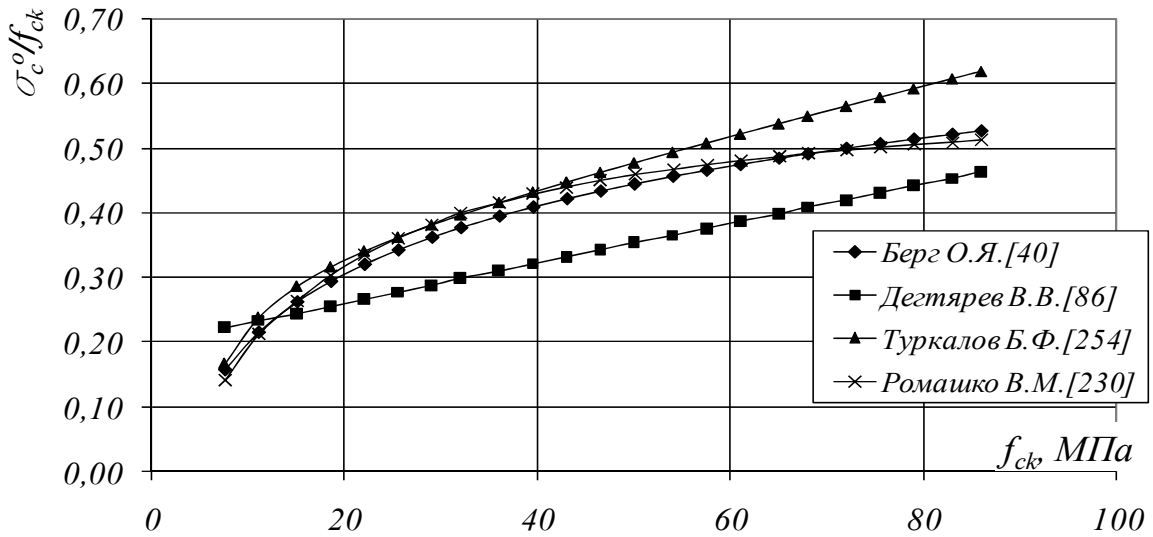


Рисунок 3.22 – Графіки залежностей з визначення нижньої межі утворення мікротріщин, запропонованих різними дослідниками

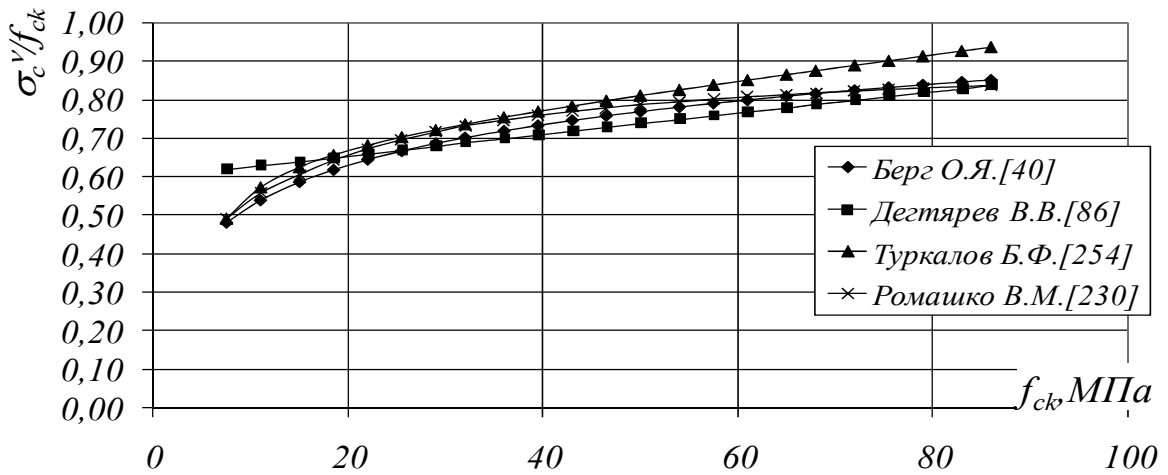


Рисунок 3.23 – Графіки залежностей з визначення верхньої межі утворення мікротріщин, запропонованих різними дослідниками

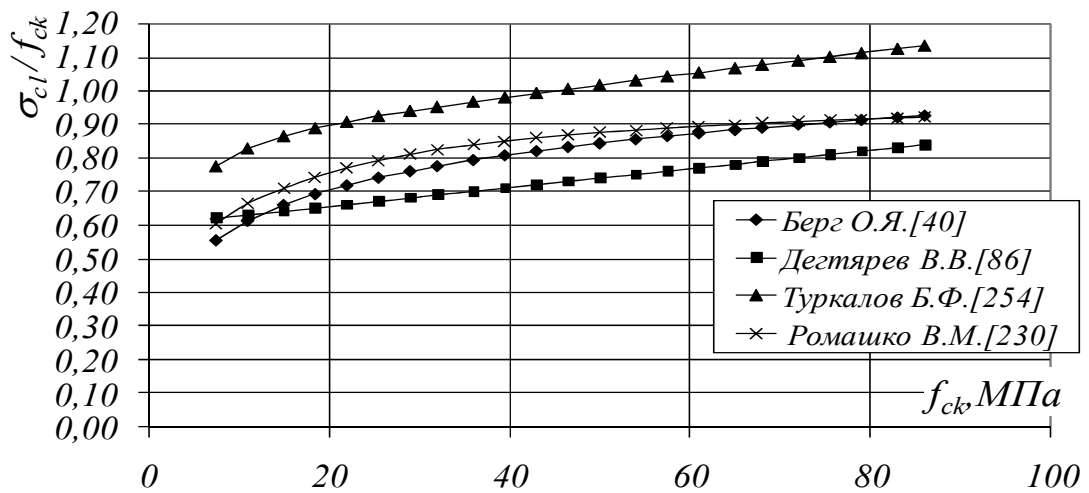


Рисунок 3.24 – Графіки залежностей з визначення межі тривалої міцності бетону, запропонованих різними дослідниками

Тут мова йде про перерозподіл напружень між компонентами бетону та про його так зване «самолікування». В такому разі верхня межа утворення мікротріщин  $\sigma_c^V$  (нижня межа утворення макротріщин) не може бути єдино достатньою (невідвратною) умовою руйнування бетону. За тих же самих сприятливих умов та завдяки перерозподілу напружень між компонентами бетону процес перетворення мікротріщин в макротріщини, ймовірно, теж може припинятися. Та все ж за певних напружень, що перевищують верхню межу мікротріщиноутворення  $\sigma_c^V$ , процес макроруйнування бетону уже зупинити неможливо. Саме зазначені напруження і характеризують межу тривалої міцності ( $\sigma_{cl}$ ) та межу витривалості бетону ( $\sigma_c^V$ ), відповідно.

Якщо ж керуватися залежністю (3.28), то для визначення межі тривалої міцності важких бетонів за стандартних умов їх твердіння та випробування можна запропонувати наступну формулу

$$\sigma_{cl} = (1,2 \cdot E_{cm} \cdot 10^{-5} + 0,38) \cdot f_{ck}. \quad (3.31)$$

Порівняльний аналіз з найбільш відомими залежностями (рис. 3.24) показує, що функція (3.31):

- не містить радикалів та забезпечує досить близькі результати із загальновідомою формулою Берга О. Я. [40] на противагу залежностям Дегтярева В. В. [86] та Туркалова Б. Ф. [254];
- дозволяє підходити до визначення межі тривалої міцності бетону доволі диференційовано (табл. 3.5).

### 3.3. Особливості деформування позацентрово стиснутих елементів

Жорсткість перерізу бетонного елемента, що зазнає будь-якого виду деформування, характеризується сукупністю геометричних характеристик його перерізу та деформаційних властивостей матеріалу. Раніше уже було показано (п.3.2.1), що за осьового стиску перші залишаються практично незмінними, оскільки незмінними є форма стиснутої зони та її площа. Тому

Таблиця 3.5 – Характеристики параметричних точок діаграми деформування бетону

Клас бетону	$f_{ck,prism}$ , МПа	Нижня межа утворення мікротріщин		Верхня межа утворення мікротріщин		Межа тривалої міцності бетону	
		$\sigma_c^o / f_{ck}$	$\varepsilon_c^o / \varepsilon_{cl}$	$\sigma_c^v / f_{ck}$	$\varepsilon_c^v / \varepsilon_{cl}$	$\sigma_{cl} / f_{ck}$	$\varepsilon_{cl} / \varepsilon_{cl}$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
C8/10	7,5	0,134	0,028	0,486	0,139	0,598	0,194
C12/15	11	0,200	0,051	0,547	0,187	0,655	0,252
C16/20	15	0,257	0,077	0,600	0,238	0,703	0,312
C20/25	18,5	0,294	0,099	0,635	0,280	0,735	0,361
C25/30	22	0,325	0,121	0,663	0,318	0,761	0,405
C30/35	25,5	0,350	0,142	0,686	0,353	0,783	0,445
C32/40	29	0,371	0,161	0,706	0,386	0,801	0,481
C35/45	32	0,386	0,178	0,720	0,412	0,814	0,509
C40/50	36	0,404	0,198	0,737	0,443	0,829	0,544
C45/55	39,5	0,417	0,215	0,749	0,468	0,841	0,571
C50/60	43	0,429	0,231	0,760	0,492	0,851	0,596
C53/65	46,5	0,440	0,246	0,770	0,513	0,860	0,619
C56/70	50	0,449	0,261	0,778	0,533	0,868	0,640
C60/75	54	0,458	0,276	0,787	0,554	0,876	0,662
C65/80	57,5	0,465	0,289	0,794	0,571	0,882	0,679
C70/85	61	0,472	0,302	0,800	0,587	0,888	0,696
C75/90	65	0,479	0,315	0,806	0,604	0,893	0,713
C80/95	68	0,484	0,325	0,811	0,616	0,897	0,725
C85/100	72	0,489	0,337	0,816	0,631	0,902	0,740
C90/105	75,5	0,494	0,348	0,820	0,644	0,906	0,752
C95/110	79	0,498	0,357	0,824	0,655	0,910	0,763
C100/115	83	0,503	0,368	0,828	0,668	0,914	0,776
C105/120	86	0,506	0,376	0,831	0,677	0,917	0,784

жорсткість перерізу бетонного елемента за осьового стиску змінюється за рахунок зміни деформаційних властивостей матеріалу, до того ж нелінійно.

Зупинимось тепер на жорсткості перерізу бетонного елемента, що зазнає позацентрового стиску з випадковими або відносно малими ексцентриситетами. Поперечний переріз такого елемента можна представити нескінченно великою кількістю елементарних ділянок  $dA$ , кожна з яких практично зазнає осьового стиску певної інтенсивності (рис.3.25).

Нескладно помітити, що при зміні жорсткості кожної з них лише за рахунок зміни деформаційних характеристик [197; 205; 206]

$$dN / \varepsilon_c = \sigma_c dA / \varepsilon_c = (a - b_1 \cdot \varepsilon_c / \varepsilon_{c1} - c_1 \cdot dN / dN_u) \cdot dA, \quad (3.32)$$

напруження в бетоні кожної із зазначених ділянок будуть описуватися неправильною дробово-раціональною функцією (3.21). Тоді максимальну поздовжню силу, яку міг би сприйняти позацентрово стиснутий бетонний елемент прямокутного перерізу, можна було б знайти за виразом [197; 216]

$$N = \int_0^{b_n} \int_{x_1}^{x_2} \sigma_c dx dy = \frac{b_n}{1/r} \int_{\varepsilon_{co}}^{\varepsilon_{cu}} \sigma_c d\varepsilon_c, \quad (3.33)$$

використовуючи «екстремальний критерій міцності»  $dN / d\varepsilon_c = 0$ .

Однак параметр  $dN / d\varepsilon_c = 0$  не може виступати екстремальним критерієм вичерпання міцності для бетонних елементів за їх неоднорідного деформування. За діаграмою  $N - \varepsilon_c$  деформації бетону стиснутої грані будуть досягати своїх граничних значень  $\varepsilon_{cu,N}$  при максимальних зусиллях в стиснутому бетоні  $N_u$  (рис.3.26). Інша ситуація складається з діаграмою  $M - \varepsilon_c$ . По мірі деформування елемента внутрішні зусилля  $M$  зростають лише за рахунок рівнодійної зусиль в стиснутому бетоні  $N$ , бо відстань від цього зусилля до нейтральної лінії  $z_c$  безперервно зменшується. Цілком очевидно, що добуток двох зазначених величин  $N \cdot z_c$  явно досягатиме свого максимального значення при граничних деформаціях бетону більш стиснутої грані  $\varepsilon_{cu,M} < \varepsilon_{cu,N}$ .

Для перевірки даного припущення, розглянемо граничний стан



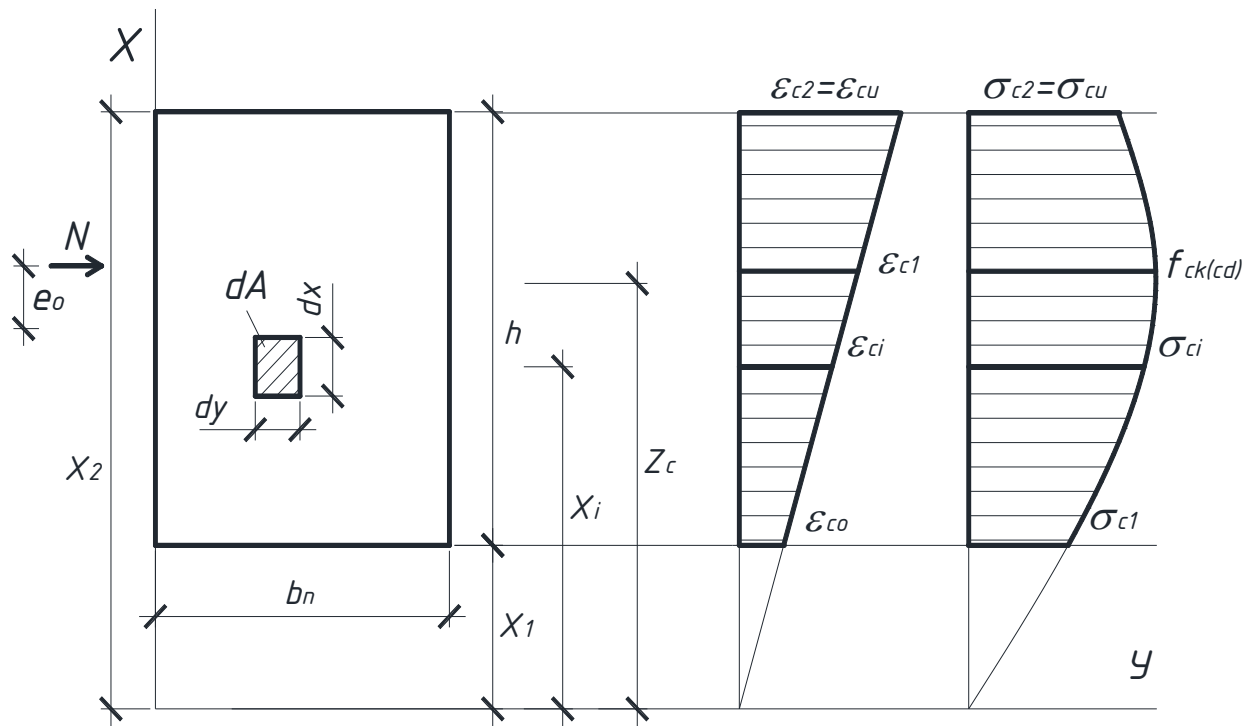


Рисунок 3.25 – Параметри напружено-деформованого стану  
 позациентрово стиснутого бетонного елемента за  
 малих ексцентриситетів

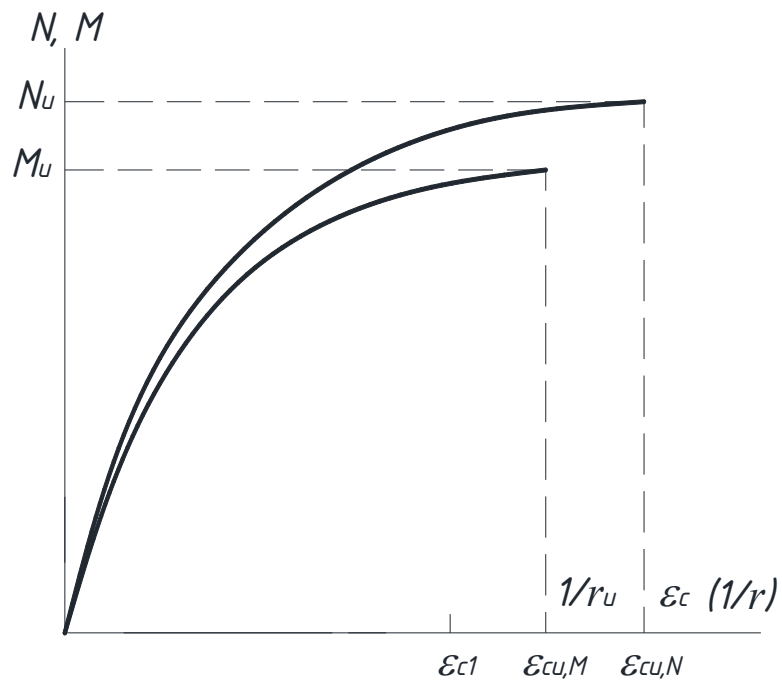


Рисунок 3.26 – Граничні деформації бетону позациентрово  
 стиснутого залізобетонного елемента за діаграмами  
 деформування  $N - \epsilon_c$  та  $M - 1/r$

позацентрово стиснутого бетонного елемента, прийнявши наступні гіпотези:

- зв'язок між напруженнями та деформаціями бетону моделюватимемо повними діаграмами його стану у вигляді отриманої неправильної дробово-раціональної функції (3.21);
- при деформуванні позацентрово стиснутих елементів вважатимемо справедливою гіпотезу плоских перерізів

$$1/r = 1/r_u = (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{co})/h; \quad (3.34)$$

- несуча здатність елемента та опір його розрахункового перерізу діючим навантаженням є вичерпаними при порушенні відповідних умов рівноваги.

Крім того пам'ятатимемо, що параметр  $dM/d\varepsilon_c = 0$  приймати за екстремальний критерій вичерпання міцності бетонних елементів теж не зовсім коректно. Адже беручи до уваги узагальнену діаграму їх стану  $M - 1/r$ , це слідувало б робити за допомогою параметру  $dM/d(1/r) = 0$  та називати його екстремальним критерієм вичерпання несучої здатності.

Згідно другого рівняння рівноваги  $\Sigma M = 0$ , визначальною для оцінки напружено-деформований стану позацентрово стиснутого елемента є умова

$$N \cdot e = \frac{b_n}{(1/r)^2} \int_{\varepsilon_{co}}^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c, \quad (3.35)$$

де  $b_n$  – ширина перерізу елемента;

$\varepsilon_{cu}$  і  $\varepsilon_{co}$  – граничні деформації найбільш та найменш стиснутих фібр бетону в перерізі.

Граничні деформації найбільш стиснутих фібр бетону знайдемо з рівняння (3.35), використовуючи гіпотезу плоских перерізів з екстремальним критерієм несучої здатності. Крім того, для відповідного співставлення граничних деформацій найбільш стиснутих фібр бетону, аналогічну процедуру застосуємо і до рівняння (3.33) через параметр  $dN/d\varepsilon_c = 0$ .

Результати відповідних розрахунків, виконаних для позацентрово стиснутих бетонних елементів, засвідчили значні розходження граничних деформацій найбільш стиснутих волокон бетону за двома вищезгаданими

критеріями. Встановлено, що застосування параметру  $dN/d\varepsilon_c = 0$  в окремих випадках може завищувати граничні деформації слабких бетонів більше ніж на 30% (рис.3.27 і 3.28).

Загалом же слід зауважити, що диференціювання вищезгаданих інтегральних рівнянь призводить до необхідності розв'язку наступних трансцендентних рівнянь, отриманих з (3.33) та (3.35) відповідно.

$$-\frac{b \cdot (1+m)}{2 \cdot (a+b/c)} - \frac{1}{\varepsilon_{cu} \cdot (1-m)} \cdot \left( \frac{1}{1+c \cdot \varepsilon_{cu}} - \frac{m}{1+c \cdot m \cdot \varepsilon_{cu}} \right) + \frac{1}{c \cdot \varepsilon_{cu}^2 \cdot (1-m)} \cdot \ln \frac{1+c \cdot \varepsilon_{cu}}{1+c \cdot m \cdot \varepsilon_{cu}} = 0; \quad (3.37)$$

$$-\frac{b}{3 \cdot (a+b/c)} \cdot \frac{1+m+m^2}{1-m} + \frac{1}{c \cdot \varepsilon_{cu}^2 \cdot (1-m)} + \frac{1}{c \cdot \varepsilon_{cu}^2 \cdot (1-m)^2} \times \left( \frac{1}{1+c \cdot \varepsilon_{cu}} - \frac{m}{1+c \cdot m \cdot \varepsilon_{cu}} \right) - \frac{2}{c^2 \cdot \varepsilon_{cu}^3 \cdot (1-m)^2} \cdot \ln \frac{1+c \cdot \varepsilon_{cu}}{1+c \cdot m \cdot \varepsilon_{cu}} = 0, \quad (3.38)$$

Точні аналітичні рішення таких рівнянь отримати неможливо, а результати їх числового розв'язку методами комп'ютерної алгебри теж є доволі складними та громіздкими [178].

Грунтуючись на методах числового аналізу, розв'язок рівняння (3.38) можна з досить високою точністю (достовірністю  $R^2 = 0,9957$ ) представити наступною залежністю

$$\eta_{cu} = 1 + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m)^2)(1 - m^{3/2})(1 - 0,1m/k) \sqrt{(\ln k)^{(1-m^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m)))^2}, \quad (3.39)$$

де  $m = \varepsilon_{co} / \varepsilon_{cu}$  – параметр неоднорідності деформування бетону в поперечному перерізі елемента;

$\eta_{cu} = \varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c1}$  – рівень граничних деформацій найбільш стиснутих фібр бетону в перерізі елемента.

Для випадку відносно великих ексцентриситетів (рис.3.29), залежність (3.39) суттєво спрощується і рівень граничних деформації найбільш стиснутих фібр бетону при  $\varepsilon_{co} = 0$  та  $\sigma_{co} = 0$  можна обчислювати за виразом

$$\eta_{cu} = 1 + 0,398 \cdot \sqrt{\ln k} / (1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2). \quad (3.40)$$

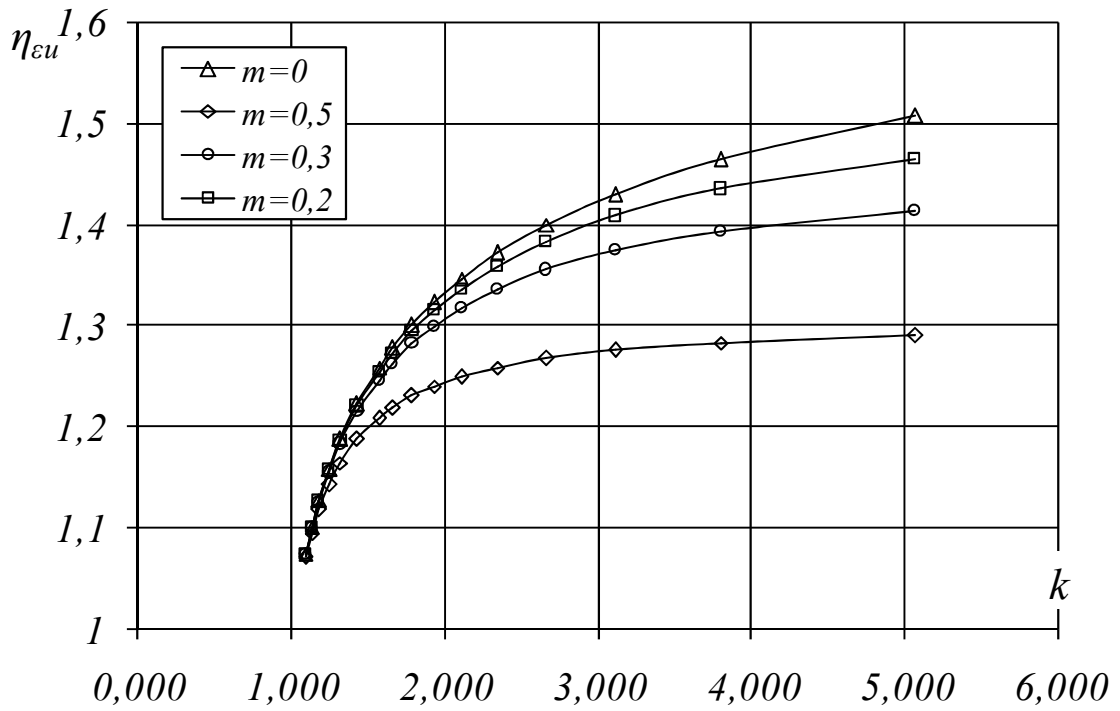


Рисунок 3.27 – Граничні деформації бетону в позациентрово стиснутих бетонних елементах за критерієм  $dM / d(1/r) = 0$  залежно від ступеню неоднорідності деформування  $m$

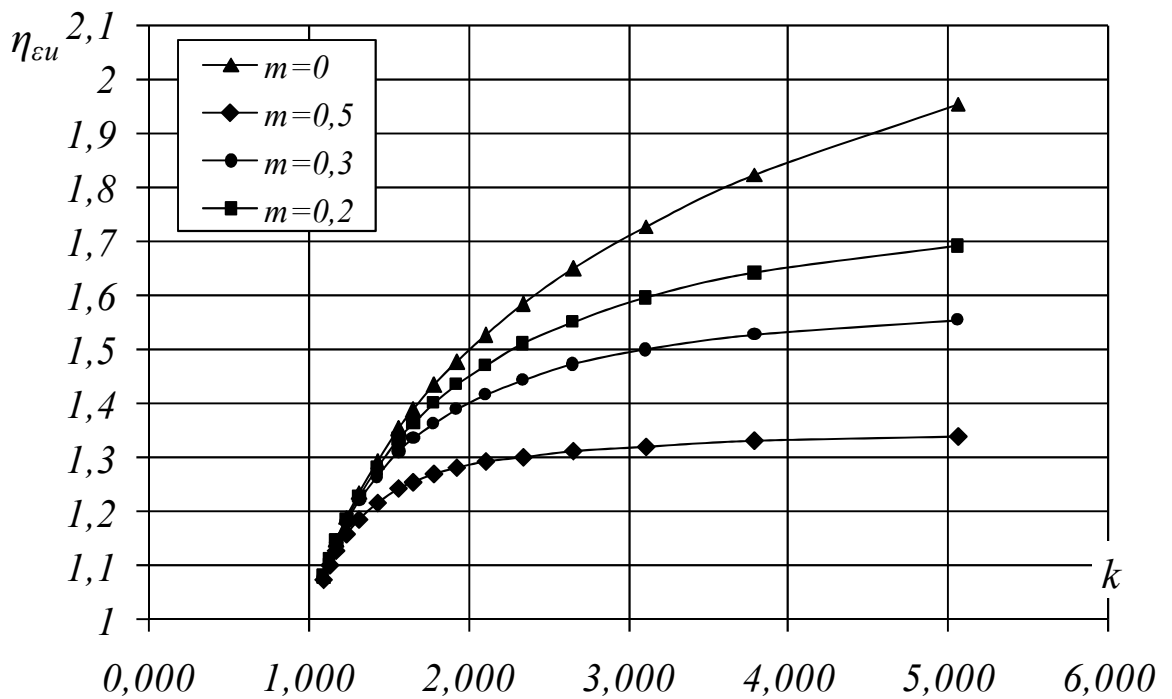


Рисунок 3.28 – Граничні деформації бетону в позациентрово стиснутих бетонних елементах за параметром  $dN / d\epsilon_c = 0$  залежно від ступеню неоднорідності деформування  $m$

Слід відзначити, що відносні значення граничних деформацій стиснутого бетону, обчислені за (3.39) і (3.40), співпадають з контрольним розв'язком рівняння (3.38) при  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{cl} / f_{ck} = 2$ . Для цього випадку рівняння (3.35) після диференціювання перетворюється у звичайне лінійне без радикалу з точними коренями розв'язку при відносно малих та відносно великих ексцентриситетах  $\eta_{ai} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cl}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1+m+m^2}{1+m+m^2+m^3}$  і  $\eta_{ai} = 4/3$  відповідно.

Стосовно величини відносних ексцентриситетів, що відповідають граничним деформаціям бетону за позацентрового стиску, то на підставі спільного розв'язку рівнянь (3.33) та (3.35), їх можна визначати за формулою

$$\frac{e_o}{h} = \frac{a \cdot (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{co}) / 2 - b \cdot (\varepsilon_{cu}^2 + \varepsilon_{cu} \cdot \varepsilon_{co} + \varepsilon_{co}^2) / 3}{(a + \frac{b}{c})(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{co}) - \frac{b}{2}(\varepsilon_{cu}^2 - \varepsilon_{co}^2) - \frac{(a+b/c)}{c} \ln \frac{1+c \cdot \varepsilon_{cu}}{1+c \cdot \varepsilon_{co}}} - \frac{(\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{co}) / 2 + 1/c}{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{co})}, \quad (3.41)$$

а граничні значення відносних «ядрових» ексцентриситетів (табл. 3.6) слід обчислювати за виразом

$$\frac{e_o}{h} = \frac{a \cdot \varepsilon_{cu} / 2 - b \cdot \varepsilon_{cu}^2 / 3}{(a + \frac{b}{c})\varepsilon_{cu} - \frac{b}{2}\varepsilon_{cu}^2 - \frac{(a+b/c)}{c} \ln(1+c \cdot \varepsilon_{cu})} - \frac{\varepsilon_{cu} / 2 + 1/c}{\varepsilon_{cu}}. \quad (3.42)$$

Залежність (3.42) підтверджує той факт, що у позацентрово стиснутих елементах з пружних матеріалів ( $k \approx 1,00$ ) чи за повного нехтування пластичних властивостей граничне значення відносного «ядрового» ексцентриситету сягає величини  $e_o / h = 1/6$ . Зі зменшенням класу бетону гранична величина зазначеного ексцентриситету падає нелінійно (рис. 3.30), а його залежність від граничних деформацій найбільш стиснутих фібр бетонного перерізу наближається до лінійної (рис. 3.31). Детальний аналіз вищенаведених графіків (рис. 3.30, 3.31) наглядно демонструє, що для позацентрово стиснутих елементів зі слабких бетонів (за характерного зменшення долі пружних та зростання долі пластичних деформацій) граничне значення відносного «ядрового» ексцентриситету може зменшуватися навіть до рівня  $e_o / h \approx 1/18$ .

Таблиця 3.6 – До визначення величини відносних «ядрових»  
ексцентриситетів прикладання поздовжніх сил в бетонних  
елементах (при  $x = h$  або  $m = 0$ )

Клас бетону	$f_{ck, prism}$ , МПа	$E_{co}$ , МПа	$k$	$\varepsilon_{cl}$	$\eta_{su}$	$e_o / h$
1	2	3	4	5	6	7
C8/10	7,5	22602	5,061	167,93	1,507	0,058
C12/15	11	28051	4,374	171,51	1,482	0,063
C16/20	15	32383	3,796	175,82	1,455	0,068
C20/25	18,5	35135	3,413	179,70	1,436	0,072
C25/30	22	37244	3,109	183,67	1,420	0,076
C30/35	25,5	38874	2,862	187,75	1,405	0,08
C32/40	29	40155	2,657	191,92	1,391	0,084
C35/45	32	41021	2,508	195,61	1,380	0,087
C40/50	36	42008	2,340	200,50	1,366	0,091
C45/55	39,5	42692	2,214	204,87	1,354	0,094
C50/60	43	43229	2,105	209,37	1,343	0,097
C53/65	46,5	43724	2,010	213,80	1,333	0,1
C56/70	50	44119	1,926	218,33	1,322	0,102
C60/75	54	44515	1,842	223,51	1,311	0,105
C65/80	57,5	44787	1,777	228,13	1,301	0,108
C70/85	61	45042	1,718	232,73	1,292	0,111
C75/90	65	45309	1,659	237,96	1,282	0,113
C80/95	68	45451	1,618	242,01	1,274	0,115
C85/100	72	45668	1,568	247,26	1,265	0,118
C90/105	75,5	45840	1,529	251,85	1,257	0,12
C95/110	79	45983	1,493	256,50	1,249	0,122
C100/115	83	46141	1,455	261,78	1,24	0,124
C105/120	86	46240	1,429	265,78	1,234	0,126

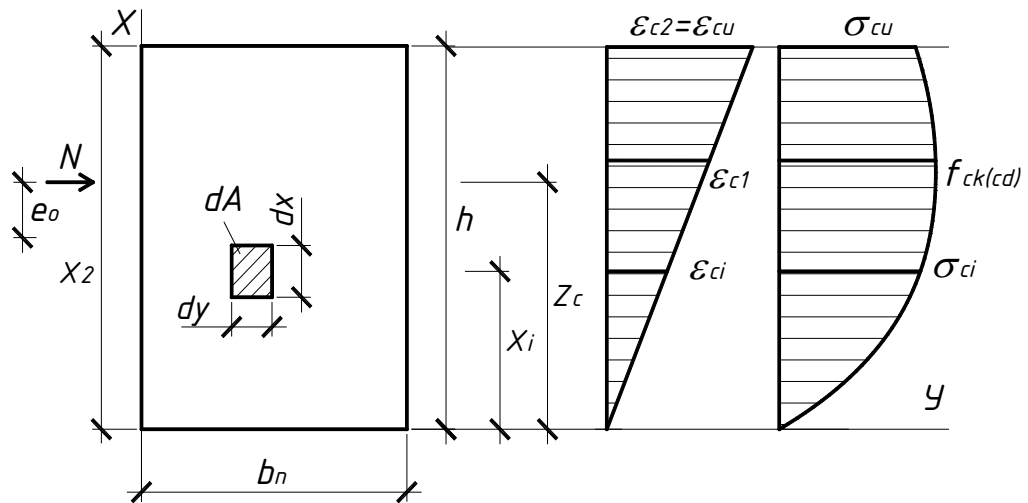


Рисунок 3.29 – Параметри напружено-деформованого стану позацентрово стиснутого бетонного елемента на межі відносно великих ексцентриситетів

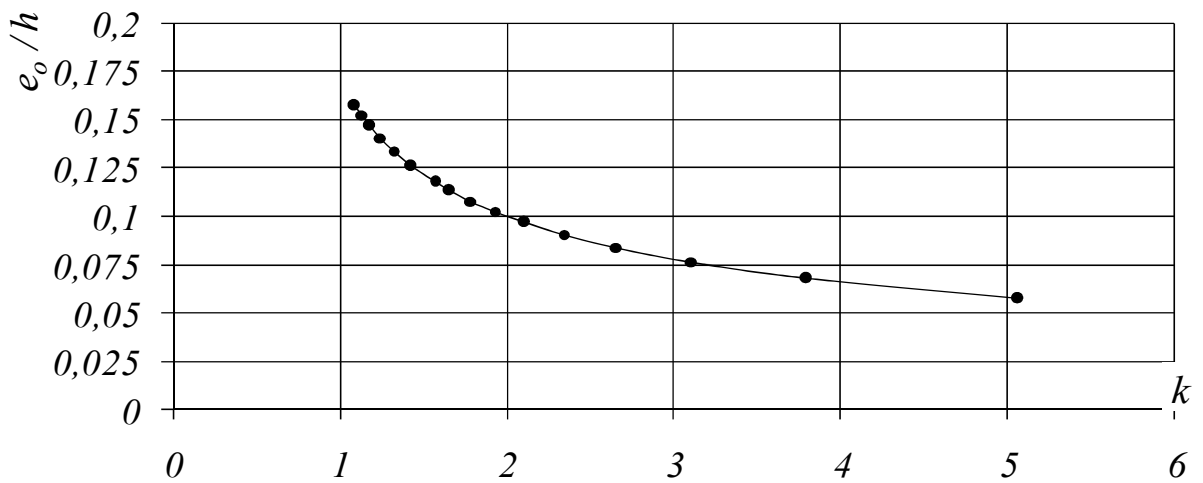


Рисунок 3.30 – Залежність граничних «ядрових» ексцентриситетів від класу бетону

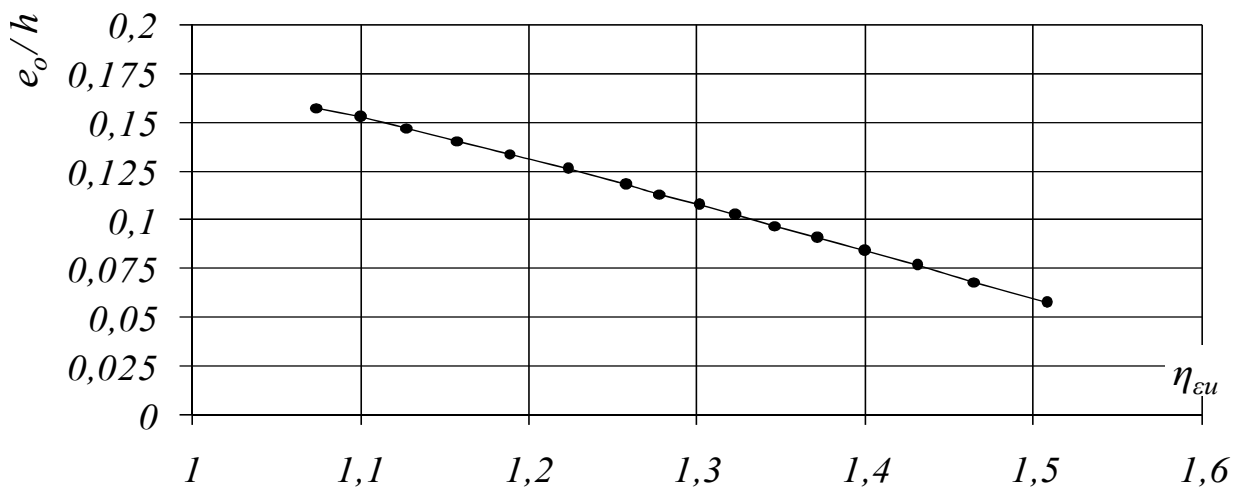


Рисунок 3.31 – Зв'язок відносних «ядрових» ексцентриситетів з граничними деформаціями стиснутого бетону

### 3.4. Розтягнуті бетонні елементи

#### 3.4.1. Центральні розтягнуті елементи

Цілком очевидно, що узагальнена модель деформування залізобетонних елементів конструкцій вимагає використання реальних діаграм стану не тільки стиснутого, але й розтягнутого бетону. Зважаючи на наявність в них висхідної та низхідної віток деформування, назвемо такі діаграми, як і більшість дослідників, повними.

Оскільки низхідні вітки діаграм стану центрально завантажених бетонних елементів реально не існують, то при осьовому розтягу їх теж отримують не за стандартними режимами випробування, а за допомогою спеціальних прийомів, пов'язаних із зміною режиму завантаження. Подібна задача для стиснутого бетону вирішується за неминучого впливу суб'єктивних факторів на характер самої низхідної вітки та на оцінку його деформативних властивостей. Для розтягнутого бетону її розв'язок, навіть в такому форматі, супроводжується додатковими труднощами чисто технічного характеру. Тому, більшість дослідників або повністю нехтують роботою розтягнутого бетону, або приймають спрощені діаграми його деформування без достатнього експериментального чи теоретичного обґрунтування.

Водночас, штучною зміною режиму випробування бетонних зразків неможливо адекватно відобразити величину, характер та повноту ділянки розвантаження розтягнутого бетону при перерозподілі зусиль в реальному залізобетонному елементі. Спробуємо вирішити подібну задачу з допомогою основної деформаційної характеристики перерізу елемента – жорсткості.

Для побудови повної діаграми деформування розтягнутого бетону спочатку розглянемо роботу бетонної призми за осьового розтягу. Оскільки напружено-деформований стан бетонного елемента залежить не тільки від рівня навантаження  $N_t/N_m$ , але й від рівня деформування  $\varepsilon_c/\varepsilon_{c1}$ , то



функцію зміни жорсткості перерізу бетонного елемента за осьового розтягу (рис.3.32) прийемо по аналогії з центральним стиском [197; 220] у вигляді

$$N_t / \varepsilon_{ct} = A_t - B_t \cdot \varepsilon_{ct} / \varepsilon_{ct1} - C_t \cdot N_t / N_{tu}, \quad (3.43)$$

де  $A_t, B_t, C_t$  – параметри, що відображають міцнісні, деформативні та геометричні характеристики розтягнутого стержня;

$\varepsilon_{ct1}$  – критичні деформації розтягнутого бетону за напружень  $f_{ctk}$ ;

$N_{tu}$  – несуча здатність розтягнутого бетонного елемента.

Тоді зусилля  $N_t$ , яке повинне сприйматися бетонним елементом, викликатиме в його поперечному перерізі наступні напруження

$$\sigma_{ct} = (a_t \cdot \varepsilon_{ct} - b_t \cdot \varepsilon_{ct}^2 / \varepsilon_{ct1}) / (1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} / f_{ctk}), \quad (3.44)$$

де  $a_t, b_t, c_t$  – параметри, що відображають міцнісні та деформаційні характеристики розтягнутого стержня;

$A_{ct}$  – площа поперечного перерізу розтягнутого елемента.

Задля визначення параметрів  $a_t, b_t, c_t / N_{tu}$  застосуємо до закону деформування розтягнутого бетону ті ж самі граничні умови, що і до стиснутого: а) при  $\varepsilon_{ct} = 0$   $d\sigma_{ct} / d\varepsilon_{ct} = E_{co}$ ; б) при  $\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ct1}$   $d\sigma_{ct} / d\varepsilon_{ct} = 0$ ; в) при  $\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ct1}$   $\sigma_{ct} = f_{ctk}$ . Після відповідних обчислень отримаємо

$$a_t = E_{co}; \quad b_t = f_{ctk} / \varepsilon_{ct1}; \quad c_t = E_{co} - 2 \cdot f_{ctk} / \varepsilon_{ct1}. \quad (3.45)$$

З урахуванням (3.45) залежність між напруженнями та деформаціями розтягнутого бетону (3.44) прийме остаточний вигляд [197; 220]

$$\sigma_{ct} = \frac{E_{co} \cdot \varepsilon_{ct} - f_{ctk} \cdot (\varepsilon_{ct} / \varepsilon_{ct1})^2}{1 + (E_{co} / f_{ctk} - 2 / \varepsilon_{ct1}) \cdot \varepsilon_{ct}}. \quad (3.46)$$

Одна із основних параметричних точок діаграми стану розтягнутого бетону, що описується функцією (3.46), характеризує критичні деформації бетону  $\varepsilon_{ct1}$  за відповідних максимальних напружень  $f_{ctk}$ . Методологічна обґрунтованість та найважливіші методологічні недоліки найбільш відомих залежностей з їх визначення вже були оцінені раніше (п.1.9). Приймаючи до уваги сказане та використовуючи ті ж самі критерії збіжності,

що і для стиснутого бетону, критичні деформації розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ct1}$  будемо визначати [192; 197] за формулою

$$\varepsilon_{ct1} = k_{t,el} \cdot \varepsilon_{ct1,el} + k_{t,pl} \cdot \varepsilon_{ct1,pl} , \quad (3.47)$$

де  $k_{t,el}$  і  $k_{t,pl}$  – коефіцієнти, що враховують основні особливості роботи розтягнутого бетону в перерізі елемента та розвитку його пружних і пластичних деформацій (рис.3.33).

За так званого «жорсткого» режиму завантаження розтягнутих елементів ( $d\varepsilon_{ct} / dt = const$ ) ці коефіцієнти рекомендується приймати рівними 1,0, а залежність (3.47) остаточно представляти у вигляді

$$\varepsilon_{ct1} = f_{ctk} / E_{co} + (3 - f_{ctk} / 3) \cdot 10^{-5} . \quad (3.48)$$

Перший доданок в цій формулі так само характеризує пружну, а другий – пластичну складові критичних деформацій розтягнутого бетону, які за потреби можна корегувати коефіцієнтами  $k_{t,el}$  і  $k_{t,pl}$  залежно від режиму та швидкості завантаження або тривалості випробувань, структури та виду бетону, його віку і умов твердіння, масштабу зразків, бази вимірювань тощо.

За стандартного «м'якого» режиму випробувань ( $d\sigma_{ct} / dt = const$ ) критичні деформації розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ct1}$  можна описувати рівнянням (3.47), прийнявши, як і для стиснутого бетону,  $k_{t,pl} = 0,78$ , а  $k_{t,el} = 1,05$  – для бетонів міцністю  $f_{ctk} \leq 2,1\text{МПа}$ ,  $k_{t,el} = 1,03$  – для бетонів міцністю  $2,1\text{МПа} < f_{ctk} \leq 3,3\text{МПа}$  і  $k_{t,el} = 1,0$  при  $f_{ctk} > 3,3\text{МПа}$ .

Результати експериментальних досліджень зарубіжних вчених [324; 409; 466; 487; 522], дозволили провести порівняльний аналіз ефективності використання найбільш відомих на сьогодні залежностей з визначення критичних деформацій розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ct1}$  (рис.3.34), запропонованих різними дослідниками [95; 110; 139; 192; 244; 286; 487]. З отриманих статистик, наведених в табл.3.7, видно, що практично всі відомі на сьогодні залежності з прогнозування  $\varepsilon_{ct1}$  показують доволі значні відхилення порівняно з експериментальними даними.

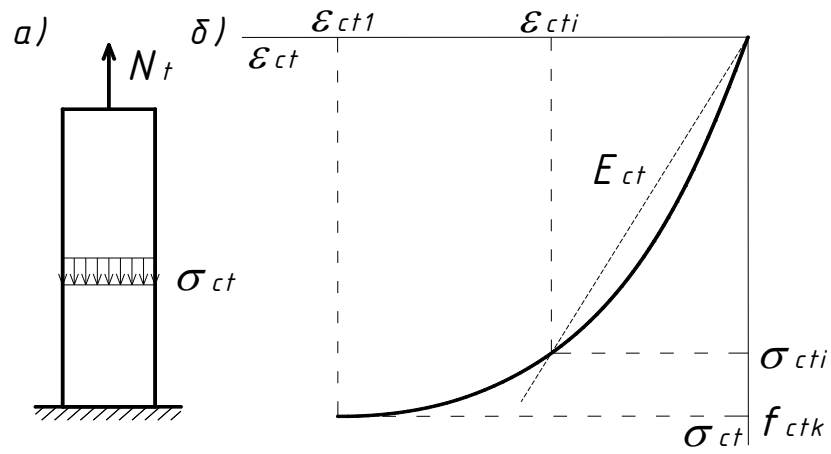


Рисунок 3.32 – До деформування бетонного елемента за осевого розтягу:  
 а – схема зусиль; б – діаграма деформування  $\sigma_{ct} - \epsilon_{ct}$

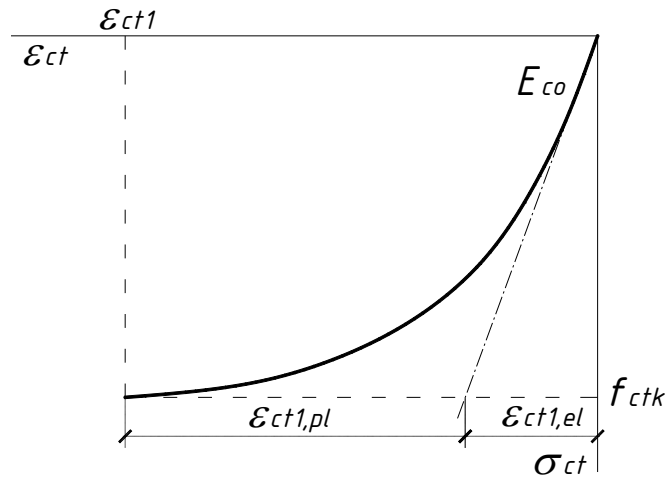


Рисунок 3.33 – До визначення критичних деформацій розтягнутого бетону

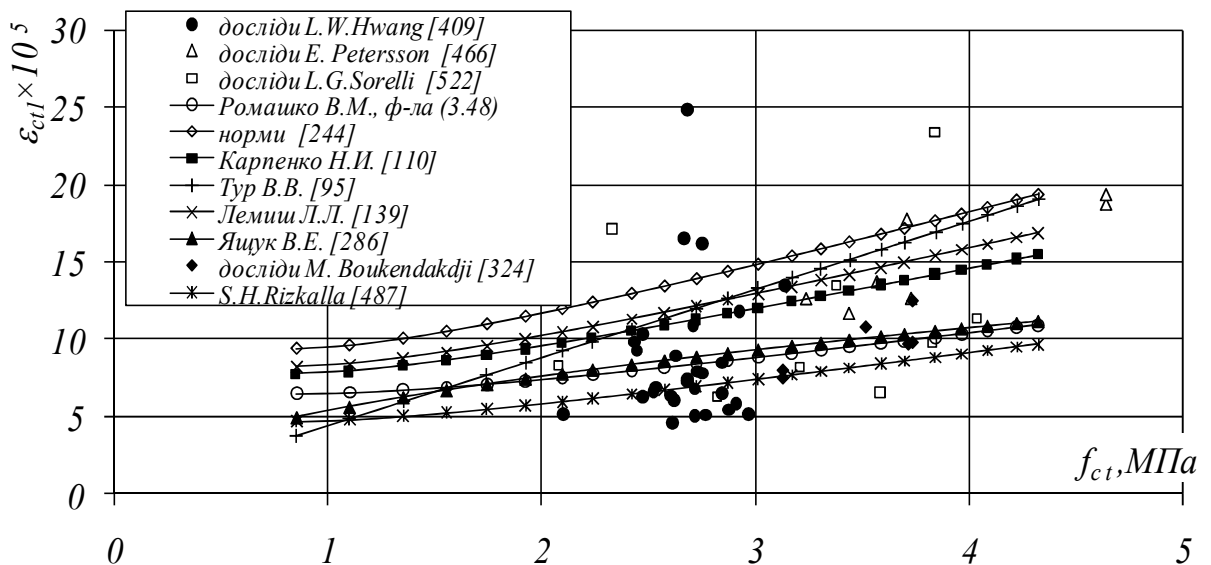


Рисунок 3.34 – Збіжність залежностей різних авторів з визначення критичних деформацій розтягнутого бетону  $\epsilon_{ct1}$  з результатами експериментів

Таблиця 3.7 – До статистичної оцінки залежностей різних авторів з визначення критичних деформацій розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ct1}$

Автори залежностей	Загальні відхилення від дослідних даних, %			
	$\Delta_{\varepsilon, \min}$	$\Delta_{\varepsilon, \max}$	$\Delta_{\varepsilon}$	$\sigma_{\varepsilon}$
Ящук В. Е. [286]	64,8	90,9	6,6	38,8
Rizkalla S.H., Hwang L.W.[487]	75,0	34,7	-31,8	35,0
Норми [244]	44,7	198,8	70,4	92,1
Лемиш Л. Л. [139]	51,6	161,5	49,1	71,5
Карпенко Н. И.[110]	55,1	142,7	37,8	61,3
Тур В. В. [95]	52,6	155,3	50,4	71,7
Ромашко В. М., ф-ла (3.48)	66,5	81,7	1,9	36,0
Примітки: в таблиці $\Delta_{\varepsilon, \min}$ та $\Delta_{\varepsilon, \max}$ – нижня та верхня межі відхилень від дослідних даних, а $\Delta_{\varepsilon}$ і $\sigma_{\varepsilon}$ – середньоарифметичні та стандартні значення цих відхилень.				

І причина тут криється не стільки в функціях з визначення критичних деформацій розтягнутого бетону, скільки в технічних труднощах з отримання повних діаграм його деформування (стану)  $\sigma_{ct} - \varepsilon_{ct}$ . Намагання дослідників отримати низхідні ділянки зазначених діаграм призводить до того, що при випробуванні стандартних зразків пікові напруження  $f_{ctk}$  досягаються в них уже на першому...другому ступенях навантаження [324; 409; 466; 487; 522]. Інакше кажучи, при практично миттєвому завантаженні дослідних зразків пластичні деформації розтягнутого бетону просто не встигають проявитися.

Тим не менше, навіть за таких обставин, з табл.3.7 видно, що формула (3.48) дає одну з найкращих збіжностей з результатами вищезгаданих експериментальних досліджень та дозволяє:

- підходити до оцінки деформування розтягнутого бетону з класичних позицій;
- відтворювати процес деформування бетону розтягнутої та стиснутої зон залізобетонного елемента з єдиних методологічних позицій;

- в разі необхідності враховувати вплив режиму та тривалості навантаження, структури та виду бетону, його віку та умов твердіння на величину критичних деформацій розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ct1}$ .

Оцінюючи основні параметричні точки діаграми  $\sigma_{ct} - \varepsilon_{ct}$ , зупинимося ще й на тій, котра обмежує граничне деформування розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ctu}$ . Застосовуючи екстремальний критерій міцності  $dN / d\varepsilon_{ct} = 0$  до виразу (3.43), отримаємо квадратне рівняння

$$E_{co} - 2 \cdot f_{ctk} \cdot \varepsilon_{ctu} / \varepsilon_{ct1}^2 - (E_{co} - 2 \cdot f_{ctk} / \varepsilon_{ct1}) \cdot \varepsilon_{ctu}^2 / \varepsilon_{ct1}^2 = 0 \quad (3.49)$$

з дійсним коренем  $\varepsilon_{ctu} = \varepsilon_{ct1}$ .

Таким чином, із розв'язку рівняння (3.49) випливає, що коли всі фібри в перерізі центрально розтягнутого бетонного елемента працюють рівномірно, то діаграма  $\sigma_{ct} - \varepsilon_{ct}$  буде закінчуватися критичною точкою  $\varepsilon_{ct1}$ . Інакше кажучи, низхідна вітка діаграми деформування бетону за осового розтягу стандартних зразків існувати не може так само, як і за осового стиску.

### 3.4.2. Деформування позацентрово розтягнутих елементів

Найважливішим параметром, що дозволяє відтворювати процес деформування позацентрово розтягнутих бетонних елементів, так само вважатимемо жорсткість їхнього перерізу. Розглянемо спочатку напружено-деформований стан бетонного елемента, що зазнає позацентрового розтягу з випадковим чи відносно малим ексцентриситетом. Відобразимо поперечний переріз такого елемента, по аналогії з позацентрово стиснутим (п.3.3), нескінченно великою кількістю елементарних ділянок, кожна з яких практично зазнає осового розтягу певної інтенсивності (рис.3.35).

Оскільки жорсткість кожної з таких ділянок змінюється практично лише за рахунок зміни деформативних характеристик

$$dN_t / \varepsilon_{ct} = \sigma_{ct} dA_t / \varepsilon_{ct} = (a_t - b_t \cdot \varepsilon_{ct} / \varepsilon_{ct1} - c_t \cdot dN_t / dN_{tu}) \cdot dA_t, \quad (3.50)$$

то напруження в бетоні кожної із них будуть описуватися неправильною

дробово-раціональною функцією (3.46). У цьому випадку несучу здатність позациентрово розтягнутого бетонного елемента можна визначати за виразом

$$N_t = \iint_{dA} \sigma_{ct} dA = \frac{b_n}{1/r} \int_{\varepsilon_{cto}}^{\varepsilon_{ctu}} \sigma_{ct} d\varepsilon_{ct}, \quad (3.51)$$

при використанні екстремального критерію міцності  $dN_t / d\varepsilon_{ct} = 0$ .

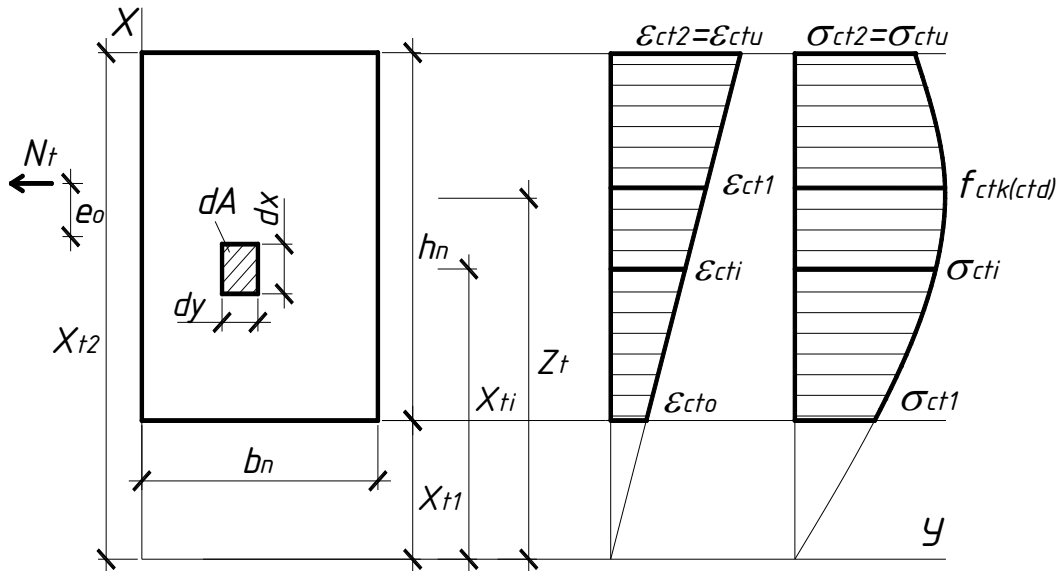


Рисунок 3.35– Параметри напружено-деформованого стану позациентрово розтягнутого бетонного елемента за малих ексцентриситетів

Правда, раніше уже було показано та обґрунтовано (п.3.3), чому подібний параметр  $dN / d\varepsilon_c = 0$  не може виступати екстремальним критерієм вичерпання несучої здатності стиснутих бетонних елементів за їх неоднорідного деформування. Водночас загальновідомо, що міцнісні та деформаційні характеристики стиснутого і розтягнутого бетону суттєво різняться між собою. Тому виникає наступне запитання: наскільки відмінними є загальні параметри граничного стану бетонних елементів за позациентрового стиску та позациентрового розтягу?

Відповідь на поставлене запитання поспробуємо отримати з оцінки НДС елемента за двома загальноприйнятими рівняннями рівноваги

$$N_t = \frac{b_n}{1/r} \int_{\varepsilon_{cto}}^{\varepsilon_{ctu}} \frac{a_t \cdot \varepsilon_{ct} - b_t \cdot \varepsilon_{ct}^2}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}} d\varepsilon_{ct}; \quad (3.52)$$

$$N_t \cdot e = \frac{b_n}{(1/r)^2} \int_{\varepsilon_{cto}}^{\varepsilon_{ctu}} \frac{a_t \cdot \varepsilon_{ct} - b_t \cdot \varepsilon_{ct}^2}{1 + c \cdot \varepsilon_{ct}} d\varepsilon_{ct}, \quad (3.53)$$

де  $\varepsilon_{ctu}$  і  $\varepsilon_{cto}$  – граничні деформації найбільш та найменш розтягнутих волокон бетону в перерізі елементу.

За діаграмою  $N_t - \varepsilon_{ct}$  деформації бетону найбільш розтягнутої грані будуть досягати своїх граничних значень  $\varepsilon_{ctu,N}$  при максимальних зусиллях в розтягнутому бетоні  $N_{tu}$  (рис.3.36). Теж ж саме властиво і для діаграми  $M_t - 1/r$ . По мірі деформування елементу внутрішні зусилля  $M_t$  зростатимуть як за рахунок рівнодійної зусиль в розтягнутому бетоні  $N_t$ , так і за рахунок плеча цього зусилля до нейтральної лінії  $z_t$ . Оскільки останнє зменшуватися не може, то очевидно, що момент внутрішніх зусиль  $M_t$  досягатиме свого максимального значення одночасно з рівнодійною  $N_t$ .

Таким чином, граничні деформації розтягнутого бетону можуть бути визначені з рівняння (3.52) при застосуванні до нього загальновідомого критерію міцності  $dN_t / d\varepsilon_{ct} = 0$ . Результатом диференціювання згаданого інтегрального виразу є трансцендентне рівняння

$$\begin{aligned} & -\frac{b_t \cdot (1 + m_t)}{2 \cdot (a_t + b_t / c_t)} - \frac{1}{\varepsilon_{ctu} \cdot (1 - m_t)} \cdot \left( \frac{1}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ctu}} - \right. \\ & \left. - \frac{m_t}{1 + c_t m_t \varepsilon_{ctu}} \right) + \frac{1}{c_t \varepsilon_{ctu}^2 (1 - m_t)} \cdot \ln \frac{1 + c_t \varepsilon_{ctu}}{1 + c_t m_t \varepsilon_{ctu}} = 0, \end{aligned} \quad (3.54)$$

яке, подібно до (3.37) та (3.38), теж не має точного аналітичного рішення.

Водночас, використовуючи загальновідомі методи числового аналізу, розв'язок рівняння (3.54) з доволі високою точністю (достовірністю  $R^2 = 1,001$ ) вдалося представити залежністю, аналогічною до (3.39)

$$\eta_{ctu} = 1 + \frac{(0,66 - 0,2(0,3 - m_t)^2)(1 - m_t^{4/3})(1 - m_t / k_t) \sqrt{(\ln k_t)^{(1,4 - m_t^{4/3})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot m_t^2)(k_t - 2) \ln(36 / k_t^2 - 2(0,1 - m_t)))^2}, \quad (3.55)$$

де  $m_t = \varepsilon_{cto} / \varepsilon_{ct2}$  – параметр неоднорідності деформування розтягнутого бетону (рис. 3.35);

$\eta_{ctu} = \varepsilon_{ctu} / \varepsilon_{ct1}$  – рівень граничних деформацій найбільш розтягнутих

волокон бетону в перерізі (рис. 3.35, 3.37);

$k_t = E_{co} \cdot \varepsilon_{ct1} / f_{ctk}$  – характеристика деформативності розтягнутого бетону.

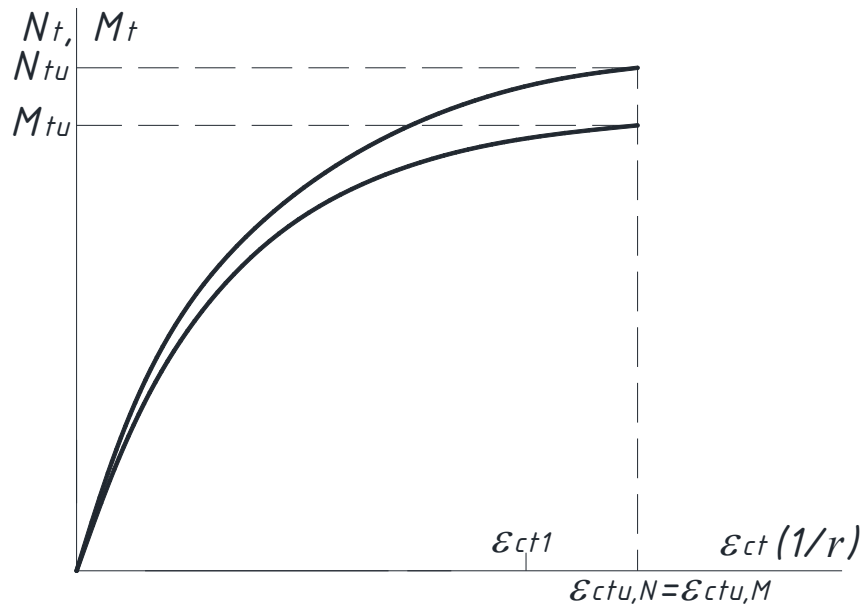


Рисунок 3.36 – Граничні деформації бетону позациентрово розтягнутого залізобетонного елемента за діаграмами  $N_t - \varepsilon_{ct}$  та  $M_t - 1/r$

Детальний аналіз вищенаведених графіків (рис.3.37) дозволяє зробити висновок про те, що значення граничних деформацій розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ctu}$ , які зростають зі ступенем неоднорідності деформування бетону ( $m_t = \varepsilon_{cto} / \varepsilon_{ctu}$ ), у розрахунках слід обмежувати за екстремальним критерієм міцності  $dN_t / d\varepsilon_{ct} = 0$ .

Для випадку, що знаходиться на межі відносно малих та великих ексцентриситетів (рис.3.38), залежність (3.55) суттєво спрощується і рівень граничних деформацій найбільш розтягнутих фібр бетону при  $\varepsilon_{cto} = 0$  та  $\sigma_{cto} = 0$  можна обчислювати за виразом

$$\eta_{ctu} = 1 + \frac{0,642 \cdot \sqrt{(\ln k_t)^{1,4}}}{1 + ((k_t - 2) / 6 \cdot \ln(36 / k_t^2 - 0,2))^2} \cdot \quad (3.56)$$

Проведені дослідження підтверджують той факт, що пластичні властивості бетону зокрема та його деформативність загалом залежать від виду напружено-деформованого стану, в якому він перебуває (табл. 3.8).



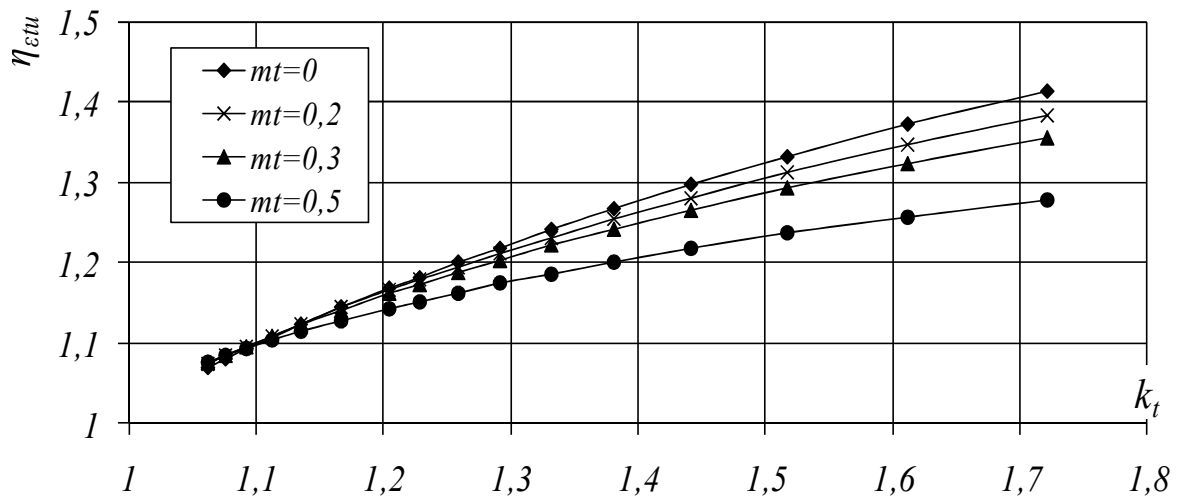


Рисунок 3.37 – Граничні деформації бетону в позациентрово розтягнутих бетонних елементах за критерієм міцності  $dN_t / d\varepsilon_{ct} = 0$  залежно від ступеню неоднорідності деформування  $m_t$

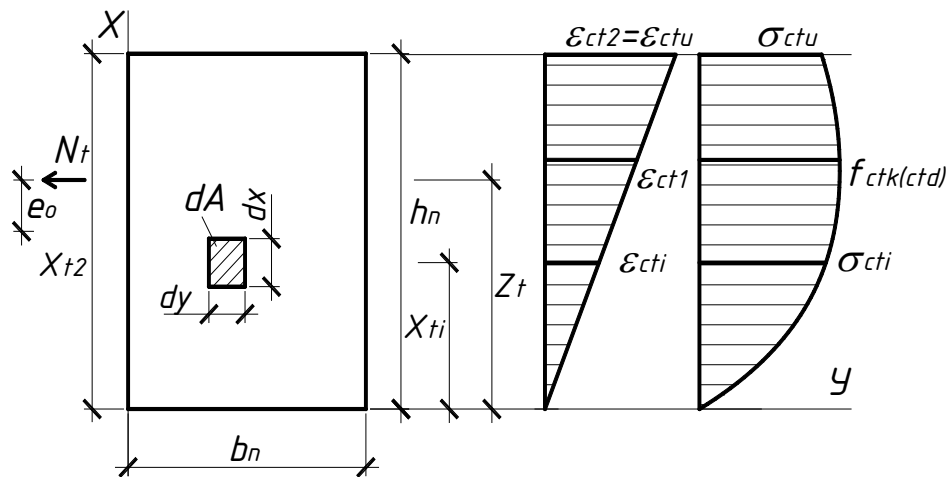


Рисунок 3.38 – Параметри напружено-деформованого стану позациентрово розтягнутого бетонного елемента на межі малих і великих ексцентриситетів

Таблиця 3.8 – Порівняння характеристик деформативності бетону в позациентрово розтягнутому та позациентрово стиснутому елементах

Клас бетону	$E_{co}$ , МПа	$f_{ck}$ , МПа	$k = E_{co} / E_{ct1}$	$\eta_{ai}$	$f_{ctk}$ , МПа	$k_t = E_{co} / E_{ct1}$	$\eta_{\varepsilon tu}$	$k / k_t$	$\eta_{ai} / \eta_{\varepsilon tu}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C8/10	22610	7,5	5,061	1,507	0,851	1,722	1,413	2,939	1,067
C12/15	28046	11	4,374	1,482	1,098	1,673	1,396	2,614	1,062
C16/20	32394	15	3,796	1,455	1,350	1,612	1,372	2,355	1,060
C20/25	35148	18,5	3,413	1,436	1,553	1,562	1,351	2,185	1,063

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C25/30	37241	22	3,109	1,420	1,743	1,517	1,332	2,037	1,066
C30/35	38864	25,5	2,862	1,405	1,923	1,477	1,313	1,938	1,070
C32/40	40144	29	2,657	1,391	2,095	1,441	1,296	1,844	1,073
C35/45	41036	32	2,508	1,380	2,238	1,413	1,283	1,775	1,076
C40/50	42000	36	2,340	1,366	2,420	1,381	1,266	1,694	1,079
C45/55	42682	39,5	2,214	1,354	2,575	1,355	1,253	1,634	1,081
C50/60	43248	43	2,105	1,343	2,725	1,332	1,241	1,580	1,082
C53/65	43722	46,5	2,010	1,333	2,871	1,311	1,229	1,533	1,085
C56/70	44123	50	1,926	1,322	3,013	1,292	1,219	1,491	1,084
C60/75	44511	54	1,842	1,311	3,172	1,273	1,208	1,447	1,085
C65/80	44801	57,5	1,777	1,301	3,307	1,257	1,199	1,414	1,085
C70/85	45053	61	1,718	1,292	3,440	1,243	1,190	1,382	1,086
C75/90	45304	65	1,659	1,282	3,589	1,228	1,182	1,351	1,085
C80/95	45472	68	1,618	1,274	3,698	1,217	1,175	1,329	1,084
C85/100	45671	72	1,568	1,265	3,842	1,204	1,167	1,302	1,084
C90/105	45828	75,5	1,529	1,257	3,966	1,194	1,161	1,281	1,083
C95/110	45971	79	1,493	1,249	4,087	1,184	1,155	1,261	1,081
C100/115	46120	83	1,455	1,240	4,224	1,174	1,148	1,239	1,080
C105/120	46223	86	1,429	1,234	4,325	1,167	1,144	1,225	1,079

Сказане прослідковується не тільки в стадії критичної рівноваги бетонних елементів при  $\varepsilon_c = \varepsilon_{c1}$  та  $\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ct1}$  (рис. 3.39), але й і в стадії їх граничної рівноваги при  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$  та  $\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}$  (рис. 3.40).

Таким чином, моделюючи роботу бетонних та залізобетонних елементів, слід пам'ятати про кардинальні відмінності в потенційних можливостях деформування розтягнутого та стиснутого бетону.

Деформування розтягнутого з великими ексцентриситетами бетонного елементу заслуговує певної уваги лише тому, що в його перерізі завжди присутня як стиснута, так і розтягнута зона бетону. Напружено-деформований стан такого елементу (рис.3.41) загалом може бути описаний двома загальноприйнятими умовами рівноваги

$$N_c = N_{ct}; \quad (3.57)$$

$$M = M_c + M_{ct}. \quad (3.58)$$

Відповідні зусилля в стиснутій та розтягнутій зонах бетонного елемента, шириною  $b_n$ , будемо обчислювати за формулами

$$N_c = \frac{b_n}{1/r} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c; \quad (3.59)$$

$$N_{ct} = \frac{b_n}{1/r} \int_{-\varepsilon_{ctu}}^0 \frac{a_t \cdot \varepsilon_{ct} - b_t \cdot \varepsilon_{ct}^2}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}} d\varepsilon_{ct}; \quad (3.60)$$

$$M_c = \frac{b_n}{(1/r)^2} \int_0^{\varepsilon_{c2}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c; \quad (3.61)$$

$$M_{ct} = \frac{b_n}{(1/r)^2} \int_{-\varepsilon_{ctu}}^0 \frac{a_t \cdot \varepsilon_{ct}^2 - b_t \cdot \varepsilon_{ct}^3}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}} d\varepsilon_{ct}, \quad (3.62)$$

де  $\varepsilon_{c2}$  – поточні деформації найбільш стиснутої фібри бетону;

$1/r$  – кривина бетонного елемента, що рівна  $1/r = \varepsilon_{ctu} / x_{ct} = \varepsilon_{c2} / x_c$ .

Цілком очевидно, що процес деформування розтягнутого бетонного елемента триватиме до моменту утворення першої нормальної тріщини, коли деформації найбільш розтягнутих крайових волокон досягнуть граничних значень. Із-за відсутності екстремуму на діаграмі стану елемента  $M - 1/r$  величину зазначених деформацій не можна обчислювати за критерієм несучої здатності  $dM/d(1/r) = 0$ . Вище уже було обґрунтовано та показано, що максимальний момент від зусиль в розтягнутому бетоні  $M_{ct} = \max$ , а отже і момент тріщиноутворення в бетоні  $M_{cr}$ , можна прогнозувати за його граничними деформаціями, визначеними за критерієм міцності бетону  $dN_{ct}/d\varepsilon_{ct} = 0$ .

Наближений розв'язок трансцендентної функції, отриманої після диференціювання інтегрального рівняння (3.60), можна представити як і за позacentрового розтягу залежністю (3.56).

Спільний розв'язок рівнянь (3.57)...(3.62) з використанням (3.56) дозволив визначити параметри напружено-деформованого стану розтягнутих бетонних елементів безпосередньо перед утворенням нормальних тріщин при  $\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}$ . Найважливішими серед зазначених параметрів є [195; 197; 199]:

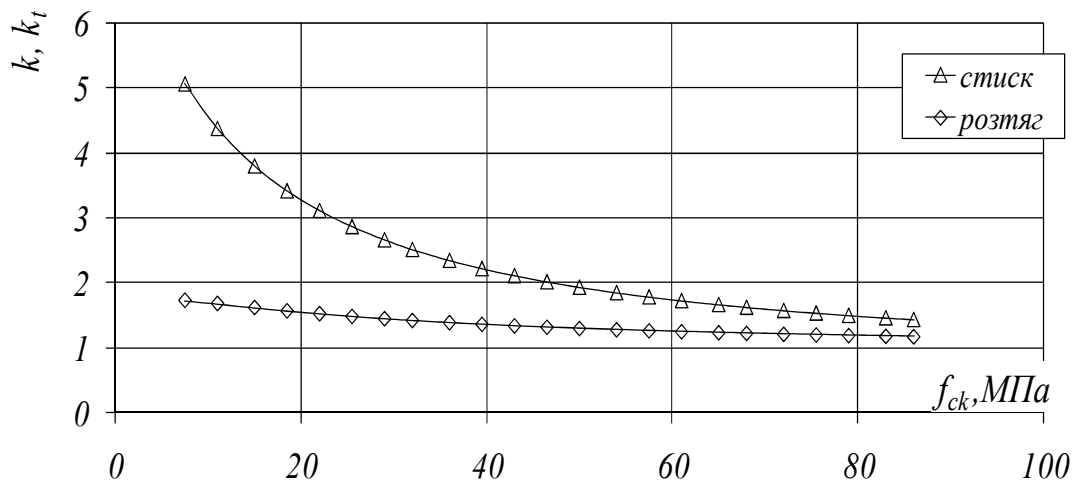


Рисунок 3.39 – Вплив класу бетону на характеристики його деформативності при позацентровому розтягу та стиску

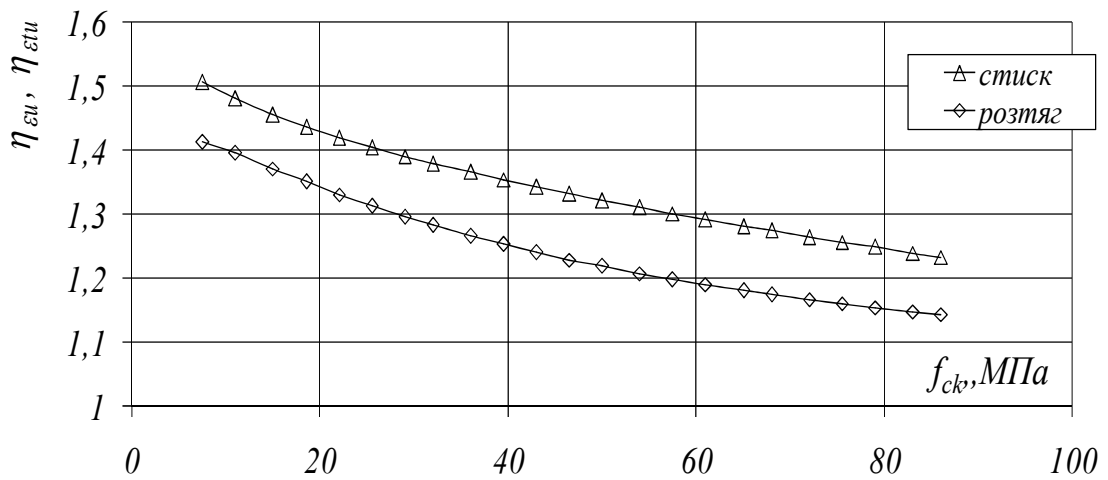


Рисунок 3.40 – Вплив класу бетону на його граничну деформативність при позацентровому розтягу та стиску

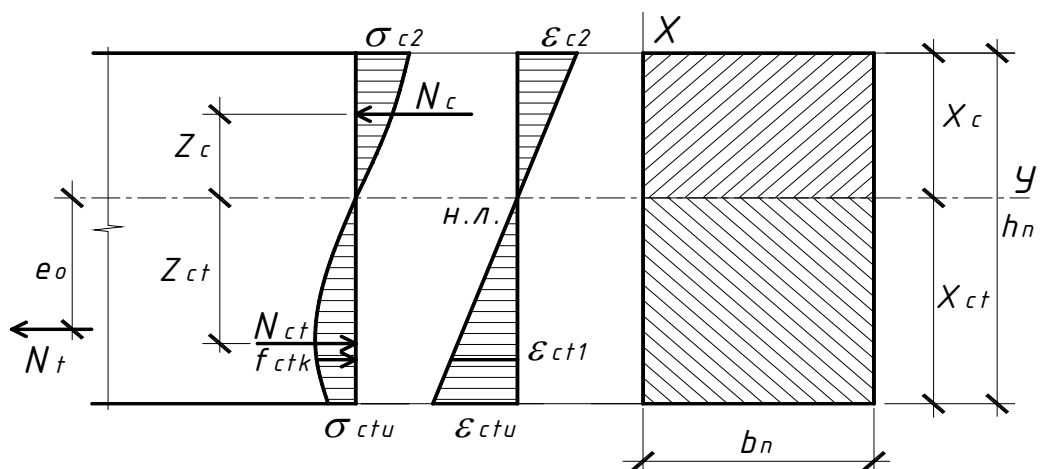


Рисунок 3.41 – Напружено-деформований стан позацентрово розтягнутого бетонного елемента в момент утворення нормальних тріщин

ступінь деформування найбільш стиснутих крайових волокон бетонного перерізу ( $\eta_\varepsilon = \varepsilon_{c2} / \varepsilon_{c1}$ ); висота його стиснутої та розтягнутої зон ( $x_c$  та  $x_{ct}$ ); відстані від нейтральної лінії до рівнодійних зусиль в зазначених зонах ( $z_c$  та  $z_{ct}$ ); кривина та жорсткість перерізу елемента ( $1/r$  і  $D$ ) тощо. Їх значення для елементів з бетонів різних класів наведені в табл. 3.9.

Таблиця 3.9 – Основні параметри напружено-деформованого стану розтягнутого бетонного елемента в момент утворення нормальних тріщин

Клас бетону	$\varepsilon_{ctu} / \varepsilon_{ct1}$	$\varepsilon_{c2} / \varepsilon_{c1}$	$x_{ct} / h$	$x_c / h$	$z_{ct} / x_{ct}$	$z_c / x_c$	$D_{cr} / D_o$
1	2	3	4	5	6	7	8
C8/10	1,413	0,04388	0,55416	0,44584	0,59564	0,65920	0,67971
C12/15	1,396	0,04317	0,55245	0,44755	0,59835	0,66071	0,70028
C16/20	1,372	0,04306	0,54906	0,45094	0,60209	0,66190	0,72461
C20/25	1,351	0,04318	0,54585	0,45415	0,60543	0,66267	0,74472
C25/30	1,332	0,04337	0,54270	0,45730	0,60867	0,66327	0,76329
C30/35	1,313	0,04359	0,53972	0,46028	0,61179	0,66376	0,78041
C32/40	1,296	0,04380	0,53700	0,46300	0,61475	0,66416	0,79609
C35/45	1,283	0,04400	0,53469	0,46531	0,61717	0,66445	0,80857
C40/50	1,266	0,04419	0,53207	0,46793	0,62016	0,66477	0,82352
C45/55	1,253	0,04435	0,52989	0,47011	0,62260	0,66501	0,83546
C50/60	1,241	0,04450	0,52783	0,47217	0,62492	0,66522	0,84649
C53/65	1,229	0,04460	0,52605	0,47395	0,62704	0,66545	0,85646
C56/70	1,219	0,04468	0,52440	0,47560	0,62905	0,66554	0,86561
C60/75	1,208	0,04475	0,52267	0,47733	0,63117	0,66569	0,87515
C65/80	1,199	0,04479	0,52128	0,47872	0,63292	0,66580	0,88285
C70/85	1,190	0,04482	0,51995	0,48005	0,63454	0,66590	0,88990
C75/90	1,182	0,04482	0,51865	0,48135	0,63626	0,66600	0,89726
C80/95	1,175	0,04481	0,51772	0,48228	0,63750	0,66606	0,90246
C85/100	1,167	0,04477	0,51656	0,48344	0,63901	0,66614	0,90875
C90/105	1,161	0,04473	0,51565	0,48435	0,64025	0,66620	0,91384
C95/110	1,155	0,04467	0,51480	0,48520	0,64142	0,66625	0,91858
C100/115	1,148	0,04460	0,51386	0,48614	0,64267	0,66630	0,92359
C105/120	1,144	0,04454	0,51320	0,48680	0,64356	0,66634	0,92710

З аналізу отриманих результатів випливає, що нелінійний зв'язок між напруженнями і деформаціями розтягнутого бетону проявляється тим сильніше, чим слабшим є клас бетону, а вплив класу бетону на відносну кривину та ступінь падіння жорсткості бетонного елемента в момент утворення тріщин є нелінійним (рис. 3.42 і 3.43). Підтверджено також, що до моменту утворення нормальних тріщин бетон стиснутої зони в неармованих елементах практично деформується пружно (табл. 3.9).

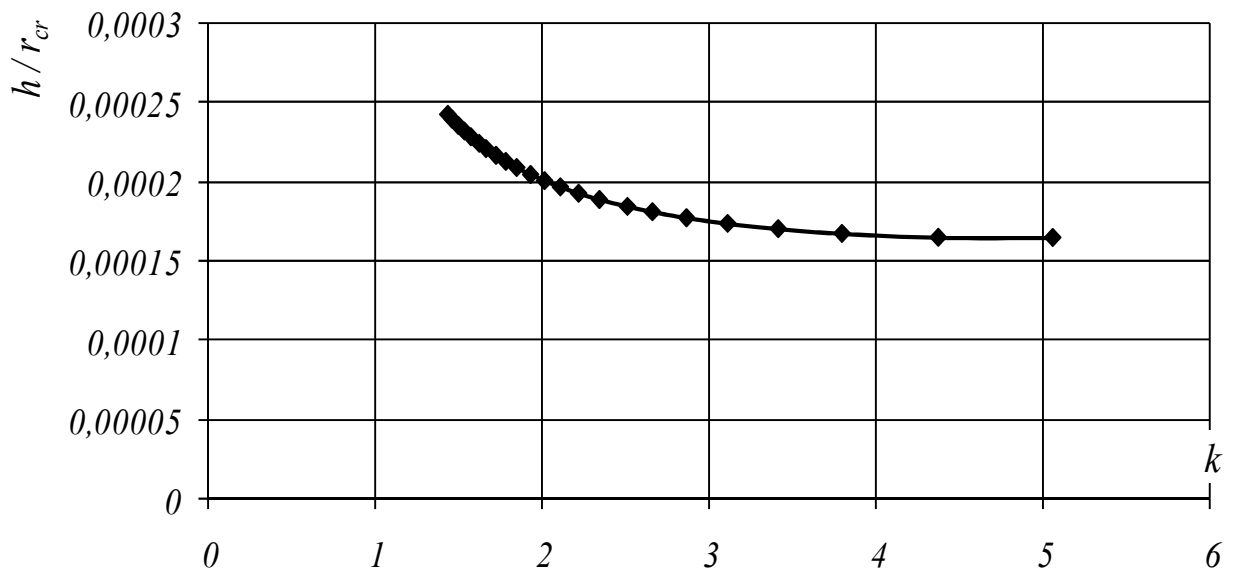


Рисунок 3.42 – Вплив класу бетону на відносну кривину позациентрово розтягнутого елемента в момент утворення нормальних тріщин ( $M = M_{cr}$ )

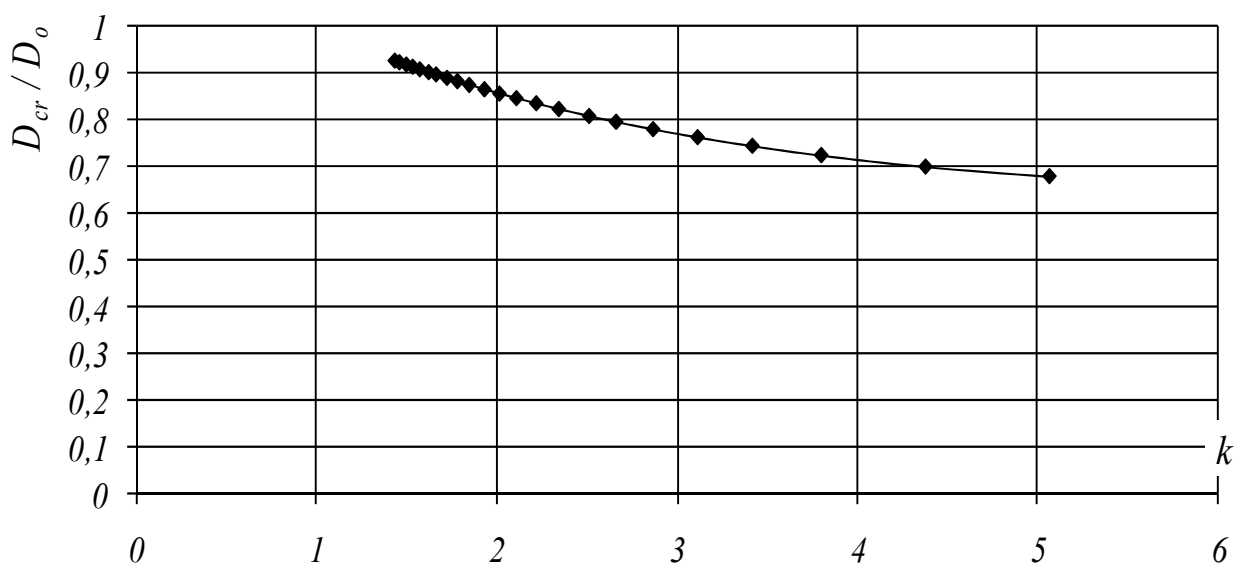


Рисунок 3.43 – Вплив класу бетону на падіння жорсткості позациентрово розтягнутого елемента в момент утворення нормальних тріщин ( $M = M_{cr}$ )

### 3.5. Висновки

1. Із-за непропорційного накопиченням пластичних деформацій функція січного модуля деформацій бетону  $E_{cc}$  пов'язана як з рівнем його завантаження  $\eta_c = \sigma_c / f_{ck}$ , так і з рівнем деформування  $\eta_\varepsilon = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$  – нелінійно.
2. Сукупності графіків  $E_{cc} - \eta_c$  за різних швидкостей завантаження утворюють так звані «віялові» діаграми січного модуля деформацій бетону, криволінійність кожної з яких обумовлена швидкістю деформування бетону. За будь-якими трьома експериментальними точками можна побудувати графік залежності  $E_{cc} - \eta_c$  та спрогнозувати як початковий модуль пружності  $E_{co}$ , так і критичне значення модуля деформацій бетону  $E_{cf}$ .
3. В деформаційно-силовій моделі співвідношення між початковими та середніми (нормованими) значеннями модуля пружності бетону  $E_{co} / E_{cm}$  не є сталими, як це прийнято в деформаційних моделях, а зменшується зі зростанням класу (міцності) бетону, підтверджуючи тим самим зниження його деформативності. Сам початковий модуль пружності бетону  $E_{co}$  хоч і є величиною, яка не залежить ні від виду навантаження, ні від швидкості його прикладання, не може бути унормованим у відповідних документах.
4. Основними перевагами запропонованих залежностей (3.25) і (3.26) є те, що вони забезпечують класичний підхід до визначення критичних деформацій стиснутого бетону та мають одну з найкращих збіжностей з результатами експериментальних досліджень. Вони можуть претендувати на певну універсальність, оскільки дозволяють безпосередньо чи опосередковано відобразити вплив режиму та тривалості навантаження, структури та виду бетону, його віку та умов твердіння на величину  $\varepsilon_{c1}$  в діаграмах  $\sigma_c - \varepsilon_c$ .
5. Номінальні значення граничних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  у розрахунках необхідно обмежувати за екстремальним критерієм несучої

здатності  $dM/d(1/r)=0$  і лише при осьовому стиску – за екстремальним критерієм міцності  $dN/d\varepsilon_c=0$ .

6. Чим вищим є ступінь неоднорідності деформування стиснутого бетону (чим меншим є параметр  $m = \varepsilon_{co} / \varepsilon_{c2}$ ), тим більшими можуть бути його граничні деформації  $\varepsilon_{cu}$  в перерізі бетонного елемента.
7. Низхідну вітку діаграми деформування розтягнутого бетону  $\sigma_{ct} - \varepsilon_{ct}$  у розрахунках слід обмежувати більш суттєво порівняно зі стиснутим, а граничні деформації розтягнутого бетону  $\varepsilon_{ctu}$  слід обмежувати лише за екстремальним критерієм його міцності  $dN_t/d\varepsilon_{ct}=0$ .
8. В деформаційно-силовій моделі вплив класу бетону на відносну кривину  $h/r$  та ступінь падіння жорсткості  $D_{cr}/D_o$  позацентрово завантаженого бетонного елемента є нелінійним.

Матеріали розділу опубліковані в роботах [75; 192; 195; 197; 199-201; 205; 206; 208; 216; 219-221; 227; 230]



## РОЗДІЛ 4

### ОСНОВИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ДЕФОРМУВАННЯ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

#### 4.1. Загальні положення

Деформування бетону в залізобетонних елементах конструкцій багато у чому близьке або подібне до його деформування в бетонних аналогах. Та все ж із-за наявності арматури бетон в перерізі таких елементів, навіть за їх осьового навантаження, може працювати не тільки на висхідних, але і на низхідних вітках діаграми його стану. Як показують результати численних експериментальних досліджень [23; 63; 144; 170; 188; 189; 267; 270; 284; 493; 538], остання властива для елементів, армованих високоміцною арматурою, або ж при поєднанні в них бетонів низьких класів та звичайної арматури (рис.4.1). Робота ж елементів, виготовлених з бетонів середніх та високих класів при використанні звичайної арматури, зазвичай супроводжується деформуванням бетону лише на висхідних вітках (рис.4.2) [194; 197].

З вищенаведених графіків видно, що і початок, і закінчення стадії руйнування центрально стиснутого залізобетонного елемента (рис.4.1 та 4.2) прямо чи опосередковано пов'язані як з критичними деформаціями бетону  $\varepsilon_{c1}$ , так і з деформаціями  $\varepsilon_{so}$ , що відповідають фізичній або умовній межі текучості використаної арматури. Спільна робота бетону і арматури в залізобетонному елементі аж ніяк не означає прямої пропорційності їх деформування. Якщо в арматурі досить тривалий час проявляються лише пружні деформації, то в бетоні вже при досить низьких рівнях завантаження починають проявлятися пластичні деформації. І саме з цього моменту в залізобетонному елементі, на відміну від бетонного, розпочнеться перерозподіл напружень між бетонними фібрами (волокнами) та арматурними стержнями. Внаслідок такого перерозподілу останні почнуть «стримувати» деформування перших, а сам режим завантаження бетону стане поступово

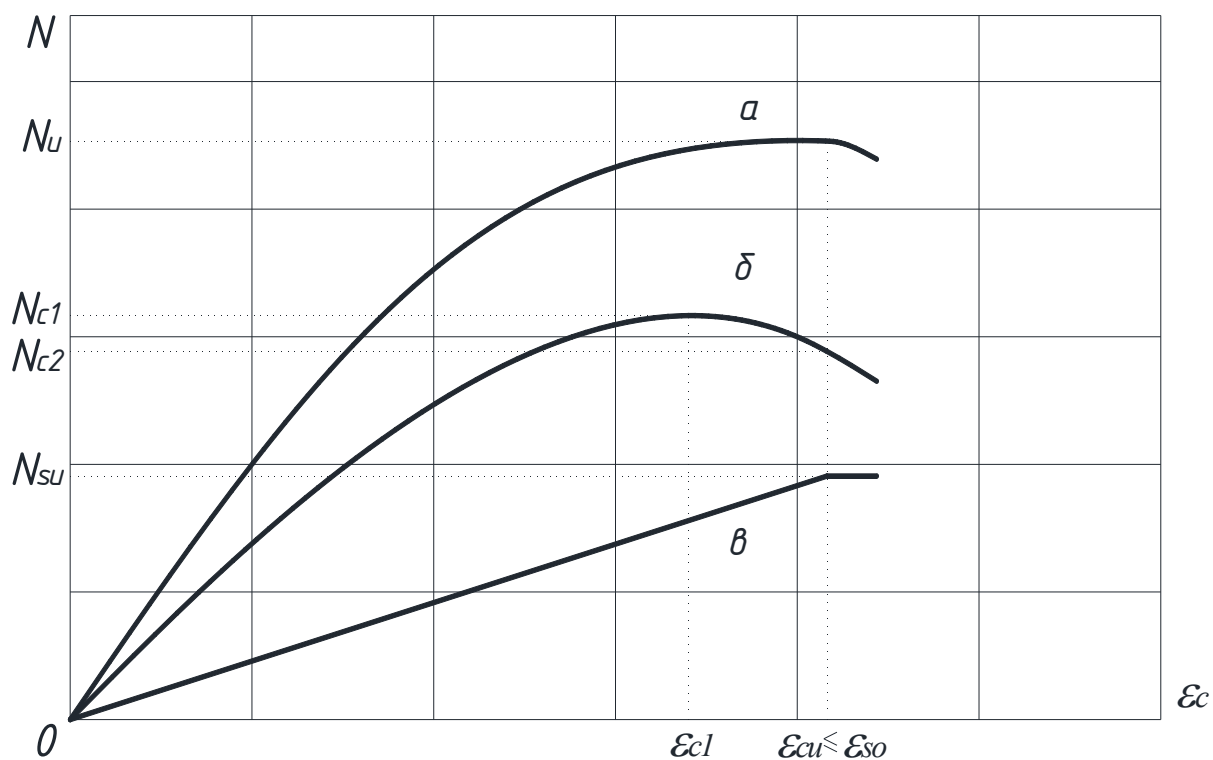


Рисунок 4.1 – Характер діаграм стану залізобетонного елемента (*a*), бетону (*б*) та арматури (*в*) за осьового стиску при  $\epsilon_{c1} < \epsilon_{so}$

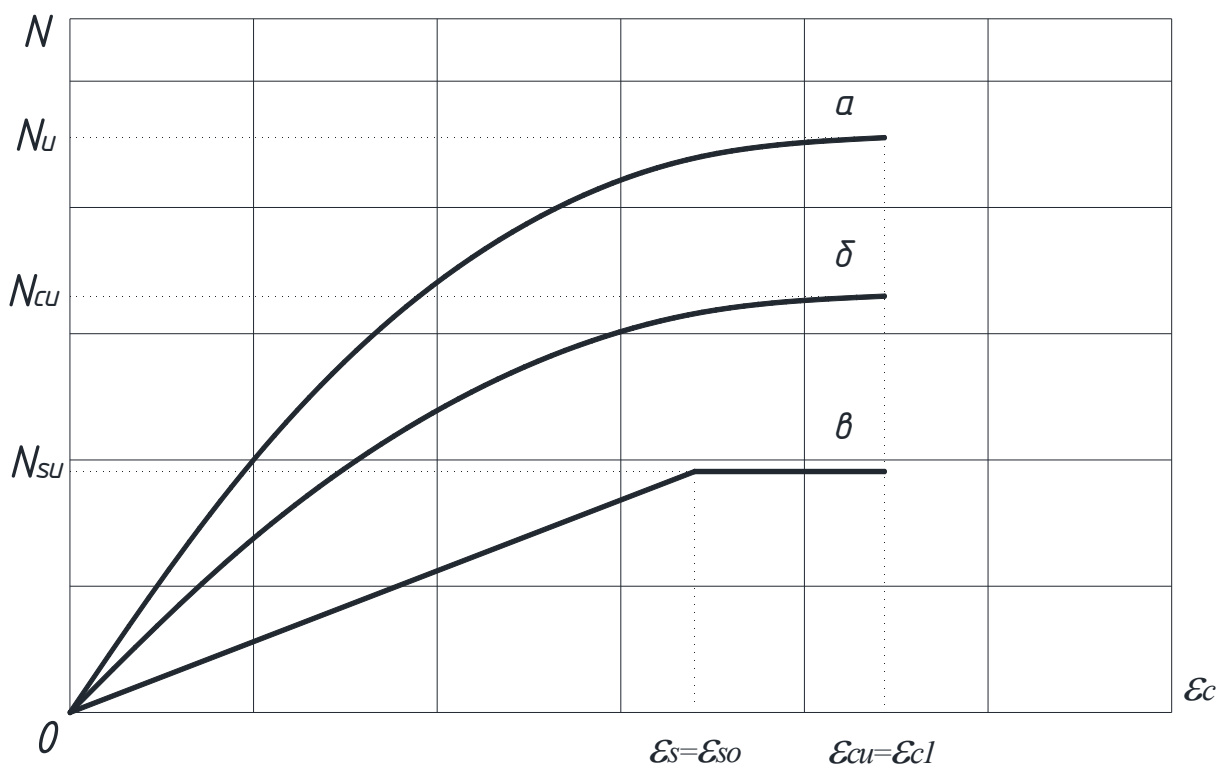


Рисунок 4.2 – Характер діаграм стану залізобетонного елемента (*a*), бетону (*б*) та арматури (*в*) за осьового стиску при  $\epsilon_{c1} \geq \epsilon_{so}$

перетворюватися з «м'якого» у змішаний з «жорстким». Інакше кажучи, якщо після досягнення найбільш напруженими бетонними волокнами критичних деформацій бетону  $\varepsilon_{c1}$  в перерізі елемента будуть залишатися фібри (волокна, стержні) з більшою жорсткістю від вказаних, то перші зможуть працювати і далі, але вже на низхідній вітці діаграми стану аж до порушення рівноваги зусиль в зазначеному перерізі елемента (рис.4.1).

Цілком очевидно, що потенційні можливості роботи бетону в стиснутих залізобетонних стержнях прямо залежать від параметрів їх армування. Адже саме арматура через свій клас (модуль пружності  $E_s$ ), долю (коефіцієнт армування  $\rho_l$ ) та положення (відстань до нейтральної лінії  $x_s$ ) в перерізі залізобетонного елемента може створювати та забезпечувати певну ступінь «жорсткості» режиму завантаження бетону.

Крім того слід зауважити, що протяжність низхідної вітки діаграми стану бетону залежатиме ще й від самого виду напружено-деформованого стану залізобетонних елементів. Сказане певною мірою підтверджується результатами експериментальних досліджень [49; 137; 154; 178; 462], з яких випливає, що жорсткість фібр (волокон) бетону в перерізі залізобетонного елемента змінюється з різною інтенсивністю залежно від осьового, позацентрового чи косоного стиску, плоского чи косоного згину .

В цілому ж тривалість деформування залізобетонного елемента прямо пов'язана з моментом втрати його несучої здатності та закінчується з порушенням відповідних рівнянь рівноваги. Тому величина граничних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  в такому елементі хоч і буде завжди різною, але визначатиметься відповідно до жорсткості його розрахункового перерізу за узагальненим виразом екстремального критерію несучої здатності  $dM/d(1/r) = 0$  (при осьовому завантаженні – за  $dN/d\varepsilon_c = 0$ ).

Таким чином, весь процес деформування будь-якого залізобетонного елемента можна прогнозувати аж до моменту руйнування за узагальненою діаграмою його стану  $M = f(1/r)$  (при осьовому завантаженні – за діаграмою

$N = f(\varepsilon_c)$ ). Зрозуміло, що подібний крок стане можливим тоді, коли буде відомим характер зміни жорсткості залізобетонного елемента в загальному випадку його деформування  $M/(1/r) = \Sigma(E_i I_i)$  або ж за осьового навантаження  $-N/\varepsilon_c = \Sigma(E_i A_i)$ .

#### 4.2. Основні характеристики деформування арматури

Сьогодні для армування залізобетонних конструкцій однаково широко застосовують як «м'які», так і «тверді» арматурні сталі. Діаграми їх реального деформування описуються, як правило, достатньо складними математичними залежностями. Однак, у силу відносної однорідності матеріалу, в розрахунках залізобетонних конструкцій більшість дослідників використовують «умовні» або спрощені діаграми деформування арматурних сталей [7; 25; 50; 92; 100; 110; 178]. Дуже важливо, що основні параметричні точки таких діаграм доволі точно узгоджуються з унормованими характеристиками відповідних сталей [122; 243; 248; 376; 382].

Спрощені фізичні залежності стану арматурних стержнів в перерізі елемента приймаються, зазвичай, у вигляді лінійних функцій  $\sigma_s = f(\varepsilon_s)$  залежно від класу та типу арматури.

Загальновідомо, що початкові деформації «м'яких» арматурних сталей різних класів на стадії їх текучості коливаються в незначних межах і можуть прийматися рівними  $\varepsilon_{so} = 200 \cdot 10^{-5}$ . Якщо ж говорити про кінцеві деформації такої арматури на зазначеній стадії, то вони можуть змінюватися в доволі широкому діапазоні та сягати навіть  $\varepsilon_{yk} = 2000 \cdot 10^{-5}$ , а за повного видовження при її розриві –  $\varepsilon_{uk} = (14000 \dots 25000) \cdot 10^{-5}$  [19; 73; 102; 110; 249; 340; 439]. Водночас результати експериментальних досліджень засвідчують [20; 83; 340; 439], що граничні деформації арматурних сталей у складі залізобетонних конструкцій, навіть в момент втрати їх несучої здатності, практично не перевищують  $\varepsilon_{uk} = (2000 \dots 2500) \cdot 10^{-5}$ . Таким чином, виходячи із

вищесказаного, діаграми деформування арматурних сталей з фізичною межею текучості доцільно представляти дволінійними залежностями за аналогією з діаграмою Прандтля (рис.4.3, а)

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \text{ (при } 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{so} \text{)}; \quad \sigma_s = f_{yk} \text{ (при } \varepsilon_{so} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{uk} \text{)}. \quad (4.1)$$

Якщо для діаграм деформування «м'яких» арматурних сталей характерні чітко виражені горизонтальні ділянки текучості та значні відносні видовження при розриві, то діаграми деформування твердих сталей є плавними без видимих ділянок текучості з порівняно малим відносним видовженням. Тому спрощену діаграму деформування твердих сталей зазвичай представляють ламаною лінією з двох прямих [95; 122; 170; 382], що характеризують ділянки пружної та пружно-пластичної роботи арматури, розділені умовною межею її текучості (рис.4.3, б). За умовну межу текучості арматурної сталі приймають напруження  $f_{p0,1k}$ , за яких її залишкові видовження сягають  $\varepsilon_{po} = \varepsilon_{0,1} = 0,1\%$  (або  $100 \cdot 10^{-5}$ ). Згідно зазначеної діаграми деформування напруження в арматурі визначатимуться залежно від величини відносних деформацій за формулами:

$$\sigma_s = E_p \cdot \varepsilon_s \text{ (при } 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{po} \text{)}; \quad (4.2)$$

$$\sigma_s = f_{p0,1k} + (f_{pk} - f_{p0,1k}) \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{po}}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{po}} \text{ (при } \varepsilon_{po} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{uk} \text{)}, \quad (4.3)$$

де граничні деформації арматури не перевищують  $\varepsilon_{uk} \leq 2000 \cdot 10^{-5}$ .

Для «м'яких» арматурних сталей з відносно невеликими ділянками текучості рекомендується [12; 51] приймати уточнену дволінійну діаграму деформування з так званою ділянкою її «зміцнення» (рис.4.4, а), що описується наступною залежністю

$$\sigma_s = f_{yk} + (f_{uk} - f_{yk}) \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{so}}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{so}} \text{ (при } \varepsilon_{so} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{uk} \text{)}. \quad (4.4)$$

Уточнені діаграми деформування «твердих» арматурних сталей доцільно представляти у вигляді лінійно-параболічних залежностей [19; 106; 110; 153; 170; 178], характерними параметричними точками яких є характеристичні

значення межі пропорційності  $f_{p0,02k}$ , умовної межі текучості  $f_{p0,2k}$  і межі міцності арматури на розтяг  $f_{pk}$  з відповідними їм відносними деформаціями видовження  $\varepsilon_{se} = \varepsilon_{0,02}$ ,  $\varepsilon_{po} = \varepsilon_{0,2}$  та  $\varepsilon_{uk}$  (рис.4.4, б).

Напруження в арматурі за таких обставин варто визначати залежно від величини відносних деформацій за формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= E_s \cdot \varepsilon_s && (\text{при } 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{se}); \\ \sigma_s &= -\alpha \cdot \varepsilon_s^2 + \beta \cdot \varepsilon_s + \gamma && (\text{при } \varepsilon_{se} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{po}); \\ \sigma_s &= -a \cdot \varepsilon_s^2 + b \cdot \varepsilon_s + c && (\text{при } \varepsilon_{po} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{uk}), \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

де основні параметри діаграми деформування стержнів арматурної сталі доцільно приймати рівними [153, 178]

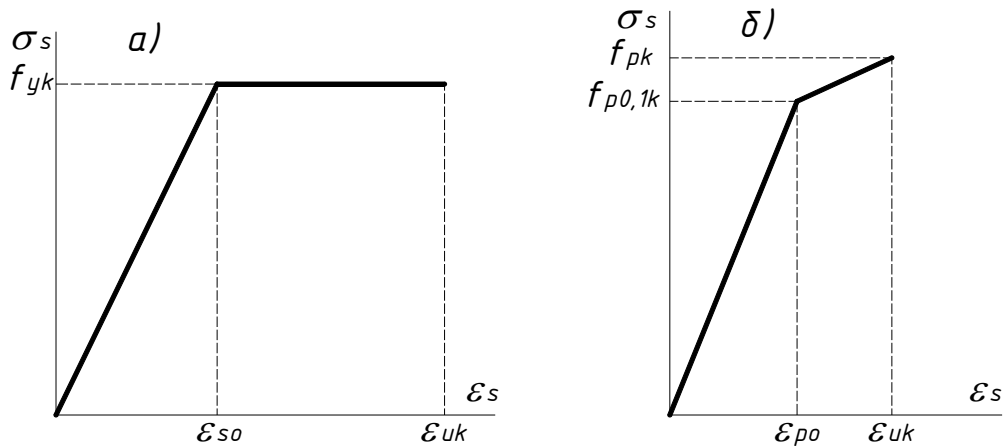


Рисунок 4.3 – Спрощені діаграми деформування арматурних сталей: *a* – з фізичною межею текучості; *б* - з умовною межею текучості

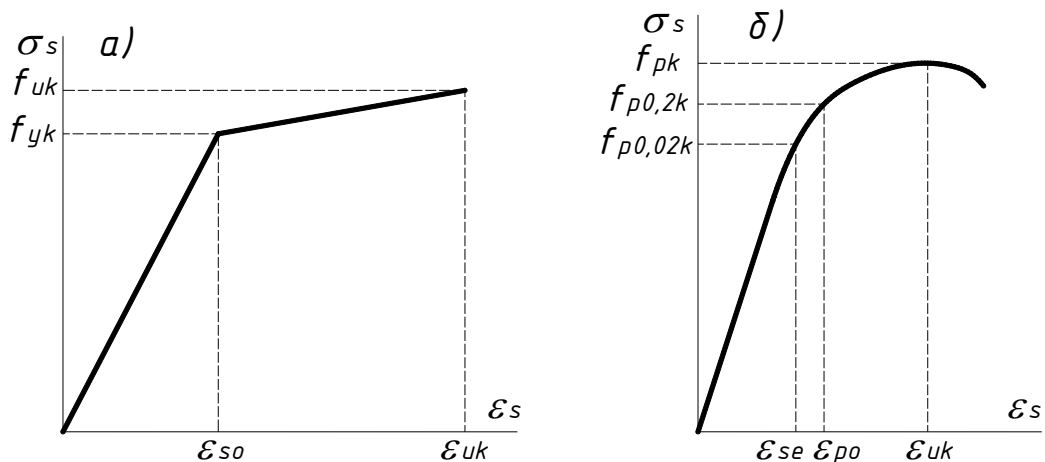


Рисунок 4.4 – Уточнені діаграми деформування арматурних сталей: *a* – з фізичною межею текучості; *б* – з умовною межею текучості

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= p - q; \quad \beta = 2 \cdot p \cdot \varepsilon_{po} - q \cdot (\varepsilon_{se} + \varepsilon_{po}); \quad \gamma = f_{p0,2k} - p \cdot \varepsilon_{po}^2 + q \cdot \varepsilon_{se} \cdot \varepsilon_{po}; \\ p &= (f_{p0,2k} - f_{p0,02k}) / (\varepsilon_{po} - \varepsilon_{se})^2; \quad q = f'_{p0,2k} / (\varepsilon_{po} - \varepsilon_{se}); \quad b = 2 \cdot a \cdot \varepsilon_{uk}; \\ f'_{p0,2k} &= -2 \cdot a \cdot \varepsilon_{po}^2 + b; \quad a = (f_{pk} - f_{p0,2k}) / (\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{se})^2; \quad c = f_{pk} - a \varepsilon_{uk}^2. \end{aligned} \right\} (4.6)$$

### 4.3. Стиснуті залізобетонні елементи

#### 4.3.1. Деформування центрально стиснутих елементів

Відповідно до прийнятої у п.2.7 концепції, процес деформування центрально стиснутого залізобетонного елемента будемо теж розглядати з позицій зміни жорсткості його перерізу. Раніше уже було показано (п.3.2.1), що за осьового стиску жорсткість бетонного перерізу  $N_c / \varepsilon_c = E_{cc} A_c$  змінюється нелінійно за залежністю (3.3). Що ж до жорсткості перерізу арматури  $N_s / \varepsilon_s = E_s A_{sc}$ , то вона може змінюватися лінійно або взагалі не змінюватися, залишаючись сталою за пружного деформування (рис. 4.5).

Отже можна передбачити, що під дією навантаження зміна жорсткості залізобетонного елемента  $N/\varepsilon_c$  носитиме характер, близький чи аналогічний

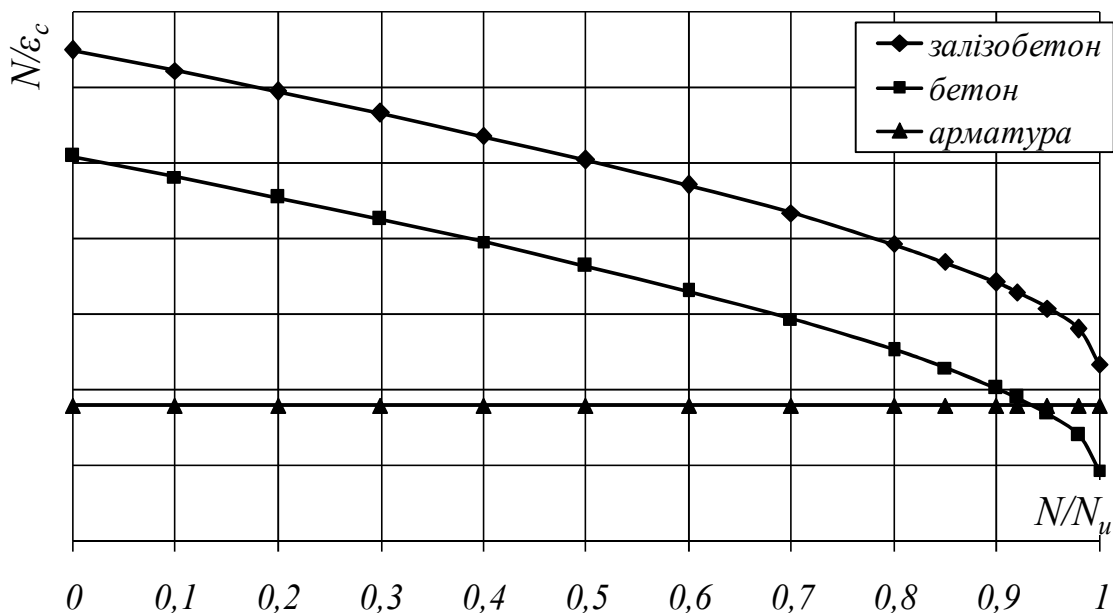


Рисунок 4.5 – Характер зміни жорсткості перерізу центрально стиснутого залізобетонного елемента та його компонентів

до функції (3.3). Для підтвердження чи спростування цього було здійснено обробку та аналіз результатів експериментальних досліджень центрально стиснутих залізобетонних елементів, проведених у свій час Рискиндом Б.Я. [188; 189]. До уваги були прийняті елементи як зі звичайною гарячекатаною арматурою, так і зразки з термічно зміцненою арматурою. Детальний аналіз побудованих графіків  $N/\varepsilon_c - N/N_u$  (рис.4.6 ... 4.9) показує, що в усіх випадках (як за рівнів навантаження  $N/N_u \approx 0,2(0,3)...0,8(0,9)$ , так і за вказаними межами) нелінійна функція типу (3.3) охоплює результати експериментальних досліджень більш точно ніж лінійна залежність типу (3.2). Сказане повністю підтверджується статистичною обробкою результатів співставлення теоретичних та дослідних значень жорсткості перерізу центрально стиснутих залізобетонних елементів, наведеною в табл. 4.1. З неї також видно, що нелінійна залежність типу (3.3) є доволі ефективною як для елементів зі звичайною гарячекатаною арматурою, так і для зразків з високоміцною арматурою.

Приймаючи до уваги результати вищенаведених досліджень, повну жорсткість залізобетонного елемента, що формується з жорсткості бетонного перерізу та жорсткості арматурних стержнів, при їх спільній роботі ( $\varepsilon_c = \varepsilon_s$ ) будемо обчислювати за виразом

$$\frac{N}{\varepsilon_c} = \frac{N_c + N_s}{\varepsilon_c} = A - B \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} - C \cdot \frac{N_c}{N_u} + D_s, \quad (4.7)$$

де  $A, B, C$  – параметри, що відображають міцнісні, деформативні та геометричні характеристики бетонного перерізу елемента (див. пп. 3.2.1 та 3.2.2 );

$\varepsilon_c / \varepsilon_{cl}$  – рівень відносних деформацій стиснутого бетону;

$N_c / N_u$  – рівень зусилля, що сприймається бетонним перерізом;

$N_s$  – зусилля, що сприймається арматурними стержнями;

$D_s$  – жорсткість перерізу арматури залізобетонного елемента, за осьового стиску рівна  $D_s = E_s A_{sc}$ .



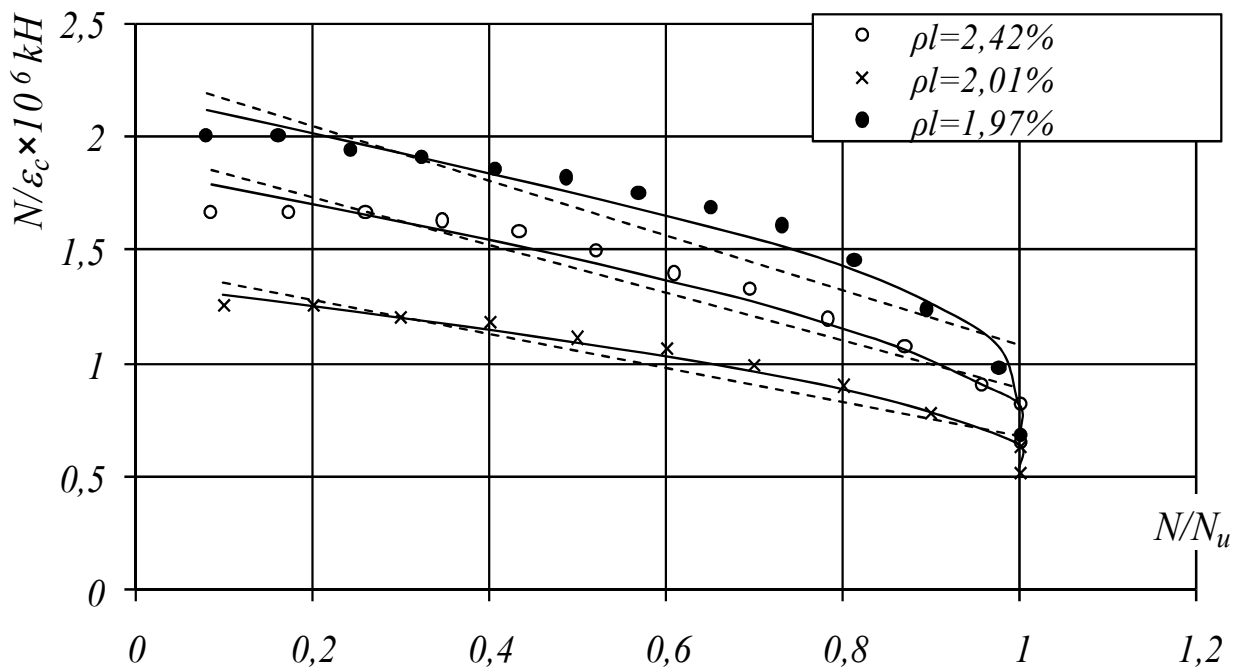


Рисунок 4.6 – Зміна жорсткості перерізу центрально стиснутих неперearмованих елементів зі звичайною арматурою:  $\circ$ ,  $\times$ ,  $\bullet$  – за дослідними даними [188]; ---- за лінійною (3.4); — за нелінійною (3.10) функціями

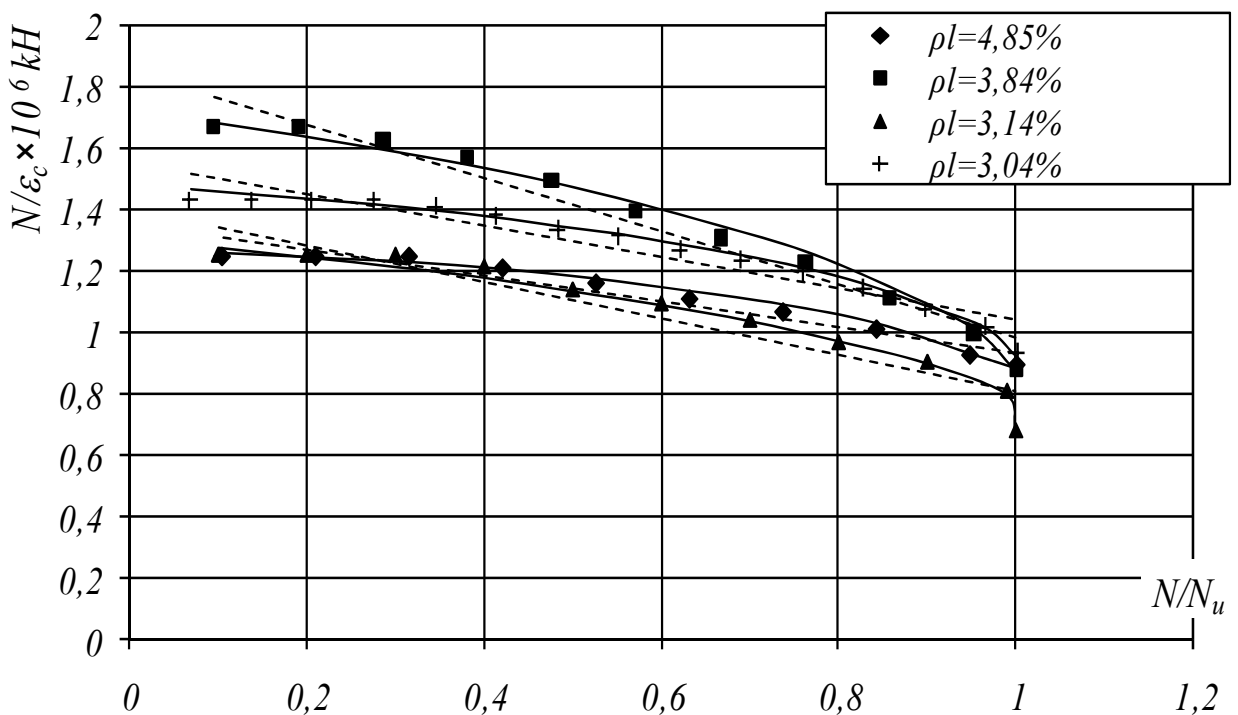


Рисунок 4.7 - Зміна жорсткості перерізу центрально стиснутих перearмованих елементів зі звичайною арматурою:  $\blacklozenge$ ,  $\blacksquare$ ,  $\blacktriangle$ ,  $+$  - за дослідними даними [188]; ---- за лінійною (3.4); — за нелінійною (3.10) функціями

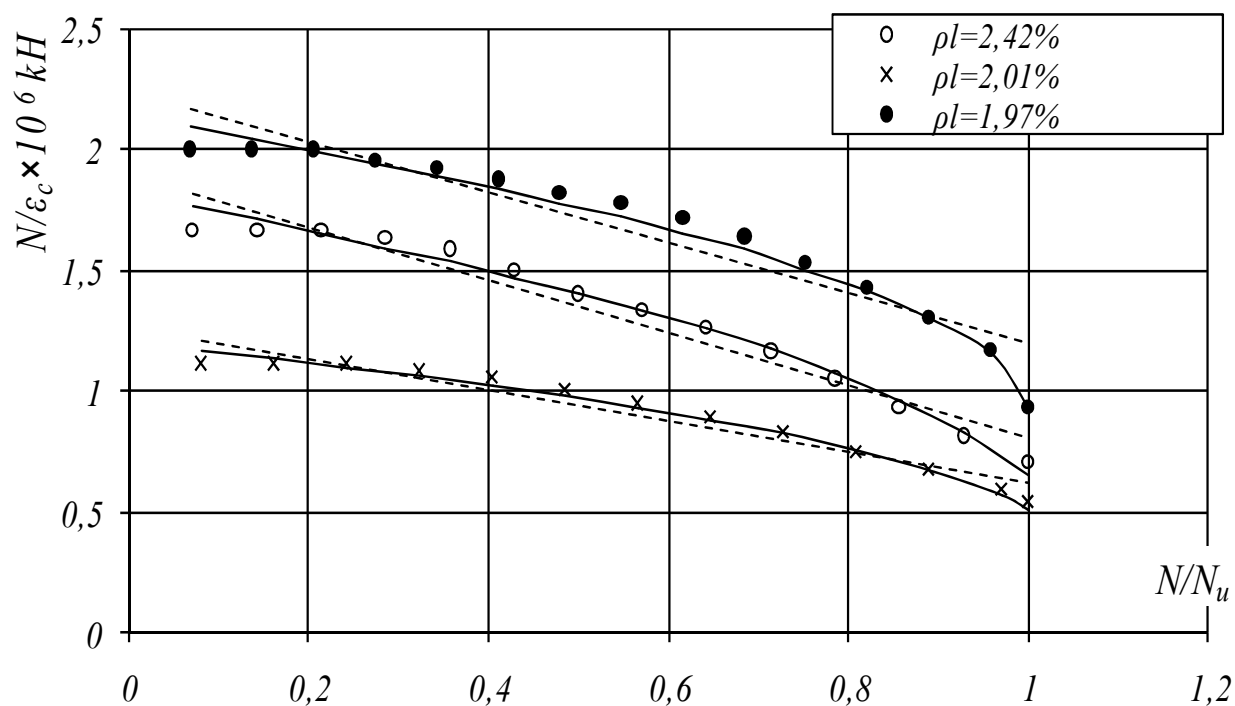


Рисунок 4.8 – Зміна жорсткості перерізу центрально стиснутих неперearмованих елементів зі зміцненою арматурою:  $\circ$ ,  $\times$ ,  $\bullet$  – за дослідними даними [188]; ---- за лінійною (3.4); — за нелінійною (3.10) функціями

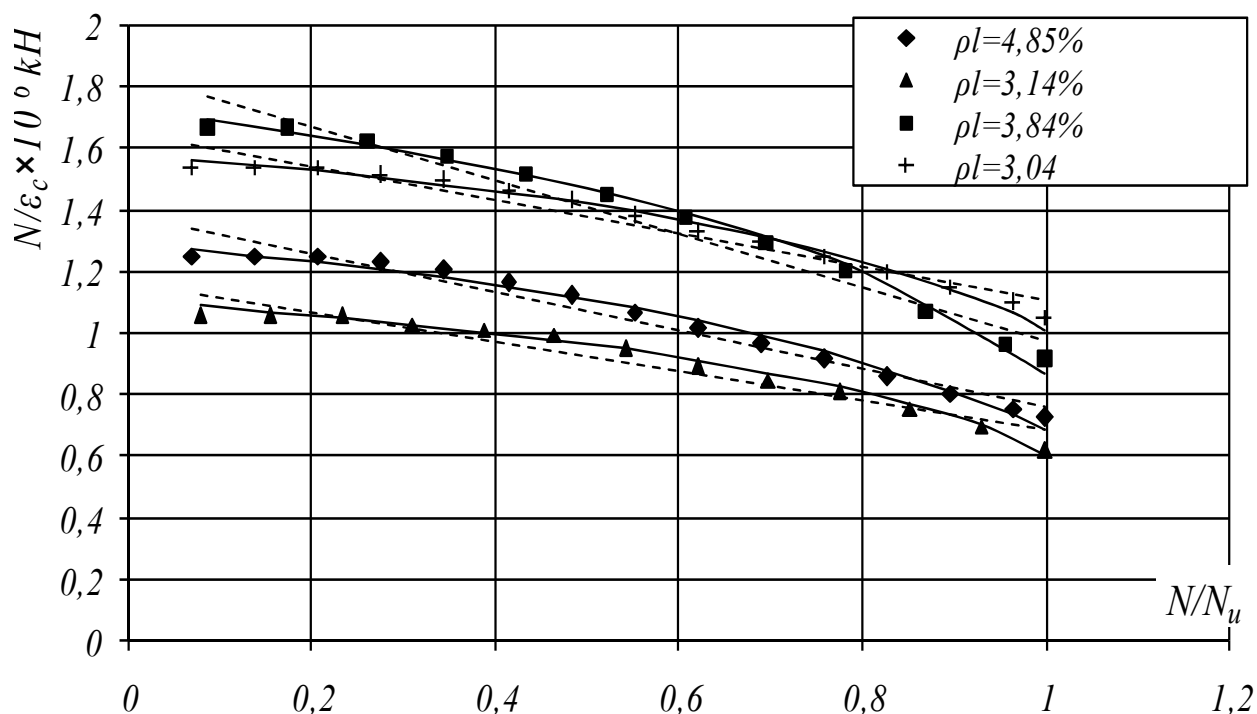


Рисунок 4.9 - Зміна жорсткості перерізу центрально стиснутих перearмованих елементів зі зміцненою арматурою:  $\blacklozenge$ ,  $\blacksquare$ ,  $\blacktriangle$ ,  $+$  – за дослідними даними [188; 189]; ---- за лінійною (3.4); — за нелінійною (3.10) функціями

Таблиця 4.1 – Статистична оцінка залежностей з визначення жорсткості перерізу центрально стиснутих залізобетонних елементів

Вид залежності $N / \varepsilon_c - \eta_c$	Позначення	Відхилення від експериментальних даних [188], %				
		зразки зі звичайною арматурою при		зразки зі зміцненою арматурою при		Загальні
		$\rho_{l,c} \leq 3\%$	$\rho_{l,c} > 3\%$	$\rho_{l,c} \leq 3\%$	$\rho_{l,c} > 3\%$	
Лінійна типу (3.4)	$\Delta_{\min}$	-12,56	-4,81	-6,92	-5,29	-12,56
	$\Delta_{\max}$	58,1	19,94	28,87	11,38	58,1
	$\Delta$	1,91	0,29	0,7	0,21	0,69
	$\sigma$	<b>14,29</b>	<b>6,48</b>	<b>7,33</b>	<b>3,67</b>	<b>8,24</b>
Нелінійна типу (3.10)	$\Delta_{\min}$	-5,83	-2,71	-6,79	-5,38	-6,79
	$\Delta_{\max}$	17,92	2,35	5,96	3,18	17,92
	$\Delta$	0,04	0,32	-0,6	0,05	-0,03
	$\sigma$	<b>4,69</b>	<b>3,39</b>	<b>2,71</b>	<b>1,96</b>	<b>3,19</b>

Примітки: в таблиці  $\Delta_{\min}$  та  $\Delta_{\max}$  – нижня та верхня межі відхилень від дослідних даних, а  $\Delta$  і  $\sigma$  – середньоарифметичні та стандартні значення цих відхилень.

За таких обставин зусилля, що може сприйматися залізобетонним елементом, необхідно обчислювати з урахування залежностей (3.8) та (3.21) за нижченаведеною формулою

$$N = f_{ck} \cdot A_c \cdot \frac{k \cdot \eta_\varepsilon - \eta_\varepsilon^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta_\varepsilon} + E_s \cdot \varepsilon_c \cdot A_{sc}, \quad (4.8)$$

котра після нескладних перетворень приймає наступний вигляд

$$N = f_{ck} \cdot A_c \cdot \left( \frac{k \cdot \eta_\varepsilon - \eta_\varepsilon^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta_\varepsilon} + \rho_{l,c} \cdot n_{so} \cdot k \cdot \eta_\varepsilon \right), \quad (4.9)$$

де  $n_{so}$  – відношення модуля пружності арматури до початкового модуля пружності бетону,  $n_{so} = E_s / E_{co}$ ;

$\rho_{l,c}$  – коефіцієнт армування залізобетонного елемента поздовжніми стиснутими стержнями,  $\rho_{l,c} = A_{sc} / A_c$ .

Деформування залізобетонного елемента буде продовжуватися до тої

пори, поки деформації стиснутого бетону не досягнуть своїх граничних значень  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ . Їхню величину можна знайти з виразу (4.9), застосувавши до зазначеного елемента загальний екстремальний критерій несучої здатності  $dM/d(1/r) = 0$ , який в умовах осьового стиску «трансформується» в екстремальний критерій міцності  $dN/d\varepsilon_c = 0$ . Диференціювання вищезгаданого виразу приводить до необхідності розв'язання наступного квадратного рівняння

$$\eta_{eu}^2 + \frac{2 \cdot \eta_{eu}}{k-2} + \frac{\rho_{l,c} \cdot n_{so} \cdot k + k}{(k-2) \cdot (\rho_{l,c} \cdot n_{so} \cdot k \cdot (k-2) - 1)} = 0, \quad (4.10)$$

дійсним коренем якого є граничні деформації стиснутого бетону в центрально стиснутому залізобетонному елементі

$$\varepsilon_{cu} = \frac{\varepsilon_{c1}}{k-2} \cdot \left( \frac{k-1}{\sqrt{1 - \rho_{l,c} \cdot n_{so} \cdot k \cdot (k-2)}} - 1 \right). \quad (4.11)$$

При  $k = 2$  рівняння (4.10) перетворюється в лінійне з коренем

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot (1 + \rho_{l,c} \cdot n_{so}). \quad (4.12)$$

Отримані функції з визначення граничних деформацій бетону за осьового стиску співпадають з рішеннями Павлікова А.М. [178]. Однак слід зауважити, що за його спільної роботи з арматурою граничні деформації стиснутого бетону, обчислені за формулами (4.11) і (4.12), повинні обмежуватися величинами:

- $\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1}$ , якщо  $\varepsilon_s = \varepsilon_{so} \leq \varepsilon_{c1}$ ;
- $\varepsilon_{c1} < \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon_{so}$ , якщо  $\varepsilon_s = \varepsilon_{so} > \varepsilon_{c1}$ .

Достовірність отриманих залежностей (4.11) і (4.12) та правомірність вищевказаних обмежень перевірені за експериментальними значеннями граничних деформацій бетону в центрально стиснутих залізобетонних елементах зі звичайною гарячекатаною та високоміцною арматурою, випробуваних у свій час Рискиндом Б.Я. [188; 189] і Лазарєвим Д.М. [137]. Результати відповідних розрахунків та основні параметри збіжності експериментальних і теоретичних даних наведені в табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Граничні деформації бетону в залізобетонних елементах  
за осьового стиску

Серія	Шифр зразків	Міцність бетону, $f_{ck,prism}$	Процент армування, $\rho_{l,c}$	Значення граничних деформацій бетону, $\varepsilon_{cu} \cdot 10^5$		Відношення, $\varepsilon_{cu,t} / \varepsilon_{cu,e}$
				дослідні	теоретичні	
1	2	3	4	5	6	7
<b>Досліди Рискінда Б.Я. [188; 189]</b>						
I	T-1	41,0	3,14	405	362,1	0,894
	T-2	41,0	3,14	405	362,1	0,894
	Г-1	41,0	3,14	297	290,6	0,978
	Г-2	41,0	3,14	285	290,6	1,020
	К-1	37,6	0	292	281,2	0,963
	К-2	37,0	0	272	278,8	1,025
II	T-2	39,7	2,01	463	355,9	0,769
	T-3	42,4	2,01	445	365,9	0,822
	Г-1	42,4	2,01	357	304,4	0,853
	Г-3	42,4	2,01	374	304,4	0,814
	К-2	36,2	0	236	279,6	1,185
	К-3	39,3	0	290	292,0	1,007
III	T-1	26,4	2,42	303	339,9	1,122
	T-2	26,4	2,42	396	339,9	0,858
	T-3	26,4	2,42	320	339,9	1,062
	Г-1	26,4	2,42	350	263,2	0,752
	Г-2	26,4	2,42	262	263,2	1,005
	Г-3	26,4	2,42	272	263,2	0,968
	К-1	24,0	0	265	251,5	0,949
IV	T-1	28,8	1,97	348	296,8	0,853
	T-2	32,8	1,97	306	301,1	0,984
	T-3	32,8	1,97	267	301,1	1,128
	Г-1	28,8	1,97	232	242,8	1,292
	Г-2	32,8	1,97	344	257,8	0,882
	К-1	29,4	0	191	234,4	1,227

Продовження таблиці 4.2

1	2	3	4	5	6	7
V	T-1	57,2	2,98	268	294,4	1,099
	T-2	55,0	2,98	309	291,2	0,942
	T-3	58,2	2,98	302	296,3	0,981
	Г-1	57,2	3,1	263	263,7	1,003
	Г-2	55,0	3,1	231	258,7	1,120
	Г-3	58,2	3,1	275	265,9	0,967
	К-2	54,0	0	237	256,5	1,082
VI	T-1	32,6	4,8	342	349,9	1,023
	T-2	32,6	4,8	415	349,9	0,843
	T-3	32,6	4,8	397	349,9	0,881
	T-4	32,6	4,8	418	349,9	0,837
	Г-1	32,6	4,9	255	237,6	0,932
	Г-3	32,6	4,9	188	237,6	1,264
	Г-4	31,8	4,9	295	235,0	0,797
	К-1	26,9	0	190	212,9	1,121
	К-2	29,3	0	217	219,9	1,013
VII	T-1	34,4	3,85	314	287,6	0,916
	T-2	35,2	3,86	256	283,0	1,106
	T-4	35,2	3,80	227	281,1	1,238
	T-5	35,2	3,82	328	281,8	0,859
	Г-1	34,4	3,62	245	200,0	0,816
	Г-2	35,2	3,85	226	201,6	0,892
	Г-3	35,2	3,80	226	201,6	0,892
	Г-5	35,2	3,84	207	201,6	0,974
	К-1	32,0	0	173	184,3	1,066
	К-2	30,2	0	160	181,6	1,135
<b>Досліди Лазарєва Д.М. [137]</b>						
	К-1-1	15,83	1,764	200	210	1,05
	К-1-2	15,83	1,764	210	210	1,00
	К-1-3	15,83	1,764	205	210	1,024
	К-2-1	15,06	5,517	210	210	1,00
	К-2-2	15,06	5,517	210	210	1,00

1	2	3	4	5	6	7
	K-2-3	15,06	5,517	260	210	0,808
Середньоарифметичне значення						0,9822
Середньоквадратичне відхилення						0,1285
Коефіцієнт варіації, %						13,08

Таким чином, ґрунтуючись на результатах вищенаведених досліджень, можна констатувати, що процес деформування залізобетонного елемента за осьового стиску доцільно описувати через зміну жорсткості його перерізу  $N/\varepsilon_c$ , яка пов'язана з рівнем завантаження  $N/N_u$  нелінійною залежністю. А це в свою чергу дозволяє безпосередньо чи опосередковано пов'язати розрахункові значення граничних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  не тільки з критичними деформаціями бетону  $\varepsilon_{c1}$ , але й з деформаціями  $\varepsilon_{yk}$ , що відповідають фізичній або умовній межі текучості використаної арматури.

#### 4.3.2. Модель деформування позацентрово стиснутих елементів

Цілком очевидно, що однією з основних особливостей деформування залізобетонних елементів при позацентровому стиску можна вважати значну неоднорідність деформування бетону в їх перерізах.

Залежно від ексцентриситету прикладання навантаження можливими є дві схеми деформування стиснутих залізобетонних елементів:

- весь переріз аж до настання граничного стану залишається стиснутим (випадок відносно малих ексцентриситетів, рис. 4.10, а);
- при досягненні граничного стану в перерізі крім стиснутої зони присутня розтягнута зона (випадок відносно великих ексцентриситетів, рис. 4.10, б).

Однак, незалежно від величини ексцентриситету, весь процес деформування згаданих елементів в розрахунковому перерізі можна описати, відповідно до основних принципів МДТТ, двома загальноприйнятими рівняннями рівноваги з використанням деяких додаткових умов, включаючи і

гіпотезу плоских перерізів.

Для випадку відносно малих ексцентриситетів (рис. 4.10, а) зазначені рівняння можна представити виразами

$$N = \frac{b_n}{1/r} \left[ \int_{\varepsilon_{co}}^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c + E_s \cdot (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{s1}) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \varepsilon_{si} \right]; \quad (4.13)$$

$$N \cdot e = \frac{b_n}{(1/r)^2} \left[ \int_{\varepsilon_{co}}^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c + E_s \cdot (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{s1}) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \varepsilon_{si}^2 \right], \quad (4.14)$$

де  $\varepsilon_c$  – поточні деформації стиснутих волокон бетону в перерізі елементу;

$E_s$  – модуль пружності арматури;

$\varepsilon_{si}$  – поточні деформації конкретних поздовжніх арматурних стержнів;

$1/r$  – кривина вигнутої осі елементу в розрахунковому перерізі при його деформуванні,  $1/r = (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{s1})/d$ .

При відносно великих ексцентриситетах (рис. 4.10, б), за наявності в перерізі елемента розтягнутої зони, ці рівняння приймуть наступний вигляд

$$N = \frac{b_n}{1/r} \left[ \int_{\varepsilon_{cut}}^0 \frac{a_t \cdot \varepsilon_{ct} - b_t \cdot \varepsilon_{ct}^2}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}} d\varepsilon_{ct} + \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c + \right. \\ \left. + E_s \cdot (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{s1}) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \varepsilon_{si} \right]; \quad (4.15)$$

$$N \cdot e = \frac{b_n}{(1/r)^2} \left[ \int_{\varepsilon_{cut}}^0 \frac{a_t \cdot \varepsilon_{ct}^2 - b_t \cdot \varepsilon_{ct}^3}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}} d\varepsilon_{ct} + \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c + \right. \\ \left. + E_s \cdot (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{s1}) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \varepsilon_{si}^2 \right]; \quad (4.16)$$

а в граничній стадії, при нехтуванні зазначеною зоною, спростяться до виду

$$N = \frac{b_n}{1/r} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c + E_s \cdot (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{s1}) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \varepsilon_{si}; \quad (4.17)$$

$$N \cdot e = \frac{b_n}{(1/r)^2} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c + E_s \cdot (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{s1}) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \varepsilon_{si}^2. \quad (4.18)$$

Важливо відзначити, що в обох випадках процес деформування позацентрово стиснутого залізобетонного елемента триватиме аж до моменту вичерпання його несучої здатності або, інакше кажучи, до порушення



відповідних рівнянь рівноваги. Раніше уже було показано (п.3.3), що граничний стан бетонного елемента, за його неоднорідного деформування, настає з порушенням другого рівняння рівноваги - рівняння моментів.

Для визначення граничних деформацій бетону застосуємо до рівнянь рівноваги (4.14), (4.16) та (4.18) екстремальний критерій несучої здатності  $dM/d(1/r) = 0$ . Диференціювання згаданих інтегральних рівнянь приводить до необхідності розв'язку трансцендентних рівнянь. Зокрема з (4.14) маємо

$$\begin{aligned}
 & -\frac{b}{3 \cdot (a + b/c)} \cdot \frac{1 + m + m^2}{1 - m} + \frac{1}{c \cdot \varepsilon_{cu}^2 \cdot (1 - m)} + \frac{1}{c \cdot \varepsilon_{cu}^2 \cdot (1 - m)^2} \times \\
 & \times \left( \frac{1}{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}} - \frac{m}{1 + c \cdot m \cdot \varepsilon_{cu}} \right) - \frac{2}{c^2 \cdot \varepsilon_{cu}^3 \cdot (1 - m)^2} \cdot \ln \frac{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}}{1 + c \cdot m \cdot \varepsilon_{cu}} + \\
 & + \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot (x_{si} / x)^2 \cdot E_s \cdot c / (a + b/c) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

де  $x_{si}$  – відстань від нейтральної лінії до центру ваги поздовжніх стиснутих стержнів, напруження в яких у граничному стані не досягають межі текучості (при  $\varepsilon_{si} \geq \varepsilon_{yk}$  приймаємо  $x_{si} = 0$ );

$\rho_{li}$  – коефіцієнт армування перерізу елемента тими ж стержнями.

Одним із перших, хто запропонував аналітичний розв'язок вищезгаданих рівнянь, можна назвати Павлікова А.М. [178]. Ним отримана залежність, що зв'язує рівень граничних деформацій бетону з коефіцієнтом пружнопластичності  $\eta_u = f(k)$ . Оскільки розглядалися елементи з повним використанням міцнісних властивостей арматури, то її вплив на граничні деформації бетону залишився невизначеним. Не був визначений і вплив ступеню неоднорідності деформування бетону на його граничні деформації. А взагалі то варто відзначити, що точне аналітичне рішення рівнянь, подібних до (4.19), отримати неможливо із-за так званих радикалів. Тому навіть за числового розв'язку методами комп'ютерної алгебри отримана функція  $\eta_u = f(k)$  залишилась доволі складною та громіздкою [178].

Ґрунтуючись на методах числового аналізу, розв'язок рівняння (4.19) з досить високою точністю (достовірністю  $R^2 = 0,9989$ ) можна представити

наступною залежністю [197; 213; 215; 490]

$$\eta_{eu} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot (k-1)/(6-k) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot (x_{si}/x)^2 + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m)^2)(1 - m^{3/2})(1 - m/k)\sqrt{(\ln k)^{(1-m^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m^2)(k-2)\ln(6/k - 2(0,1 - m)))^2}, \quad (4.20)$$

де  $\alpha_s$  – відносне значення модуля пружності арматури,  $\alpha_s = E_s / 200000$ .

Для випадку, коли нейтральна лінія буде проходити по нижній грані перерізу ( $x_{s1} = a_{s1}$ ;  $x = h$ ;  $\varepsilon_{co} = 0$  і  $\sigma_{co} = 0$ , рис.4.11) за текучості стержнів 2 ( $x_{s2} = a_{s2} = 0$ ), він суттєво спрощується і рівень граничних деформацій найбільш стиснутих волокон бетону можна обчислювати за виразом (4.21)

$$\eta_{eu} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot \frac{(k-1)}{(6-k)} \cdot \rho_{l1} \cdot \left(\frac{a_{s1}}{h}\right)^2 + \frac{0,398 \cdot \sqrt{\ln k}}{1 + ((k-2)/6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2}. \quad (4.21)$$

Таким чином, в отриманих вище залежностях (4.20) і (4.21) наглядно продемонстровано ступінь впливу параметрів армування (класу арматури, коефіцієнту армування та положення поздовжніх арматурних стержнів в перерізі позacentрово стиснутого залізобетонного елемента) на величину граничних деформацій стиснутого бетону (рис. 4.12 і 4.13).

Зокрема, з вищеотриманих залежностей (4.20) і (4.21) та графіків за рис.4.12 і 4.13 випливає, що номінальні значення граничних деформацій стиснутого бетону в залізобетонних елементах безпосередньо пов'язані з особливостями їх напружено-деформованого стану. Їх величина в найбільшій мірі залежить не тільки від коефіцієнта пружно-пластичності бетону  $k$  та параметрів армування самих елементів, але й ступеню неоднорідності деформування бетону в поперечному перерізі. Тому граничні деформації стиснутого бетону в залізобетонних елементах повинні визначатися тільки за діаграми їх стану  $M - 1/r$  та  $N - \varepsilon_c$ .

### 4.3.3. Особливості деформування косостиснутих елементів

Основним недоліком більшості нинішніх «деформаційних» моделей

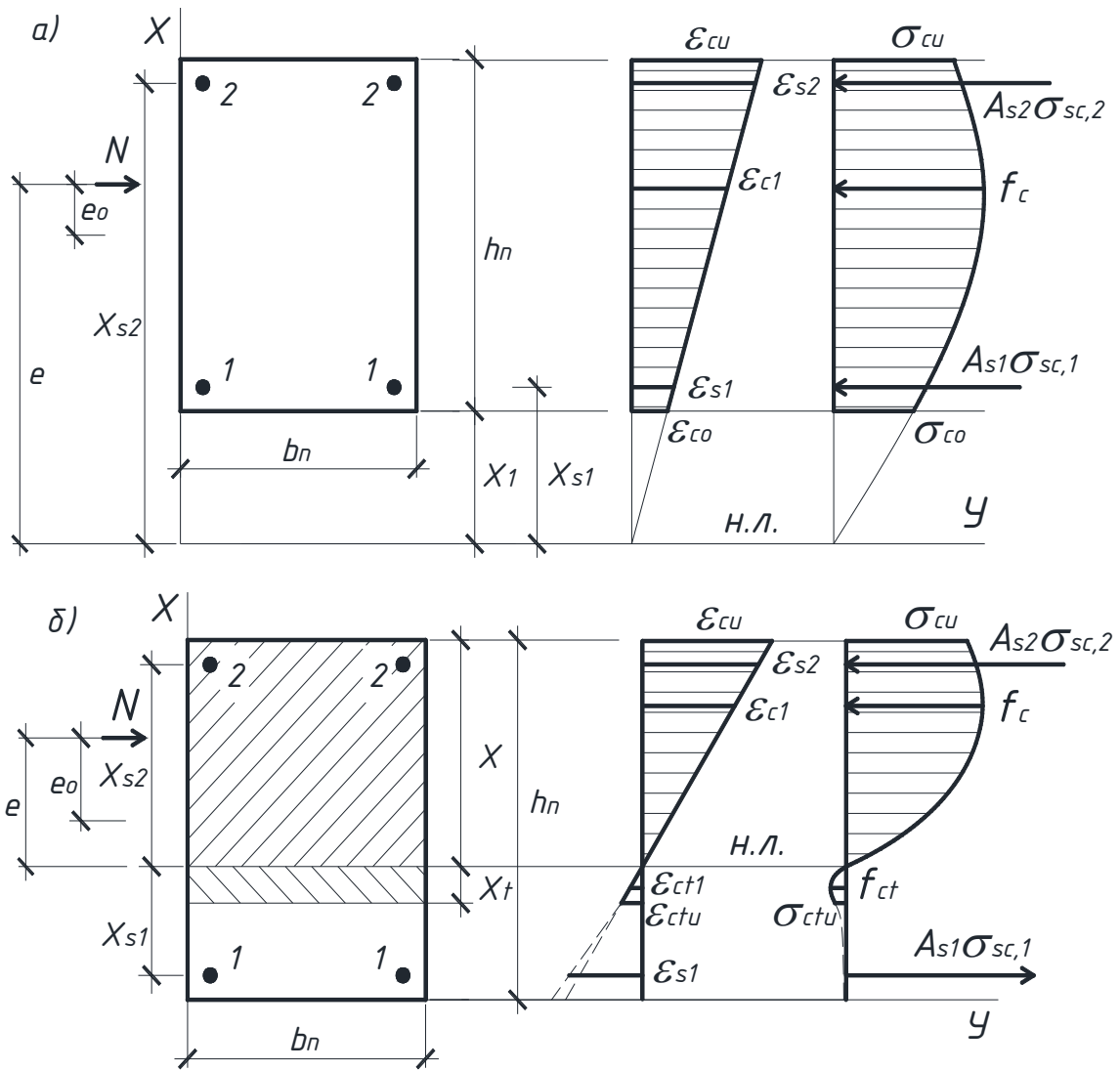


Рисунок 4.10 – Напружено-деформований стан позациентрово стиснутого залізобетонного елемента за відносно: а – малих ексцентриситетів; б – великих ексцентриситетів

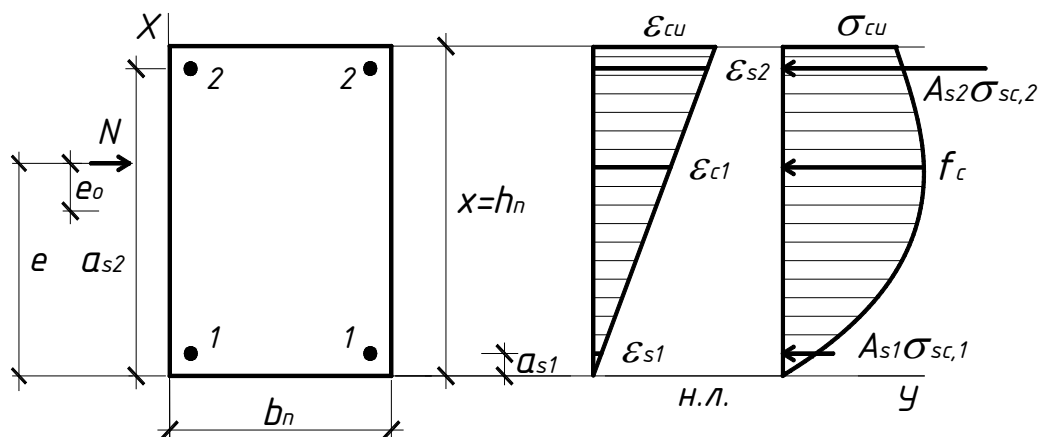


Рисунок 4.11 – Напружено-деформований стан позациентрово стиснутого елемента, що працює на межі малих і великих ексцентриситетів

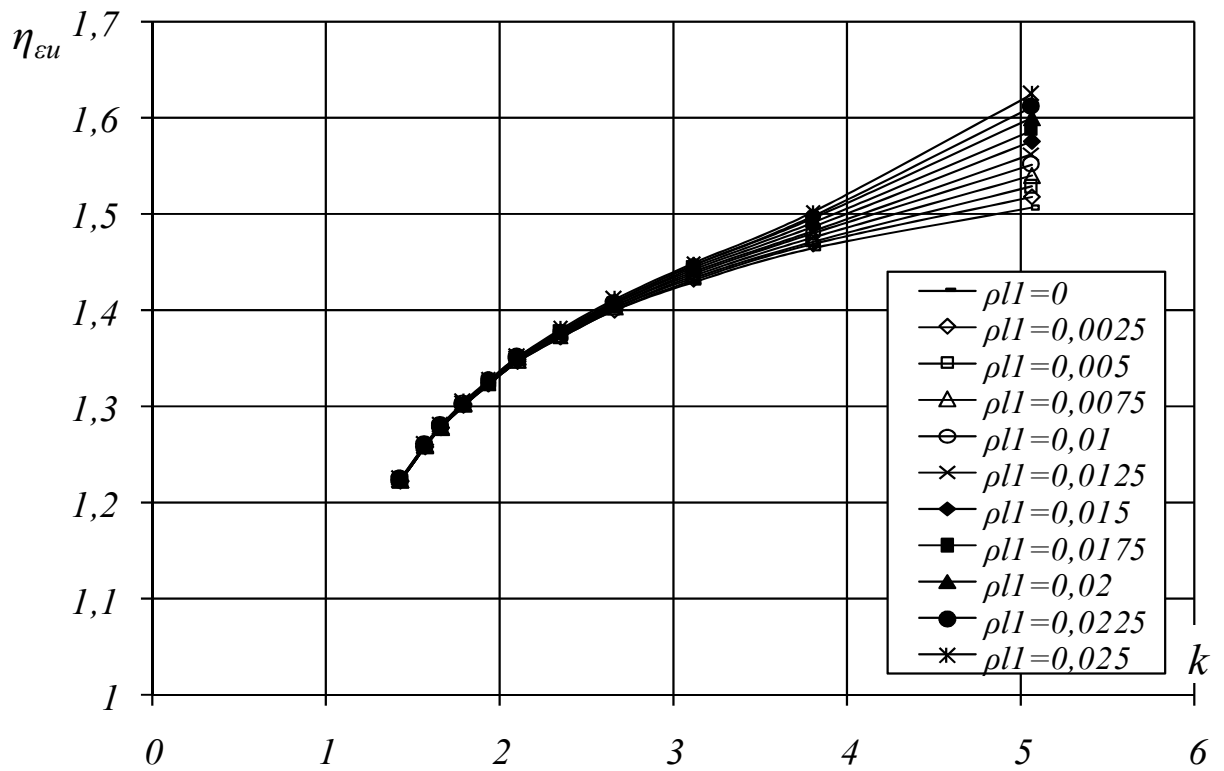


Рисунок 4.12 – Вплив коефіцієнта армування на рівень граничних деформацій бетону в позacentрово стиснутому залізобетонному елементі при  $a_1=0,1h$  та  $x=h$

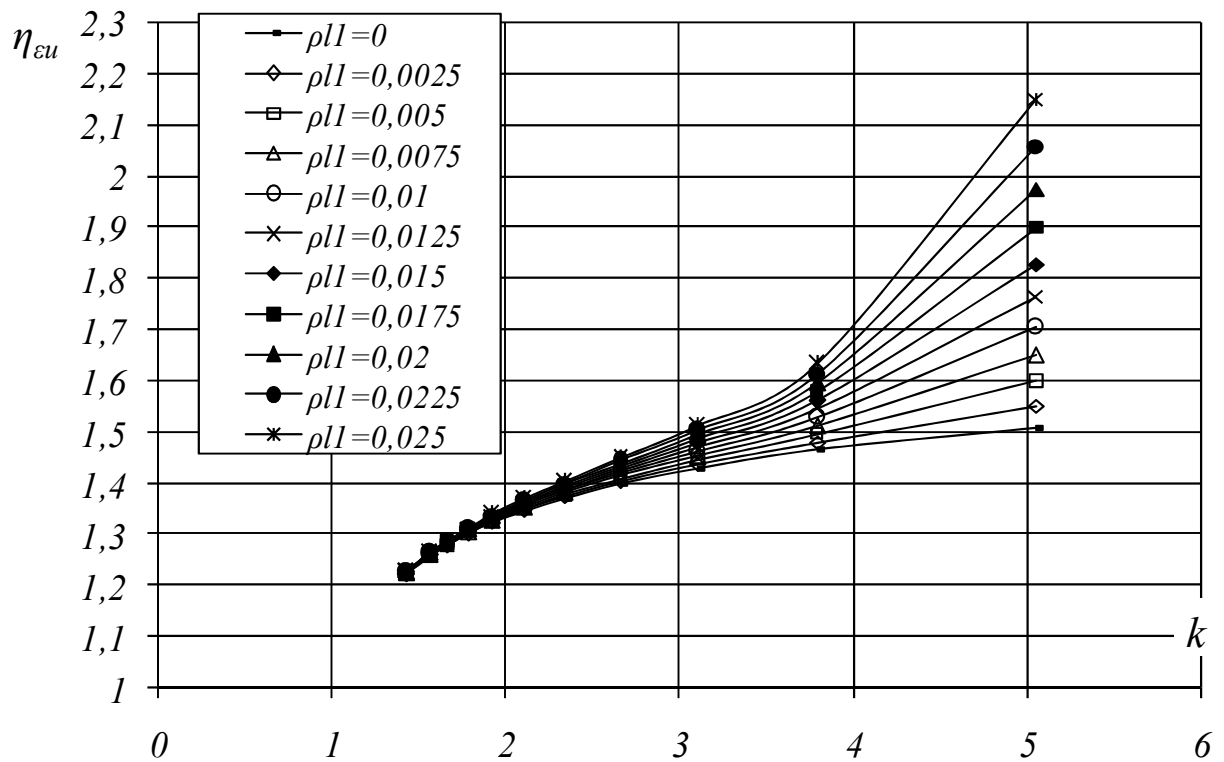


Рисунок 4.13 – Вплив коефіцієнта армування на рівень граничних деформацій бетону в залізобетонному елементі за позacentрового стиску при  $a_1=0,2h$  та  $x=h$

бетонних та залізобетонних елементів є спроба задекларувати в якості критеріїв вичерпання їх несучої здатності граничні значення відносних деформацій відповідних матеріалів: бетону  $\varepsilon_{cu}$  чи арматури  $\varepsilon_{ud}$ . Спробуємо розширити обґрунтування (п. 2.4), чому граничні деформації крайніх фібр стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  в загальному випадку не можуть виступати критерієм вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів.

В колишній силовій моделі напруження в бетоні могли виступати критерієм вичерпання несучої здатності лише тому, що вони могли сягати екстремальних значень. Однак в так званій «деформаційній» моделі деформації такою властивістю не наділені. Крім того, відомим є і той факт, що на момент вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів величина граничних деформацій стиснутого бетону навіть для одного й того ж самого класу бетону за різних вихідних умов не залишається фіксованою та коливається в доволі широких межах. Тому цілком очевидно, що основна увага повинна бути прикута саме до тих вихідних умов або параметрів, які в найбільшій мірі спричиняють неоднорідність деформування бетону в перерізі залізобетонних елементів.

Загалом відомо, що центрально стиснутий бетонний елемент завжди зазнає однорідного напружено-деформованому стану. А тому зрозуміло, що при його руйнуванні граничні деформації стиснутого бетону завжди сягатимуть лише критичних величин  $\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{cl}$  (п.3.2.3.2). Перевищення граничними деформаціями бетону вищезгаданих критичних величин стає реальним лише тоді, коли в перерізі елемента залишатимуться волокна, здатні перебирати на себе додаткові зусилля від розвантаження найбільш деформованих фібр бетону. А це можливо лише в двох випадках:

- за наявності в перерізі елемента арматурних стержнів з критичними деформаціями, що перевищують критичні деформації бетону  $\varepsilon_{so} > \varepsilon_{cl}$ ;
- за неоднорідного деформування волокон самого бетону в перерізі бетонного або залізобетонного елемента при плоскому чи косому згинанні, при позацентровому чи косому стиску.

Зі сказаного випливає, що граничні деформації крайніх фібр стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  в найбільшій мірі є залежними не тільки від параметрів армування залізобетонного елемента, але й від виду їх напружено-деформованого стану. Останнє було засвідчено в дослідженнях косодеформованих залізобетонних елементів, проведених Павліковим А.М. [178] за «деформаційною моделлю».

Аби перевірити дане припущення, запишемо рівняння рівноваги залізобетонного елемента для загального випадку його деформування – косоного стиску (рис. 4.14)

$$N = \int_0^{x_c} \sigma(x) dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy - \int_0^{x_c - b_n \cdot \sin \theta} \sigma(x) dx \int_{y_1(x)}^{y_3(x)} dy + \int_{x_t}^0 \sigma_t(x) dx \int_{y_{t3}(x)}^{y_{t2}(x)} dy + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} \cdot A_{si}; \quad (4.22)$$

$$N \cdot e = \int_0^{x_c} \sigma(x) \cdot x dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy - \int_0^{x_c - b_n \cdot \sin \theta} \sigma(x) \cdot x dx \int_{y_1(x)}^{y_3(x)} dy + \int_{x_t}^0 \sigma_t(x) \cdot x dx \int_{y_{t3}(x)}^{y_{t2}(x)} dy + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} \cdot A_{si} \cdot x_{si}, \quad (4.23)$$

де  $\theta$  – кут нахилу нейтральної лінії до сторони  $b_n$  перерізу елемента;

$A_{si}$  – площа поперечного перерізу окремого арматурного стержня.

Для дослідження величини граничних деформацій стиснутого бетону за допомогою вищенаведених залежностей (4.22) і (4.23) скористаємося рядом наступних гіпотез:

- зв'язок між напруженнями та деформаціями стиснутого бетону встановлюється за діаграмою його стану у вигляді неправильної дробово-раціональної функції (3.8);
- в граничному стані впливом розтягнутого бетону на несучу здатність залізобетонного елемента нехтуємо;
- зв'язок між напруженнями та відносними деформаціями арматури приймемо за діаграмою Прандтля, а за відсутності фізичної межі текучості – у вигляді ломаної [95; 122; 170; 382] чи лінійно-параболічної функції [153; 178];
- при деформуванні залізобетонних елементів для їх осереднених перерізів

вважатимемо справедливою гіпотезу плоских перерізів

$$1/r = \varepsilon_{c2}/x = \varepsilon_{si}/x_{si} \text{ або } 1/r = (\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{si})/d_i = (\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{si})/(x - x_{si}), \quad (4.24)$$

- несуча здатність елемента та опір його розрахункового перерізу діючим навантаженням вважаються вичерпаними при порушенні умов рівноваги.

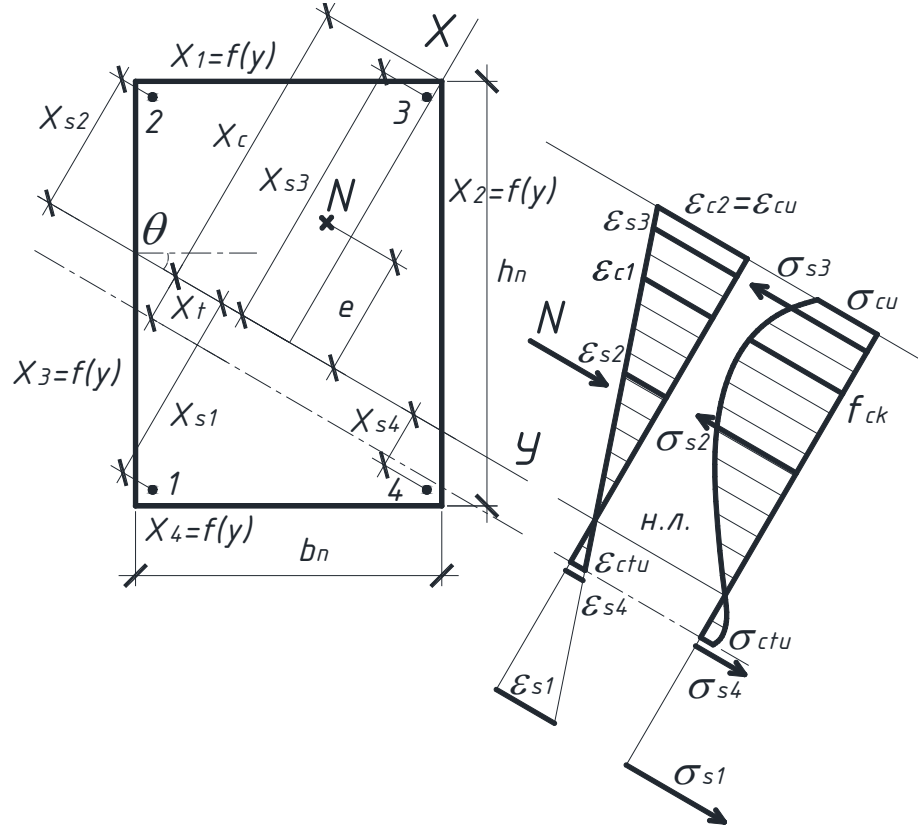


Рисунок 4.14 – Напружено-деформований стан перерізу косостиснутого залізобетонного елемента

З урахуванням цих гіпотез залежності (4.22) і (4.23) приймуть вигляд

$$N = \frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{c2}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})/(tg\theta/r)}^{(\varepsilon_{c2} - \varepsilon_c)tg\theta/(1/r)} dy - \int_0^{\varepsilon_{c2} - 1/r \cdot b_n \cdot \sin\theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})/(tg\theta/r)}^{((\varepsilon_{c2} - \varepsilon_c)/(1/r) - b_n/\sin\theta)tg\theta} dy \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si}; \quad (4.25)$$

$$N \cdot e = \frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{c2}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})/(tg\theta/r)}^{(\varepsilon_{c2} - \varepsilon_c)tg\theta/(1/r)} dy - \int_0^{\varepsilon_{c2} - 1/r \cdot b_n \cdot \sin\theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{c2})/(tg\theta/r)}^{((\varepsilon_{c2} - \varepsilon_c)/(1/r) - b_n/\sin\theta)tg\theta} dy \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)}, \quad (4.26)$$

де  $b_n$  і  $h_n$  – ширина та висота перерізу елемента;

$\varepsilon_{c2}$  і  $\varepsilon_{co}$  – граничні деформації найбільш та найменш стиснутих волокон бетону в перерізі, попередньо  $\varepsilon_{c2} = \varepsilon_{cu}$ , а  $\varepsilon_{co} = 0$ ;

$\varepsilon_{si}$  – відносні деформації арматури, обмежені межею текучості  $\varepsilon_{so}$ ;

$\varepsilon_{si(r)}$  – відносні деформації арматури за гіпотезою плоских перерізів (за кривиною елемента без обмеження текучості).

В момент вичерпання несучої здатності, коли

$$M(1/r)|_{1/r=1/r_u} = \max, \quad (4.27)$$

граничні деформації бетону в косостиснутому залізобетонному елементі знайдемо з рівняння (4.26), застосувавши до нього екстремальний критерій несучої здатності  $dM/d(1/r) = 0$ .

Безперечно, що точний розв'язок рівняння (4.26), після його інтегрування, буде ще більш складним ніж для випадку позacentрового стиску, але так само практично неможливим із-за появи в ньому так званих радикалів. Для загального випадку деформування залізобетонних елементів його вдалося виразити за допомогою методів числового аналізу з достатньо високим ступенем наближення (достовірністю  $R^2=0,998$ ) наступною залежністю [197; 198; 223]

$$\eta_{eu} = \varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c1} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot \frac{(k-1)}{(6-k)} \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \left(\frac{x_{si}}{x}\right)^2 + \beta_F \times$$

$$\times \left[ \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_h)^2)(1 - m_h^{3/2})(1 - m_h/k)\sqrt{(\ln k)^{(1-m_h^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_h^2)(k-2)\ln(6/k - 2(0,1 - m_h)))^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_b)^2)(1 - m_b^{3/2})(1 - m_b/k)\sqrt{(\ln k)^{(1-m_b^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_b^2)(k-2)\ln(6/k - 2(0,1 - m_b)))^2} \right], \quad (4.28)$$

де  $m_h$  – параметр неоднорідності деформування стиснутого бетону уздовж сторони  $h$  (рис. 4.15),  $m_h = \varepsilon_{co,h} / \varepsilon_{c2}$ ;

$m_b$  – параметр неоднорідності деформування стиснутого бетону уздовж сторони  $b$  (рис. 4.15),  $m_b = \varepsilon_{co,b} / \varepsilon_{c2}$ ;



$\eta_{su}$  – рівень граничних деформацій найбільш стиснутих фібр бетону в перерізі;

$x_{si}$  – відстань від нейтральної лінії до центру ваги стиснутих стержнів, напруження в яких у граничному стані не досягають межі текучості;

$\rho_{li}$  – коефіцієнт армування перерізу елемента тими ж стержнями,  
 $\rho_{li} = A_{si} / (b_n \cdot h_n)$ ;

$\beta_F$  – коефіцієнт, що залежить від виду напружено-деформованого стану елемента і для стиснутих елементів приймається рівним  $\beta_F = 1,0$ .

Варто відзначити, що залежність (4.28) отримана для бетонних та залізобетонних елементів прямокутного перерізу за довільної форми їх стиснутої зони (рис. 4.15), а тому може бути використана в узагальненій моделі деформування зазначених елементів. На підтвердження сказаного зауважимо, що для стиснутих залізобетонних елементів, які зазнають деформування в одній площині, тобто позацентрового стиску, залежність (4.28) спрощується до уже раніше отриманих виразів:

- при використанні високоміцної арматури з умовною межею текучості – до (4.21);
- при досягненні межі текучості в усіх арматурних стержнях в граничному стані – до (3.40).

Для випадку, коли форма стиснутої зони в залізобетонному елементі стає трикутною (рис.4.15,  $\delta$ ), а напруження в арматурних стержнях досягають межі текучості, вона спрощується ще більш суттєво і рівень граничних деформацій крайніх фібр стиснутого бетону можна обчислювати за наступним виразом

$$\eta_{su} = 1 + \frac{0,796 \cdot \sqrt{\ln k}}{1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6 / k - 0,2))^2}. \quad (4.29)$$

Таким чином, вищеотримана залежність (4.28) дозволяє прогнозувати граничні деформації бетону в бетонних та залізобетонних елементах за будь-якого виду стиску.

Виходячи з детального аналізу результатів проведених досліджень,

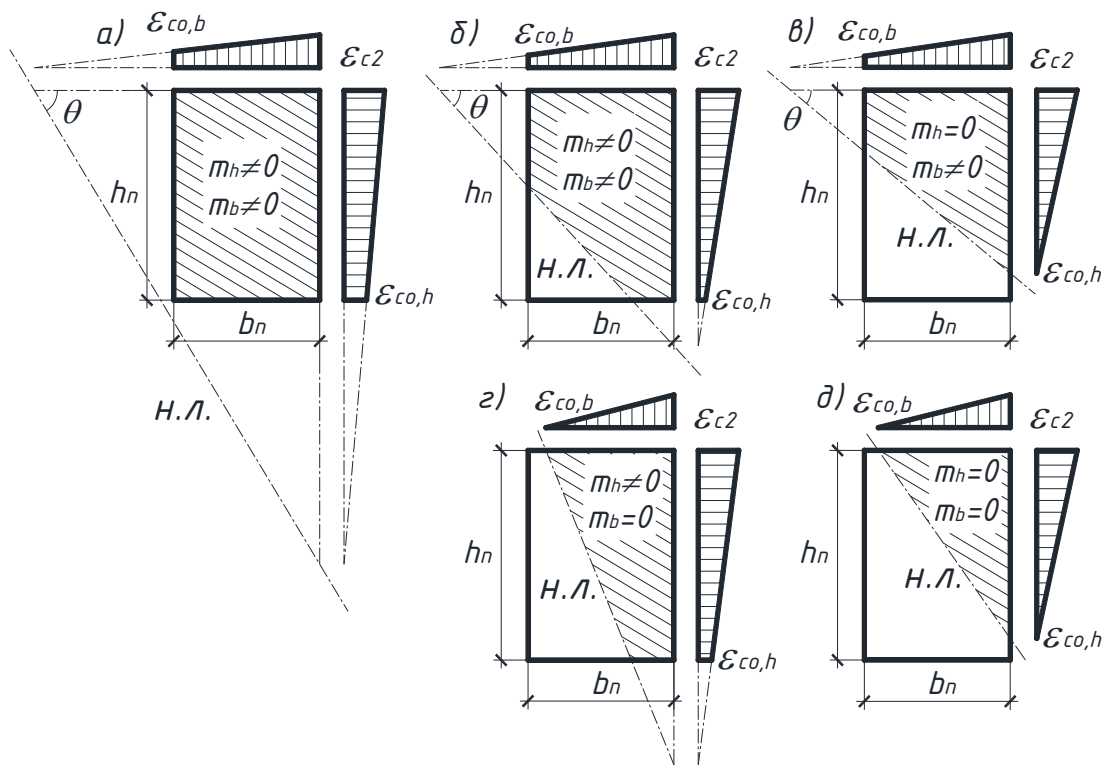


Рисунок 4.15 – До можливих випадків положення нейтральної лінії в косостиснутому залізобетонному елементі

можна констатувати, що номінальні значення граничних деформацій стиснутого бетону в залізобетонних елементах повинні обмежуватися виключно за екстремальним критерієм несучої здатності  $dM/d(1/r) = 0$  згідно діаграми їх стану. Завдяки отриманим рішенням вдалося врахувати той факт, що чим вищим є ступінь неоднорідності деформування бетону (чим меншим є параметр  $m$ ) тим більшими можуть бути його граничні деформації  $\varepsilon_{cu}$  в перерізі бетонного чи залізобетонного елемента (табл. 4.3).

#### 4.4. Згинальні елементи

##### 4.4.1. Деформування залізобетонних елементів за плоского згину

Цілком очевидно, що побудову узагальненої моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів варто було б розпочинати саме зі згинальних елементів. І обумовлено це наступними причинами:

Таблиця 4.3 – Граничні деформації бетону в стиснутих залізобетонних елементах при досягненні межі текучості в усіх арматурних стержнях

Клас бетону	$f_{ck}$ , МПа	$k = \frac{E_{co} \cdot \varepsilon_{cl}}{f_{ck}}$	Рівень граничних деформацій стиснутого бетону $\eta_{ei}$ за	
			позацентрального стиску	косого стиску (рис.4.15,д)
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
C8/10	7,5	5,061	1,507	2,013
C12/15	11	4,374	1,482	1,963
C16/20	15	3,796	1,455	1,910
C20/25	18,5	3,413	1,436	1,872
C25/30	22	3,109	1,420	1,839
C30/35	25,5	2,862	1,405	1,809
C32/40	29	2,657	1,391	1,782
C35/45	32	2,508	1,380	1,760
C40/50	36	2,340	1,366	1,732
C45/55	39,5	2,214	1,354	1,709
C50/60	43	2,105	1,343	1,686
C53/65	46,5	2,010	1,333	1,665
C56/70	50	1,926	1,322	1,644
C60/75	54	1,842	1,311	1,622
C65/80	57,5	1,777	1,301	1,602
C70/85	61	1,718	1,292	1,584
C75/90	65	1,659	1,282	1,563
C80/95	68	1,618	1,274	1,548
C85/100	72	1,568	1,265	1,529
C90/105	75,5	1,529	1,257	1,513
C95/110	79	1,493	1,249	1,497
C100/115	83	1,455	1,24	1,480
C105/120	86	1,429	1,234	1,467

- по-перше, в перерізі згинальних елементів завжди присутня як стиснута, так і розтягнута зони бетону;
- по-друге, «внутрішня статична невизначеність» в таких елементах завжди є меншою, ніж у позацентрово навантажених елементах;
- по-третє, при проектуванні згинальних залізобетонних елементів завжди виникає необхідність у їх розрахунках не тільки за несучою здатністю, але й за тріщиностійкістю та прогинами.

Основну увагу зосередимо на двох характерних моментах в деформуванні згинальних елементів, а саме на:

- руйнуванні бетону розтягнутої зони або появи тріщин;
- руйнуванні всього елемента або повній втраті ним несучої здатності.

Комплексну оцінку напружено-деформованого стану згинального елемента при утворенні нормальних тріщин (рис. 4.16) здійснюватимемо за загальноприйнятими рівняннями рівноваги його перерізу

$$N_c = N_{ct} + N_s ; \quad (4.30)$$

$$M = M_c + M_{ct} + M_s . \quad (4.31)$$

Зусилля в бетоні стиснутої та розтягнутої зон перерізу елемента обчислюються виразами (3.59)...(3.62), а зусилля в арматурі - за формулами

$$N_s = \frac{b_n}{1/r} \cdot E_s \cdot (\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{s1}) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \varepsilon_{si} ; \quad (4.32)$$

$$M_s = \frac{b_n}{(1/r)^2} \cdot E_s \cdot (\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{s1}) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \varepsilon_{si}^2 , \quad (4.33)$$

де  $\varepsilon_{s1}$  – поточні деформації розтягнутого та найбільш віддаленого від нейтральної осі арматурного стержня;

$\rho_{li}$  – коефіцієнт армування перерізу елемента конкретними поздовжніми стержнями,  $\rho_{li} = A_{si} / (b_n \cdot d)$ ;

Завдяки подальшому спільному розв'язку рівнянь (4.30) і (4.31) вдалося встановити основні закономірності деформування залізобетонних елементів при виникненні в них нормальних тріщин. Зокрема, оцінено вплив коефіцієнта армування на основні параметри напружено-деформованого

стану згинального елемента, а саме на: величину моменту утворення нормальних тріщин ( $M_{cr}$ ), жорсткість поперечного перерізу елемента ( $D_{cr}$ ) та його осереднену кривину ( $1/r_{cr}$ ), відносну висоту його стиснутої зони ( $x_c/h$ ) та ступінь деформування найбільш стиснутих фібр бетону ( $\varepsilon_{c2}/\varepsilon_{c1}$ ).

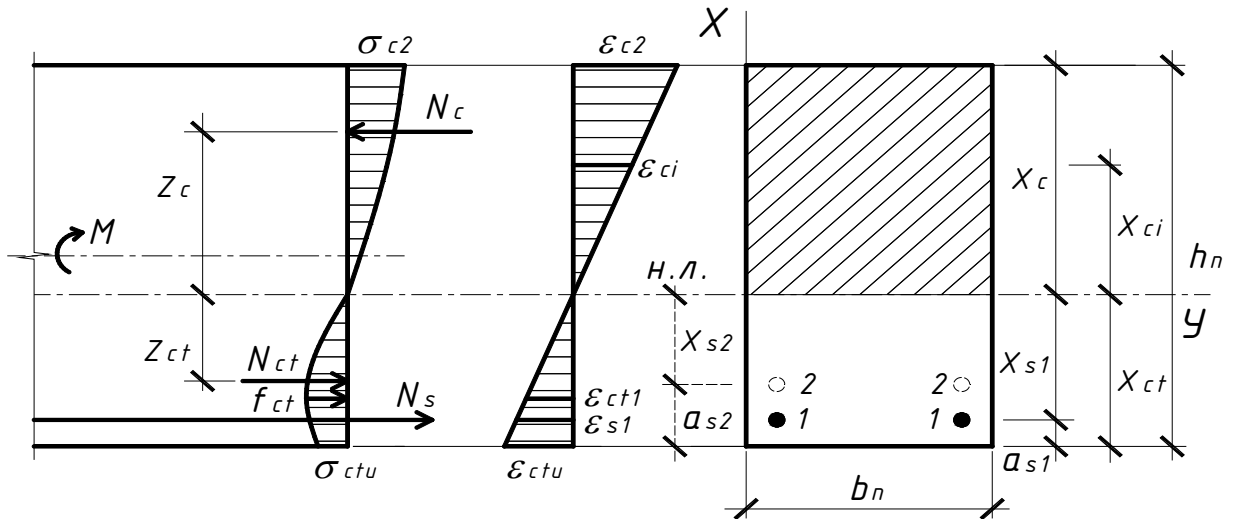


Рисунок 4.16 – Напружено-деформований стан згинального залізобетонного елемента в момент утворення нормальних тріщин

З аналізу отриманих результатів випливає, що величина моменту утворення нормальних тріщин згинального залізобетонного елемента та його кривина в деякому осередненому перерізі залежать від коефіцієнту армування лінійно (рис. 4.17 та 4.18). Дещо інша ситуація складається з відносною жорсткістю елемента. Для бетонів низьких та середніх класів її зв'язок з коефіцієнтом армування весь час залишається нелінійним. Причому, при збільшенні останнього до 2,0...3,0% вона теж зростає, однак з подальшим зростанням  $\rho_l$  відносна жорсткість починає падати (рис. 4.19). Варто зауважити, що подібна тенденція властива і для бетону стиснутої зони: зміна коефіцієнту армування впливає на її відносну висоту нелінійно (рис. 4.20), а на ступінь деформування крайніх фібр – лінійно (рис. 4.21).

Спільний розв'язок рівнянь (4.30)...(4.31) на стадії втрати ним несучої здатності виконаємо за умовою (4.27) з використанням раніше згаданого екстремального критерію несучої здатності  $dM/d(1/r) = 0$ . За допомогою

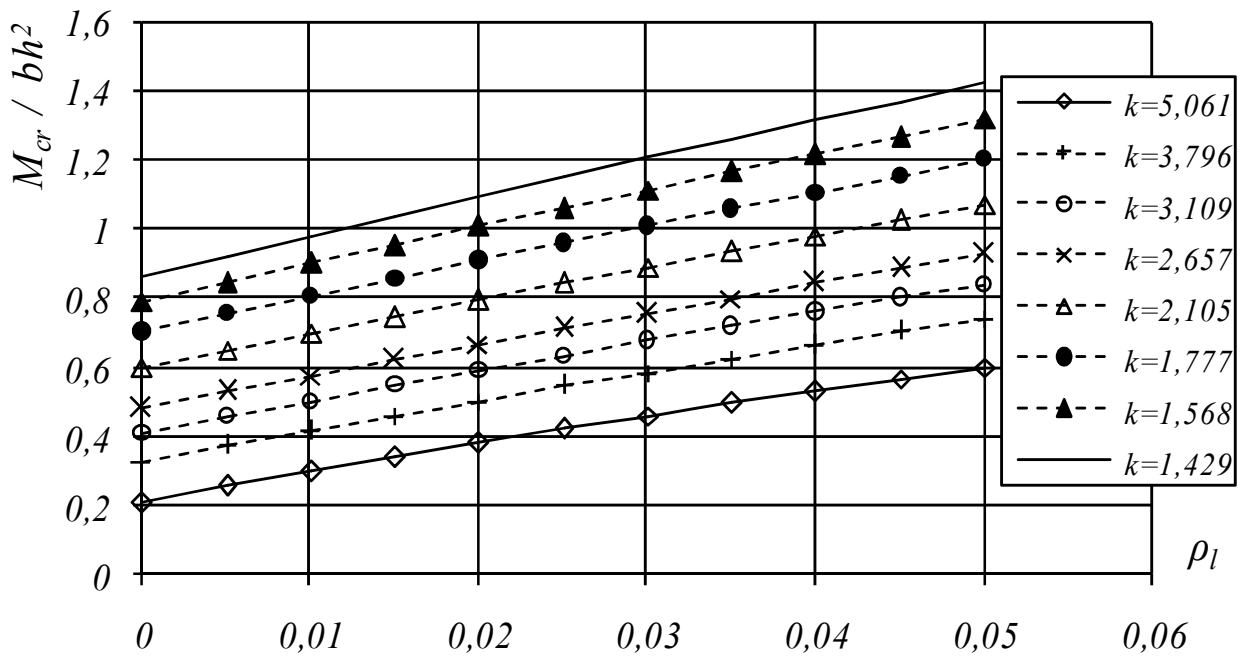


Рисунок 4.17 – Залежність величини моменту утворення нормальних тріщин від ступеню армування згинального залізобетонного елемента

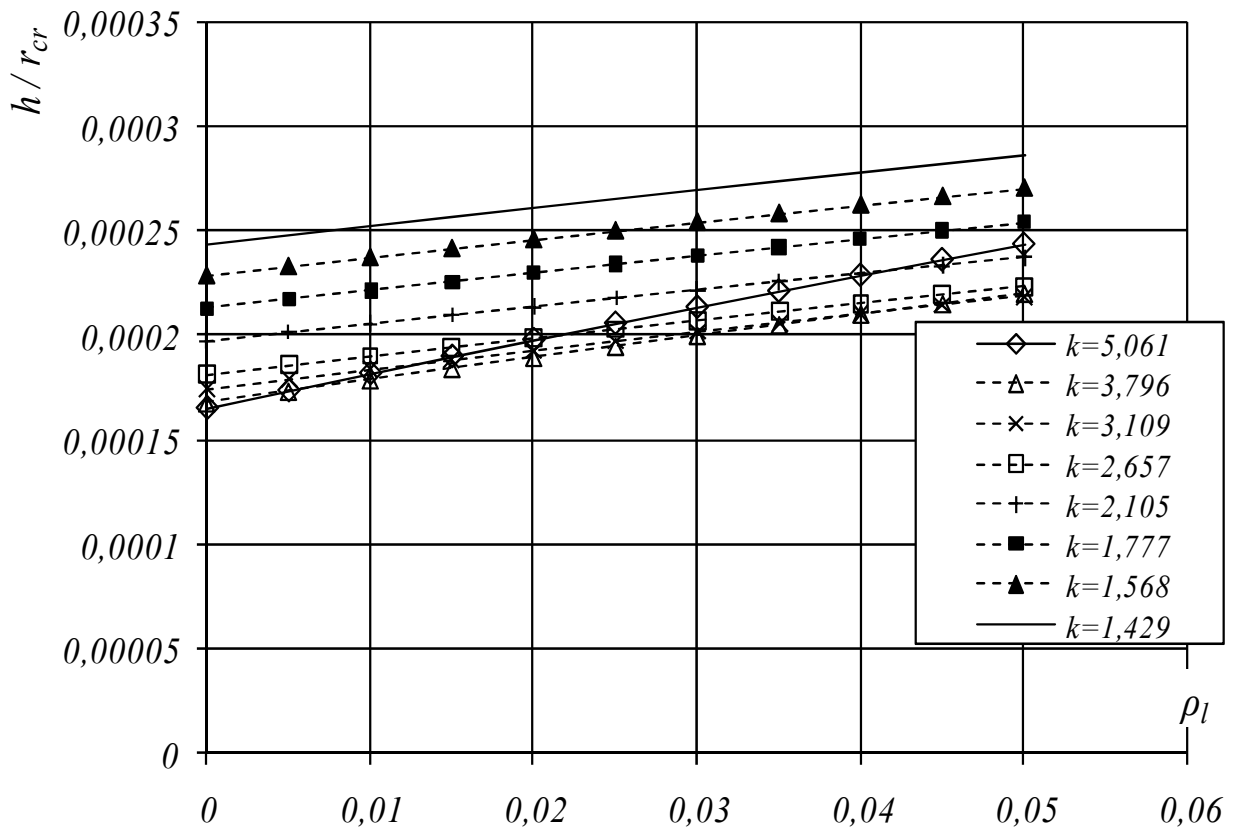


Рисунок 4.18 – Вплив армування на зміну відносної кривини згинального залізобетонного елемента в момент утворення нормальних тріщин

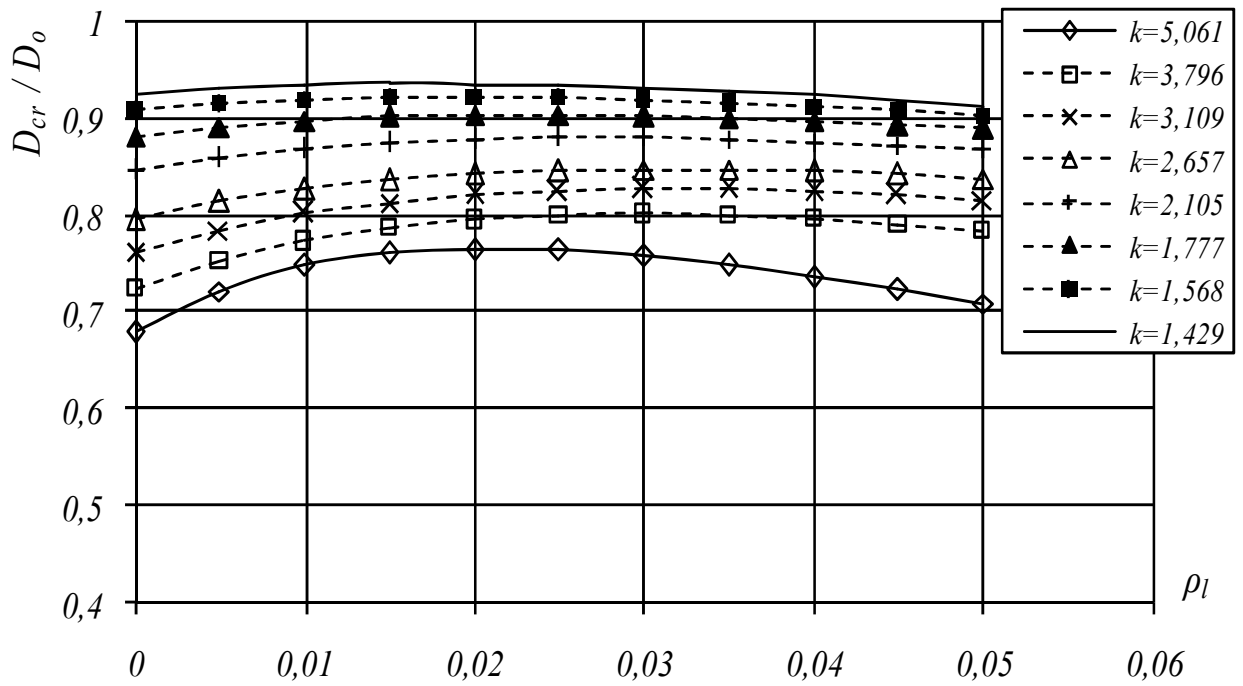


Рисунок 4.19 – Вплив армування на зміну відносної жорсткості згинального залізобетонного елемента при утворенні нормальних тріщин

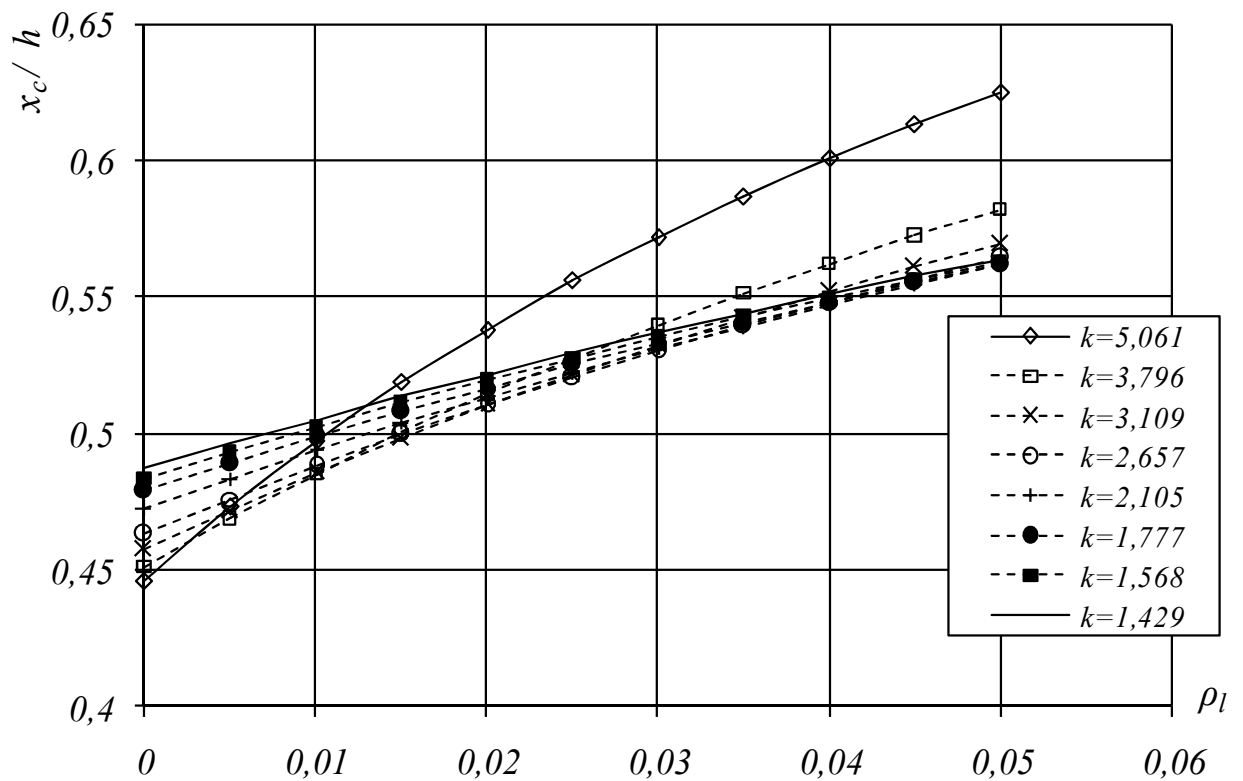


Рисунок 4.20 – Вплив армування на величину відносної висоти бетону стиснутої зони згинального залізобетонного елемента в момент утворення нормальних тріщин

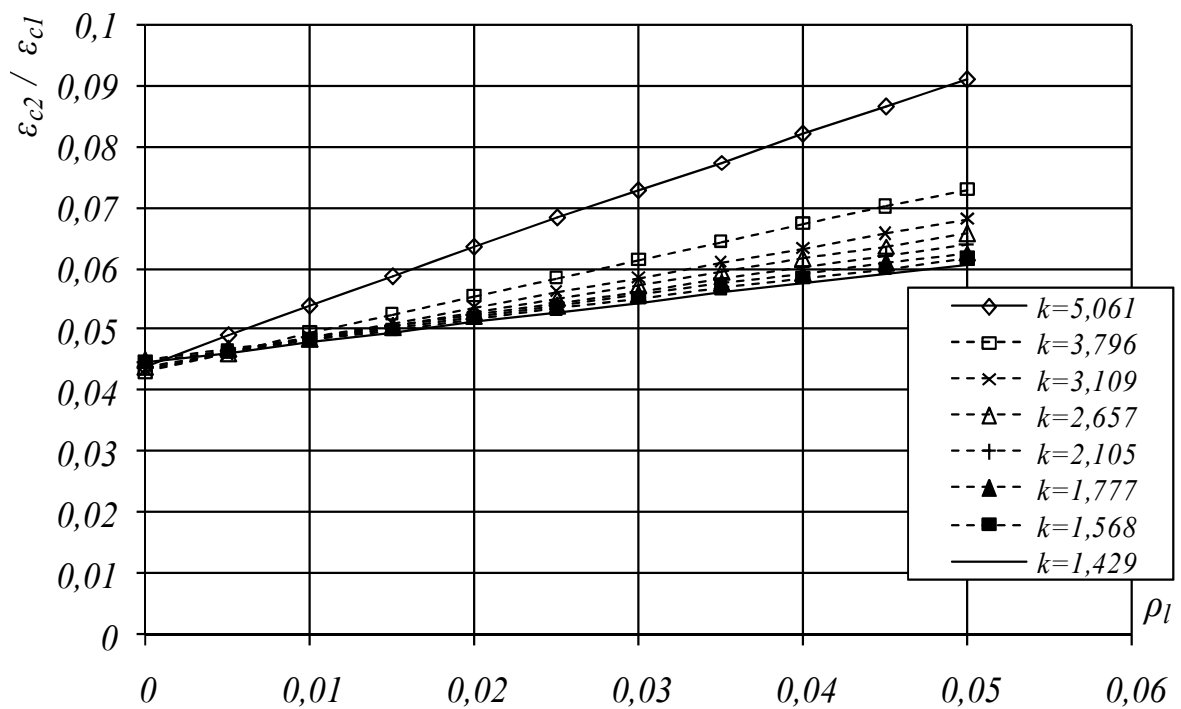


Рисунок 4.21 – Вплив армування на величину відносних деформацій крайових фібр бетону стиснутої зони згинального залізобетонного елемента при утворенні нормальних тріщин

методів числового аналізу цей розв’язок вдалося виразити з достатньо високим ступенем наближення (достовірністю  $R^2=0,999$ ) залежністю

$$\eta_{eu} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot (k - 1) / (6 - k) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot (x_{si} / x)^2 + 0,81 \cdot \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m)^2)(1 - m^{3/2})(1 - m/k)\sqrt{(\ln k)^{(1-m^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m)))^2}, \quad (4.34)$$

яка, у випадку плоского згинання ( $m = 0$ ) з досягненням межі текучості в усіх арматурних стержнях, спрощується до вигляду

$$\eta_{eu} = 1 + 0,322 \cdot \sqrt{\ln k} / \left[ 1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2 \right]. \quad (4.35)$$

#### 4.4.2. Особливості деформування косозігнутих елементів

Загальні закономірності деформування косозігнутих залізобетонних елементів до та після появи в них нормальних тріщин в цілому залишаються такими ж самими як і в плосозігнутих. Основні ж відмінності та особливості



їх деформування пов'язані з підвищеною «внутрішньою невизначеністю» (неоднорідністю) та нелінійністю процесу деформування самого бетону, і перш за все, стиснутої зони. Найбільш інтенсивно зазначені особливості проявляються на заключних стадіях деформування косозігнутих елементів за можливих випадків форми стиснутої зони (рис. 4. 22), серед яких, на думку деяких дослідників [178], реальними можуть бути лише випадки (а) та (в).

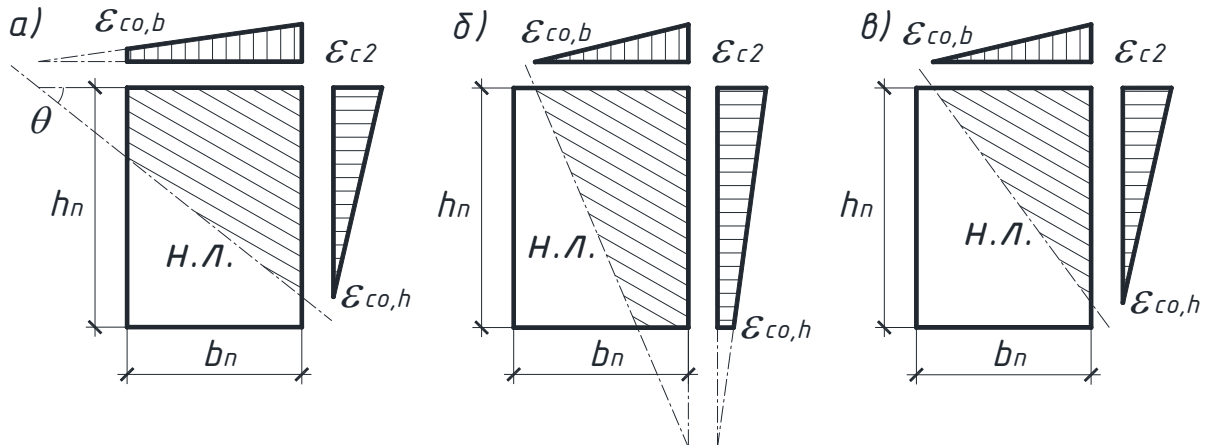


Рисунок 4.22 – Характерні випадки положення нейтральної лінії в перерізі косозігнутого залізобетонного елемента

Для виявлення потенційних можливостей деформування косозігнутих залізобетонних елементів, запишемо рівняння їх рівноваги у вигляді

$$\frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{c2}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}) / (tg\theta / r)}^{(\varepsilon_{c2} - \varepsilon_c) tg\theta / (1/r)} dy - \int_0^{\varepsilon_{c2} - 1/r \cdot b_n \cdot \sin\theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}) / (tg\theta / r)}^{((\varepsilon_{c2} - \varepsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin\theta) tg\theta} dy \right) = E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si}; \quad (4.36)$$

$$M = \frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{c2}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}) / (tg\theta / r)}^{(\varepsilon_{c2} - \varepsilon_c) tg\theta / (1/r)} dy - \int_0^{\varepsilon_{c2} - 1/r \cdot b_n \cdot \sin\theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{c2}) / (tg\theta / r)}^{((\varepsilon_{c2} - \varepsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin\theta) tg\theta} dy \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)}. \quad (4.37)$$

Граничні деформації бетону в косозігнутому залізобетонному елементі знайдено з рівняння (4.37) за допомогою методів числового аналізу на основі гіпотези граничної рівноваги та екстремального критерію несучої здатності

$$\eta_{eu} = \varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c1} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot \frac{(k-1)}{(6-k)} \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \left(\frac{x_{si}}{x}\right)^2 + 0,81 \times$$

$$\times \left[ \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_h)^2)(1 - m_h^{3/2})(1 - m_h/k) \sqrt{(\ln k)^{(1-m_h^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_h^2)(k-2) \ln(6/k - 2(0,1 - m_h)))^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_b)^2)(1 - m_b^{3/2})(1 - m_b/k) \sqrt{(\ln k)^{(1-m_b^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_b^2)(k-2) \ln(6/k - 2(0,1 - m_b)))^2} \right]. \quad (4.38)$$

За випадку, коли форма стиснутої зони бетону в косозігнутих елементах стає трикутною (рис.4.22, в), а напруження в арматурних стержнях досягають межі текучості, він спрощується до наступного виразу

$$\eta_{eu} = 1 + \frac{0,644 \cdot \sqrt{\ln k}}{1 + ((k-2)/6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2}. \quad (4.39)$$

Варто відзначити, що обчислені за формулами (4.35) та (4.39) граничні деформації стиснутого бетону в згинальних елементах (табл. 4.4), повністю узгоджуються з результатами досліджень Павлікова А.М. [178].

Таблиця 4.4 – Граничні деформації бетону в згинальних залізобетонних елементах при досягненні межі текучості в усіх арматурних стержнях

Бетон з характеристикою пружно-пластичності $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{ck}$	Рівень граничних деформації стиснутого бетону $\eta_{eu}$ при згинанні			
	плоскому за		косому (рис.4.22,в) за	
	формулою (4.35)	Павліковим А.М.[178]	формулою (4.39)	Павліковим А.М.[178]
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
5	1,409	1,412	1,818	1,83
4,5	1,394	1,398	1,789	1,81
4	1,377	1,382	1,753	1,78
3,5	1,357	1,363	1,714	1,74
3	1,335	1,339	1,669	1,70
2,5	1,307	1,309	1,615	1,64
2	1,268	1,27	1,537	1,546
1,5	1,203	1,2	1,406	1,40
1,1	1,094	1,075	1,187	1,10

Отримані для згинальних елементів залежності підтверджують той факт, що чим вищим є ступінь неоднорідності деформування бетону (чим меншим є параметр  $m$ ), тим більшими є його граничні деформації  $\varepsilon_{cu}$  в поперечному перерізі (табл. 4.4). Особливої уваги заслуговує й виявлений даними дослідженнями лінійний вплив коефіцієнта армування на кривину залізобетонних елементів та на деформації крайових фібр стиснутого бетону.

#### 4.5. Висновки

1. Процес деформування залізобетонного елемента в деформаційно-силовій моделі доцільно описувати за допомогою інтегральної жорсткості його осередненого перерізу  $M/(1/r)$  з відтворенням її нелінійного зв'язку з рівнями завантаження  $M/M_u$  та деформування  $(1/r)/(1/r_u)$  самого елемента (за осьового стиску –  $N/\varepsilon_c$  з  $N/N_u$  та  $\varepsilon_c/\varepsilon_{cu}$ , відповідно).
2. Граничні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$ , що є залежними від характеру напружено-деформованого стану залізобетонного елемента, загалом слід визначати за відповідною діаграмою  $M - 1/r$  (при осьовому стиску –  $N - \varepsilon_c$ ) з застосуванням екстремального критерію несучої здатності  $dM/d(1/r) = 0$  (за осьового стиску – екстремального критерію міцності  $dN/d\varepsilon_c = 0$ ).
3. Параметр  $dM/d(1/r) = 0$  може виступати основним критерієм вичерпання несучої здатності бетонних та залізобетонних елементів, оскільки він «поглинає» всі інші критерії, задекларовані в нормах [122; 123; 243; 248; 382], а за осьового стиску ще й «трансформується» в екстремальний критерій міцності  $dN/d\varepsilon_c = 0$ .
4. В деформаційно-силовій моделі саме кривина  $1/r$  через діаграму стану  $M - 1/r$  дозволяє пов'язати між собою граничні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  з граничними деформаціями розтягнутої арматури  $\varepsilon_{uk}$  або, інакше кажучи, врахувати взаємний вплив деформативності матеріалів на

вичерпання несучої здатності залізобетонного елемента.

5. Чим вищим є ступінь неоднорідності деформування бетону, тим більшими можуть бути його граничні деформації  $\varepsilon_{cu}$  в перерізі залізобетонного елемента. Найбільша деформативність бетону властива косостиснутим та косозігнутим залізобетонним елементам за трикутної форми стиснутої зони.
6. Величина граничних деформацій стиснутого бетону в залізобетонних елементах конструкцій залежить як від параметрів їх армування, так і від характеристик пружно-пластичності самого бетону. З підвищенням коефіцієнта пружно-пластичності бетону  $k$  рівень граничних деформацій стиснутого бетону  $\eta_{cu}$  збільшується.
7. Залежність рівня граничних деформацій стиснутого бетону  $\eta_{cu}$  від коефіцієнту армування елемента  $\rho_l$  є близькою до лінійної, а положення арматурних стержнів в перерізі залізобетонного елемента впливає на величину граничних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  нелінійно.
8. Впливом звичайної (не високоміцної) арматури на граничні деформації стиснутого бетону в практичних розрахунках залізобетонних елементів можна знехтувати тільки в тому випадку, якщо вони виготовлені з бетону класу C40/50 і вище.

Матеріали розділу опубліковані в роботах [193; 194; 197; 198; 204; 207; 209; 213; 215; 219; 220; 223; 229; 490].

## РОЗДІЛ 5

### РОЗРАХУНОК НОРМАЛЬНИХ ПЕРЕРІЗІВ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА ГРАНИЧНИМИ СТАНАМИ ПЕРШОЇ ГРУПИ

#### 5.1. Основні гіпотези та передумови розрахунку

В основу розрахунку нормальних перерізів залізобетонних елементів за їх довільного згину, стиску чи розтягу закладені наступні гіпотези та передумови з дотриманням основних принципів МДТТ:

1. Реальний напружено-деформований стан залізобетонних елементів описується відповідною діаграмою у вигляді неправильної дробово-раціональної функції (2.11) або (2.14).
2. Для залізобетонних елементів вважається справедливою гіпотеза плоских перерізів (4.24). Вона залишається справедливою і в осереднених перерізах блоків між тріщинами, якщо такі виникають (рис. 5.1).
3. Несуча здатність бетонного або залізобетонного елемента та опір його розрахункового перерізу діючим навантаженням обмежується згідно критеріїв граничного стану за першою групою (табл. 2.1).
4. Зв'язок між напруженнями та деформаціями і стиснутого, і розтягнутого бетону (відповідно  $\sigma_c - \varepsilon_c$  та  $\sigma_{ct} - \varepsilon_{ct}$ ) описується повними діаграмами його деформування (стану) у вигляді неправильних дробово-раціональних функцій (3.8) та (3.46) відповідно.
5. Початковий модуль деформацій (початковий модуль пружності) бетону обчислюється за формулою  $E_{co} = k_o \cdot E_{cm}$  при використанні вихідних даних з табл. 3.2.
6. Критичні деформації стиснутого бетону пропонується визначати за формулами (3.25) та (3.26).
7. Граничні деформації крайових фібр стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$ , що є найбільш залежними від виду напружено-деформованого стану елемента та параметрів його армування, рекомендується визначати за допомогою

загальної залежності (4.28) або за дод. Б (табл. Б.1).

8. Критичні деформації розтягнутого бетону пропонується обчислювати за формулами (3.47) та (3.48).

9. Граничні деформації розтягнутого бетону при виникненні перших нормальних тріщин рекомендується визначати за виразами (3.55) або (3.56).

10. При виконанні інженерних розрахунків впливом розтягнутого бетону на несучу здатність залізобетонного елемента пропонується повністю нехтувати.

11. Зв'язок між напруженнями та деформаціями арматури з фізичною межею текучості приймається у вигляді діаграм Прандтля (рис. 4.3, а) або дволінійних діаграм (рис. 4.4, а).

12. За відсутності фізичної межі текучості діаграми деформування арматури описуються дволінійними залежностями (рис. 4.3, б) або лінійно-параболічними функціями (рис. 4.4, б).

## 5.2. Розрахунок згинальних елементів

### 5.2.1. Плоский згин

#### 5.2.1.1. Перевірка несучої здатності

*Елементи з одиничним армуванням.* Використовуючи обумовлені вище гіпотези та передумови, і перш за все гіпотезу граничної рівноваги, запишемо два загальноприйнятих рівняння рівноваги згинального залізобетонного елемента в граничному стані (рис. 5.2)

$$N_{ctu} + N_s - N_{cu} = 0; \quad (5.1)$$

$$M = M_u = M_{cu} + M_{ctu} + M_s, \quad (5.2)$$

де відповідні зусилля в компонентах стиснутої та розтягнутої зон рівні

$$N_{cu} = \frac{b_n}{1/r_u} \cdot \frac{a + b/c}{c} \left[ -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^2}{2 \cdot (a + b/c)} + \varepsilon_{cu} - \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c} \right]; \quad (5.3)$$

$$N_{ctu} = \frac{b_n}{1/r_u} \cdot \frac{a_t + b_t / c_t}{c_t} \left[ -\frac{b_t \cdot \varepsilon_{ctu}^2}{2 \cdot (a_t + b_t / c_t)} + \varepsilon_{ctu} - \frac{\ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ctu})}{c_t} \right]; \quad (5.4)$$

$$N_{su} = \frac{b_n}{1/r_u} \cdot E_s \cdot \rho_l \cdot \varepsilon_s \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_{cu}); \quad (5.5)$$

$$M_{cu} = \frac{b_n}{(1/r_u)^2} \cdot \frac{a + b/c}{c} \left[ -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^3}{3 \cdot (a + b/c)} + \frac{\varepsilon_{cu}^2}{2} - \frac{\varepsilon_{cu}}{c} + \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c^2} \right]; \quad (5.6)$$

$$M_{ctu} = \frac{b_n}{(1/r_u)^2} \cdot \frac{a_t + b_t / c_t}{c_t} \left[ -\frac{b_t \cdot \varepsilon_{ctu}^3}{3(a_t + b_t / c_t)} + \frac{\varepsilon_{ctu}^2}{2} - \frac{\varepsilon_{ctu}}{c_t} + \frac{\ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ctu})}{c_t^2} \right]; \quad (5.7)$$

$$M_{su} = \frac{b_n}{(1/r_u)^2} \cdot E_s \cdot \rho_l \cdot \varepsilon_s^2 \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_{cu}). \quad (5.8)$$

В граничній стадії, за відомих крайових деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  та при знехтуванні впливом розтягнутого бетону, вираз (5.1) зводиться до звичайного квадратного рівняння відносно деформацій в розтягнутій арматурі  $\varepsilon_s$

$$\varepsilon_s^2 + \varepsilon_s \cdot \varepsilon_{cu} - \frac{\delta_c \cdot \alpha_c}{E_s \cdot \rho_l} = 0, \quad (5.9)$$

де параметри  $\alpha_c$  і  $\delta_c$  рівні

$$\alpha_c = -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^2}{2 \cdot (a + b/c)} + \varepsilon_{cu} - \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c}; \quad \delta_c = \frac{a + b/c}{c}. \quad (5.10)$$

Якщо арматура продовжує працювати пружно (напруження в ній не досягають фізичної межі текучості, а  $\varepsilon_s < \varepsilon_{so}$ ), то її деформації, виходячи з розв'язку рівняння (5.9), слід обчислювати за виразом

$$\varepsilon_s = \frac{-\varepsilon_{cu}}{2} \pm \sqrt{(\varepsilon_{cu}/2)^2 + \delta_c \cdot \alpha_c / (E_s \cdot \rho_l)}. \quad (5.11)$$

За вказаних обставин несуча здатність згинального залізобетонного елемента може бути визначена за формулою (5.12)

$$M_u = \frac{b_n}{(1/r_u)^2} \cdot (\delta_c \cdot \beta_c + E_s \cdot \rho_l \cdot \varepsilon_s^2 \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_{cu})), \quad (5.12)$$

де параметр  $\beta_c$  дорівнює

$$\beta_c = -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^3}{3 \cdot (a + b/c)} + \frac{\varepsilon_{cu}^2}{2} - \frac{\varepsilon_{cu}}{c} + \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c^2}. \quad (5.13)$$

При раціональному армуванні згинальних елементів напруження в розтягнутій арматурі в граничній стадії зазвичай досягають межі текучості ( $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{so}$ ), а тому її деформації можуть бути знайдені за простим виразом

$$\varepsilon_s = \delta_c \cdot \alpha_c / (E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \rho_l) - \varepsilon_{cu}. \quad (5.14)$$

Формула для визначення несучої здатності згинального елемента теж дещо видозміниться

$$M_u = \frac{b_n}{(1/r_u)^2} \cdot (\delta_c \cdot \beta_c + E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \rho_l \cdot \varepsilon_s \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_{cu})). \quad (5.15)$$

**Елементи з подвійним або багаторядним армуванням.** За подвійного або багаторядного армування (рис.5.3) рівняння рівноваги згинального елемента (5.1) та (5.2), при знехтуванні впливом розтягнутого бетону, будуть змінюватися в граничній стадії переважно за рахунок перерозподілу зусиль в арматурних стержнях

$$N_s = \frac{b_n \cdot E_s}{1/r_u} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \varepsilon_{s1} \cdot \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}; \quad (5.16)$$

$$M_s = \frac{b_n \cdot E_s}{(1/r_u)^2} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \varepsilon_{s1}^2 \cdot \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}^2. \quad (5.17)$$

де  $k_{si}$  – коефіцієнт, що характеризує положення конкретного арматурного стержня в перерізі елемента по відношенню до найбільш розтягнутого,  $k_{si} = x_{si} / x_{s1}$ ;

$k_{\rho i}$  – коефіцієнт приведення площі поперечного перерізу конкретного арматурного стержня до площі перерізу найбільш розтягнутого,  $k_{\rho i} = \rho_{li} / \rho_{l1}$ ;

$x_{s1}$  – відстань від нейтральної осі до найбільш розтягнутого арматурного стержня залізобетонного елемента.

Щодо деформування арматури в граничній стадії, то воно може відбуватися за трьома різними схемами:



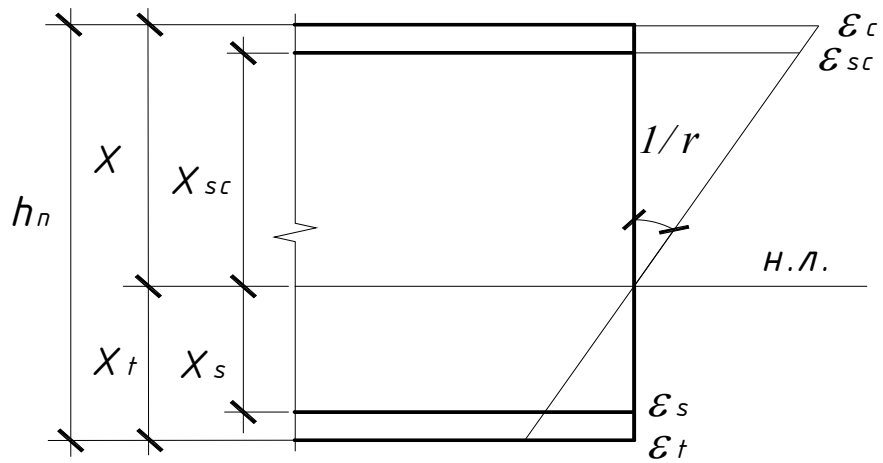


Рисунок 5.1 – Характер зміни деформацій в осередненому перерізі залізобетонного елемента

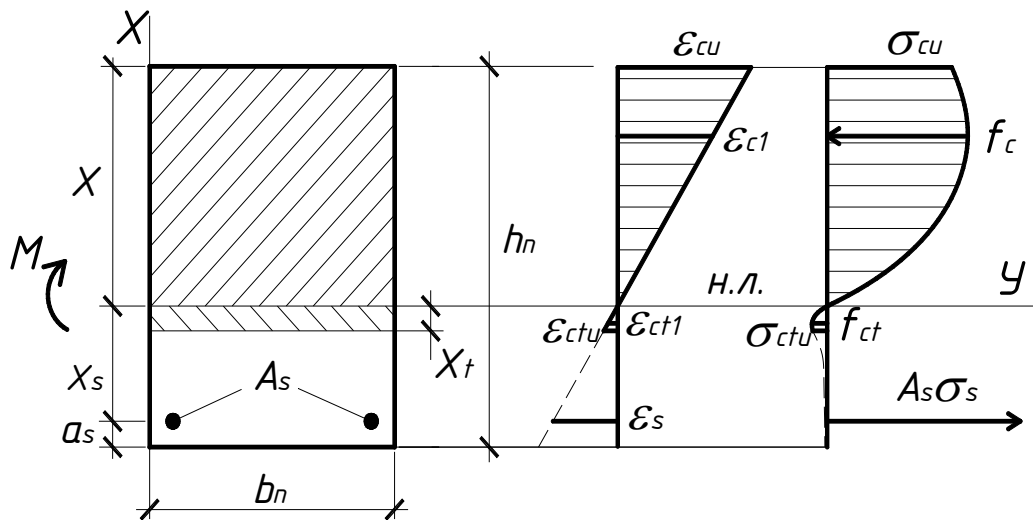


Рисунок 5.2 – Напружено-деформований стан згинального залізобетонного елемента з одиничним армуванням

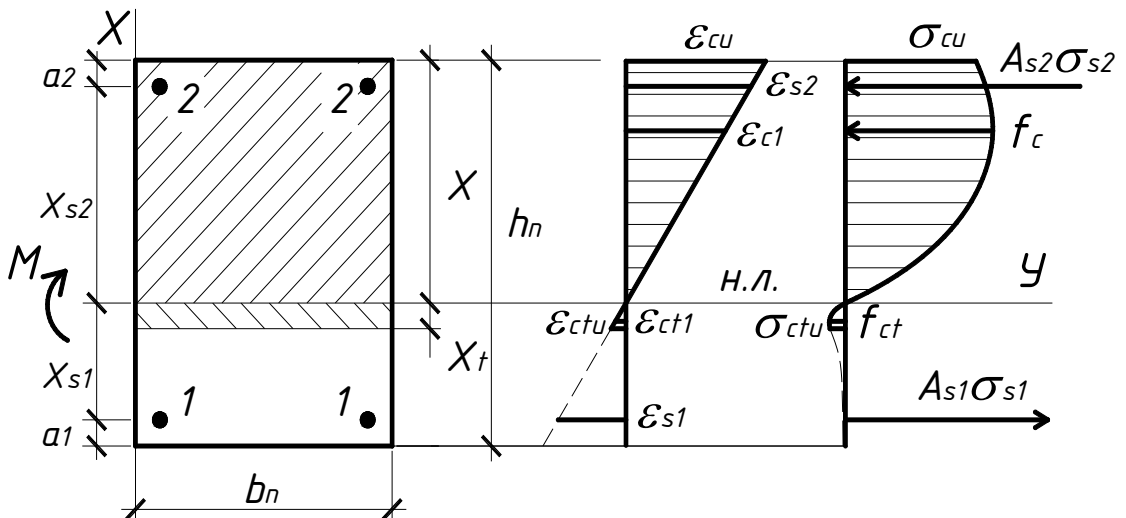


Рисунок 5.3 – Напружено-деформований стан згинального залізобетонного елемента з подвійним армуванням

- всі арматурні стержні згинального залізобетонного елемента, без виключення, працюють пружно;
- найбільш напружені арматурні стержні працюють в пластичній стадії, а менш напружені – деформуються пружно;
- напруження в усіх арматурних стержнях досягають межі текучості.

У випадку пружного деформування всіх арматурних стержнів ( $\varepsilon_{si} < \varepsilon_{so}$ ) деформації найбільш розтягнутого з них слід обчислювати за виразом

$$\varepsilon_{s1} = -\varepsilon_{cu} / 2 \pm \sqrt{(\varepsilon_{cu} / 2)^2 + \delta_c \cdot \alpha_c / (E_s \cdot \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si})}. \quad (5.18)$$

За вказаних обставин несуча здатність згинального залізобетонного елемента буде визначатися за формулою

$$M_u = \frac{b_n}{(1/r_u)^2} \cdot (\delta_c \cdot \beta_c + E_s \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu})) \cdot \varepsilon_{s1}^2 \cdot \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}^2. \quad (5.19)$$

При досягненні межі текучості лише в частині арматурних стержнів ( $\varepsilon_{s1} \dots \varepsilon_{sl} \geq \varepsilon_{so}$ ) та за відсутності такої в інших ( $\varepsilon_{sm} \dots \varepsilon_{sn} < \varepsilon_{so}$ ) загальне зусилля, що буде сприйматися арматурою залізобетонного елемента, слід обчислювати за наступним рівнянням

$$\begin{aligned} N_s &= \frac{b_n}{1/r_u} E_s (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \left( \sum_{i=1}^l \rho_{li} \cdot \varepsilon_{so} + \sum_{i=m}^n \rho_{li} \cdot \varepsilon_{si} \right) \approx \\ &= \frac{b_n}{1/r_u} E_s \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \left( \varepsilon_{so} \cdot \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^l k_{\rho i} + \varepsilon_{s1} \cdot \rho_{l1} \cdot \sum_{i=m}^n k_{\rho i} \cdot k_{si} \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Деформації найбільш розтягнутого арматурного стержня можуть бути знайдені з рівняння

$$\varepsilon_{s1}^2 + \varepsilon_{s1} \cdot (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{so} \cdot \varphi_{\rho 1}) + \varepsilon_{cu} \cdot \varepsilon_{so} \cdot \varphi_{\rho 1} - \delta_c \cdot \alpha_c / (E_s \cdot \rho_{\varphi 1}) = 0 \quad (5.21)$$

за виразом

$$\varepsilon_{s1} = -\frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{so} \cdot \varphi_{\rho 1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{so} \cdot \varphi_{\rho 1}}{2}\right)^2 + \delta_c \cdot \alpha_c / (E_s \cdot \rho_{\varphi 1}) - \varepsilon_{cu} \cdot \varepsilon_{so} \cdot \varphi_{\rho 1}}, \quad (5.22)$$

де відповідні параметри армування рівні

$$\varphi_{\rho 1} = \rho_{\varphi} / \rho_{\varphi 1}; \quad \rho_{\varphi} = \rho_{l1} \sum_{i=1}^l k_{\rho i}; \quad \rho_{\varphi 1} = \rho_{l1} \sum_{i=m}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}; \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\varphi 0} &= \rho_{l1} \sum_{i=1}^l k_{\rho i} \cdot k_{s i}; & \rho_{\varphi 2} &= \rho_{l1} \sum_{i=m}^n k_{\rho i} \cdot k_{s i}^2; \\ \varphi_{\rho 2} &= \rho_{\varphi 0} / \rho_{\varphi 2}; & \varphi_{\rho 3} &= \rho_{\varphi 2} / \rho_{\varphi 1}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Формула для визначення несучої здатності згинального елемента теж дещо видозміниться

$$M_u = \frac{b_n}{(1/r_u)^2} \cdot (\delta_c \cdot \beta_c + E_s \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu})) \cdot (\varepsilon_{s1} \cdot \varepsilon_{so} \cdot \rho_{\varphi 0} + \varepsilon_{s1}^2 \cdot \rho_{\varphi 2}). \quad (5.25)$$

При досягненні межі текучості в усіх арматурних стержнях ( $\varepsilon_{s i} \geq \varepsilon_{s o}$ ) деформації найбільш розтягнутого з них ( $\varepsilon_{s1}$ ) можуть бути знайдені за доволі простим виразом

$$\varepsilon_{s1} = \delta_c \cdot \alpha_c / (E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i}) - \varepsilon_{cu}, \quad (5.26)$$

а формула для визначення несучої здатності згинального елемента прийме наступний вигляд

$$M_u = \frac{b_n}{(1/r_u)^2} \cdot (\delta_c \cdot \beta_c + E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu})) \cdot \varepsilon_{s1} \cdot \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{s i}. \quad (5.27)$$

### 5.2.1.2. Розрахунок площі перерізу арматури

**Елементи з одиничним армуванням.** Загалом вирішення прямої задачі в проектуванні залізобетонних елементів зводиться до розрахунку їх ефективного або раціонального армування, яке передбачає повне використання міцнісних та деформативних властивостей як бетону, так і арматури. Подібний розрахунок здійснюється, виходячи з виконання вищезгаданих гіпотез та передумов (п.5.1), за двома загальноприйнятими рівняннями рівноваги (5.1) і (5.2).

За досягнення в крайових фібрах стиснутого бетону граничних деформацій  $\varepsilon_{cu}$  та при знехтуванні впливом розтягнутого бетону задача з визначення площі перерізу арматури, при повному використанні її міцнісних властивостей ( $\sigma_{su} = \varepsilon_{so} \cdot E_s = f_{yk}$ ), зводиться до спільного розв'язку двох

наступних рівнянь

$$\frac{\delta_c \cdot \alpha_c}{E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \rho_l} = (\varepsilon_s + \varepsilon_{cu}); \quad (5.28)$$

$$\delta_c \cdot \beta_c + E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \rho_l \cdot \varepsilon_s \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_{cu}) - M_u \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_{cu})^2}{b_n \cdot d^2} = 0. \quad (5.29)$$

Після відповідних підстановок та перетворень отримаємо вираз

$$\delta_c (\beta_c - \alpha_c \cdot \varepsilon_{cu}) + \frac{\delta_c^2 \cdot \alpha_c^2}{E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \rho_l} - \frac{M_u}{b_n \cdot d^2} \left( \frac{\delta_c \cdot \alpha_c}{E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \rho_l} \right)^2 = 0, \quad (5.30)$$

що зводиться до звичайного квадратного рівняння відносно коефіцієнта поздовжнього армування перерізу елемента  $\rho_l$

$$\rho_l^2 + \rho_l \frac{\delta_c \cdot \alpha_c^2}{E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot (\beta_c - \alpha_c \cdot \varepsilon_{cu})} - \frac{M_u \cdot \delta_c}{b_n \cdot (\beta_c - \alpha_c \cdot \varepsilon_{cu})} \left( \frac{\alpha_c}{E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot d} \right)^2 = 0. \quad (5.31)$$

Розв'язок цього рівняння дозволяє вирішити задачу ефективного або раціонального проектування згинальних залізобетонних елементів з одиничним армуванням через необхідний коефіцієнт цього армування

$$\rho_l = -\delta_c \cdot \alpha_c^2 / (2 \cdot E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot (\beta_c - \alpha_c \cdot \varepsilon_{cu})) - \sqrt{\left( \frac{\delta_c \cdot \alpha_c^2}{2 \cdot E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot (\beta_c - \alpha_c \cdot \varepsilon_{cu})} \right)^2 + \frac{M_u \cdot \delta_c}{b_n \cdot (\beta_c - \alpha_c \cdot \varepsilon_{cu})} \left( \frac{\alpha_c}{E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot d} \right)^2}. \quad (5.32)$$

Якщо арматура продовжує працювати пружно (напруження в ній не досягають фізичної межі текучості  $\sigma_s < \varepsilon_{so} \cdot E_s = f_{yk}$ ), то її площу слід визначати зі спільного розв'язку дещо видозмінених рівнянь (5.9) та (5.12)

$$\varepsilon_s \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_{cu}) = \delta_c \cdot \alpha_c / (E_s \cdot \rho_l); \quad (5.33)$$

$$M_u = \frac{b_n \cdot d^2}{(\varepsilon_s + \varepsilon_{cu})^2} \cdot (\delta_c \cdot \beta_c + E_s \cdot \rho_l \cdot \varepsilon_s^2 \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_{cu})). \quad (5.34)$$

Підстановка (5.33) в (5.34) призводить до квадратного рівняння відносно деформацій в розтягнутій арматурі  $\varepsilon_s$

$$\varepsilon_s^2 + \varepsilon_s \cdot \left( 2 \cdot \varepsilon_{cu} - \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \alpha_c}{M_u} \right) + \varepsilon_{cu}^2 - \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \beta_c}{M_u} = 0, \quad (5.35)$$

з якого отримаємо

$$\varepsilon_s = \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \alpha_c}{2 \cdot M_u} - \varepsilon_{cu} + \sqrt{\left(\varepsilon_{cu} - \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \alpha_c}{2 \cdot M_u}\right)^2 - \varepsilon_{cu}^2 + \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \beta_c}{M_u}}. \quad (5.36)$$

Необхідний коефіцієнт поздовжнього армування у цьому випадку буде визначатися за дуже простим виразом

$$\rho_l = \delta_c \cdot \alpha_c / (E_s \cdot \varepsilon_s \cdot (\varepsilon_s + \varepsilon_{cu})). \quad (5.37)$$

**Елементи з подвійним або багаторядним армуванням.** При досягненні межі текучості в усіх арматурних стержнях ( $\varepsilon_{si} \geq \varepsilon_{so}$ ) їх сумарну площу слід визначати зі спільного розв'язку двох дещо видозмінених рівнянь (5.26) та (5.27), приведених до вигляду

$$\varepsilon_{so} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) = \delta_c \cdot \alpha_c / (E_s \cdot \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i}); \quad (5.38)$$

$$M_u = \frac{b_n \cdot d^2}{(\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu})^2} (\delta_c \cdot \beta_c + E_s \cdot \varepsilon_{so} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \varepsilon_{s1} \cdot \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}). \quad (5.39)$$

Після підстановки виразу (5.38) в (5.39) матимемо квадратне рівняння, аналогічне до (5.35)

$$\varepsilon_{s1}^2 + \varepsilon_{s1} \cdot \left(2 \cdot \varepsilon_{cu} - \frac{b_n \cdot d^2 (\delta_c \cdot \alpha_c + \varphi_k)}{M_u}\right) + \varepsilon_{cu}^2 - \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \beta_c}{M_u} = 0, \quad (5.40)$$

де параметр  $\varphi_k$  дорівнює

$$\varphi_k = \rho_{k1} / \rho_k; \quad \rho_k = \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i}; \quad \rho_{k1} = \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}. \quad (5.41)$$

З розв'язку зазначеного рівняння отримаємо функцію деформацій в найбільш розтягнутому арматурному стержні  $\varepsilon_{s1}$

$$\varepsilon_{s1} = -\left(\varepsilon_{cu} - \frac{b_n \cdot d^2 \cdot (\delta_c \cdot \alpha_c + \varphi_k)}{2 \cdot M_u}\right) + \sqrt{\left(\varepsilon_{cu} - \frac{b_n \cdot d^2 \cdot (\delta_c \cdot \alpha_c + \varphi_k)}{2 \cdot M_u}\right)^2 - \varepsilon_{cu}^2 + \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \beta_c}{M_u}}. \quad (5.42)$$

Коефіцієнт ефективності поздовжнього армування згинального елемента може бути визначений з (5.39) за наступним виразом

$$\rho_{ef} = \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si} = (M_u \cdot (1/r_u)^2 / b_n - \delta_c \cdot \beta_c) / (E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \varepsilon_{s1} \cdot d / r_u). \quad (5.43)$$

У випадку пружного деформування всіх арматурних стержнів ( $\varepsilon_{si} < \varepsilon_{so}$ ) їх сумарна площа повинна визначатися зі спільного розв'язку частково

видозмінених рівнянь (5.38) та (5.39)

$$\varepsilon_{s1} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) = \delta_c \cdot \alpha_c / (E_s \cdot \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}); \quad (5.44)$$

$$M_u = \frac{b_n \cdot d^2}{(\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu})^2} \cdot (\delta_c \cdot \beta_c + E_s \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \varepsilon_{s1}^2 \cdot \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}^2). \quad (5.45)$$

Підставивши вираз (5.44) в (5.45), отримаємо квадратне рівняння, подібне до (5.40)

$$\varepsilon_{s1}^2 + \varepsilon_{s1} \cdot \left(2 \cdot \varepsilon_{cu} - \frac{b_n \cdot d^2 (\delta_c \cdot \alpha_c + \varphi_{k1})}{M_u}\right) + \varepsilon_{cu}^2 - \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \beta_c}{M_u} = 0, \quad (5.46)$$

де параметр  $\varphi_{k1}$  дорівнює

$$\varphi_{k1} = \rho_{k2} / \rho_{k1}; \quad \rho_{k2} = \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}^2. \quad (5.47)$$

Нескладно помітити, що функція деформацій в найбільш розтягнутому арматурному стержні  $\varepsilon_{s1}$  є розв'язком зазначеного рівняння

$$\varepsilon_{s1} = -(\varepsilon_{cu} - \frac{b_n \cdot d^2 \cdot (\delta_c \cdot \alpha_c + \varphi_{k1})}{2 \cdot M_u}) + \sqrt{(\varepsilon_{cu} - \frac{b_n \cdot d^2 \cdot (\delta_c \cdot \alpha_c + \varphi_{k1})}{2 \cdot M_u})^2 - \varepsilon_{cu}^2 + \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \beta_c}{M_u}}. \quad (5.48)$$

Коефіцієнт ефективності поздовжнього армування згинального елемента, що відображає не тільки кількість, а й раціональність розміщення стержнів ( $k_{si}$ ), буде обчислюватися за виразом

$$\rho_{ef} = \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}^2 = (M_u \cdot (1/r_u)^2 / b_n - \delta_c \cdot \beta_c) / (E_s \cdot \varepsilon_{s1}^2 \cdot d / r_u). \quad (5.49)$$

При досягненні межі текучості лише в частині арматурних стержнів ( $\varepsilon_{s1} \dots \varepsilon_{sl} \geq \varepsilon_{so}$ ) та за відсутності такої в інших ( $\varepsilon_{sm} \dots \varepsilon_{sn} < \varepsilon_{so}$ ) задача з визначення площі перерізу арматури зводиться до спільного розв'язку двох наступних рівнянь

$$\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu} = \delta_c \cdot \alpha_c / (E_s \cdot \rho_{\varphi 1} \cdot (\varepsilon_{so} \cdot \varphi_{\rho 1} + \varepsilon_{s1})). \quad (5.50)$$

$$M_u = \frac{b_n}{(\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu})^2} (\delta_c \cdot \beta_c + E_s \cdot \rho_{\varphi 2} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \varepsilon_{s1} \cdot (\varepsilon_{so} \cdot \varphi_{\rho 2} + \varepsilon_{s1})). \quad (5.51)$$

Підстановка виразу (5.50) в рівняння (5.51) з урахуванням

$\varepsilon_{so} \cdot \varphi_{\rho 2} + \varepsilon_{s1} \approx \varepsilon_{so} \cdot \varphi_{\rho 1} + \varepsilon_{s1}$  призводить до наступного квадратного рівняння

$$\varepsilon_{s1}^2 + \varepsilon_{s1} \cdot \left( 2 \cdot \varepsilon_{cu} - \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \alpha_c \cdot \varphi_{\rho 3}}{M_u} \right) + \varepsilon_{cu}^2 - \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \beta_c}{M_u} = 0, \quad (5.52)$$

розв'язком якого є деформації в найбільш розтягнутому арматурному стержні  $\varepsilon_{s1}$

$$\varepsilon_{s1} = -\varepsilon_{cu} + b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \alpha_c \cdot \varphi_{\rho 3} / (2 \cdot M_u) + \sqrt{\left( -\varepsilon_{cu} + \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \alpha_c \cdot \varphi_{\rho 3}}{2 \cdot M_u} \right)^2 - \varepsilon_{cu}^2 + \frac{b_n \cdot d^2 \cdot \delta_c \cdot \beta_c}{M_u}}. \quad (5.53)$$

Коефіцієнт ефективності поздовжнього армування згинального елемента стержнями з повним та неповним використанням їх міцнісних властивостей, за відомого розміщення стержнів в перерізі ( $k_{si}$ ), слід визначати з дещо видозміненого виразу (5.51)

$$\rho_{ef} = \rho_{\varphi 0} + \rho_{\varphi 2} \cdot \frac{\varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{so}} = \frac{M_u \cdot (1/r_u)^2 / b_n - \delta_c \cdot \beta_c}{E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \varepsilon_{s1} \cdot d / r_u}. \quad (5.54)$$

## 5.2.2. Косий згин

### 5.2.2.1. Визначення несучої здатності

Головна особливість у розрахунках косозігнутих залізобетонних елементів, порівняно з плосkozігнутими, полягає у їх підвищеній «внутрішній статичній невизначеності» (неоднорідності деформування), що посилюється за рахунок наперед невідомого кута нахилу нейтральної лінії  $\theta$  (зазвичай до горизонтальної сторони перерізу елемента). В деформаційно-силовій моделі, завдяки використанню діаграми стану елемента, ця проблема вирішується наступним чином та в наступній послідовності.

1. Основною відмінністю деформування косозігнутих залізобетонних елементів є те, що вони працюють в двох взаємно перпендикулярних площинах, які проходять через геометричні осі перерізу  $X_o$  та  $Y_o$  (рис. 5.4, а). А оскільки кут нахилу нейтральної лінії  $\theta$  змінюється в межах від  $0^\circ$  до

90°, то природно, що виникає потреба у знанні потенційних можливостей деформування залізобетонного елемента у напрямку зазначених площин -  $M_{ux}$ ,  $1/r_{ux}$  та  $M_{uy}$ ,  $1/r_{uy}$  відповідно (рис. 5.4, б). Вказані величини можуть бути визначені з окремих розрахунків косозігнутого елемента на плоский згин у площинах  $X_o$  та  $Y_o$  за методикою, наведеною в п. 5.2.1.

2. Для скорочення об'єму ітераційних обчислень, попереднє значення несучої здатності косозігнутого елемента при куті нахилу нейтральної лінії  $\theta$  пропонується обчислювати пропорційно до його величини (рис. 5.4, б) за формулою

$$M_{u\theta} = M_{ux} - (M_{ux} - M_{uy}) \cdot \sin \theta, \quad (5.55)$$

а її проекції – за виразами

$$M_{x\theta} = M_{u\theta} \cdot \cos \theta; \quad M_{y\theta} = M_{u\theta} \cdot \sin \theta. \quad (5.56)$$

3. Виходячи з рівняння узагальненої діаграми стану елемента (2.11), кривини або радіуси викривлення осі косозігнутого елемента в напрямках площин  $X_o$  та  $Y_o$  слід обчислювати за формулами

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1/r_{ux}}{2M_{ux}} \left[ \left(1 - \frac{M_{x\theta}}{M_{ux}}\right) \frac{D_{ox}}{r_{ux}} + 2M_{x\theta} - \sqrt{\left(\left(1 - \frac{M_{x\theta}}{M_{ux}}\right) \frac{D_{ox}}{r_{ux}} + 2M_{x\theta}\right)^2 - 4M_{x\theta} M_{ux}} \right]; \quad (5.57)$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{1/r_{uy}}{2M_{uy}} \left[ \left(1 - \frac{M_{y\theta}}{M_{uy}}\right) \frac{D_{oy}}{r_{uy}} + 2M_{y\theta} - \sqrt{\left(\left(1 - \frac{M_{y\theta}}{M_{uy}}\right) \frac{D_{oy}}{r_{uy}} + 2M_{y\theta}\right)^2 - 4M_{y\theta} M_{uy}} \right], \quad (5.58)$$

де  $D_{ox}$  і  $D_{oy}$  – початкові приведені жорсткості перерізу залізобетонного елемента в напрямках площин  $X_o$  та  $Y_o$ , відповідно  $E_{co} I_{red,ox}$  та  $E_{co} I_{red,oy}$ .

4. Результируюча кривина косозігнутого залізобетонного елемента може бути знайдена за виразом

$$1/r = \sqrt{(1/r_x)^2 + (1/r_y)^2}. \quad (5.59)$$

5. Загальновідомо, що напрямок викривлення осі елемента співпадає з лінією прогинів, а остання практично залишається перпендикулярною до нейтральної лінії в перерізі елемента. За таких обставин кут нахилу лінії



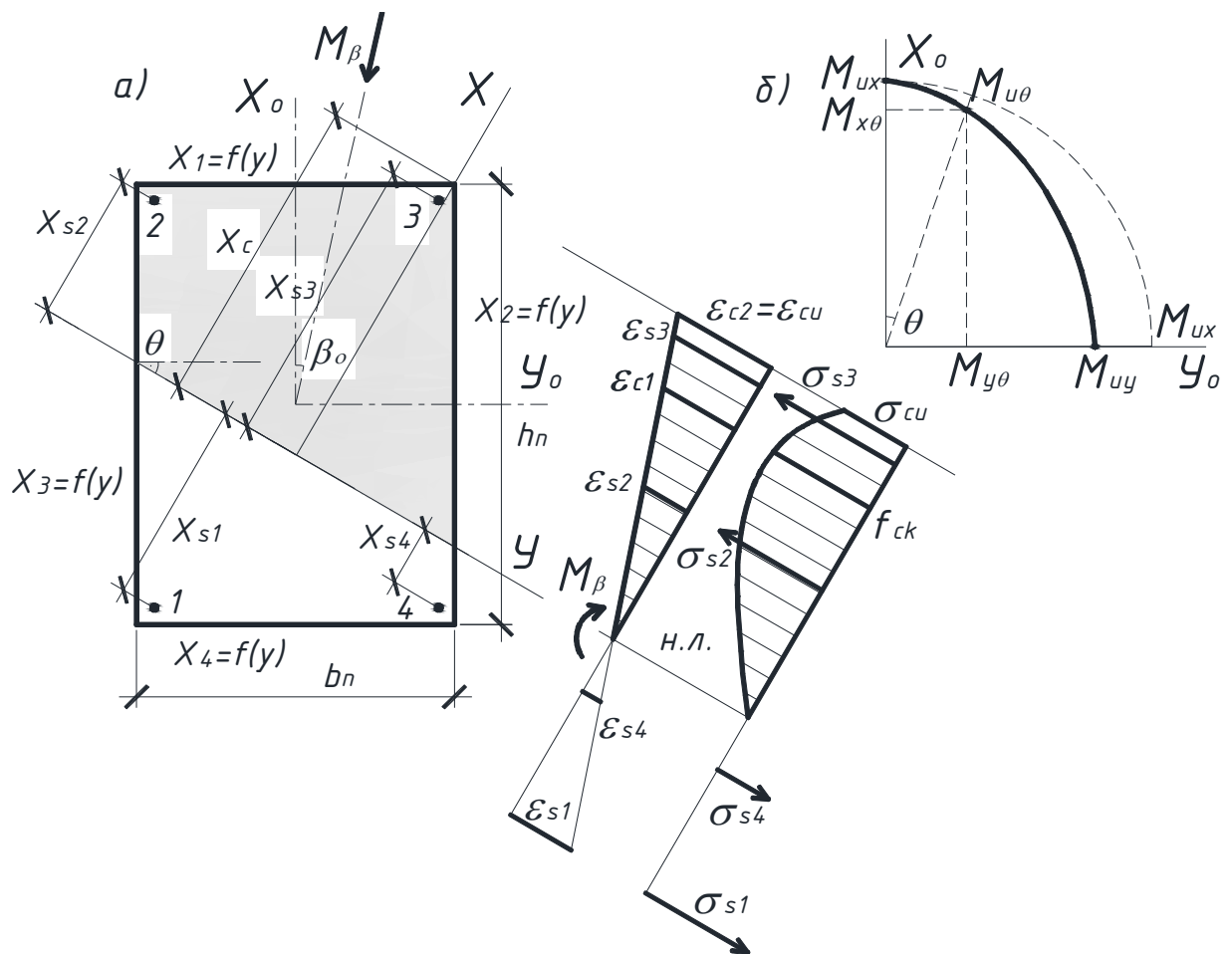


Рисунок 5.4 – Щодо розрахунку косозігнутого залізобетонного елемента:  
 а – розрахункова схема перерізу; б – вплив кута нахилу нейтральної лінії  
 на його несучу здатність

прогинів до вертикальної осі завжди буде співпадати з кутом нахилу нейтральної лінії до горизонтальної осі елемента (рис. 5.4) і може бути уточнений за простою формулою

$$\operatorname{tg} \theta = (1/r_y)/(1/r_x). \quad (5.60)$$

6. За відомою висотою стиснутої зони бетону  $x_c = \epsilon_{cu} / (1/r)$  та кутом нахилу нейтральної лінії  $\theta$  встановлюють вигляд її форми. Загалом форма стиснутої зони бетону косодеформованих елементів може бути визначена за виконанням наступних умов:

- якщо  $x_c \geq h_d = h_n \cdot \cos \theta + b_n \cdot \sin \theta$ , то форма стиснутої зони – прямокутник (рис. 5.5, а);

- якщо  $x_c / \cos \theta > h_n$  і  $x_c / \sin \theta > b_n$ , то форма стиснутої зони – п’ятикутник (рис. 5.5, б);
- якщо  $x_c / \cos \theta \leq h_n$  і  $x_c / \sin \theta > b_n$ , то форма стиснутої зони – трапеція (рис. 5.5, в);
- якщо  $x_c / \cos \theta > h_n$  і  $x_c / \sin \theta \leq b_n$ , то форма стиснутої зони – трапеція (рис. 5.5, г);
- якщо  $x_c / \cos \theta \leq h_n$  та  $x_c / \sin \theta \leq b_n$ , то форма стиснутої зони – трикутник (рис. 5.5, д).

Раніше уже зазначалося (п. 4.4.2), що для косозігнутих елементів теоретично можливими є лише три останніх випадки положення нейтральної лінії в їх перерізі (рис. 5.5, в...д), але ґрунтовними дослідженнями форм стиснутої зони [178] експериментально підтверджено лише випадки (в) та (д).

7. Після визначення форми стиснутої зони бетону слід уточнити за формулами дод. Б (табл. Б.1) величину його граничних деформацій  $\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c2}$  з урахуванням ступенів неоднорідності деформування бетону  $m_h = \varepsilon_{co,h} / \varepsilon_{c2}$  та  $m_b = \varepsilon_{co,b} / \varepsilon_{c2}$  в напрямку осей  $X_o$  та  $Y_o$  відповідно.

8. В подальшому розрахунок косозігнутих елементів виконується за двома загальноприйнятими рівняннями рівноваги залежно від положення нейтральної лінії та відповідної граничної кривини  $1/r = 1/r_u$ .

**Стиснута зона бетону – трикутник (рис. 5.6).** За найпростішої форми стиснутої зони бетону несучу здатність косозігнутих елементів необхідно визначати за рівняннями (5.61) та (5.62)

$$\frac{1}{1/r} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\operatorname{tg} \theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \operatorname{tg} \theta / (1/r)} dy + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = 0; \quad (5.61)$$

$$M = \frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\operatorname{tg} \theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \operatorname{tg} \theta / (1/r)} dy + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si}(r) \right). \quad (5.62)$$

Після інтегрування та ряду відповідних перетворень вони приймуть остаточний вигляд

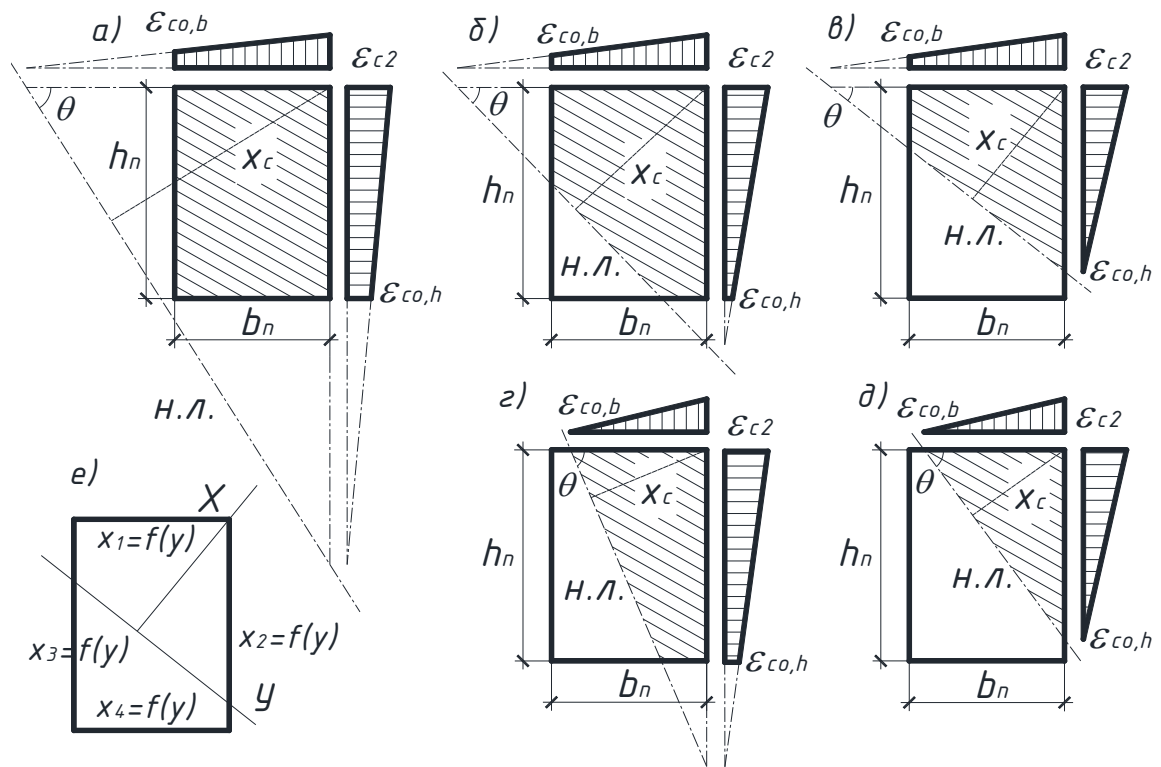


Рисунок 5.5 – Можливі форми стиснутої зони бетону в косодеформованих залізобетонних елементах: а) – прямокутник; б) – п'ятикутник; в) та з) – трапеції; д) – трикутник; е) – функції сторін

$$\frac{(a \cdot c + b)}{(1/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( -\varepsilon_{cu}^3 \frac{b \cdot c^3}{6(a \cdot c + b)} + \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} + \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (1 - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})) - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu}) \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = 0; \quad (5.63)$$

$$M = \frac{a \cdot c + b}{(1/r)^3 c^5 \sin \theta \cos \theta} \left( -\varepsilon_{cu}^4 \frac{b \cdot c^4}{12(a \cdot c + b)} + \varepsilon_{cu}^3 \frac{c^3}{6} - \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} - \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (1 - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})) + \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu}) \right) + \frac{1}{1/r} E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)}. \quad (5.64)$$

**Стиснута зона бетону – трапеція уздовж сторони  $h_n$  (рис. 5.7).** У цьому випадку несучу здатність косозігнутого елемента в граничній стадії необхідно обчислювати за двома загальноприйнятими рівняннями рівноваги

$$\frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu})/(tg\theta/r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c)tg\theta/(1/r)} dy - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot h_n \cdot \cos\theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{((\varepsilon_c - \varepsilon_{cu})/(1/r) + h_n / \cos\theta) / tg\theta}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c)tg\theta/(1/r)} dy \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = 0; \quad (5.65)$$

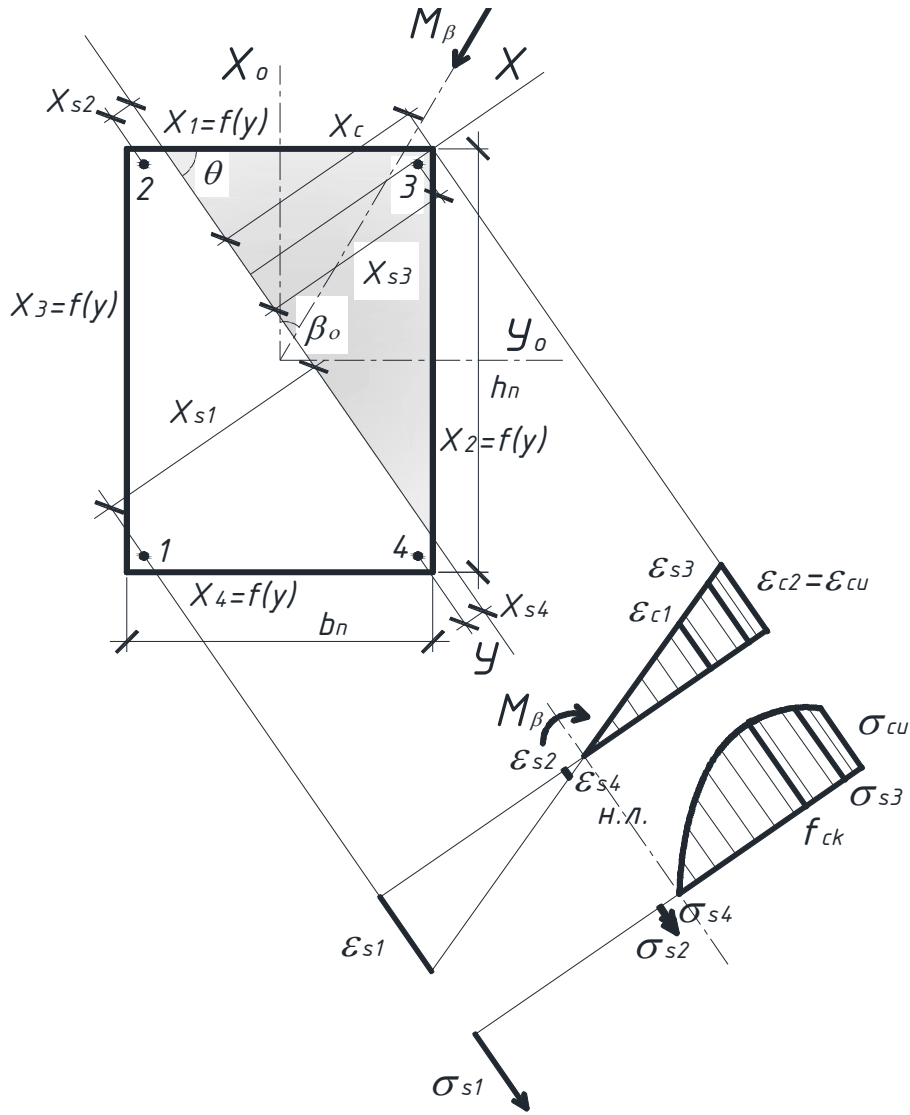


Рисунок 5.6 – Форма стиснутої зони бетону в косозігнутих залізобетонних елементах – трикутник

$$M = \frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\epsilon_{cu}} \frac{a \cdot \epsilon_c^2 - b \cdot \epsilon_c^3}{1 + c \cdot \epsilon_c} \frac{d\epsilon_c}{1/r} \int_{(\epsilon_c - \epsilon_{cu}) / (\text{tg}\theta / r)}^{(\epsilon_{cu} - \epsilon_c) \text{tg}\theta / (1/r)} dy - \int_0^{\epsilon_{cu} - 1/r \cdot h_n \cdot \cos\theta} \frac{a \cdot \epsilon_c^2 - b \cdot \epsilon_c^3}{1 + c \cdot \epsilon_c} \frac{d\epsilon_c}{1/r} \int_{((\epsilon_c - \epsilon_{cu}) / (1/r) + h_n / \cos\theta) / \text{tg}\theta}^{(\epsilon_{cu} - \epsilon_c) \text{tg}\theta / (1/r)} dy \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \epsilon_{si} \cdot \epsilon_{si}(r). \quad (5.66)$$

На основі їх подвійного інтегрування та певних спрощень і перетворень несучу здатність косозігнутих елементів можна контролювати за рівняннями

$$\frac{1}{(1/r)^2 c^4 \sin\theta \cos\theta} \left( \frac{b \cdot \epsilon_h}{2} (-\epsilon_{cu}^2 \cdot c^2 + \epsilon_{cu} \cdot c \cdot \epsilon_h - \frac{\epsilon_h^3}{3}) + (a \cdot c + b)(\epsilon_{cu} \cdot c \cdot \epsilon_h + (\epsilon_{cu} c + 1) \cdot \ln(1 - \frac{\epsilon_h}{1 + \epsilon_{cu} c}) + \epsilon_h (1 - \frac{\epsilon_h}{2} - \ln(1 + \epsilon_{cu} c - \epsilon_h))) \right) + E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \epsilon_{si} = 0; \quad (5.67)$$

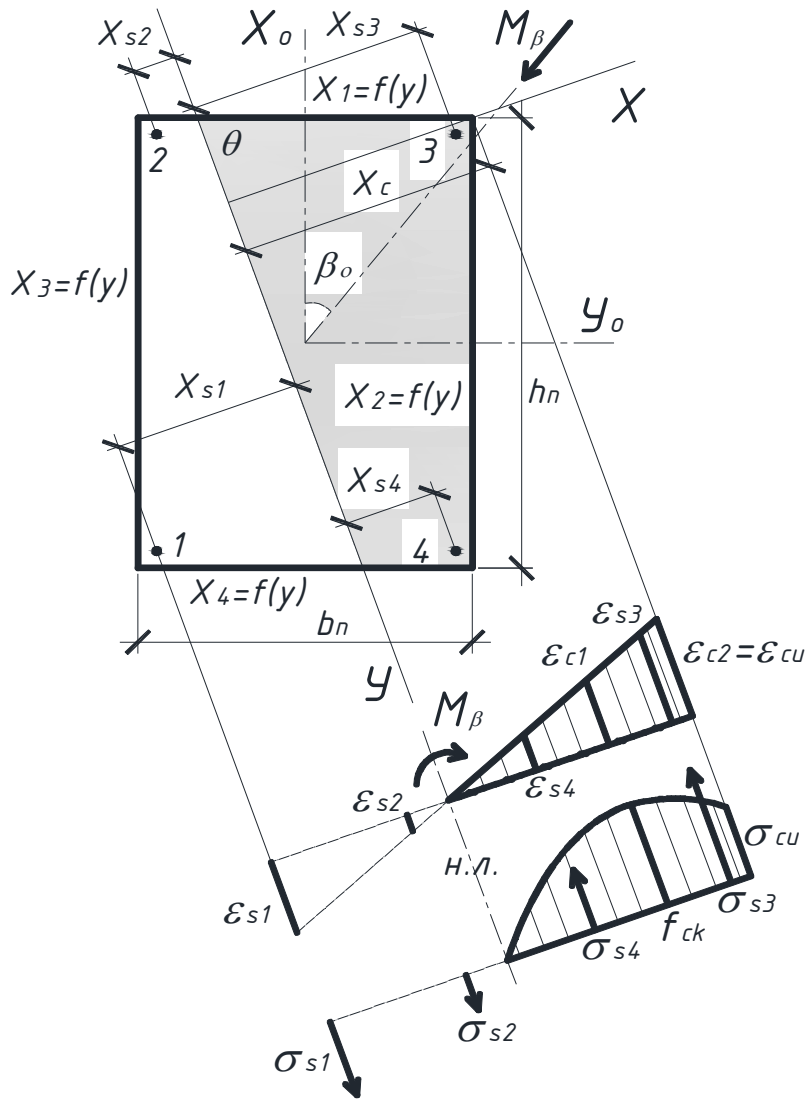


Рисунок 5.7 – Форма стиснутої зони бетону в косозігнутих залізобетонних елементах – трапеція

$$\begin{aligned}
 M = & \frac{1}{(1/r)^3 c^5 \sin\theta \cos\theta} \left( \frac{b \cdot \epsilon_h}{2} \left( -\epsilon_{cu}^3 \frac{2 \cdot c^3}{3} + \epsilon_{cu}^2 \cdot c^2 \cdot \epsilon_h - \epsilon_{cu} \cdot c \frac{2 \cdot \epsilon_h^2}{3} + \frac{\epsilon_h^3}{6} \right) + (a \cdot c + b) \times \right. \\
 & \times \left( \epsilon_{cu}^2 \cdot \epsilon_h \frac{c^2}{2} - \epsilon_{cu} \cdot c \cdot \epsilon_h \cdot \left( 1 + \frac{\epsilon_h}{2} \right) - (\epsilon_{cu} \cdot c + 1) \cdot \ln \left( 1 - \frac{\epsilon_h}{1 + c \cdot \epsilon_{cu}} \right) + \epsilon_h \cdot \left( \frac{\epsilon_h^2}{6} + \frac{\epsilon_h}{2} - 1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \ln(1 + c \cdot \epsilon_{cu} - \epsilon_h) \right) \right) + \frac{1}{1/r} E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \epsilon_{si} \cdot \epsilon_{si(r)}, \quad (5.68)
 \end{aligned}$$

де параметр  $\epsilon_h = (1/r) \cdot h_n \cdot c \cdot \cos\theta$ .

Стиснута зона бетону – трапеція уздовж сторони  $b_n$  (рис. 5.8). Зазначений випадок характерний для малих кутів нахилу силової площини  $\beta_o$  в косозігнутих елементах. За таких обставин несучу здатність вказаних

елементів у граничній стадії рекомендується обчислювати за допомогою рівнянь (5.69) та (5.70)

$$\frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\text{tg} \theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \text{tg} \theta / (1/r)} dy - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot b_n \cdot \sin \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\text{tg} \theta / r)}^{((\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin \theta) \text{tg} \theta} dy \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = 0; \quad (5.69)$$

$$M = \frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\text{tg} \theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \text{tg} \theta / (1/r)} dy - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot b_n \cdot \sin \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\text{tg} \theta / r)}^{((\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin \theta) \text{tg} \theta} dy \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)}. \quad (5.70)$$

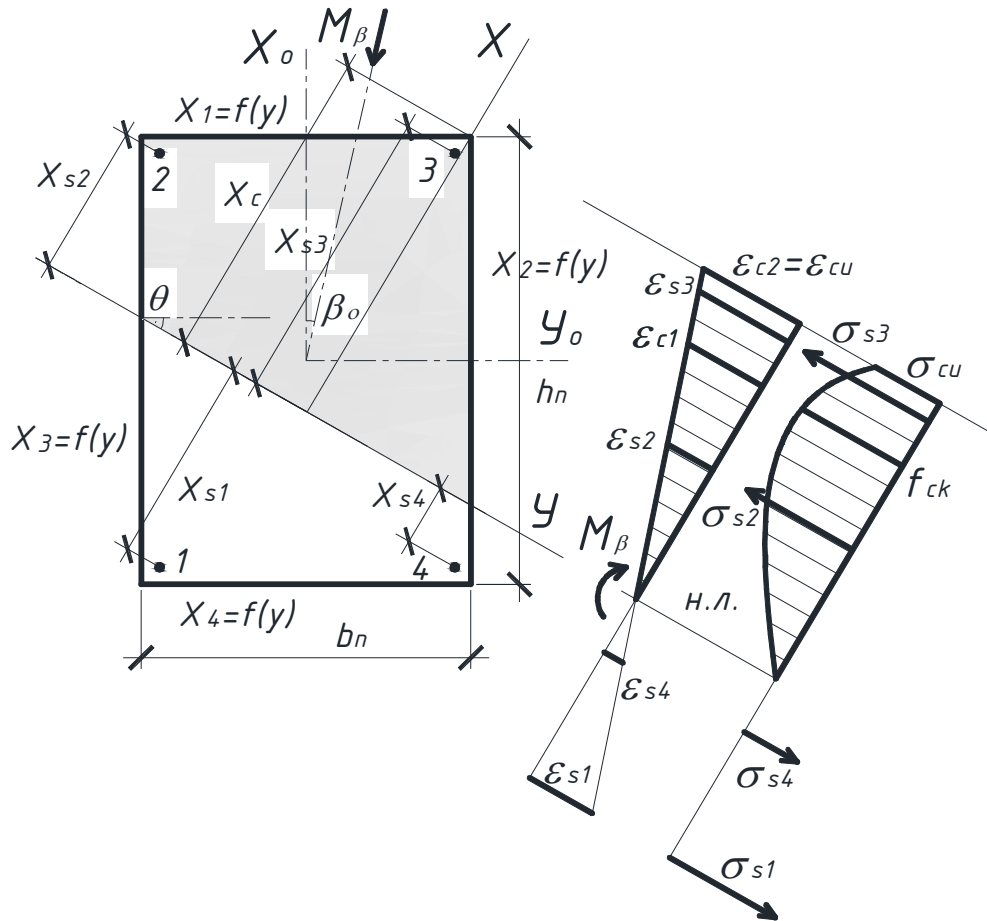


Рисунок 5.8 – Форма стиснутої зони в косозігнутих елементах – трапеція

Після подвійного інтегрування приведених рівнянь та певних спрощень і перетворень несучу здатність косозігнутих елементів у цьому випадку слід визначати за виразами (5.71) та (5.72)

$$\frac{1}{(1/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b \cdot \varepsilon_b}{2} (-\varepsilon_{cu}^2 \cdot c^2 + \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_b^3}{3}) + (a \cdot c + b) \times \right. \\ \left. \times (\varepsilon_{cu} \cdot c \cdot \varepsilon_b + (\varepsilon_{cu} \cdot c + 1) \cdot \ln(1 - \frac{\varepsilon_b}{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}})) + \varepsilon_b (1 - \frac{\varepsilon_b}{2} - \right. \\ \left. - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b)) \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = 0; \quad (5.71)$$

$$M = \frac{1}{(1/r)^3 c^5 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b \cdot \varepsilon_b}{2} (-\varepsilon_{cu}^3 \frac{2 \cdot c^3}{3} + \varepsilon_{cu}^2 \cdot c^2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_{cu} \cdot c \frac{2 \cdot \varepsilon_b^2}{3} + \frac{\varepsilon_b^3}{6}) + \right. \\ \left. + (a \cdot c + b) \times (\varepsilon_{cu}^2 \cdot \varepsilon_b \frac{c^2}{2} - \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot \varepsilon_b \cdot (1 + \frac{\varepsilon_b}{2}) - (\varepsilon_{cu} \cdot c + 1) \cdot \ln(1 - \frac{\varepsilon_b}{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}})) + \right. \\ \left. + \varepsilon_b \cdot (\frac{\varepsilon_b^2}{6} + \frac{\varepsilon_b}{2} - 1 + \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b)) \right) + \frac{1}{1/r} E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)}, \quad (5.72)$$

де параметр  $\varepsilon_b = (1/r) \cdot b_n \cdot c \cdot \sin \theta$ .

9. При невиконанні хоча б однієї з умов рівноваги необхідно послідовно скорегувати граничні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  за формулами дод. Б (табл. Б.1), кривину  $1/r$  та кут нахилу нейтральної лінії  $tg\theta$  за формулами (5.59) та (5.60) до забезпечення додаткової умови

$$\left| (M_{u,i-1} - M_{u,i}) / M_{u,i-1} \right| \leq \delta = 0,01, \quad (5.73)$$

де  $M_{u,i-1}$  і  $M_{u,i}$  – уточнені значення несучої здатності косозігнутого елемента на ітераційних етапах розрахунків.

### 5.2.2.2. Знаходження площі перерізу арматури

При визначенні необхідної площі перерізу поздовжньої арматури в косозігнутих елементах не обхідно попередньо задатися відсотком армування в межах 1,5% ... 2% та виконати всі кроки за вищеперерахованими пунктами 1-9 (див. п.5.2.2.1). За невиконання хоча б одного з двох загальноприйнятих рівнянь рівноваги чи додаткової умови (5.73) площу поперечного перерізу арматури слід скорегувати, а розрахунок повторити згідно вищевказаних пунктів.

### 5.3. Розрахунок стиснутих елементів

#### 5.3.1. Позацентровий стиск

##### 5.3.1.1. Визначення несучої здатності

Загалом відомо, що несуча здатність будь-якого позацентрово стиснутого залізобетонного елемента може бути визначена за спільним розв'язком двох загальноприйнятих рівнянь рівноваги

$$N = N_{cu} - N_{ctu} + N_{su} ; \quad (5.74)$$

$$N \cdot e = M_{cu} + M_{ctu} + M_{su} , \quad (5.75)$$

де відповідні зусилля в компонентах стиснутої та розтягнутої зон елемента визначаються за уже відомими виразами (5.3)...(5.8).

До того ж варто відзначити, що в колишній силовій моделі зазвичай виділяли два характерних випадки граничного стану вищеназваних елементів, залежно від величини відносного ексцентриситету прикладання навантаження (рис.5.9).

В рамках узагальненої моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів все ж таки варто розглядати три різних схеми деформування позацентрово стиснутих елементів в граничній стадії (залежно від повноти використання міцнісних властивостей арматури):

- напруження в усіх без виключення арматурних стержнях залізобетонного елемента досягають межі текучості;
- всі арматурні стержні, без виключення, працюють пружно;
- найбільш напружені арматурні стержні працюють в пластичній стадії, а менш напружені – деформуються пружно.

За повного використання арматури, коли напруження в усіх стержнях в граничній стадії досягають межі текучості ( $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{so}$ ), рівняння рівноваги (5.74) та (5.75) приймають вигляд



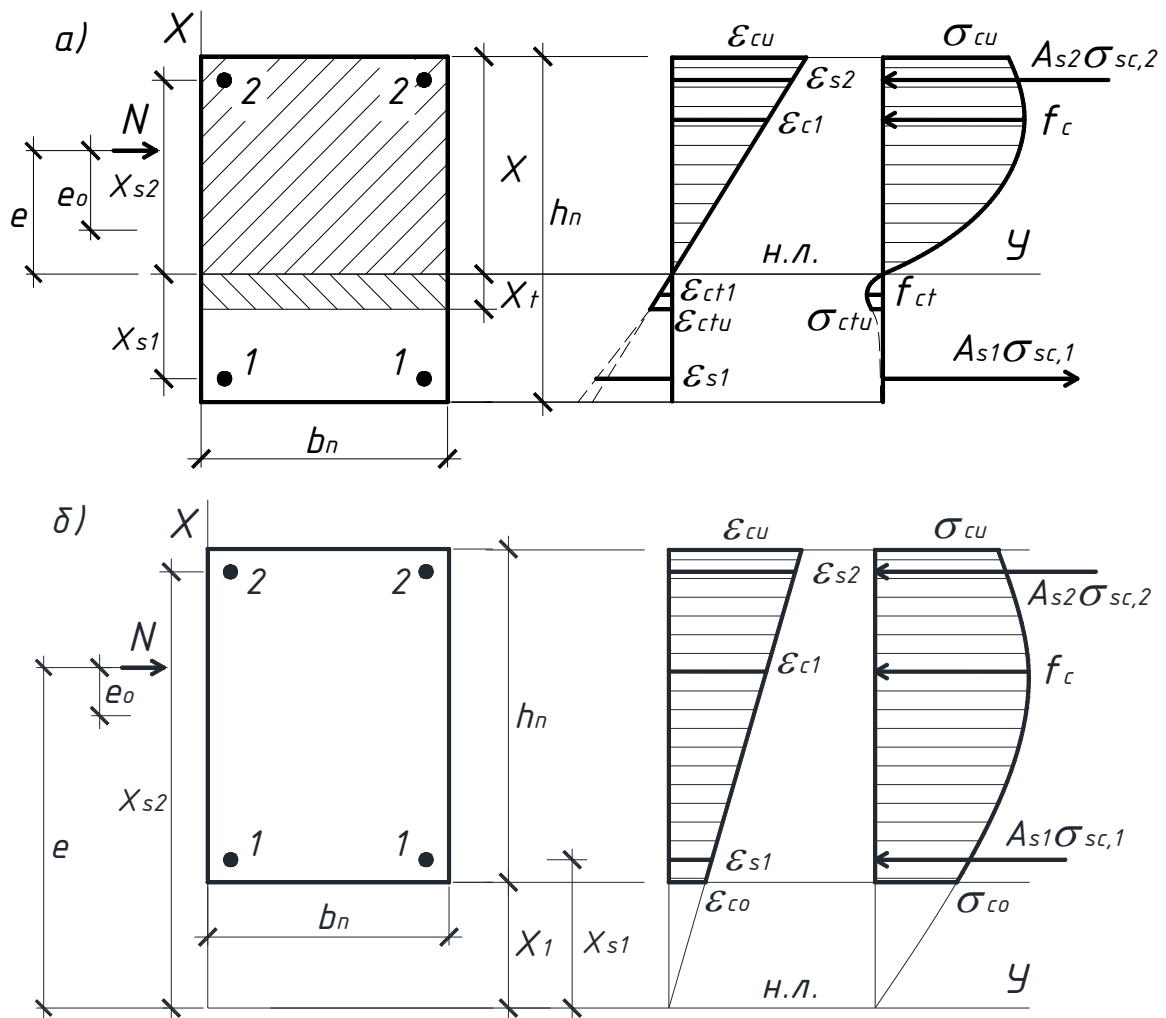


Рисунок 5.9 – Напружено-деформований стан позациентрово стиснутого залізобетонного елемента за відносно: *a* – великих ексцентриситетів; *б* – малих ексцентриситетів

$$N = \frac{b_n}{1/r} \cdot (\alpha_c \cdot \delta_c + E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu})) \cdot \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i}; \quad (5.76)$$

$$N \cdot e = \frac{b_n}{(1/r)^2} \cdot (\beta_c \cdot \delta_c + E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \varepsilon_{s1} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu})) \cdot \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{s i}. \quad (5.77)$$

Після підстановки (5.76) в (5.77) та деяких перетворень і спрощень, з урахуванням наступних позначень

$$e = (\varepsilon_{cu} \cdot d) / (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) - h/2 + e_o + f; \quad (5.78)$$

$$t_e = (f + e_o - h/2) / d; \quad (5.79)$$

$$f_{yk} = E_s \cdot \varepsilon_{so}, \quad (5.80)$$

отримуємо квадратне рівняння

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s1}^2 + \varepsilon_{s1} \cdot \left( \varepsilon_{cu} + \frac{\varepsilon_{cu} \cdot f_{yk} \cdot \rho_k \cdot (1+t_e) + \alpha_c \cdot \delta_c \cdot t_e}{f_{yk} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} \right) + \\ + \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1+t_e) \cdot (\alpha_c \cdot \delta_c + \varepsilon_{cu} \cdot f_{yk} \cdot \rho_k) - \beta_c \cdot \delta_c}{f_{yk} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} = 0, \end{aligned} \quad (5.81)$$

розв'язком якого є величина відносних деформації в найбільш розтягнутому арматурному стержні  $\varepsilon_{s1}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s1} = -\frac{\varepsilon_{cu}}{2} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot f_{yk} \cdot \rho_k \cdot (1+t_e) + \alpha_c \cdot \delta_c \cdot t_e}{2 \cdot f_{yk} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} + \\ + \sqrt{\left( -\frac{\varepsilon_{cu}}{2} - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot f_{yk} \cdot \rho_k \cdot (1+t_e) + \alpha_c \cdot \delta_c \cdot t_e}{2 \cdot f_{yk} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} \right)^2 - \\ - \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1+t_e) \cdot (\alpha_c \cdot \delta_c + \varepsilon_{cu} \cdot f_{yk} \cdot \rho_k) - \beta_c \cdot \delta_c}{f_{yk} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})}}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Несуча здатність позацентрово стиснутого залізобетонного елемента в цьому випадку може бути визначена за формулою (5.76).

Якщо ж всі арматурні стержні продовжують працювати пружно (напруження в них не досягають фізичної межі текучості  $\varepsilon_s < \varepsilon_{so}$ ), то обернену задачу слід розв'язувати за допомогою двох дещо видозмінених рівнянь рівноваги

$$N = \frac{b_n}{(1/r)} \cdot (\alpha_c \cdot \delta_c + E_s \cdot \varepsilon_{s1} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}); \quad (5.83)$$

$$N \cdot e = \frac{b_n}{(1/r)^2} \cdot (\beta_c \cdot \delta_c + E_s \cdot \varepsilon_{s1}^2 \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}^2). \quad (5.84)$$

Підставивши вираз (5.83) в (5.84), після деяких перетворень, спрощень та певних позначень, отримаємо кубічне рівняння відносно деформацій найбільш розтягнутого арматурного стержня  $\varepsilon_{s1}$

$$\varepsilon_{s1}^3 + m_1 \cdot \varepsilon_{s1}^2 + n_1 \cdot \varepsilon_{s1} + p_1 = 0 \quad (5.85)$$

з відповідними параметрами

$$m_1 = \varepsilon_{cu} + \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \rho_{k1} \cdot (1+t_e)}{(t_e \cdot \rho_{k1} - \rho_{k2})}; \quad (5.86)$$

$$n_1 = \frac{\varepsilon_{cu}^2 \cdot E_s \cdot \rho_{k1} \cdot (1 + t_e) + \alpha_c \cdot \delta_c \cdot t_e}{E_s \cdot (t_e \cdot \rho_{k1} - \rho_{k2})}; \quad (5.87)$$

$$p_1 = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot \alpha_c \cdot \delta_c \cdot (1 + t_e) - \beta_c \cdot \delta_c}{E_s \cdot (t_e \cdot \rho_{k1} - \rho_{k2})}. \quad (5.88)$$

Згідно з рішенням Кордано [124] рівняння (5.85) за допомогою заміни  $\varepsilon_{s1} = y_1 - m_1/3$  приводиться до наступного «неповного» вигляду

$$y_1^3 + s_1 \cdot y_1 + q_1 = 0 \quad (5.89)$$

з параметрами  $s_1$  та  $q_1$ , що рівні відповідно

$$s_1 = -m_1^2/3 + n_1; \quad q_1 = 2 \cdot (m_1/3)^3 - m_1 \cdot n_1/3 + p_1. \quad (5.90)$$

Серед трьох коренів рівняння (5.89) в переважній більшості випадків дійсним є лише один

$$y_1 = P_1 + S_1, \quad (5.91)$$

з відповідними параметрами  $P_1$  та  $S_1$

$$P_1 = \sqrt[3]{-q_1/2 + \sqrt{Q_1}}, \quad S_1 = \sqrt[3]{-q_1/2 - \sqrt{Q_1}} \quad (5.92)$$

для випадку, коли

$$Q_1 = (s_1/3)^3 + (q_1/2)^2 \geq 0. \quad (5.93)$$

За відомих деформацій в найбільш розтягнутому арматурному стержні  $\varepsilon_{s1} = y_1 - m_1/3$  несучу здатність позацентрово стиснутого залізобетонного елемента можна визначити за формулою (5.83).

При досягненні межі текучості лише в частині арматурних стержнів ( $\varepsilon_{s1} \dots \varepsilon_{sl} \geq \varepsilon_{so}$ ) та за її відсутності в інших менш напружених ( $\varepsilon_{sm} \dots \varepsilon_{sn} < \varepsilon_{so}$ ) вищенаведені рівняння рівноваги (5.74) та (5.75) приймуть наступний вигляд

$$N = \frac{b_n}{(1/r)} (\alpha_c \cdot \delta_c + f_{yk} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \rho_{\varphi} + E_s \cdot \varepsilon_{s1} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \rho_{\varphi 1}); \quad (5.94)$$

$$N \cdot e = \frac{b_n}{(1/r)^2} \cdot (\beta_c \cdot \delta_c + f_{yk} \varepsilon_{s1} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \rho_{\varphi 0} + E_s \varepsilon_{s1}^2 \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \rho_{\varphi 2}). \quad (5.95)$$

Завдяки підстановці виразу (5.94) в (5.95), з урахуванням певних перетворень, спрощень та введених позначень, знову отримаємо кубічне

рівняння відносно деформації  $\varepsilon_{s1}$ , характерних для найбільш розтягнутого арматурного стержня,

$$\varepsilon_{s1}^3 + m_2 \cdot \varepsilon_{s1}^2 + n_2 \cdot \varepsilon_{s1} + p_2 = 0 \quad (5.96)$$

з відповідними параметрами

$$m_2 = \varepsilon_{cu} + \frac{f_{yk} \cdot (t_e \cdot \rho_\varphi - \rho_{\varphi o}) + \varepsilon_{cu} \cdot E_s \cdot (1 + t_e) \cdot \rho_{\varphi 1}}{E_s \cdot (t_e \cdot \rho_{\varphi 1} - \rho_{\varphi 2})}; \quad (5.97)$$

$$n_2 = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot f_{yk} \cdot (t_e \cdot \rho_\varphi - \rho_{\varphi o}) + t_e \cdot \alpha_c \cdot \delta_c}{E_s \cdot (t_e \cdot \rho_{\varphi 1} - \rho_{\varphi 2})} + \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1 + t_e) \cdot (f_{yk} \cdot \rho_\varphi + \varepsilon_{cu} \cdot E_s \cdot \rho_{\varphi 1})}{E_s \cdot (t_e \cdot \rho_{\varphi 1} - \rho_{\varphi 2})}; \quad (5.98)$$

$$p_2 = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1 + t_e) \cdot (\alpha_c \cdot \delta_c + \varepsilon_{cu} \cdot f_{yk} \cdot \rho_\varphi) - \beta_c \cdot \delta_c}{E_s \cdot (t_e \cdot \rho_{\varphi 1} - \rho_{\varphi 2})}. \quad (5.99)$$

Ґрунтуючись на рішеннях Кордано [124] з використанням аналогічної заміни  $\varepsilon_{s1} = y_2 - m_2 / 3$ , рівняння (5.96) приводимо до «неповного» вигляду

$$y_2^3 + s_2 \cdot y_2 + q_2 = 0. \quad (5.100)$$

з параметрами  $s_2$  та  $q_2$ , що рівні відповідно

$$s_2 = -m_2^2 / 3 + n_2; \quad q_2 = 2 \cdot (m_2 / 3)^3 - m_2 \cdot n_2 / 3 + p_2. \quad (5.101)$$

При забезпеченні уже згадуваної умови

$$Q_2 = (s_2 / 3)^3 + (q_2 / 2)^2 \geq 0, \quad (5.102)$$

дійсний корінь рівняння (5.100) зазвичай визначають за виразом

$$y_2 = P_2 + S_2 \quad (5.103)$$

з відповідними параметрами

$$P_2 = \sqrt[3]{-q_2 / 2 + \sqrt{Q_2}}, \quad S_2 = \sqrt[3]{-q_2 / 2 - \sqrt{Q_2}}. \quad (5.104)$$

У протилежному випадку ( $Q_2 < 0$ ,  $s_2 < 0$ ) дійсним коренем переважно є

$$y_2 = 2 \cdot \sqrt{-s_2 / 3} \cdot \cos(\gamma / 3), \quad (5.105)$$

де

$$\cos \gamma = -q / (2 \sqrt{-(s_2 / 3)^3}). \quad (5.106)$$

Тоді, за відомих деформацій в найбільш розтягнутому арматурному

стержні  $\varepsilon_{s1} = y_2 - m_2 / 3$ , несучу здатність позацентрово стиснутого залізобетонного елемента можна визначити за формулою (5.94).

### 5.3.1.2. Розрахунок площі перерізу арматури

В практиці проектування залізобетонних елементів загалом та позацентрово стиснутих зокрема пряма задача з підбору площі поперечного перерізу поздовжньої робочої арматури завжди була основною. В рамках узагальненої моделі деформування залізобетонних елементів конструкцій її також варто вирішувати для трьох характерних випадків, пов'язаних з повнотою використання міцнісних властивостей арматури:

- в граничній стадії напруження в усіх арматурних стержнях досягають межі текучості ;
- при вичерпанні стиснутим бетоном граничних деформацій в його крайових фібрах всі арматурні стержні, без виключення, працюють пружно;
- найбільш напружені арматурні стержні в розтягнутій та стиснутій зонах залізобетонного елемента працюють в пластичній стадії, а менш напружені - деформуються пружно.

За раціонального армування залізобетонних елементів напруження в усіх стержнях, зазвичай, досягають межі текучості ( $\varepsilon_{si} \geq \varepsilon_{so}$ ). Сумарну площу поздовжньої арматури позацентрово стиснутого елемента у цьому випадку доцільно визначити зі спільного розв'язку двох рівнянь рівноваги (5.76) та (5.77), записаних в наступному вигляді

$$\frac{N_{Ed}}{b_n \cdot d} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) - \alpha_c \cdot \delta_c = f_{yk} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \rho_k ; \quad (5.107)$$

$$\frac{N_{Ed} \cdot e}{b_n \cdot d^2} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu})^2 - \beta_c \cdot \delta_c = f_{yk} \cdot \varepsilon_{s1} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \rho_{k1} . \quad (5.108)$$

Після ділення виразу (5.108) на (5.107) та певних перетворень отримаємо квадратне рівняння відносно деформацій найбільш розтягнутої арматури

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s1}^2 + \varepsilon_{s1} \cdot \frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu} \cdot ((1 + 2 \cdot t_e) \cdot \rho_k - \rho_{k1}) + \alpha_c \cdot \delta_c \cdot \rho_{k1}}{f_{co} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} + \\ + \frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu}^2 \cdot (1 + t_e) \cdot \rho_k - \beta_c \cdot \delta_c \cdot \rho_k}{f_{co} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} = 0, \end{aligned} \quad (5.109)$$

де  $f_{co} = N_{Ed} / (b_n \cdot d)$  – умовні стискуючі напруження бетону в перерізі залізобетонного елемента.

Тоді при відомих значеннях вказаних деформацій  $\varepsilon_{s1}$ , що є коренем вищеприведеного рівняння і обчислюються за формулою

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s1} = - \frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu} \cdot ((1 + 2 \cdot t_e) \cdot \rho_k - \rho_{k1}) + \alpha_c \cdot \delta_c \cdot \rho_{k1}}{2 \cdot f_{co} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} + \\ + \sqrt{\left( \frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu} \cdot ((1 + 2 \cdot t_e) \cdot \rho_k - \rho_{k1}) + \alpha_c \cdot \delta_c \cdot \rho_{k1}}{2 \cdot f_{co} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} \right)^2 - \frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu}^2 \cdot (1 + t_e) \cdot \rho_k - \beta_c \cdot \delta_c \cdot \rho_k}{f_{co} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})}}, \end{aligned} \quad (5.110)$$

коефіцієнт ефективності поздовжнього армування позацентрово стиснутого залізобетонного елемента може бути визначений за наступним виразом

$$\rho_{ef} = \rho_{k1} = (N_{Ed} \cdot e \cdot (1/r_u)^2 / b_n - \delta_c \cdot \beta_c) / (E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \varepsilon_{s1} \cdot d / r_u). \quad (5.111)$$

У разі пружного деформування всіх, без виключення, арматурних стержнів ( $\varepsilon_{si} < \varepsilon_{so}$ ) їх сумарна площа повинна визначатися зі спільного розв'язку частково видозмінених рівнянь (5.83) та (5.84)

$$\frac{N_{Ed}}{b_n \cdot d} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) - \alpha_c \cdot \delta_c = E_s \cdot \varepsilon_{s1} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \rho_{k1}; \quad (5.112)$$

$$\frac{N_{Ed} \cdot e}{b_n \cdot d^2} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu})^2 - \beta_c \cdot \delta_c = E_s \cdot \varepsilon_{s1}^2 \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \rho_{k2}. \quad (5.113)$$

Ділення виразу (5.113) на (5.112) дозволяє отримати квадратне рівняння, аналогічне до (5.109)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s1}^2 + \varepsilon_{s1} \cdot \frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu} \cdot (1 + 2 \cdot t_e - \varphi_{k1}) + \alpha_c \cdot \delta_c \cdot \varphi_{k1}}{f_{co} \cdot (t_e - \varphi_{k1})} + \\ + \frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu}^2 \cdot (1 + t_e) - \beta_c \cdot \delta_c}{f_{co} \cdot (t_e - \varphi_{k1})} = 0. \end{aligned} \quad (5.114)$$

Розв'язок цього рівняння визначає функцію деформацій в найбільш

розтягнутому арматурному стержні  $\varepsilon_{s1}$  на момент вичерпання несучої здатності позacentрово стиснутого залізобетонного елемента

$$\varepsilon_{s1} = -\frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu} \cdot (1 + 2 \cdot t_e - \varphi_{k1}) + \alpha_c \cdot \delta_c \cdot \varphi_{k1}}{2 \cdot f_{co} \cdot (t_e - \varphi_{k1})} + \sqrt{\left( -\frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu} (1 + 2 \cdot t_e - \varphi_{k1}) + \alpha_c \cdot \delta_c \cdot \varphi_{k1}}{2 \cdot f_{co} \cdot (t_e - \varphi_{k1})} \right)^2 - \frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu}^2 (1 + t_e) - \beta_c \cdot \delta_c}{f_{co} \cdot (t_e - \varphi_{k1})}}. \quad (5.115)$$

Сумарна площа поздовжньої арматури в позacentрово стиснутому елементі може бути визначена за коефіцієнтом ефективності армування

$$\rho_{ef} = \rho_{k2} = (N_{Ed} \cdot e \cdot (1/r_u)^2 / b_n - \delta_c \cdot \beta_c) / (E_s \cdot \varepsilon_{s1}^2 \cdot d / r_u). \quad (5.116)$$

За неповного використання міцнісних властивостей арматури, при досягненні межі текучості лише в частині арматурних стержнів ( $\varepsilon_{s1} \dots \varepsilon_{sl} \geq \varepsilon_{so}$ ) та за відсутності такої в інших ( $\varepsilon_{sm} \dots \varepsilon_{sn} < \varepsilon_{so}$ ), задача з визначення площі перерізу арматури зводиться до спільного розв'язку двох наступних рівнянь

$$\frac{N_{Ed}}{b_n \cdot d} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) - \alpha_c \cdot \delta_c = E_s \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) (\varepsilon_{so} \cdot \rho_{\varphi} + \varepsilon_{s1} \cdot \rho_{\varphi 1}); \quad (5.117)$$

$$\frac{N_{Ed} \cdot e}{b_n \cdot d^2} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu})^2 - \beta_c \cdot \delta_c = E_s \cdot \varepsilon_{s1} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) (\varepsilon_{so} \cdot \rho_{\varphi 0} + \varepsilon_{s1} \cdot \rho_{\varphi 2}). \quad (5.118)$$

Після деяких перетворень та ділення виразу (5.118) на (5.117) матимемо наступне квадратне рівняння

$$\varepsilon_{s1}^2 - \varepsilon_{s1} \cdot (f_{co} \cdot t_e - f_{yk} \cdot \rho_{\varphi 0} + E_s \cdot \rho_{\varphi 1} \cdot \beta_c / \alpha_c) / (E_s \cdot \rho_{\varphi 2}) + ((f_{co} - f_{yk} \cdot \rho_{\varphi}) \cdot \beta_c / \delta_c - \varepsilon_{cu} \cdot f_{co} \cdot (1 + t_e)) / (E_s \cdot \rho_{\varphi 2}) = 0, \quad (5.119)$$

розв'язком якого будуть відносні деформації найбільш розтягнутого стержня

$$\varepsilon_{s1} = \frac{f_{co} \cdot t_e - f_{yk} \cdot \rho_{\varphi 0} + E_s \cdot \rho_{\varphi 1} \cdot \beta_c / \alpha_c}{2 \cdot E_s \cdot \rho_{\varphi 2}} + \sqrt{\left( \frac{f_{co} \cdot t_e - f_{yk} \cdot \rho_{\varphi 0} + E_s \cdot \rho_{\varphi 1} \cdot \beta_c / \alpha_c}{2 \cdot E_s \cdot \rho_{\varphi 2}} \right)^2 - \frac{(f_{co} - f_{yk} \cdot \rho_{\varphi}) \cdot \beta_c / \delta_c - \varepsilon_{cu} \cdot f_{co} (1 + t_e)}{E_s \cdot \rho_{\varphi 2}}}. \quad (5.120)$$

Коефіцієнт ефективності поздовжнього армування позacentрово стиснутого елемента стержнями з повним та неповним використанням їх

міцнісних властивостей, за відомого розміщення стержнів в перерізі, варт визначати за виразом

$$\rho_{ef} = \rho_{\varphi 0} + \rho_{\varphi 2} \cdot \frac{\varepsilon_{s1}}{\varepsilon_{s0}} = \frac{N_{Ed} \cdot e \cdot (1/r_u)^2 / b_n - \delta_c \cdot \beta_c}{E_s \cdot \varepsilon_{s0} \cdot \varepsilon_{s1} \cdot d / r_u}. \quad (5.121)$$

## 5.3.2. Косий стиск

### 5.3.2.1. Перевірка несучої здатності

Загальновідомо, що в роботі позацентрово стиснутих елементів можна виділити ряд особливих відмінностей, найважливішими серед яких є їх «внутрішня статична невизначеність» (неоднорідність деформування) та вплив прогинів на несучу здатність. В косостиснутих елементах із-за наперед невідомого кута нахилу нейтральної лінії  $\theta$  зазначені відмінності ще більше ускладнюються: таж сама «внутрішня статична невизначеність» зростає, а напрямок лінії прогинів попередньо залишається невідомим. Узагальнена модель деформування дозволяє вирішувати цю проблему через діаграму стану елемента наступним чином.

Почнемо з жорстких або відносно коротких елементів, де вплив гнучкості (прогинів) на їх несучу здатність є несуттєвим.

1. Загальновідомо, що косостиснуті елементи деформуються в двох взаємно перпендикулярних площинах, які проходять через геометричні осі перерізу  $X_o$  та  $Y_o$  (рис. 5.10). Так як кут нахилу нейтральної лінії  $\theta$  може змінюватися в межах від  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , то необхідно знати потенційні можливості граничного деформування залізобетонного елемента, стиснутого з ексцентриситетом  $e = e_u$ , у напрямку зазначених площин –  $M_{ux} = N_{ux} \cdot e_{ux}$ ,  $1/r_{ux}$  та  $M_{uy} = N_{uy} \cdot e_{uy}$ ,  $1/r_{uy}$ . Безперечно, що вказані величини можуть бути знайдені з окремих розрахунків косостиснутого елемента на позацентровий стиск у площинах  $X_o$  та  $Y_o$  за методикою, наведеною в п. 5.3.2.



2. З метою скорочення ітераційних обчислень, попереднє значення внутрішнього зусилля  $M_{u\theta} = N \cdot e_u$  за кута нахилу нейтральної лінії  $\theta$  обчислюватимемо за формулою (5.55), а його проекції – за виразами (5.56).

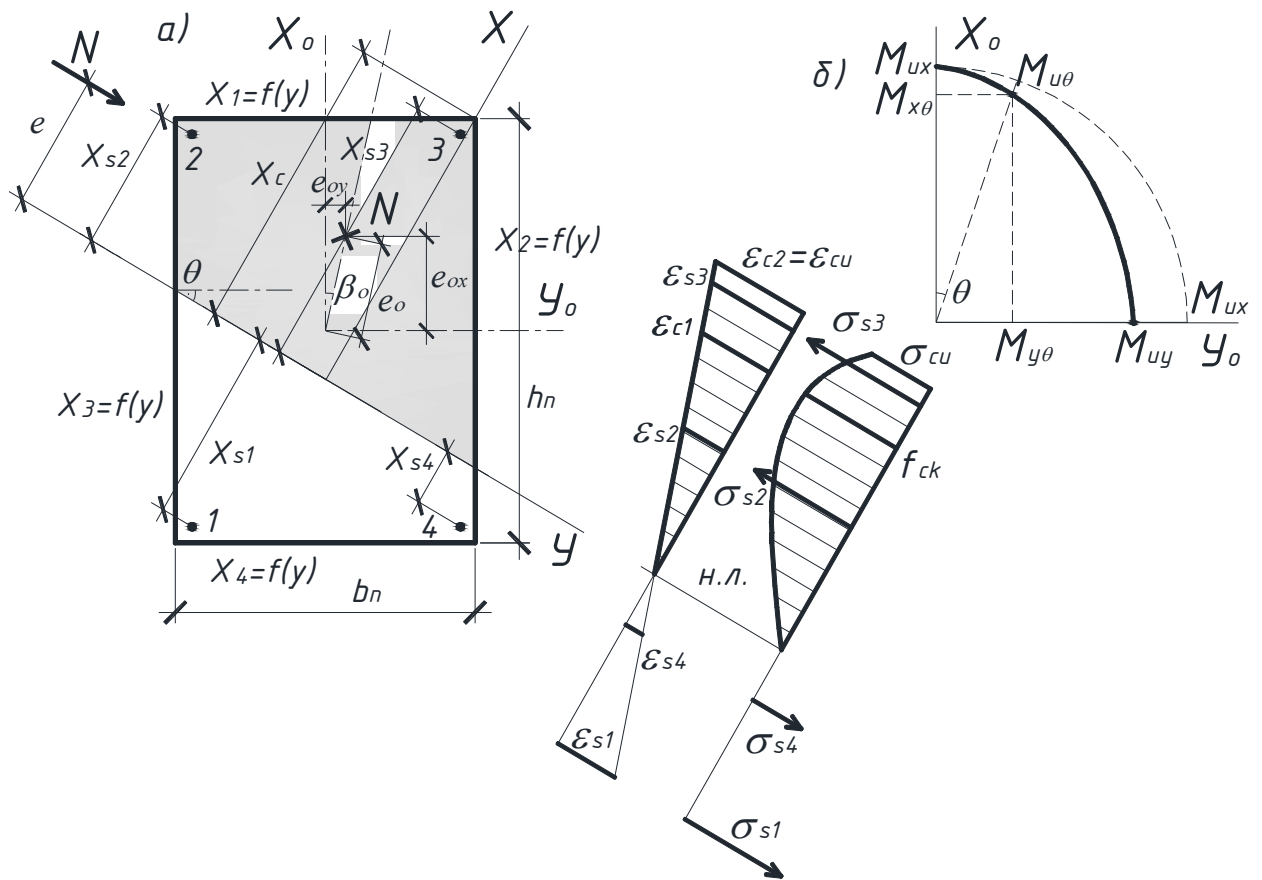


Рисунок 5.10 – Щодо розрахунку косостиснутого залізобетонного елемента: а – розрахункова схема перерізу; б – вплив кута нахилу нейтральної лінії на його несучу здатність

3. Виходячи з рівняння діаграми стану елемента (2.11), що зазнає неоднорідного деформування, його кривини або радіуси викривлення в напрямку осей  $X_o$  та  $Y_o$  слід обчислювати за формулами (5.57) та (5.58).

4. Результируюча кривина косостиснутого елемента в граничному стані  $1/r = 1/r_u$  може бути визначена за виразом (5.59), а кут нахилу нейтральної лінії до горизонтальної осі елемента  $tg\theta$  (рис. 5.10) уточнений за (5.60).

5. За висотою стиснутої зони бетону  $x_c = \epsilon_{cu} / (1/r_u)$  та кутом нахилу нейтральної лінії  $\theta$  встановлюють вигляд її форми (рис. 5.5).

6. Після визначення форми стиснутої зони бетону необхідно за

формулами дод. Б (табл. Б.1) уточнити величину його граничних деформацій  $\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c2}$  з урахуванням ступенів неоднорідності деформування бетону  $m_h = \varepsilon_{co,h} / \varepsilon_{c2}$  та  $m_b = \varepsilon_{co,b} / \varepsilon_{c2}$  в напрямку осей  $X_o$  та  $Y_o$  відповідно.

7. В подальшому розрахунок косостиснутих елементів виконують за двома загальноприйнятими рівняннями рівноваги залежно від положення нейтральної лінії з ексцентриситетом відносно неї

$$e_u = \varepsilon_{cu} / (1/r_u) - (h_n / 2 - e_o \cdot \cos \beta_o) \cos \theta - (b_n / 2 - e_o \cdot \sin \beta_o) \sin \theta. \quad (5.122)$$

**Стиснута зона бетону – трикутник ( $x_c / \cos \theta \leq h_n$  та  $x_c / \sin \theta \leq b_n$ , рис. 5.11).** За подібної форми стиснутої зони бетону несучу здатність косостиснутих елементів слід розраховувати зі спільного розв'язку рівнянь

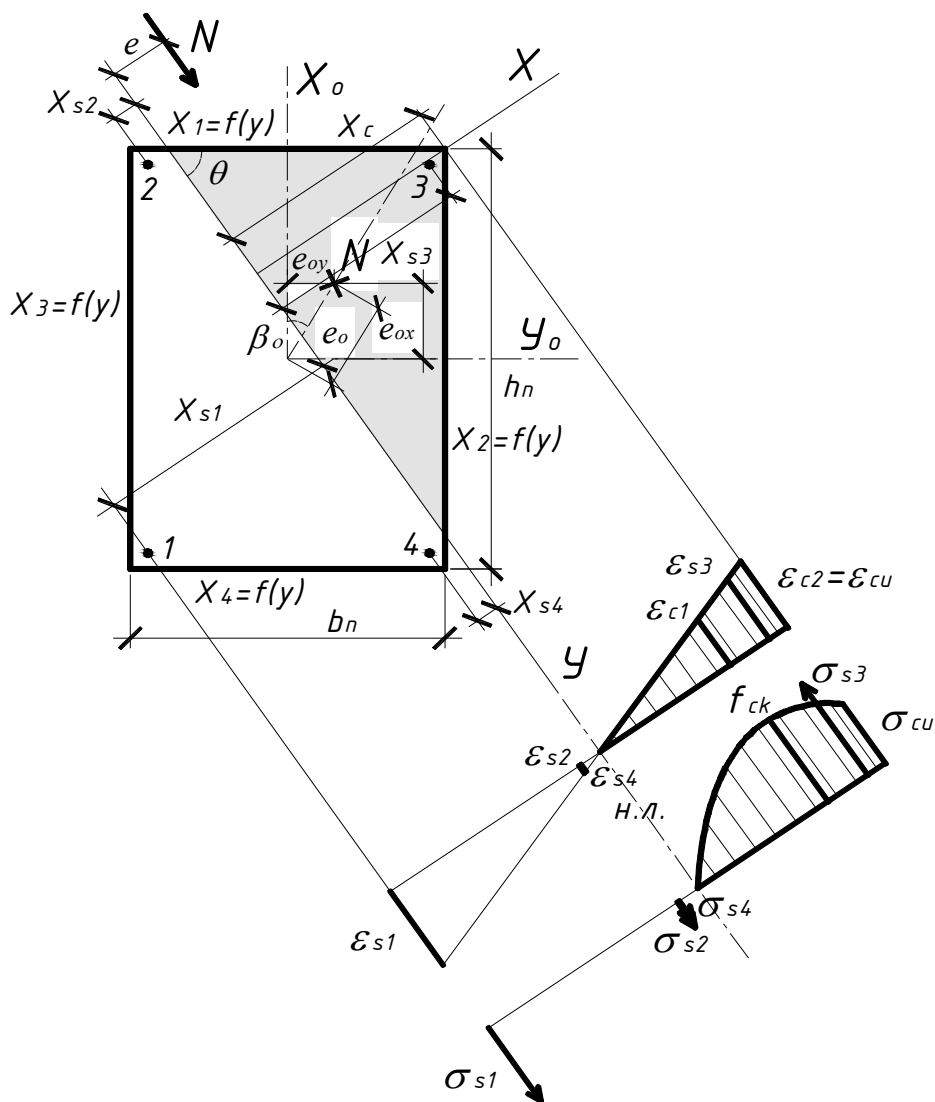


Рисунок 5.11 – Форма стиснутої зони бетону в косостиснутих залізобетонних елементах – трикутник

$$N = \frac{1}{1/r} \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\operatorname{tg} \theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \operatorname{tg} \theta / (1/r)} dy + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si}; \quad (5.123)$$

$$N \cdot e_u = \frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\operatorname{tg} \theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \operatorname{tg} \theta / (1/r)} dy + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)} \right), \quad (5.124)$$

що після інтегрування та ряду спрощень і перетворень набувають вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{a \cdot c + b}{(1/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( -\varepsilon_{cu}^3 \frac{b \cdot c^3}{6(a \cdot c + b)} + \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} + \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (1 - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})) - \right. \\ & \left. - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu}) \right) = E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} + N; \end{aligned} \quad (5.125)$$

$$\begin{aligned} & \frac{a \cdot c + b}{(1/r)^3 c^5 \sin \theta \cos \theta} \left( -\varepsilon_{cu}^4 \frac{b \cdot c^4}{12(a \cdot c + b)} + \varepsilon_{cu}^3 \frac{c^3}{6} - \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} - \right. \\ & \left. - \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (1 - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})) + \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu}) \right) + \frac{1}{1/r} E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)} = N \cdot e. \end{aligned} \quad (5.126)$$

**Стиснута зона бетону – трапеція** ( $x_c / \cos \theta > h_n$  та  $x_c / \sin \theta \leq b_n$ , **рис.**

**5.12).** В такому випадку рівняння рівноваги в граничній стадії будуть представлені виразами (5.127) та (5.128)

$$\begin{aligned} N = & E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} + \frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\operatorname{tg} \theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \operatorname{tg} \theta / (1/r)} dy - \right. \\ & \left. - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot h_n \cdot \cos \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{((\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (1/r) + h_n / \cos \theta) / \operatorname{tg} \theta}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \operatorname{tg} \theta / (1/r)} dy \right); \end{aligned} \quad (5.127)$$

$$\begin{aligned} N \cdot e = & \frac{1}{1/r} \left( E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(\rho)} + \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\operatorname{tg} \theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \operatorname{tg} \theta / (1/r)} dy - \right. \\ & \left. - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot h_n \cdot \cos \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{((\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (1/r) + h_n / \cos \theta) / \operatorname{tg} \theta}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \operatorname{tg} \theta / (1/r)} dy \right), \end{aligned} \quad (5.128)$$

а після певних перетворень – виразами (5.129) та (5.130)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b \cdot \varepsilon_h}{2} \left( -\varepsilon_{cu}^2 \cdot c^2 + \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot \varepsilon_h - \frac{\varepsilon_h^2}{3} \right) + (a \cdot c + b) \left( \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot \varepsilon_h + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\varepsilon_{cu} c + 1) \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon_h}{1 + \varepsilon_{cu} c} \right) + \varepsilon_h \left( 1 - \frac{\varepsilon_h}{2} - \ln(1 + \varepsilon_{cu} c - \varepsilon_h) \right) \right) \right) + E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \varepsilon_{si} = N; \end{aligned} \quad (5.129)$$

$$\frac{1}{(1/r)^3 c^5 \sin\theta \cos\theta} \left( \frac{b \cdot \varepsilon_h}{2} \left( -\varepsilon_{cu}^3 \frac{2 \cdot c^3}{3} + \varepsilon_{cu}^2 \cdot c^2 \cdot \varepsilon_h - \varepsilon_{cu} \cdot c \frac{2 \cdot \varepsilon_h^2}{3} + \frac{\varepsilon_h^3}{6} \right) + (a \cdot c + b) \times \right. \\ \left. \times \left( \varepsilon_{cu}^2 \cdot \varepsilon_h \frac{c^2}{2} - \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot \varepsilon_h \cdot \left( 1 + \frac{\varepsilon_h}{2} \right) - (\varepsilon_{cu} \cdot c + 1) \cdot \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon_h}{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}} \right) + \varepsilon_h \cdot \left( \frac{\varepsilon_h^2}{6} + \frac{\varepsilon_h}{2} - 1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_h) \right) \right) \right) + \frac{1}{1/r} E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)} = N \cdot e. \quad (5.130)$$

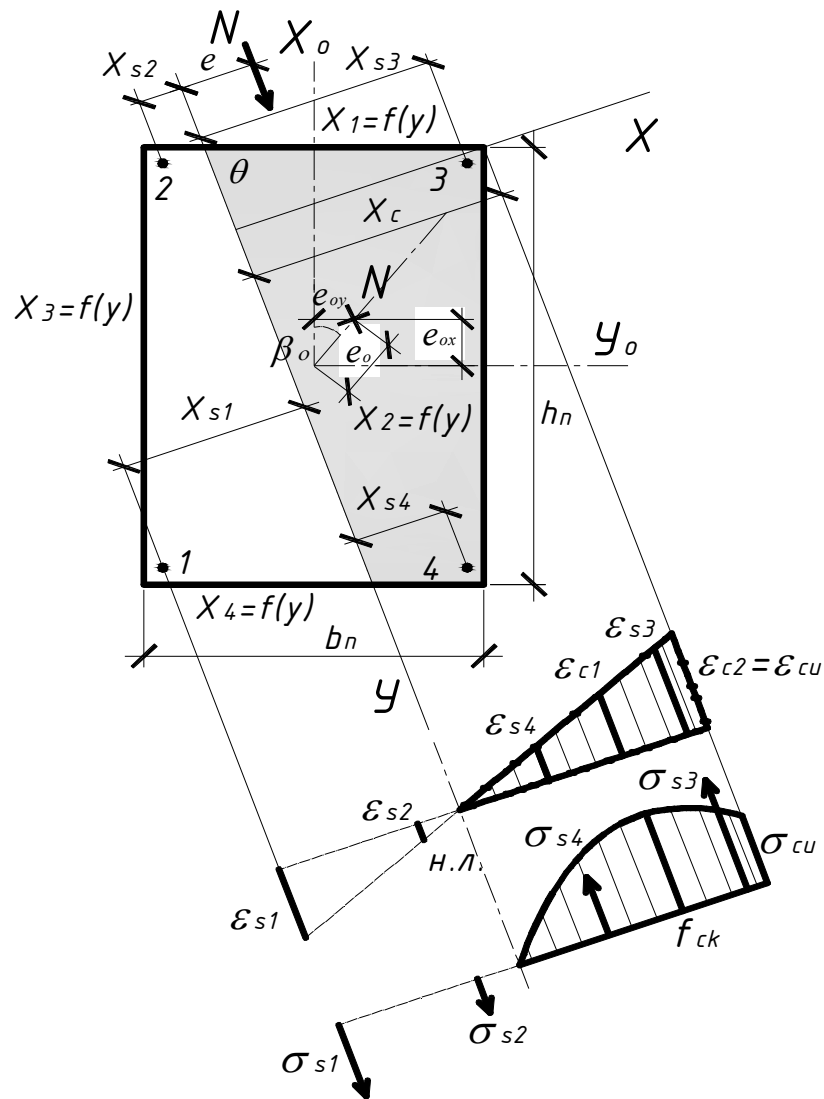


Рисунок 5.12 – Форма стиснутої зони бетону в косостиснутих елементах – трапеція уздовж сторони  $h_n$

**Стиснута зона бетону – трапеція** ( $x_c / \cos\theta \leq h_n$  та  $x_c / \sin\theta > b_n$ , **рис. 5.13**). Загалом за подібної форми стиснутої зони бетону рівновага косостиснутих залізобетонних елементів в граничній стадії буде забезпечуватися рівняннями (5.131) та (5.132)

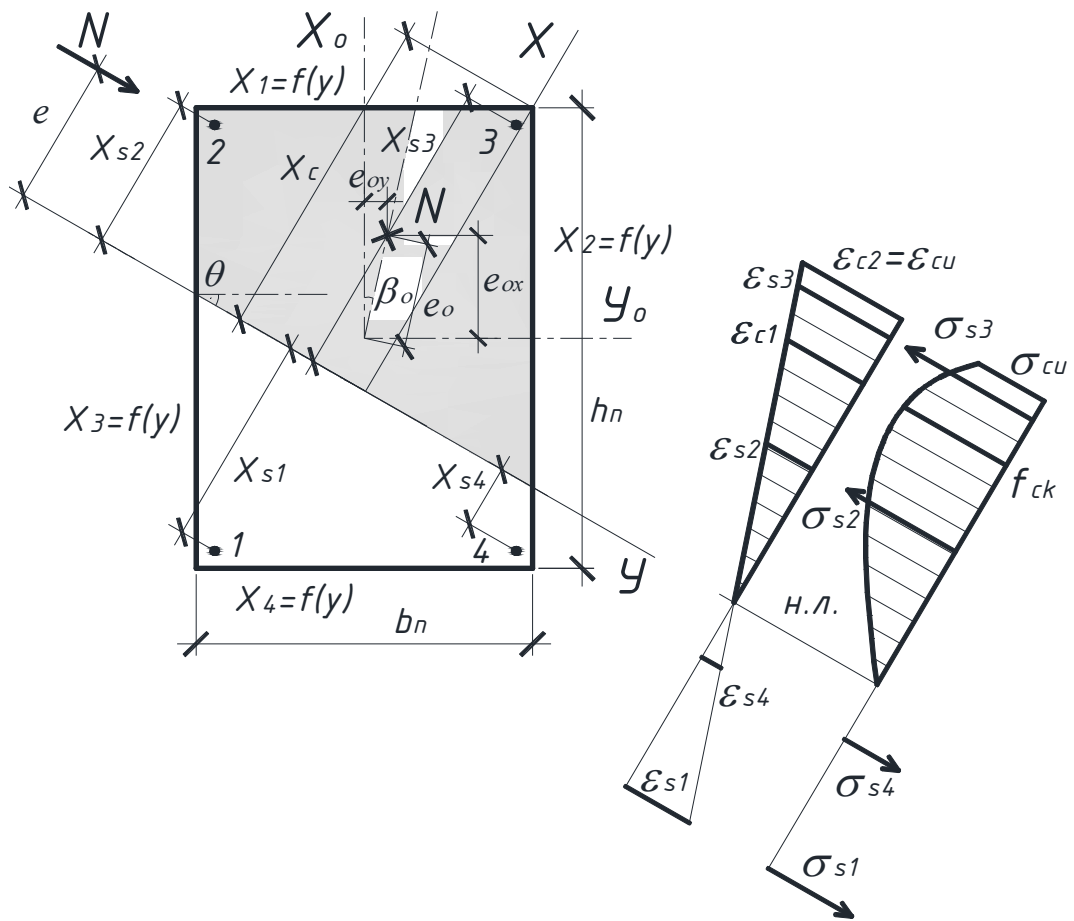


Рисунок 5.13 – Форма стиснутої зони бетону в косостиснутих елементах – трапеція уздовж сторони  $b_n$

$$N_{Ed} \leq N = E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} + \frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (tg\theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) tg\theta / (1/r)} dy - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot b_n \cdot \sin\theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (tg\theta / r)}^{((\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin\theta) tg\theta} dy \right); \quad (5.131)$$

$$N_{Ed} \cdot e \leq \frac{1}{1/r} \left( E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)} \right) + \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (tg\theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) tg\theta / (1/r)} dy - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot b_n \cdot \sin\theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (tg\theta / r)}^{((\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin\theta) tg\theta} dy. \quad (5.132)$$

Після подвійного інтегрування приведених рівнянь та певних спрощень і перетворень несучу здатність косостиснутих залізобетонних елементів необхідно розраховувати за виразами (5.133) та (5.134)

$$\frac{1}{(1/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b \cdot \varepsilon_b}{2} (-\varepsilon_{cu}^2 \cdot c^2 + \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_b^2}{3}) + (a \cdot c + b)(\varepsilon_{cu} \cdot c \cdot \varepsilon_b + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{cu} c + 1) \cdot \ln(1 - \frac{\varepsilon_b}{1 + \varepsilon_{cu} c}) + \varepsilon_b(1 - \frac{\varepsilon_b}{2} - \ln(1 + \varepsilon_{cu} c - \varepsilon_b))) \right) + E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = N; \quad (5.133)$$

$$\frac{1}{(1/r)^3 c^5 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b \cdot \varepsilon_b}{2} (-\varepsilon_{cu}^3 \frac{2 \cdot c^3}{3} + \varepsilon_{cu}^2 \cdot c^2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_{cu} \cdot c \frac{2 \cdot \varepsilon_b^2}{3} + \frac{\varepsilon_b^3}{6}) + (a \cdot c + b) \times \right. \\ \left. \times (\varepsilon_{cu}^2 \cdot \varepsilon_b \frac{c^2}{2} - \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot \varepsilon_b \cdot (1 + \frac{\varepsilon_b}{2}) - (\varepsilon_{cu} \cdot c + 1) \cdot \ln(1 - \frac{\varepsilon_b}{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}}) + \varepsilon_b \cdot (\frac{\varepsilon_b^2}{6} + \frac{\varepsilon_b}{2} - 1 + \right. \\ \left. + \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b))) \right) + \frac{1}{1/r} E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)} = N \cdot e. \quad (5.134)$$

**Стиснута зона бетону – п'ятикутник** ( $x_c / \cos \theta > h_n$  і  $x_c / \sin \theta > b_n$ , **рис. 5.14**). Подібна форма стиснутої зони бетону є доволі поширеною в косостиснутих елементах невеликої гнучкості ( $\lambda_h = l_{ox} / h_n$ ,  $\lambda_b = l_{oy} / b_n$ ) за відносно малих ексцентриситетів прикладання поздовжнього навантаження ( $\delta_h = e_{ox} / h_n$ ,  $\delta_b = e_{oy} / b_n$ ). За такого випадку рівновага елементів в граничній стадії буде забезпечена рівняннями (5.135) та (5.136)

$$N = E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} + \frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (tg \theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) tg \theta / (1/r)} dy - \right. \\ \left. - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot h_n \cdot \cos \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{((\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (1/r) + h_n / \cos \theta) / tg \theta}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) tg \theta / (1/r)} dy - \right. \\ \left. - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot b_n \cdot \sin \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (tg \theta / r)}^{((\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin \theta) tg \theta} dy \right); \quad (5.135)$$

$$N \cdot e = \frac{1}{1/r} \left( E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(\rho)} + \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{(1/r)} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (tg \theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) tg \theta / (1/r)} dy - \right. \\ \left. - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot h_n \cdot \cos \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{((\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (1/r) + h_n / \cos \theta) / tg \theta}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) tg \theta / (1/r)} dy - \right. \\ \left. - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot b_n \cdot \sin \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (tg \theta / r)}^{((\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin \theta) tg \theta} dy \right). \quad (5.136)$$

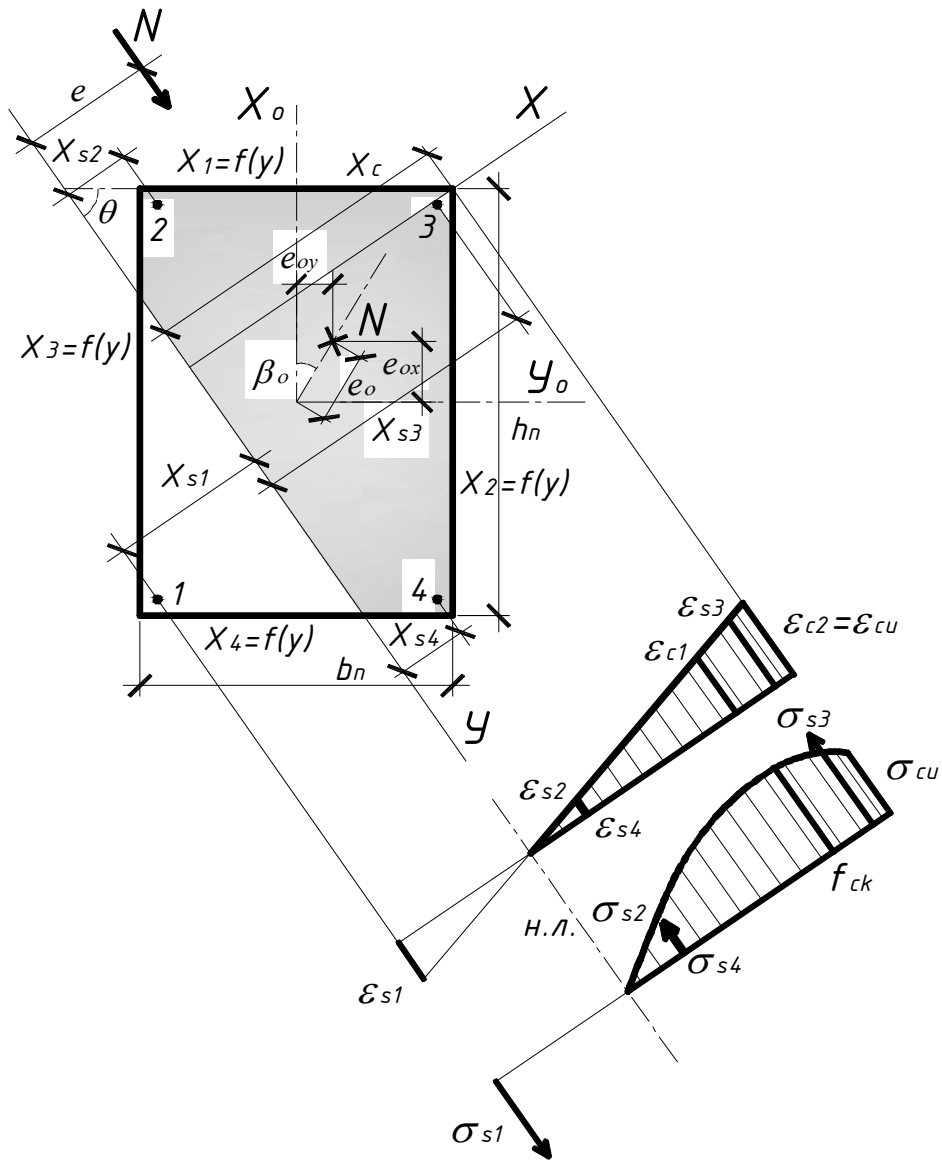


Рисунок 5.14 – Форма стиснутої зони бетону в косостиснутих залізобетонних елементах – п’ятикутник

В результаті подвійного інтегрування вищенаведених рівнянь в межах наступних функціональних інтервалів:

- $x_1 = (\epsilon_c - \epsilon_{cu}) / (\text{tg} \theta / r) \dots x_2 = (\epsilon_{cu} - \epsilon_c) \text{tg} \theta / (1/r)$ ;
- $x_4 = ((\epsilon_c - \epsilon_{cu}) / (1/r) + h_n / \cos \theta) / \text{tg} \theta \dots x_2 = (\epsilon_{cu} - \epsilon_c) \text{tg} \theta / (1/r)$ ;
- $x_1 = (\epsilon_c - \epsilon_{cu}) / (\text{tg} \theta / r) \dots x_3 = ((\epsilon_{cu} - \epsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin \theta) \text{tg} \theta$

та певних спрощень і перетворень несучу здатність косостиснутих елементів з п’ятикутною формою стиснутої зони бетону необхідно розраховувати за формулами (5.137) та (5.138)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b}{2} (-\varepsilon_{cu}^2 c^2 (\varepsilon_h + \varepsilon_b) + \varepsilon_{cu} c \cdot (\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2) - \frac{\varepsilon_h^3 + \varepsilon_b^3}{3}) + \right. \\
& + (a \cdot c + b) (\varepsilon_{cu}^3 \frac{b \cdot c^3}{6(a \cdot c + b)} - \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} + \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (\varepsilon_h + \varepsilon_b - 1) + (\varepsilon_{cu} \cdot c + 1) \times \\
& \times \ln \left( \frac{(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_h)(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b)}{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}} \right) + \varepsilon_h + \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2}{2} - \varepsilon_h \times \\
& \times \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_h) - \varepsilon_b \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b) \left. \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = N; \quad (5.137)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1/r)^3 c^5 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b}{2} (-\varepsilon_{cu}^3 \frac{2 \cdot c^3 (\varepsilon_h + \varepsilon_b)}{3} + \varepsilon_{cu}^2 \cdot c^2 (\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2) - 2 \cdot \varepsilon_{cu} \cdot c \frac{\varepsilon_h^3 + \varepsilon_b^3}{3} + \right. \\
& + \frac{\varepsilon_h^4 + \varepsilon_b^4}{6}) + (a \cdot c + b) (\varepsilon_{cu}^4 \frac{b \cdot c^4}{12(a \cdot c + b)} - \varepsilon_{cu}^3 \frac{c^3}{6} + \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} (\varepsilon_h + \varepsilon_b + 1) - \varepsilon_{cu} \cdot c \times \\
& \times (\varepsilon_h + \varepsilon_b - 1) - \varepsilon_{cu} \cdot c \frac{\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2}{2} - (\varepsilon_{cu} \cdot c + 1) \cdot \ln \frac{(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_h)(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b)}{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}} - \\
& - (\varepsilon_h + \varepsilon_b) + \frac{\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2}{2} + \frac{\varepsilon_h^3 + \varepsilon_b^3}{6} + \varepsilon_h \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_h) + \varepsilon_b \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b) \left. \right) + \\
& + \frac{1}{1/r} E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)} = N \cdot e. \quad (5.138)
\end{aligned}$$

**Стиснута зона бетону – прямокутник** ( $x_c \geq h_n \cdot \cos \theta + b_n \cdot \sin \theta$ , **рис.**

**5.15).** Такий випадок характерний для жорстких або відносно коротких косостиснутих елементів за випадкових ексцентриситетів прикладання поздовжнього навантаження. У цьому разі рівновага залізобетонних елементів в граничній стадії буде забезпечена рівняннями (5.139) та (5.140) в межах функціональних інтервалів  $x_1 = f(\varepsilon_{cu}) \dots x_2 = f(\varepsilon_{cu})$ ,  $x_4 = f(\varepsilon_{cu}) \dots$   
 $\dots x_2 = f(\varepsilon_{cu})$ ,  $x_1 = f(\varepsilon_{cu}) \dots x_3 = f(\varepsilon_{cu})$ ,  $x_4 = f(\varepsilon_{cu}) \dots x_3 = f(\varepsilon_{cu})$ :

$$\begin{aligned}
N = & E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} + \frac{1}{1/r} \left( \int_0^{\varepsilon_{cu}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\text{tg} \theta / r)}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \text{tg} \theta / (1/r)} dy - \right. \\
& - \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot h_n \cdot \cos \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{((\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (1/r) + h_n / \cos \theta) / \text{tg} \theta}^{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \text{tg} \theta / (1/r)} dy - \\
& - \left. \int_0^{\varepsilon_{cu} - 1/r \cdot b_n \cdot \sin \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\text{tg} \theta / r)}^{((\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin \theta) \text{tg} \theta} dy + \right.
\end{aligned}$$



$$+ \int_0^{\frac{\varepsilon_{cu}-1/r \cdot (h_n \cdot \cos \theta + b_n \cdot \sin \theta)}{1+c \cdot \varepsilon_c}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1+c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{\frac{((\varepsilon_c - \varepsilon_{cu})/(1/r) + h_n / \cos \theta) / \operatorname{tg} \theta}{((\varepsilon_c - \varepsilon_{cu})/(1/r) - b_n / \sin \theta) \operatorname{tg} \theta}} dy \quad (5.139)$$

$$N \cdot e = \frac{1}{1/r} \left( E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si}(\rho) + \int_0^{\frac{\varepsilon_{cu}}{1+c \cdot \varepsilon_c}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1+c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{\frac{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \operatorname{tg} \theta / (1/r)}{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\operatorname{tg} \theta / r)}} dy - \right. \\ \left. - \int_0^{\frac{\varepsilon_{cu}-1/r \cdot h_n \cdot \cos \theta}{1+c \cdot \varepsilon_c}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1+c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{\frac{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) \operatorname{tg} \theta / (1/r)}{((\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (1/r) + h_n / \cos \theta) / \operatorname{tg} \theta}} dy - \right. \\ \left. - \int_0^{\frac{\varepsilon_{cu}-1/r \cdot b_n \cdot \sin \theta}{1+c \cdot \varepsilon_c}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1+c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{\frac{((\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin \theta) \operatorname{tg} \theta}{(\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (\operatorname{tg} \theta / r)}} dy + \right. \\ \left. + \int_0^{\frac{\varepsilon_{cu}-1/r \cdot (h_n \cdot \cos \theta + b_n \cdot \sin \theta)}{1+c \cdot \varepsilon_c}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1+c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{1/r} \int_{\frac{((\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c) / (1/r) - b_n / \sin \theta) \operatorname{tg} \theta}{((\varepsilon_c - \varepsilon_{cu}) / (1/r) + h_n / \cos \theta) / \operatorname{tg} \theta}} dy \right). \quad (5.140)$$

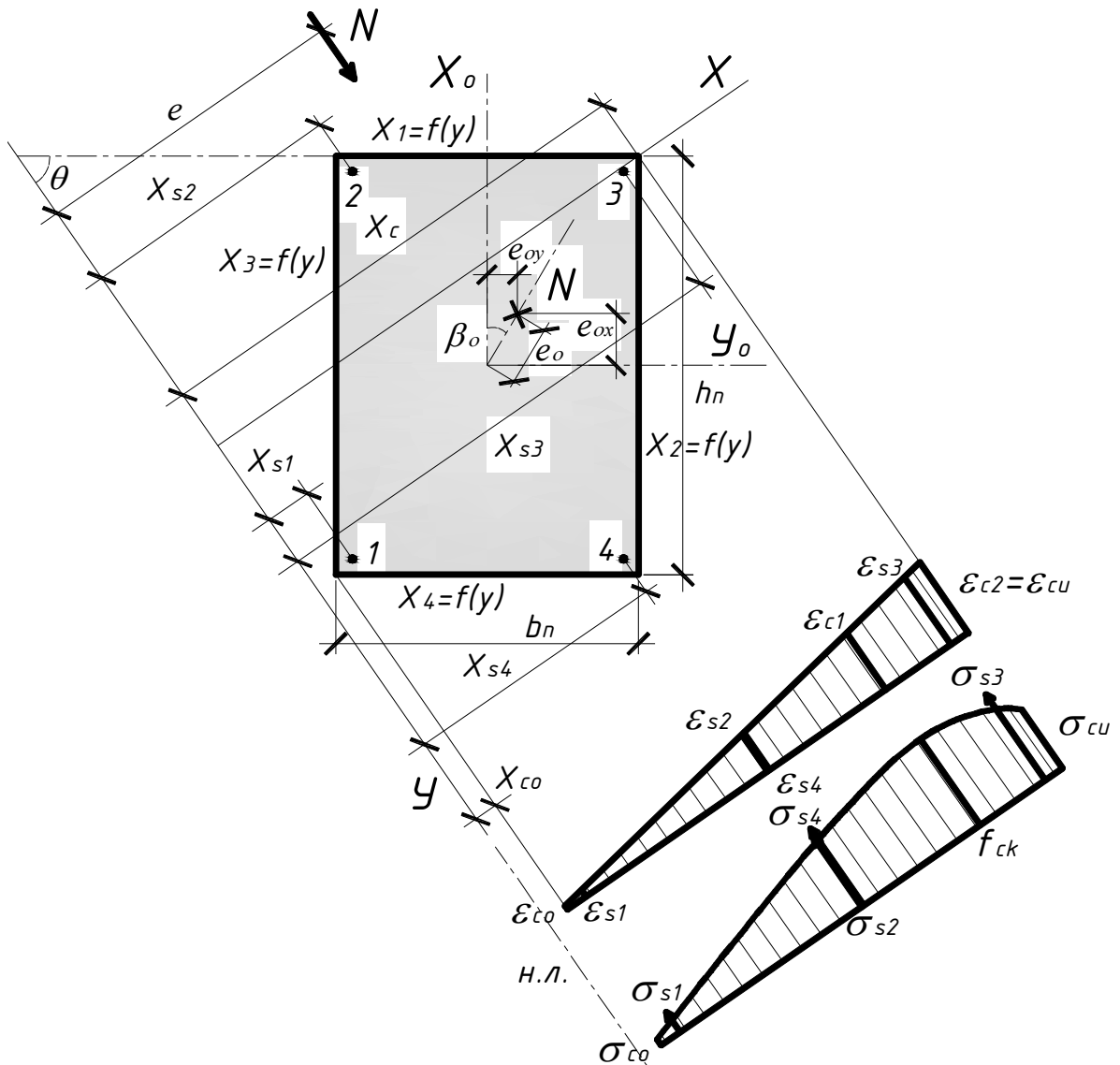


Рисунок 5.15 – Форма стиснутої зони бетону в косостиснутих залізобетонних елементах – прямокутник

Завдяки подвійному інтегруванню вищенаведених рівнянь та певним перетворенням несучу здатність косостиснутих елементів з прямокутною формою стиснутої зони бетону слід оцінювати за виразами (5.141) та (5.142)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b}{2} (\varepsilon_{cu} \cdot c + \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b) \cdot (\varepsilon_h + \varepsilon_b) + \frac{\varepsilon_h^3 + \varepsilon_b^3}{3} - \frac{\varepsilon_h^4 + \varepsilon_b^4}{3} \right) + \\ & + (a \cdot c + b) \left( (\varepsilon_{cu} \cdot c + 1) \cdot \ln \left( \frac{(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_h)(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b)}{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}} \right) + (\varepsilon_h + \varepsilon_b - \right. \\ & \left. - \varepsilon_{cu} - 1) \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_h - \varepsilon_b) + \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_h \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_h) - \right. \\ & \left. - \varepsilon_b \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b) \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = N; \end{aligned} \quad (5.141)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1/r)^3 c^5 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b}{2} (-2 \cdot \varepsilon_{cu}^2 \cdot c^2 \cdot \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b + 2 \cdot \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (\varepsilon_h^2 \cdot \varepsilon_b + \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b^2)) + \right. \\ & \left. + \frac{4 \cdot \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b}{3} (\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2) - \varepsilon_h^2 \cdot \varepsilon_b^2 \right) + (a \cdot c + b) (\varepsilon_{cu} \cdot c \cdot \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b - (\varepsilon_{cu} \cdot c + 1) \times \\ & \times \ln \frac{(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_h)(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b)}{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}} + (\varepsilon_{cu} c + 1 - \varepsilon_h - \varepsilon_b) \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_h - \\ & - \varepsilon_b) - \frac{\varepsilon_h^2 \cdot \varepsilon_b + \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b^2}{2} + \varepsilon_h \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_h) + \varepsilon_b \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b) \left. \right) + \\ & + \frac{1}{1/r} E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si(r)} = N \cdot e. \end{aligned} \quad (5.142)$$

### 5.3.2.2. Визначення площі перерізу арматури

Зважаючи на підвищений рівень внутрішньої статичної невизначеності залізобетонних елементів, які деформуються в двох площинах, необхідно відзначити, що розв'язок прямої задачі для них на сучасному етапі розвитку теорії залізобетону залишається й надалі практично неможливим без використання певних ітераційних прийомів. Тому, при обчисленні необхідної площі поперечного перерізу поздовжньої арматури в косозігнутих елементах не обхідно попередньо задатися відсотком армування в межах 1,5% ... 2% та виконати всі кроки за вищеперерахованими пунктами 1-9 (див. п.5.2.2.1). За невиконання хоча б одного з двох загальноприйнятих рівнянь рівноваги чи додаткової умови (5.73) площу поперечного перерізу арматури слід

скорегувати, а розрахунок повторити згідно вищевказаних пунктів.

## 5.4. Врахування гнучкості елементів

### 5.4.1. Центральна та позацентрово стиснуті елементи

Загальновідомо, що всім залізобетонним елементам конструкцій властиві різноманітні технологічні недосконалості, які виникають на стадії їх проектування, виготовлення та монтажу. Тому центрально стиснуті елементи завжди необхідно розраховувати як позацентрово стиснуті з випадковими ексцентриситетами. Величину останніх в статично визначених елементах конструкцій за будь-яких обставин слід приймати більшою із приведених нижче та унормованих в [122; 123]

$$e_a \geq l_o/600, \quad e_a \geq h_n/30, \quad e_a \geq 1,0 \text{ см.} \quad (5.143)$$

В гнучких центрально та позацентрово стиснутих елементах величина розрахункового ексцентриситету завжди зростатиме завдяки накопиченню самого прогину (рис. 5.16). Заздалегідь він є невідомим, але при врахуванні двох визначальних гіпотез (граничної рівноваги та плоских перерізів) може бути визначений у першому наближенні за класичним виразом

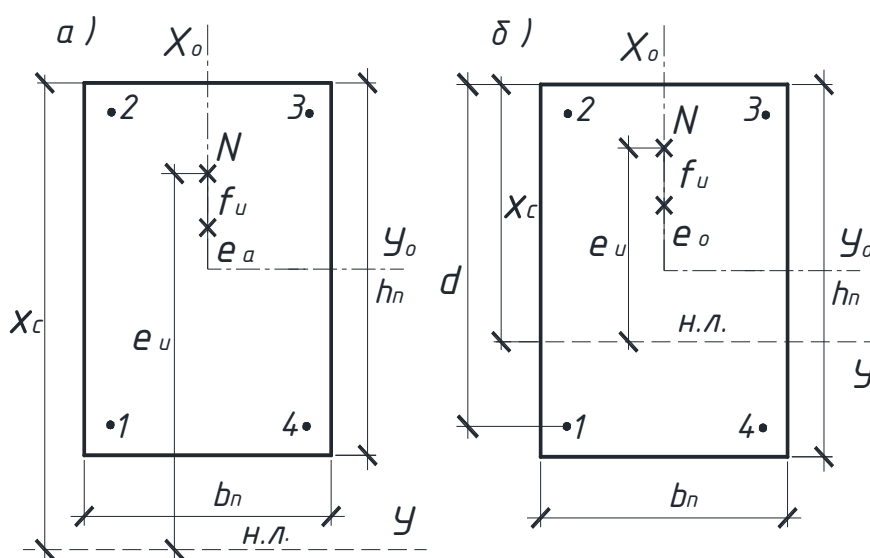


Рисунок 5.16 – Щодо визначення розрахункових ексцентриситетів в елементах: а) – центрально стиснутих; б) – позацентрово стиснутих

$$f_u = s \cdot (1/r_u) \cdot l^2, \quad (5.144)$$

де  $1/r_u$  – кривина елемента в граничній стадії за раціонального використання арматури ( $\varepsilon_{sl} = \varepsilon_{so}$ )

$$1/r_u = (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{so})/d. \quad (5.145)$$

З урахуванням вищесказаного гранична величина повного розрахункового ексцентриситету гнучкого позацентрово стиснутого залізобетонного елемента складатиме

$$e_u = \varepsilon_{cu} / (1/r_u) - h_n / 2 + e_o + f_u. \quad (5.146)$$

В подальшому величина зазначеного ексцентриситету уточнюється разом з прогином при розрахунку гнучкого позацентрово стиснутого елемента за методикою, наведеною в пп. 5.2.1 та 5.2.2, до незаперечного виконання двох загальноприйнятих рівнянь рівноваги та додаткової умови

$$|(f_{u,i-1} - f_{u,i}) / f_{u,i-1}| \leq \delta = 0,01, \quad (5.147)$$

де  $f_{u,i-1}$  і  $f_{u,i}$  – уточнені значення прогинів позацентрово стиснутого елемента на ітераційних етапах його розрахунку.

#### 5.4.2. Косостиснуті елементи

Розрахунок косостиснутих залізобетонних елементів як за силовими, так і деформаційними моделями характеризується невідворотністю застосування ітераційних методів. А оскільки число наближень в обох моделях завжди є доволі значним, то будь-який розрахунок стає вкрай трудомістким і майже неможливим без використання спеціальних комп'ютерних програм. Водночас, використовуючи узагальнену діаграму стану залізобетонного елемента та поняття екстремального критерію несучої здатності, можна ітераційні обчислення звести до мінімуму або ж повністю уникнути їх. Однак, навіть за таких обставин, в розрахунках косостиснутих елементів актуальними залишаються стартові значення величини прогинів та кута їх нахилу. Тому пропонується методика пов'язана, перш за все, з розкриттям

«внутрішньої статичної невизначеності» гнучких косостиснутих елементів, що зводиться до послідовного визначення прогину  $f_u$  за кута нахилу  $\theta$ .

Загалом прогнозування напружено-деформованого стану косостиснутих елементів вимагає знання потенційних можливостей граничного деформування гнучкого залізобетонного елемента, стиснутого з початковим ексцентриситетом  $e_o$  та максимально можливим прогином  $f_u$  у напрямку взаємно перпендикулярних площин, а саме:  $1/r_{ux}$ ,  $f_{ux}$ ,  $M_{ux} = N_{ux} \cdot e_{ux}$  та  $1/r_{uy}$ ,  $f_{uy}$ ,  $M_{uy} = N_{uy} \cdot e_{uy}$ . Вказані величини можуть бути визначені з окремих розрахунків косостиснутого елемента на позацентровий стиск у площинах  $X_o$  та  $Y_o$  за методикою, наведеною в пп. 5.3.1, 5.3.2 та 5.4.1.

Якщо зважити, що прогини елемента безпосередньо пов'язані з його кривиною, то нескладно отримати залежність, яка зв'язує напрямки лінії прогинів  $\theta$  з початковим кутом нахилу силової площини  $\beta_o$  [127]

$$\operatorname{tg} \theta = (1/r_y) / (1/r_x) \approx \frac{E_c \cdot I_{x,red} - s_x \cdot l_{ox}^2 \cdot N}{E_c \cdot I_{y,red} - s_y \cdot l_{oy}^2 \cdot N} \cdot \operatorname{tg} \beta_o. \quad (5.148)$$

де  $I_{x,red}$ ,  $I_{y,red}$  – приведені моменти інерції перерізу елемента в напрямку осей  $X_o$  та  $Y_o$  відповідно;

$l_{ox}$ ,  $l_{oy}$  – розрахункові довжини елемента у тих же напрямках;

$s_x$ ,  $s_y$  – коефіцієнти, що залежать від схеми завантаження та закріплення елемента в напрямку тих же площин.

Тоді значення граничного прогину косостиснутого елемента при куті нахилу нейтральної лінії  $\theta$  (рис. 5.17, а, б) можна обчислювати за формулою

$$f_u = f_{ux} + (f_{uy} - f_{ux}) \cdot \sin \theta. \quad (5.149)$$

В подальшому несучу здатність гнучкого косостиснутого елемента  $N = M_{u\theta} / e_u$  визначають (рис. 5.17, в) з виразу (5.55) за граничного значення розрахункового ексцентриситету відносно нейтральної лінії

$$e_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{1/r_u} - (h_n / 2 - e_o \cdot \cos \beta_o) \cos \theta - (b_n / 2 - e_o \cdot \sin \beta_o) \sin \theta + f_u. \quad (5.150)$$

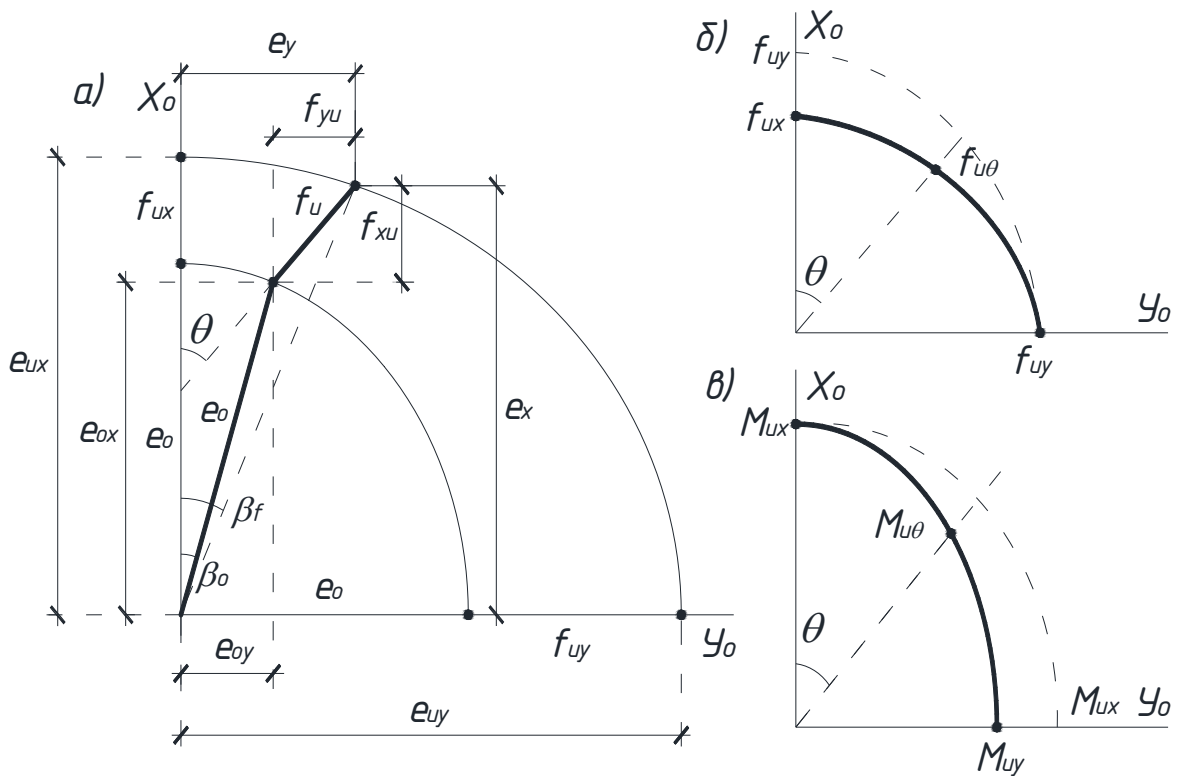


Рисунок 5.17 – До спрощеної методики визначення прогинів (а, б) та розрахунку несучої здатності (б) гнучких косостиснутих елементів

Основною особливістю деформування гнучких косостиснутих елементів є те, що їх перерізи не просто зміщуються у двох взаємно перпендикулярних площинах, які проходять через геометричні осі перерізу  $X_0$  та  $Y_0$  (рис. 5.17). В таких елементах, внаслідок розвитку прогинів, кут нахилу силової площини змінюється від свого початкового  $\beta_0$  до деякого граничного значення  $\beta_f$ , що веде до непропорційного зростання згинаючих моментів в напрямку вищезгаданих площин. Зі сказаного випливає, що в розрахунках гнучких косостиснутих елементів особливої ваги набуває методика визначення їх прогинів. Підвищити точність розрахунку останніх можна наступним чином.

1. Попередні (стартові) значення граничного прогину  $f_u$  та внутрішніх зусиль косостиснутого елемента  $M_{u\theta}$  визначають за вищеприведеною спрощеною методикою.

2. Виходячи з рівняння діаграми стану елемента (2.11), значення кривин

або радіусів викривлення його осі в напрямках площин  $X_o$  та  $Y_o$  із-за розвитку прогинів обчислюють за формулами (5.57) та (5.58).

3. Результируючу кривину гнучкого косостиснутого елементу  $1/r = 1/r_u$  та кут нахилу нейтральної лінії до горизонтальної осі елементу  $tg\theta$  визначають за виразами (5.59) та (5.60) відповідно.

4. За висотою стиснутої зони бетону  $x_{cu} = \varepsilon_{cu} / (1/r_u)$  та кутом нахилу нейтральної лінії  $\theta$  встановлюється вигляд її форми (рис. 5.5).

5. Після визначення форми стиснутої зони бетону за формулами дод. Б (табл. Б.1) уточнюють величину його граничних деформацій  $\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c2}$  з урахуванням ступенів неоднорідності деформування бетону  $m_h = \varepsilon_{co,h} / \varepsilon_{c2}$  та  $m_b = \varepsilon_{co,b} / \varepsilon_{c2}$  в напрямку осей  $X_o$  та  $Y_o$  відповідно.

6. В подальшому розрахунок косостиснутих елементів виконується за двома загальноприйнятими рівняннями рівноваги залежно від положення нейтральної лінії (рис. 5.18) з розрахунковим ексцентриситетом відносно неї за виразом (5.150).

7. Розрахунок продовжується до незаперечного виконання двох загальноприйнятих рівнянь рівноваги та додаткової умови (5.147).

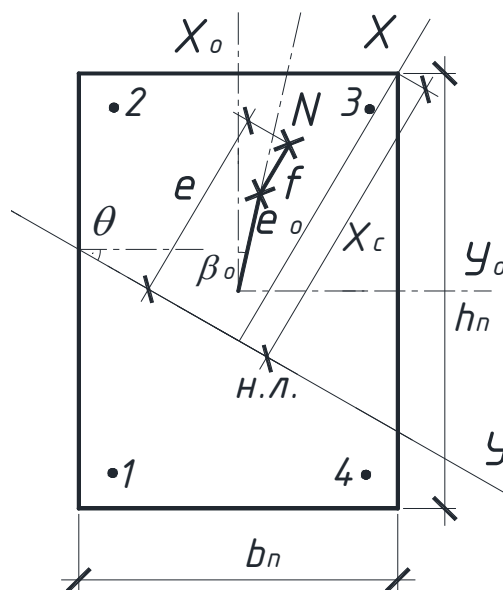


Рисунок 5.18 – До визначення розрахункових ексцентриситетів в гнучких косостиснутих залізобетонних елементах

Зростання рівня внутрішньої статичної невизначеності гнучких залізобетонних елементів, які деформуються в двох площинах, доволі суттєво ускладнює розв'язок прямої задачі для них. На сучасному етапі розвитку теорії залізобетону він є практично неможливим без використання ітераційних прийомів. Тому, при обчисленні необхідної площі перерізу поздовжньої арматури в гнучких косостиснутих елементах, варто рухатись за вищеперерахованими пунктами 1–7 з тією різницею, що попередньо необхідно задатися відсотком армування в межах 1,5% ... 2% та, поступово корегуючи площу перерізу арматури, знайти її найменше значення, за якого обоє рівняння рівноваги будуть виконуватися з обов'язковим дотриманням додаткових умов (5.73) та (5.147).

## 5.5. Висновки

1. Завдяки узагальненим діаграмам стану залізобетонних елементів  $M - 1/r$  та функціям граничних значень відносних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu} = f(\varepsilon_{si}, \rho_{li}, x_{si}, m_h, m_b)$  розроблена методика дозволяє безітераційно або з мінімальним числом ітерацій розв'язувати прямі та обернені задачі з розрахунку нормальних перерізів залізобетонних елементів конструкцій, що зазнають довільного стиску, згину чи розтягу.
2. В розробленій деформаційно-силовій моделі внутрішня статична невизначеність залізобетонних елементів у граничній стадії розкривається з допомогою отриманої функції граничних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu} = f(\varepsilon_{si}, \rho_{li}, x_{si}, m_h, m_b)$ , що сприяє повному уникненню чи максимальному скороченню ітераційних розрахунків.
3. Розрахунок перерізів залізобетонних елементів за деформаційно-силовою моделлю рекомендується виконувати відносно нейтральної лінії, забезпечуючи тим самим єдиний підхід до розрахунку плоско- та косодеформованих елементів незалежно від форми їх перерізів загалом та форми стиснутої зони бетону зокрема.



4. В запропонованій деформаційно-силовій моделі діаграми стану залізобетонних елементів  $M - 1/r$  безпосередньо пов'язуються з загальноприйнятими рівняннями рівноваги, що дозволяє повністю уникнути емпіризму при розрахунку гнучких елементів за найскладніших схем та випадків їх деформування.
5. Основними характеристиками бетону в розробленій моделі деформування залізобетонних елементів є початковий модуль пружності бетону  $E_{co}$ , характеристичне значення його міцності за осьового стиску  $f_{ck}$  та критичні  $\varepsilon_{c1}$  і граничні  $\varepsilon_{cu}$  значення відносних деформацій стиснутого бетону, оскільки з їх допомогою можна контролювати пружно-пластичності властивості бетону загалом та січний модуль деформацій бетону зокрема у визначальних точках діаграм його стану  $\sigma_c - \varepsilon_c$ .
6. Комплексне застосування функції граничних деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu} = f(\varepsilon_{si}, \rho_{li}, x_{si}, m_h, m_b)$  з діаграмами стану залізобетонних елементів  $M - 1/r$  в деформаційно-силовій моделі дозволяє говорити про трансформацію «точних» методів розрахунку несучої здатності зазначених елементів в інженерні експрес-методи при збереженні взаємної методологічної єдності та точності.
7. Спрощена методика розрахунку косодеформованих елементів передбачає їх розрахунок в першому наближенні за кутом нахилу нейтральної лінії, визначеним за пружної постановки задачі або через їх окремі розрахунки в площинах  $X_o$  та  $Y_o$  у пружно-пластичній постановці задачі. До реалізації рекомендується другий спосіб визначення нейтральної лінії, за яким число ітераційних операцій у більшості випадків є меншим.

Матеріали розділу опубліковані в роботах [14; 15; 77; 194; 196-198; 201-204; 210; 211; 213; 223; 226; 229; 232; 235; 489; 490]

## РОЗДІЛ 6

### ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА ГРАНИЧНИМИ СТАНАМИ ДРУГОЇ ГРУПИ

#### 6.1. Загальні положення та основні гіпотези і передумови

Головним завданням узагальненої деформаційно-силової моделі є якнайточніше відтворення дійсного напружено-деформованого стану бетонних та залізобетонних елементів за максимального виключення емпіричних положень і коефіцієнтів з методик їх розрахунку. Тому для його вирішення доцільно прийняти наступні гіпотези та передумови.

1. Розрахунок залізобетонних елементів за граничними станами другої групи необхідно проводити на підставі діаграм їх стану, гіпотези плоских перерізів та діаграм деформування арматури, розтягнутого і стиснутого бетону.

2. До моменту утворення нормальних тріщин залізобетон розглядується як суцільне тіло, а граничні зусилля, що сприймаються залізобетонним елементом при їх появі, слід визначати з урахуванням пружних деформацій в арматурі та непружних деформацій в розтягнутому і стиснутому бетоні.

3. Граничні значення відносних деформацій розтягнутого бетону в момент утворення нормальних тріщин визначаються за екстремальним критерієм його міцності.

4. Розрахунок залізобетонних елементів з розкриття нормальних тріщин доцільно виконувати за традиційною моделлю їх роботи «стиснутий бетон – порожнина – розтягнута арматура».

5. Крок та ширину розкриття нормальних тріщин необхідно визначати з урахуванням профілю арматури.

6. В практичних розрахунках залізобетон після утворення тріщин доцільно розглядати як «квазісуцільне тіло». Вплив розтягнутого бетону на напружено-деформований стан елемента варто враховувати через зниження

його осередненої залишкової міцності в блоці між тріщинами.

7. Жорсткість осередненого перерізу найбільш напруженої ділянки залізобетонного елемента змінюється за нелінійною функцією, залежною від основних силових та деформаційних параметрів цієї ділянки.

8. Кривину залізобетонного елемента доцільно визначати відповідно до діаграми його стану за незаперечного дотримання класичних рівнянь рівноваги.

9. Прогини та переміщення залізобетонних елементів варто обчислювати за загальними правилами будівельної механіки залежно від їх основних деформаційних параметрів (кривин) в характерних перерізах уздовж осі.

Як зазначалося вище, будь-який розрахунок залізобетонних елементів потребує якнайточнішого визначення або «відтворення» їх напружено-деформованого стану в характерних перерізах на певних стадіях деформування. Зокрема, для розрахунку утворення тріщин важливо знати напруження та деформації в перерізах, де має появитися перша з тріщин. Розрахунок розкриття тріщин, що включає в себе розв'язок двох окремих задач (знаходження кроку утворення тріщин та визначення ширини їх розкриття), потребує відтворення основних параметрів напружено-деформованого стану елементів в перерізі з першою тріщиною, в перерізі, де може появитися наступна тріщина, та в умовному осередненому перерізі блоку між тріщинами. При розрахунках же прогинів взагалі достатньо обійтися основними параметрами напружено-деформованого стану осереднених ділянок елементів, на які їх зазвичай розділяють. Таким чином, для будь-якого залізобетонного елемента завжди залишатиметься актуальною не тільки гіпотеза граничної рівноваги, але й його рівновага загалом в характерних перерізах протягом всього процесу деформування.

Остання ж може бути забезпечена безумовним виконанням двох класичних рівнянь рівноваги та інших додаткових умов, найважливішою серед яких слід вважати узагальнену діаграму стану бетонних та залізобетонних елементів [197; 225]. Застосування цієї діаграми дозволяє

суттєво спростити розв'язок більшості із вищезгаданих задач саме завдяки тому, що базується вона на загальних закономірностях зміни жорсткості та кривини залізобетонних елементів конструкцій.

## 6.2. Жорсткість та кривина залізобетонних елементів конструкцій

Відомо, що за плоского згину вісь балки під дією навантаження викривляється в площині дії сил, а її поперечні перерізи повертаються та зміщуються на певну величину. Тому викривлену вісь балки називають зігнутою віссю або пружною лінією, а її деформування зазвичай описують двома основними параметрами: прогином та кутом повороту перерізу. Під першим розуміють зміщення центру ваги перерізу балки за напрямком, перпендикулярним до її осі. Що ж до другого, то він характеризує зміну первинного положення певного перерізу і визначається кутом між дотичною до пружної лінії та початковою віссю балки. Інакше кажучи, якщо підійти до зазначених параметрів з математичної точки зору, то величина прогину балки є функцією пружної лінії в конкретній точці  $f_i = f(z_i)$ , а перша похідна від неї – кутом повороту перерізу  $\varphi_i \approx df_i / dz_i$ .

З фізичної природи прогину як явища випливає, що зігнута вісь суцільної залізобетонної балки повинна бути неперервною та гладкою (без зламів) кривою (рис. 6.1). При цьому, деформування тієї чи іншої ділянки балки визначається викривленням її пружної лінії, тобто кривиною осі балки при згині

$$1/r = M_x(z) / D_x(z), \quad (6.1)$$

де  $D_x(z)$  – повна приведена жорсткість залізобетонного елемента в певному перерізі уздовж осі  $Z$ ;

$M_x(z)$  – діюче зусилля в залізобетонному стержні уздовж тої ж осі .

Спробуємо проаналізувати характер зміни основних параметрів, якими оцінюється стан залізобетонного елемента в процесі його деформування.

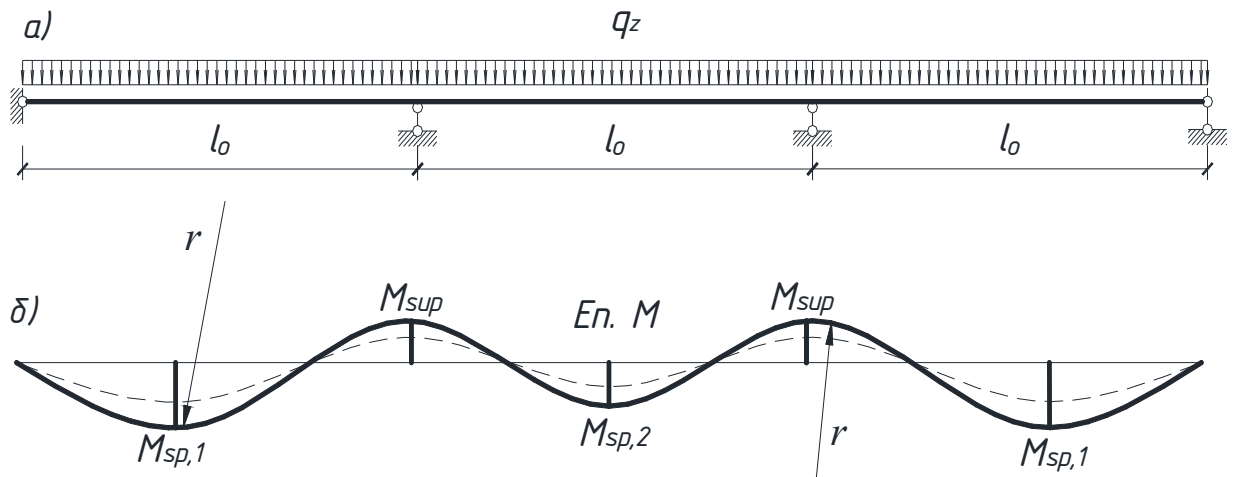


Рисунок 6.1 – До схеми деформування згинального елемента: а – розрахункова схема; б – епюра моментів

За невеликих навантажень та відсутності тріщин початкова жорсткість залізобетонного елемента змінюється уздовж його осі плавно і без стрибків (рис. 6.2, б). Так само, плавно і без стрибків, змінюється його кривина та лінія прогинів (рис. 6.2, в, г).

З появою тріщин епюри жорсткості залізобетонного елемента та його кривини стають стрибкоподібними (рис. 6.3, а, б), однак лінія прогинів як була так і залишається плавною, без стрибків і переламів (рис. 6.3, в). В такому разі напрошується висновок, що дійсний стан залізобетонного елемента не може бути визначений за перерізом з мінімальною жорсткістю чи максимальною кривиною. Тому цілком очевидним є те, що реальний напружено-деформований стан залізобетонного елемента в будь-якому перерізі варто оцінювати за усередненими значеннями його кривини та жорсткості, епюри яких мають плавний характер без переламів і стрибків.

Раніше уже наголошувалося (п. 2.7), а пізніше було підтверджено (пп. 3 і 4), що процес деформування залізобетонних елементів в першу чергу необхідно пов'язувати з їх жорсткістю. Зміну ж останньої доцільно контролювати за діаграмою стану елемента (рис. 6.4).

Саму ж діаграму стану або функцію, що пов'язує зусилля  $M$  в залізобетонному елементі з його кривиною  $1/r$ , представимо у вигляді

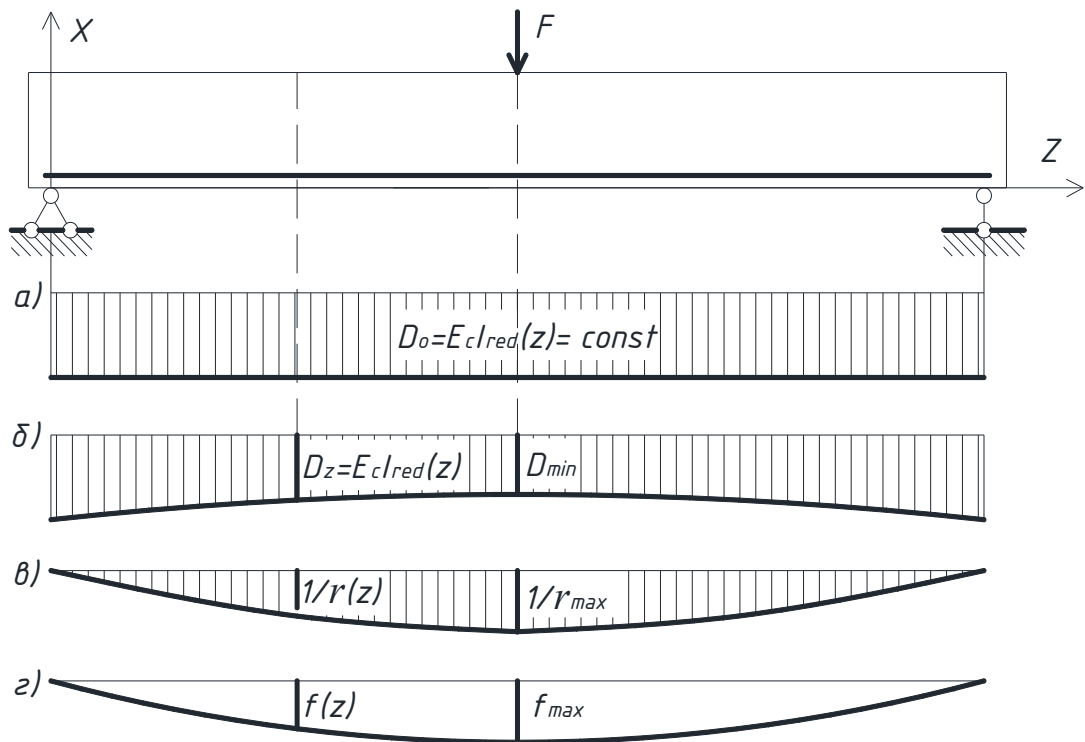


Рисунок 6.2 – Основні параметри стану згинального залізобетонного елемента без тріщин:  $a$  – початкова еюра жорсткості;  $\delta$  – дійсна еюра жорсткості;  $\theta$  – еюра кривини;  $г$  – лінія прогинів

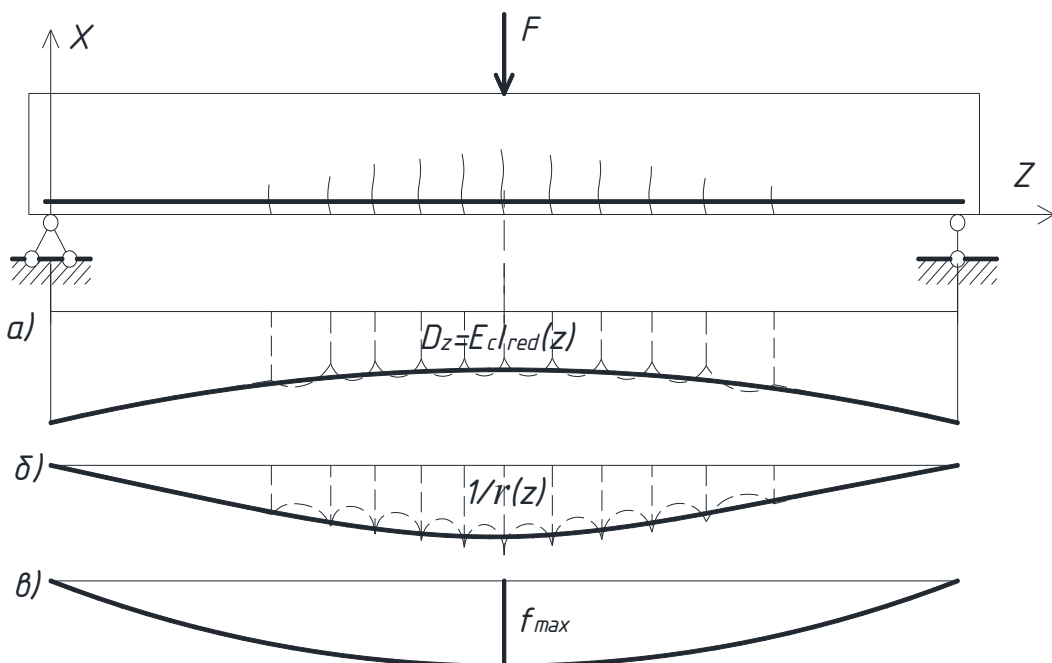


Рисунок 6.3 – Характер зміни основних параметрів стану згинального залізобетонного елемента з тріщинами:  $a$  – еюра жорсткості;  $\delta$  – еюра кривини;  $\theta$  – лінія прогинів

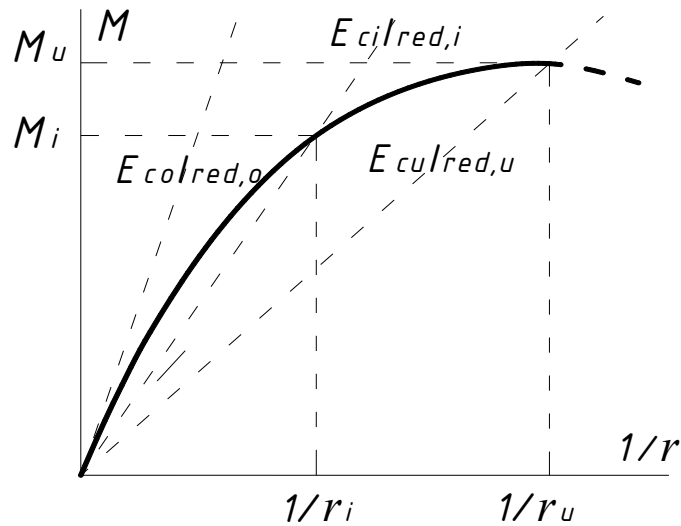


Рисунок 6.4 – Загальний характер діаграми стану залізобетонного елемента

$$M = \frac{D_o \cdot 1/r - M_u \cdot ((1/r)/(1/r_u))^2}{1 + (D_o / M_u - 2/(1/r_u)) \cdot (1/r)}, \quad (6.2)$$

де  $D_o$  – початкове значення повної ( $\Sigma E_i I_i$ ) або приведеної ( $E_{co} I_{red,o}$ ) жорсткості залізобетонного елемента.

Кривина залізобетонного елемента, яка у цьому випадку є коренем квадратного рівняння (6.2), може бути знайдена за формулою

$$\frac{1}{r} = \frac{1/r_u}{2M_u} \left[ \left(1 - \frac{M}{M_u}\right) \frac{D_o}{r_u} + 2M - \sqrt{\left(\left(1 - \frac{M}{M_u}\right) \frac{D_o}{r_u} + 2M\right)^2 - 4M \cdot M_u} \right]. \quad (6.3)$$

Водночас, через гіпотезу плоских перерізів, поточні значення кривини пов'язані з відносними деформаціями матеріалів у найбільш напруженому перерізі або в осередненому перерізі найбільш напруженої ділянки елемента. Зазначений зв'язок може бути відображений функціями

$$1/r = (\varepsilon_{c2} + \varepsilon_s) / d \quad \text{або} \quad 1/r = (\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{co}) / h_n, \quad (6.4)$$

де  $\varepsilon_s$  – деформації найбільш розтягнутого арматурного стержня в перерізі елемента;

$d$  – робоча висота перерізу залізобетонного елемента.

Тому, приймаючи до уваги загальновизнані принципи МДТТ та залежності (6.3) і (6.4), кривину будь-якого залізобетонного елемента у найбільш напруженому перерізі або в осередненому перерізі найбільш

напруженої ділянки елемента за його нелінійного деформування доцільно визначати за розв'язком наступної замкнутої системи рівнянь МДТТ:

- статичних співвідношень з гіпотезою граничної рівноваги
  - геометричних співвідношень з гіпотезою плоских перерізів
  - фізичних співвідношень:
- $$M = f(\varepsilon_c, \varepsilon_{ct}, \varepsilon_s), \quad N = f(\varepsilon_c, \varepsilon_{ct}, \varepsilon_s);$$
- $$1/r = f(\varepsilon_c, \varepsilon_{ct}, \varepsilon_s);$$
- стану елементів  $M = f(1/r)$  з екстремальним критерієм несучої здатності  $dM/d(1/r) = 0$ ;
- стану матеріалів  $\sigma_c = f(\varepsilon_c), \quad \sigma_{ct} = f(\varepsilon_{ct}), \quad \sigma_s = f(\varepsilon_s)$  з екстремальними критеріями міцності  $d\sigma_c/d\varepsilon_c = 0, \quad d\sigma_{ct}/d\varepsilon_{ct} = 0$ .

Таким чином, кривина, будучи залежною від міцнісних і деформативних характеристик залізобетонних елементів, являється одним із визначальних параметрів всього процесу їх деформування. Саме завдяки кривині стан залізобетонного елемента на будь-якій стадії (граничній чи експлуатаційній) можна описувати з єдиних методологічних позицій. Крім того варто відзначити, що використання діаграм стану, визначальним параметром яких є кривина, забезпечує єдиний підхід до розрахунку прогинів залізобетонних елементів незалежно від наявності чи відсутності в них тріщин.

### 6.3. Оцінка напружено-деформованого стану залізобетонних елементів на стадіях деформування

Використовуючи вищеобумовлені гіпотези та передумови (п. 6.1), запишемо загальноприйняті рівняння рівноваги для плоскозавантаженого (рис. 6.5, 6.6) чи косозавантаженого (рис. 6.7 ... 6.11) елемента

$$\pm N = N_c - N_{ct} + N_s; \tag{6.6}$$

$$M = M_c + M_{ct} + M_s, \tag{6.7}$$

де внутрішні зусилля в арматурі визначимо за формулами, ідентичними до



(5.16) та (5.17)

$$N_s = \frac{b_n \cdot E_s}{1/r} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{c2}) \sum_{i=1}^n \rho_{li} \varepsilon_{si} = \frac{b_n \cdot E_s}{1/r} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{c2}) \cdot \varepsilon_{s1} \cdot \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}; \quad (6.8)$$

$$M_s = \frac{b_n \cdot E_s}{(1/r)^2} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{c2}) \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \varepsilon_{si}^2 = \frac{b_n \cdot E_s}{(1/r)^2} (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{c2}) \cdot \varepsilon_{s1}^2 \cdot \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si}^2, \quad (6.9)$$

а відповідні внутрішні зусилля в бетоні стиснутої та розтягнутої зон знайдемо за формулами дод. В (табл. В.1 та В.2) залежно від форми цих зон.

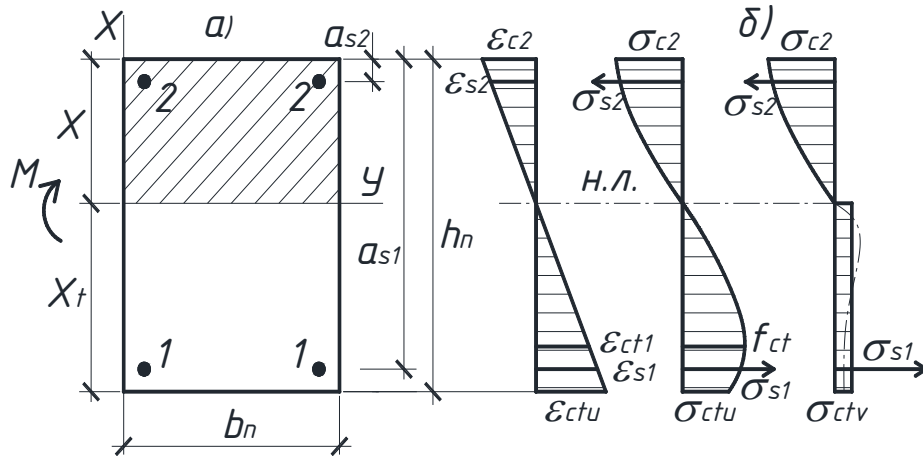


Рисунок 6.5 – Напружено-деформований стан плоско зігнутого елемента в момент (а) та після утворення (б) тріщин

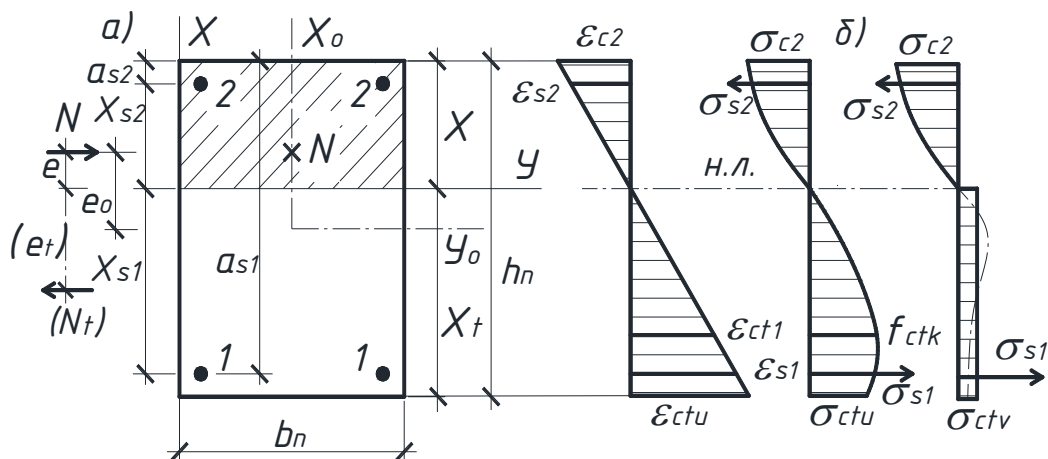


Рисунок 6.6 – Напружено-деформований стан позациентрово навантаженого елемента в момент (а) та після утворення (б) тріщин

Разом з тим, залучення до загальноприйнятих рівнянь рівноваги (6.6) та (6.7) узагальненої діаграми стану елемента у вигляді (6.2) або (6.3) дозволяє безпроблемно враховувати вплив прогину на зусилля в гнучких позациентрово

завантажених елементах через зростання в них розрахункового ексцентриситету ( $M = N \cdot e$ ). Інакше кажучи, запропонована деформаційно-силова модель дозволяє з єдиних методологічних позицій визначати або «відтворювати» напружено-деформований стан залізобетонних елементів в їх характерних перерізах на стадіях:

- утворення тріщин ( $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}, \sigma_c = \sigma_{c2}$  та  $\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}, \sigma_{ct} = f_{ctk}$ );
- розкриття тріщин та розвитку прогинів ( $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}, \sigma_c = \sigma_{c2}$  та  $\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} (\varepsilon_{ct1} / \varepsilon_{ctv})^c$ );
- граничної рівноваги:

на її нижньому рівні при втраті розрахункової несучої здатності ( $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}, \sigma_c = f_{cd}$  та  $\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctd} (\varepsilon_{ct1} / \varepsilon_{ctv})^c$ );

на її верхньому рівні при втраті фактичної несучої здатності ( $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}, \sigma_c = f_{ck}$  та  $\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} (\varepsilon_{ct1} / \varepsilon_{ctv})^c$ ).

## 6.4. Утворення тріщин в залізобетонних елементах

### 6.4.1. Загальні положення

В теорії бетону та залізобетону питанням тріщиностійкості завжди відводилася особлива увага. Не є виключенням і нинішній етап її розвитку, що характеризується завершенням переходу від силової до «деформаційної» моделі в проектуванні залізобетонних елементів. Однак зазначений перехід так і не зміг вцілому забезпечити:

- більш точне відображення дійсного напружено-деформованого стану залізобетонних елементів на всіх стадіях їхнього деформування;
- повне або ж максимально можливе виключення емпіричних положень і коефіцієнтів з методик їх розрахунку;
- повну методологічну єдність всіх розрахунків бетонних та залізобетонних елементів конструкцій за граничними станами.

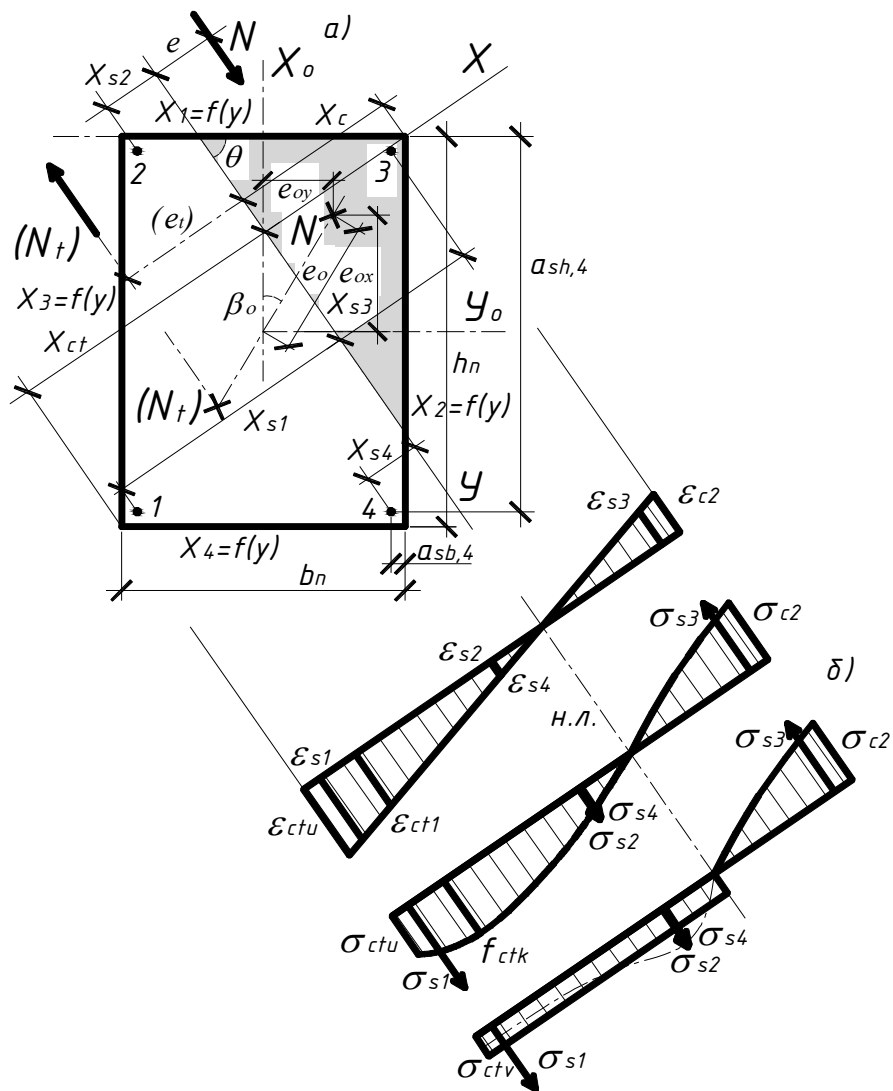


Рисунок 6.7 – Косозавантажені елементи з трикутною стиснутою та п'ятикутною розтягнутою зонами

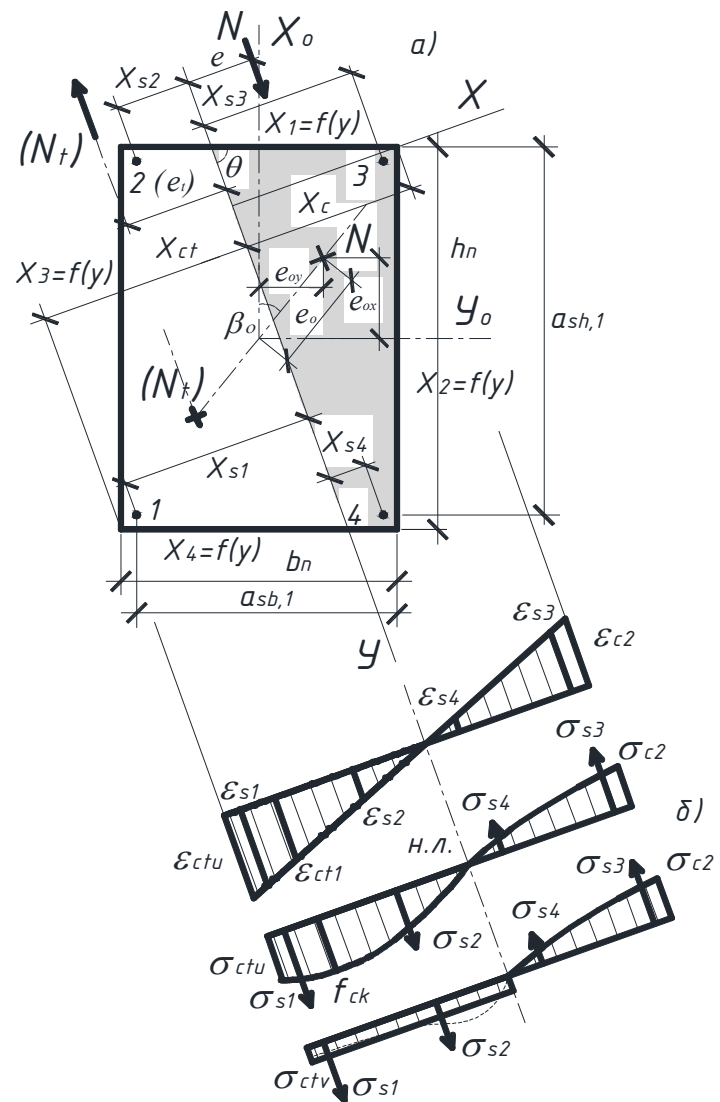


Рисунок 6.8 – Косозавантажені елементи з трапецієвидною стиснутою та розтягнутою зонами (основа -  $h_n$ )



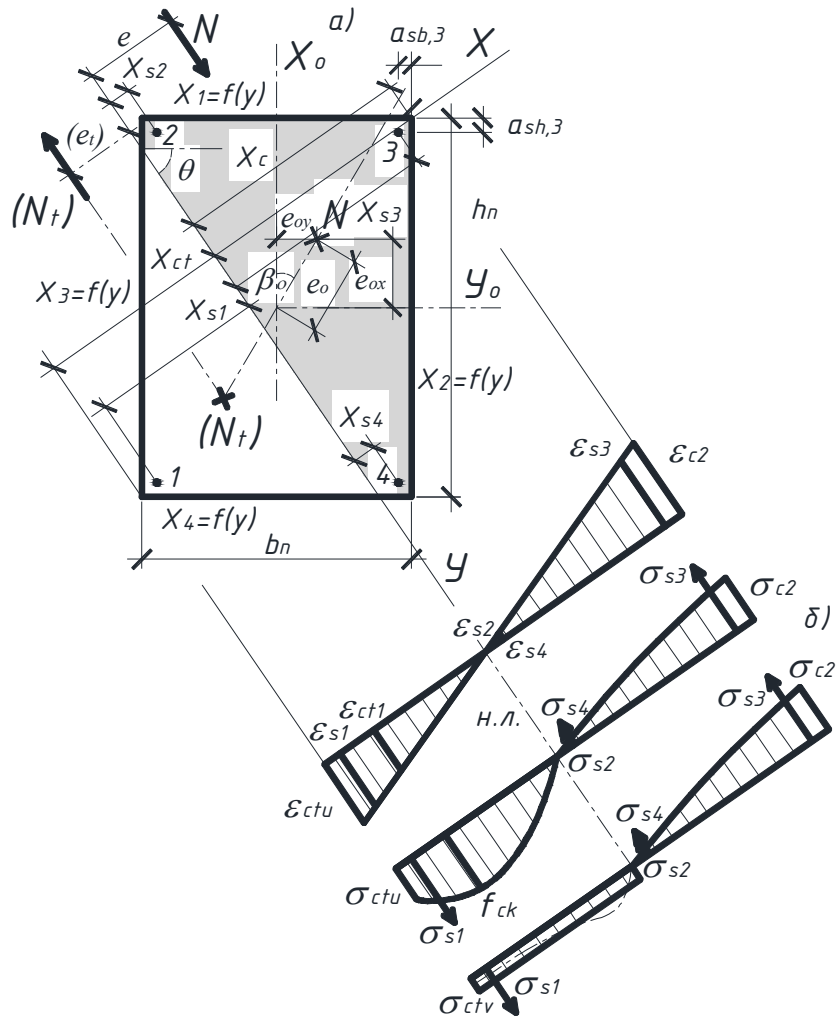


Рисунок 6.10 – Косозавантажені елементи з п'ятикутною стиснутою та трикутною розтягнутою зонами

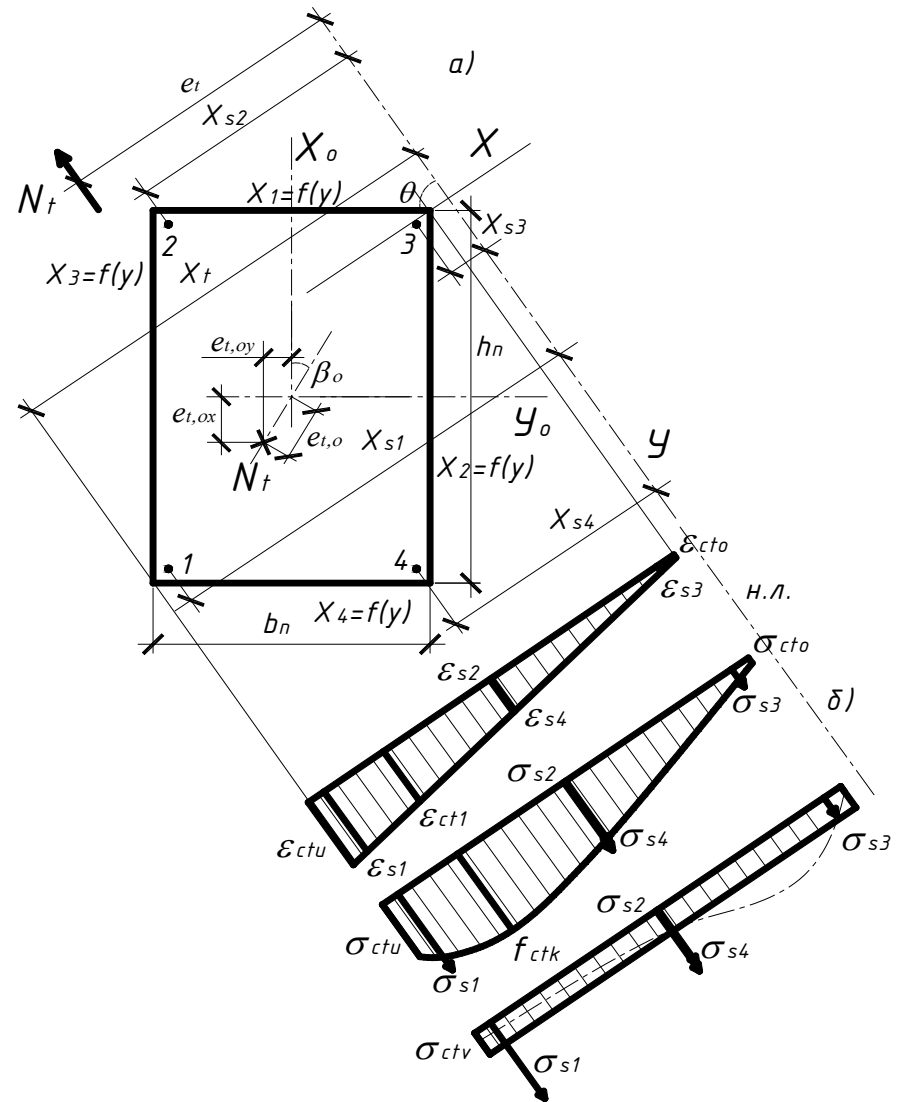


Рисунок 6.11 – Косозавантажені елементи з чотирикутною розтягнутою зоною

Все сказане дає певні підстави для переконання, що ефективність комплексного вирішення вищеперерахованих задач необхідно пов'язувати з точністю відображення в сучасних розрахункових моделях процесів деформування залізобетонних елементів загалом та появи, розвитку і розкриття тріщин зокрема.

Завдяки результатам численних досліджень [41; 52; 54; 64; 80; 112; 156; 159; 163; 171; 185; 257; 262; 264] встановлено, що основні параметри утворення, розвитку та розкриття нормальних тріщин:

- є залежними як від різниці зусиль в арматурі у перерізах з тріщинами і без них, так і від зусиль активного зчеплення арматури з бетоном на вказаних ділянках [159];
- пов'язані з діаметром арматурних стержнів та площею розтягнутого бетону, обмеженого зовнішнім контуром перерізу та величиною радіуса «активної взаємодії» [41];
- пропорційні товщині захисного шару бетону та відношенню площі розтягнутого бетону (в зоні зчеплення) до периметру арматури [64];
- певним чином залежать не тільки від величини граничних деформацій розтягнутого бетону, але й усереднених деформацій бетону та арматури в блоці між тріщинами [163];
- загалом пов'язані з усередненими значеннями граничних напружень зчеплення арматури з бетоном, які, в свою чергу, залежать від напружень у самій арматурі [156].

Однак, переважній більшості запропонованих на сьогодні аналітичних залежностей, пов'язаних з процесами тріщиностійкості залізобетонних елементів, властива переобтяженість різними емпіричними параметрами та коефіцієнтами. Тому поява низки робіт [95; 126; 266], автори яких стараються повністю позбутися зазначеного недоліку, є цілком логічною та виправданою. Та все ж і їхні рішення теж мають обмежене застосування, оскільки в своїй основі прив'язані до конкретного виду напружено-деформованого стану залізобетонного елемента. Крім того, із-за надто

вільного трактування ряду гіпотез та простих неточностей, допущених при визначенні усереднених значень граничних напружень зчеплення арматури з бетоном [126], вони не можуть претендувати на загальну універсальність.

Сьогоднішні унормовані методики розрахунку тріщиностійкості залізобетонних елементів [122; 123; 243; 382] хоч і увібрали в себе окремі із вищеперерахованих досягнень теорії залізобетону, загалом же так і не позбулись основних недоліків колишньої силової моделі. До того ж, в зазначених нормах ніяким чином не відображена якісна різниця між параметрами зчеплення арматури з бетоном до та після утворення тріщин. Ймовірно із-за цього в них відсутні будь-які рекомендації з визначення відстані між тріщинами як величини, що дискретно змінюється протягом всього процесу деформування залізобетонного елемента аж до його руйнування [52].

Поглиблений аналіз результатів згаданих досліджень вітчизняних та зарубіжних вчених показує, що в теорії тріщиностійкості залізобетонних елементів основними є питання:

- механізму утворення (появи) першої тріщини;
- послідовності утворення та розвитку наступних тріщин;
- розвитку та розкриття найбільш небезпечних (критичних) тріщин.

При оцінюванні напружено-деформованого стану згинального елемента за рівняннями його рівноваги

$$N_{cr} = N_{ct,cr} + N_s - N_c = 0; \quad (6.10)$$

$$M_{cr} = M_c + M_{ct,cr} + M_s, \quad (6.11)$$

нескладно продемонструвати, що при виникненні першої нормальної тріщини (рис. 6.12) внутрішні зусилля в розтягнутому бетоні  $N_{ct,cr}$  та  $M_{ct,cr}$  досягають своїх граничних значень за максимальної висоти нерозтрісканого бетону та граничних деформацій в крайових фібрах розтягнутої зони. А раз так, то виникнення тріщин в бетонному або залізобетонному елементі  $M_{ct,cr}$ , слід фіксувати за критерієм міцності розтягнутого бетону  $dN_{ct} / d\varepsilon_{ct} = 0$ .

При епюрі напружень в розтягнутому бетоні у вигляді неправильної дробово-раціональної функції, закладеної в ряді національних норм [122; 243; 382] для стиснутого бетону, зусилля в бетоні розтягнутої зони можна знайти за подібною залежністю [197; 228]

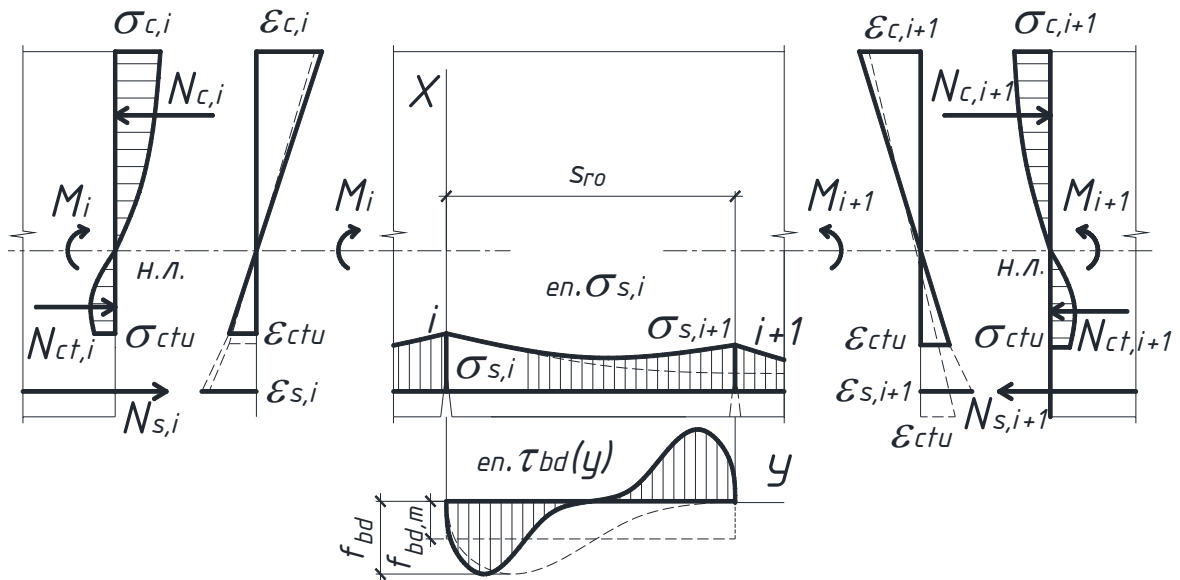


Рисунок 6.12 – Розрахункова схема напружено-деформованого стану згинального залізобетонного елемента в блоці між двома тріщинами

$$N_{ct,cr} = \frac{b_n}{1/r} \int_{-\varepsilon_{ctu}}^0 \frac{a_t \cdot \varepsilon_{ct} - b_t \cdot \varepsilon_{ct}^2}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}} d\varepsilon_{ct}; \quad (6.12)$$

з основними міцнісними та деформаційними параметрами розтягнутого бетону  $a_t$ ,  $b_t$  і  $c_t$  за формулою (3.45).

Оскільки точний аналітичний розв'язок трансцендентної функції, отриманої при диференціюванні інтегрального рівняння (6.13), практично є неможливим, то для згинальних залізобетонних елементів ( $\varepsilon_{cto} = 0$ ,  $\sigma_{cto} = 0$ ), за використання методів числового аналізу, його можна представити залежністю (3.55). Водночас слід відзначити, що граничні деформації розтягнутого бетону в залізобетонному елементі на момент появи першої тріщини можна визначати і за спрощеним виразом

$$\varepsilon_{ctu} = 2f_{ctk} / E_{co}. \quad (6.13)$$



## 6.4.2. Особливості розрахунку утворення тріщин

### 6.4.2.1. Центральні розтягнуті елементи

Тріщиноутворення в розтягнутих залізобетонних елементах при їх осьовому завантаженні слід розраховувати за формулою

$$N_{Ed} \leq N_{cr} = f_{ctk} \cdot A_c \cdot \left( \frac{k_t \cdot \eta_{stu} - \eta_{stu}^2}{1 + (k_t - 2) \cdot \eta_{stu}} + \rho_{l,c} \cdot n_s \cdot k \cdot \eta_{stu} \right) \quad (6.14)$$

з обмеженням граничних деформацій розтягнутого бетону  $\eta_{stu}$  за дод. Б (табл. Б.2).

### 6.4.2.2. Плоскозавантажені елементи

В момент появи тріщин арматурні стержні продовжують працювати пружно, оскільки напруження в них далекі від фізичної межі текучості. Їхні деформації можуть бути виражені через відносні деформації крайніх фібр розтягнутого та стиснутого бетону

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{c2} \cdot (1 - a_{si} / h_n) - \varepsilon_{ctu} \cdot a_{si} / h_n, \quad (6.15)$$

де  $a_{si}$  – відстань від арматурного стержня до крайніх найбільш стиснутих фібр бетону (рис. 6.5, рис. 6.6).

За таких обставин останні залишаються єдиною невідомою величиною в рівнянні рівноваги (6.6). Однак, із-за наявності у формулі з визначення  $N_c$  так званих радикалів (див. дод. Б, табл. Б.1), знайти точні значення  $\varepsilon_{c2}$  прямим способом (без послідовних наближень) неможливо. Водночас суттєво зменшити кількість ітерацій і навіть повністю їх уникнути можна, якщо відносні деформації крайніх фібр стиснутого бетону приймати попередньо за табл. 6.1 залежно від коефіцієнта армування  $\rho_l$  та параметра  $k$ , що характеризує пружно-пластичні властивості стиснутого бетону, або ж визначати з доволі високою достовірністю апроксимації ( $R^2 = 0,9998$ ) за

нижченаведеним виразом

$$\varepsilon_{c2} / \varepsilon_{c1} = 0,0444 + (0,01 \cdot k^3 - 0,058 \cdot k^2 + 0,204 \cdot k + 0,12) \cdot \rho_l. \quad (6.16)$$

Загалом же відносні деформації крайніх фібр стиснутого бетону та відповідна їм кривина уточнюються до виконання умови:

- в згинальних елементах –

$$N = N_{cr} = 0; \quad (6.17)$$

- в позacentрово завантажених елементах ( $M = N \cdot e$ ) –

$$\left| (N_{cr,i-1} - N_{cr,i}) / N_{cr,i-1} \right| \leq \delta = 0,01, \quad (6.18)$$

де  $N_{cr,i-1}$  і  $N_{cr,i}$  – сумарні поздовжні зусилля в залізобетонному елементі при утворенні тріщин на ітераційних етапах його розрахунку.

Після визначення у зазначений спосіб деформацій  $\varepsilon_{c2}$  момент  $M_{cr}$ , що характеризує початок тріщиноутворення в залізобетонних елементах, обчислюють за виразом (6.7) при відповідній кривині  $1/r_{cr} = (\varepsilon_{ctu} + \varepsilon_{c2}) / h_d$ , а для гнучких позacentрово завантажених – ще й з урахуванням прогину  $f$ .

#### 6.4.2.3. Косозавантажені елементи

Утворення тріщин в косозавантажених елементах варто розраховувати по аналогії з плоскозавантаженими при врахуванні наступних особливостей.

1. Деформації арматурних стержнів, виражені через відносні деформації крайніх фібр розтягнутого (–) та стиснутого бетону (+), необхідно обчислювати за формулою

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{c2} \left( 1 - \frac{a_{sh,i} \cdot \cos \theta + a_{sb,i} \cdot \sin \theta}{h_n \cdot \cos \theta + b_n \cdot \sin \theta} \right) - \varepsilon_{ctu} \frac{a_{sh,i} \cdot \cos \theta + a_{sb,i} \cdot \sin \theta}{h_n \cdot \cos \theta + b_n \cdot \sin \theta}, \quad (6.19)$$

де  $a_{sh,i}$ ,  $a_{sb,i}$  – відстані від арматурного стержня до крайніх найбільш стиснутих фібр бетону в напрямку сторін  $h_n$  та  $b_n$ , відповідно (рис. 6.7...6.11).

Попередньо відносні деформації крайніх фібр стиснутого бетону доцільно приймати так само за табл. 6.1 або за виразом (6.16).

Таблиця 6.1 – Рівень відносних деформації крайніх фібр стиснутого бетону  
 ( $\varepsilon_{c2}/\varepsilon_{c1}$ ) в момент утворення нормальних тріщин

Коефіцієнт $\rho_l$												
		0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05
Бетон: С, к												
8/10	5,06	0,044	0,049	0,054	0,059	0,064	0,068	0,073	0,077	0,082	0,086	0,091
12/15	4,37	0,043	0,047	0,051	0,054	0,058	0,062	0,065	0,069	0,072	0,076	0,079
16/20	3,80	0,043	0,046	0,049	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	0,070	0,073
20/25	3,41	0,043	0,046	0,049	0,052	0,054	0,057	0,060	0,062	0,065	0,067	0,070
25/30	3,11	0,043	0,046	0,049	0,051	0,054	0,056	0,058	0,061	0,063	0,066	0,068
30/35	2,86	0,044	0,046	0,048	0,051	0,053	0,055	0,058	0,060	0,062	0,065	0,067
32/40	2,66	0,044	0,046	0,048	0,051	0,053	0,055	0,057	0,059	0,062	0,064	0,066
35/45	2,51	0,044	0,046	0,048	0,051	0,053	0,055	0,057	0,059	0,061	0,063	0,065
40/50	2,34	0,044	0,046	0,048	0,051	0,053	0,055	0,057	0,059	0,061	0,063	0,065
45/55	2,21	0,044	0,046	0,048	0,050	0,052	0,054	0,056	0,058	0,060	0,062	0,064
50/60	2,10	0,045	0,047	0,049	0,050	0,052	0,054	0,056	0,058	0,060	0,062	0,064
53/65	2,01	0,045	0,047	0,049	0,050	0,052	0,054	0,056	0,058	0,060	0,062	0,063
56/70	1,93	0,045	0,047	0,049	0,050	0,052	0,054	0,056	0,058	0,060	0,061	0,063
60/75	1,84	0,045	0,047	0,049	0,050	0,052	0,054	0,056	0,058	0,059	0,061	0,063
65/80	1,78	0,045	0,047	0,048	0,050	0,052	0,054	0,056	0,057	0,059	0,061	0,063
70/85	1,72	0,045	0,047	0,048	0,050	0,052	0,054	0,056	0,057	0,059	0,061	0,062
75/90	1,66	0,045	0,047	0,048	0,050	0,052	0,054	0,055	0,057	0,059	0,060	0,062
80/95	1,62	0,045	0,047	0,048	0,050	0,052	0,054	0,055	0,057	0,059	0,060	0,062
85/100	1,57	0,045	0,047	0,048	0,050	0,052	0,053	0,055	0,057	0,058	0,060	0,062
90/105	1,53	0,045	0,046	0,048	0,050	0,052	0,053	0,055	0,057	0,058	0,060	0,061
95/110	1,49	0,045	0,046	0,048	0,050	0,051	0,053	0,055	0,056	0,058	0,060	0,061
100/115	1,46	0,045	0,046	0,048	0,050	0,051	0,053	0,055	0,056	0,058	0,059	0,061
105/120	1,43	0,045	0,046	0,048	0,050	0,051	0,053	0,054	0,056	0,058	0,059	0,061

2. Вид форми розтягнутої зони бетону визначають за її висотою  $x_{ct} = \varepsilon_{ctu} / (1/r_{cr})$  та кутом нахилу нейтральної лінії  $\theta$ . Загалом же форма розтягнутої зони бетону косодеформованих елементів в момент утворення тріщин може бути наступною:

- якщо  $x_{ct} \geq h_d = h_n \cdot \cos \theta + b_n \cdot \sin \theta$ , то форма розтягнутої зони – прямокутник (рис. 6.13, а);
- якщо  $x_{ct} / \cos \theta > h_n$  і  $x_{ct} / \sin \theta > b_n$ , то форма розтягнутої зони – п'ятикутник (рис. 6.13, б);
- якщо  $x_{ct} / \cos \theta \leq h_n$  і  $x_{ct} / \sin \theta > b_n$ , то форма розтягнутої зони – трапеція (рис. 6.13, в);
- якщо  $x_{ct} / \cos \theta > h_n$  і  $x_{ct} / \sin \theta \leq b_n$ , то форма розтягнутої зони – трапеція (рис. 6.13, з);
- якщо  $x_{ct} / \cos \theta \leq h_n$  і  $x_{ct} / \sin \theta \leq b_n$ , то форма розтягнутої зони – трикутник (рис. 6.13, д).

Для косозігнутих елементів зазвичай властивими є три середніх випадки форми розтягнутої зони їх перерізу – п'ятикутник (рис. 6.13, б), трапеція уздовж короткої сторони перерізу (рис. 6.13, в) та трапеція уздовж довгої його сторони (рис. 6.13, з).

3. Після визначення форми розтягнутої зони бетону слід уточнити величину граничних деформацій  $\varepsilon_{ctu}$  за формулами дод. Б (табл. Б.2) з урахуванням ступенів неоднорідності деформування розтягнутого бетону  $m_{th} = \varepsilon_{cto,h} / \varepsilon_{ctu}$  та  $m_{tb} = \varepsilon_{cto,b} / \varepsilon_{ctu}$  в напрямку осей симетрії  $X_o$  та  $Y_o$ .

4. В подальшому розрахунок косозавантажених елементів необхідно виконувати за загальноприйнятими рівняннями рівноваги залежно від положення нейтральної лінії. Після визначення відносних деформацій крайніх фібр стиснутого бетону  $\varepsilon_{c2}$  уточнюють кривину елемента  $1/r_{cr}$  та корегують для косостиснутого елемента величину розрахункового ексцентриситету (в гнучких – ще й з урахуванням прогину  $f$ ) за виразом

$$e = \frac{\varepsilon_{c2}}{1/r_{cr}} - (h_n/2 - e_o \cdot \cos \beta_o) \cos \theta - (b_n/2 - e_o \cdot \sin \beta_o) \sin \theta. \quad (6.20)$$

5. Розрахунок повторюється до співпадання лівої та правої частин першого рівняння рівноваги (6.6) з точністю  $\delta \leq 1\%$ .

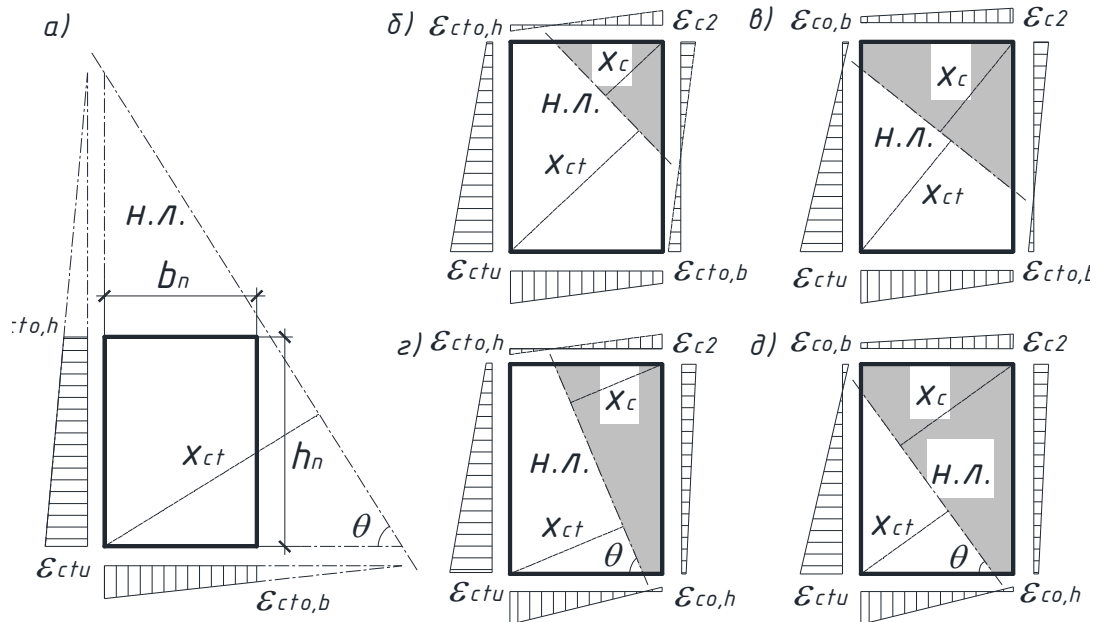


Рисунок 6.13 – Можливі форми розтягнутої зони бетону в косодеформованих залізобетонних елементах: а)– прямокутник; б)– п’ятикутник; в) та г)– трапеції; д)– трикутник

## 6.5. Розвиток та розкриття тріщин в елементах конструкцій

### 6.5.1. Загальні положення

Як уже зазначалося вище, розрахунок розкриття тріщин включає в себе розв’язок двох окремих задач, а саме: знаходження кроку утворення тріщин та визначення ширини їх розкриття. Обоє з названих задач потребують оцінки напружено-деформованого стану залізобетонних елементів не тільки на певній стадії, але й і в характерних перерізах, а саме: в перерізі з першою тріщиною, в перерізі, де може з’явитися наступна тріщина, та в деякому умовному осередненому перерізі блоку між тріщинами. Тому, виходячи з діаграми стану залізобетонного елемента (6.2), його кривина в загальному

випадку повинна визначатися за виразом (6.3). Попередні значення відносних деформацій крайових фібр стиснутого бетону варто приймати пропорційно до стадії граничної рівноваги за виразом

$$\varepsilon_{c2} = \varepsilon_{cu} \cdot M_u / M \cdot (1/r) / (1/r_u), \quad (6.21)$$

а відносні деформації найбільш розтягнутого арматурного стержня слід визначати за формулою

$$\varepsilon_{s1} = d \cdot (1/r) - \varepsilon_{c2}. \quad (6.22)$$

Відносні деформації бетону і арматури  $\varepsilon_{c2}$  та  $\varepsilon_{s1}$  разом з кривиною елемента  $1/r$  уточнюються за методикою п. 6.4 при використанні п.6.3 до виконання умов рівноваги (6.6) та (6.7) з точністю  $\delta \leq 1\%$ . При цьому вплив розтягнутого бетону на середні деформації арматури та напружено-деформований стан залізобетонних елементів конструкцій загалом, після появи в них тріщин, рекомендується оцінювати наближено (див. дод. Б, табл. Б.2) за пропозиціями п. 6.5.2.

### 6.5.2. Врахування роботи розтягнутого бетону

Детальний аналіз напружено-деформованого стану згинального залізобетонного елемента уздовж блоку між тріщинами показує, що в «осередненому» розрахунковому перерізі з утворенням нових та розвитком («підростанням») старих тріщин відбувається безперервний перерозподіл зусиль з розтягнутого бетону на розтягнуту арматуру (рис.6.14). Ступінь перерозподілу розтягуючи зусиль з бетону на арматуру ( $1/m$ ) пов'язаний з рівнем тріщиноутворення та може бути представлений залежністю

$$1/m = M_{cr} / M, \quad (6.23)$$

Тому, враховуючи функціональний зв'язок між коефіцієнтами  $\psi_s$  і  $\psi_{ct}$  (див. п. 1.10) за виразом (1.2), подібний перерозподіл в розрахунковій моделі залізобетонного елемента було б доцільніше відобразити пропорційно до повноти епюри напружень розтягнутого бетону двома наступними

коефіцієнтами [197; 217; 218]

$$\psi_{ct1} = \psi_{ct} / m = M_{cr} / (m \cdot M), \quad (6.24)$$

$$\psi_{s1} = \frac{\psi_s}{1 - \psi_{ct1} \cdot M_{ct,cr} / M} = \frac{1 - M_{ct,cr} \cdot M_{cr} / M^2}{1 - M_{ct,cr} \cdot M_{cr} / (m \cdot M^2)}, \quad (6.25)$$

де  $M_{ct,cr}$  – момент, що сприймається бетонним перерізом перед утворенням тріщин.

Графіками, приведеними на рис. 6.15 та 6.16, відображена різниця у визначенні вищезгаданих коефіцієнтів за пропозиціями різних авторів. З них загалом видно, що параметр  $\psi_{ct1}$  характеризує більш інтенсивне виключення розтягнутого бетону з роботи ніж коефіцієнт  $\psi_{ct}$ , а параметр  $\psi_{s1}$  дещо зменшує напруження в арматурі порівняно з відомим коефіцієнтом  $\psi_s$ , підтверджуючи тим самим добре відомі результати досліджень Немировського Я. М. [164].

Отже одночасне застосування запропонованих коефіцієнтів дозволяє:

- моделювати процес перерозподілу зусиль в блоці між тріщинами з розтягнутого бетону на арматуру в процесі їх утворення і розвитку та більш точно відображати реальний напружено-деформований стан залізобетонного елемента з тріщинами;
- розглядувати розтягнутий бетон в «осередненому» або розрахунковому перерізі блоку між тріщинами як суцільне тіло не тільки до, але й після утворення тріщин;
- визначати ширину розкриття тріщин в небезпечному перерізі.

Разом з тим аналіз деформування розтягнутого бетону (рис. 6.14) показує, що після появи тріщин його вплив в спрощених розрахунках залізобетонних елементів варто оцінювати за допомогою лише коефіцієнта  $\psi_{ct}$ . Визначати його можна відповідно до пропозицій [27; 35; 181] за формулою (6.24), нехтуючи згаданим перерозподілом зусиль ( $1/m = 1$ ), або пропорційно до залишкової міцності розтягнутого бетону  $\sigma_{ct} = \sigma_{ctv}$  чи умовного видовження  $\varepsilon_t = \varepsilon_{ctv}$  розтягнутої грані [314; 315; 458; 502]

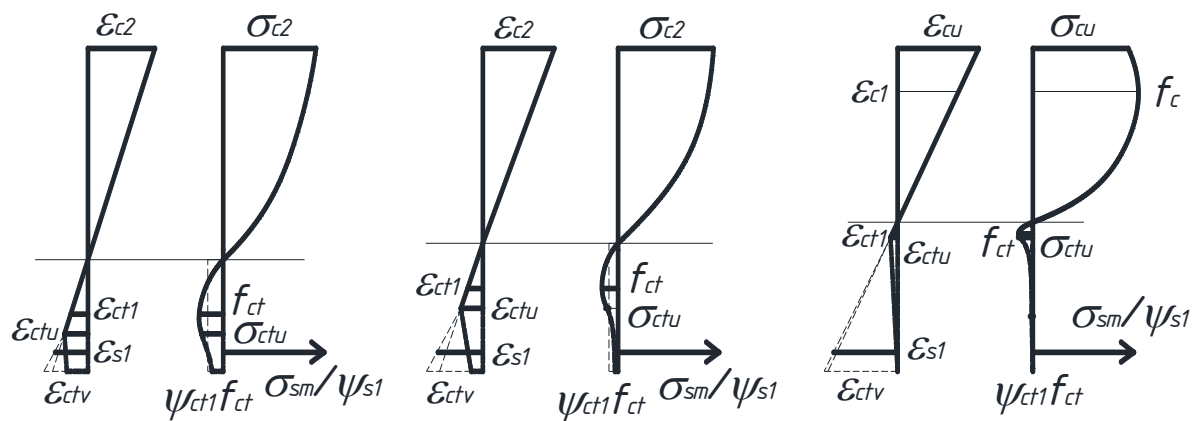


Рисунок 6.14 – Зміна напружено-деформованого стану блоку між тріщинами

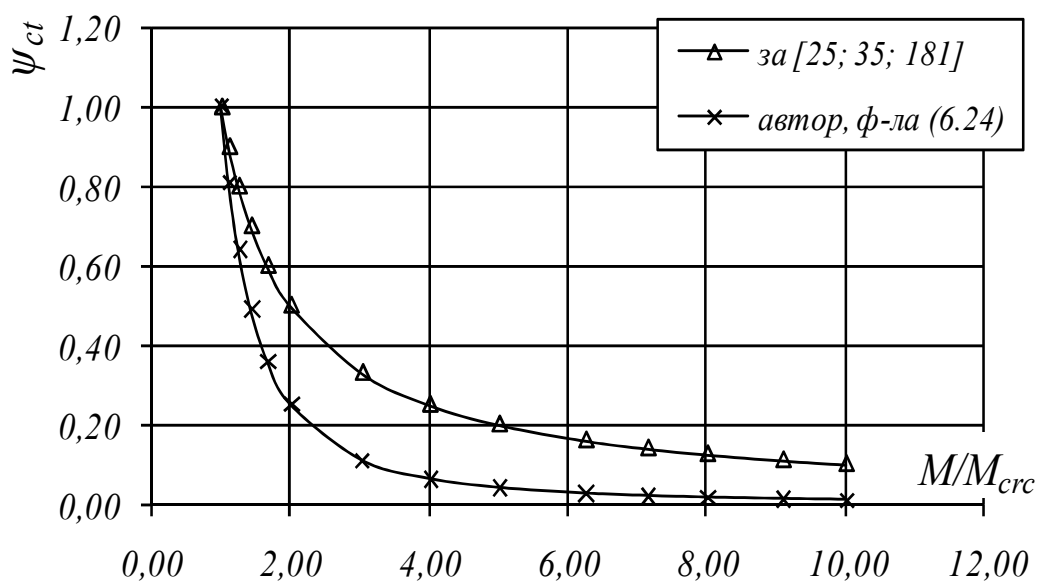


Рисунок 6.15 – Характер зміни коефіцієнта  $\psi_{ct}$

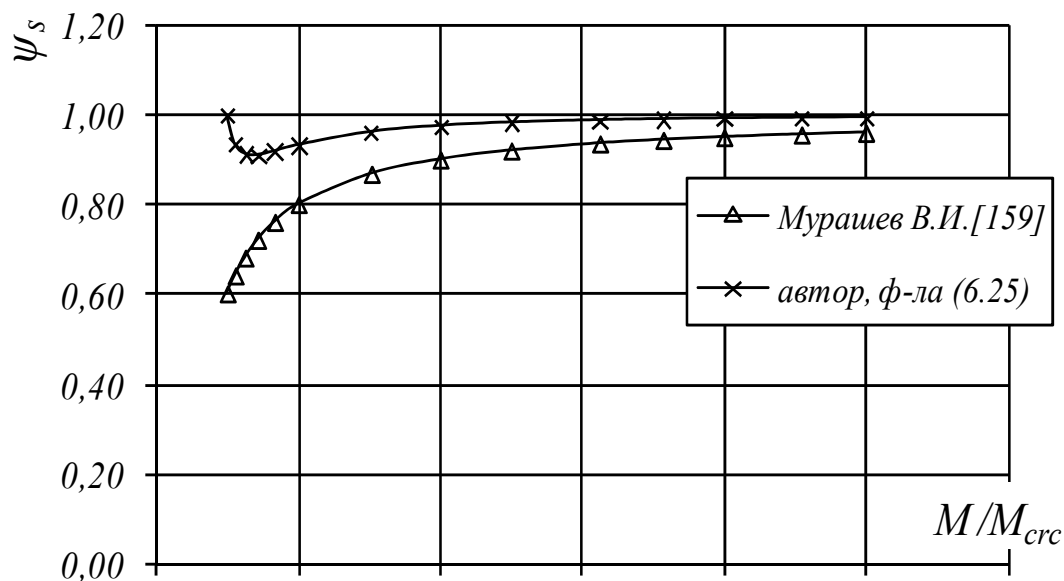


Рисунок 6.16 – Характер зміни коефіцієнта  $\psi_s$



залізобетонного елемента (рис. 6.17)

$$\psi_{ct} = \sigma_{ct} / f_{ctk} = (\varepsilon_{ct1} / \varepsilon_t)^c, \quad (6.26)$$

де  $c$  – параметр, що залежить від насичення бетону розтягнутої зони арматурою  $\rho_{lt}$  (%), пропонується приймати рівним  $c = 1 / \rho_{lt}$ .

### 6.5.3. Розрахунок розкриття тріщин

Закономірності виникнення нових та розвитку і розкриття «старих» тріщин доцільно пов'язувати з основними параметрами бетону і арматури в розтягнутій зоні залізобетонного елемента. Відповідно до результатів досліджень Берга О. Я. [41], серед подібних параметрів перш за все варто назвати діаметр арматурних стержнів та площу розтягнутого бетону. Тоді зусилля активного зчеплення на ділянці між тріщинами  $N_{bd,cr}$ , будучи залежними від зміни напружень в арматурному стержні уздовж вказаної ділянки  $\Delta\sigma_{s,i}$ , загалом повинні врівноважуватися в зазначеній зоні зусиллями розтягнутого бетону  $N_{ct,cr}$  (рис. 6.12), тобто

$$N_{bd,cr} + \Delta N_{s,i} = N_{ct,cr}. \quad (6.27)$$

Величину зусилля активного зчеплення арматури з розтягнутим бетоном, за відомої функції напруг цього зчеплення  $\tau_{bd}(z)$ , можна визначати за формулою

$$N_{bd,cr} = \int_{s_{ro}} u \cdot \tau_{bd}(z) \cdot dz \cong u \cdot f_{bd} \cdot s_r / 2, \quad (6.28)$$

де  $u$  – периметр перерізу арматурного стержня діаметром  $\emptyset$ , що має площу  $A_s$ , рівний  $u = 4 \cdot A_s / \emptyset$ ;

$s_r$  – ділянка активного зчеплення арматурного стержня з бетоном (базова відстань між тріщинами);

$f_{bd}$  – граничне значення середніх напружень зчеплення арматури з бетоном, що знаходиться за виразом

$$f_{bd} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot f_{ctk}, \quad (6.29)$$

$\eta_2$  – коефіцієнт, що враховує вплив діаметру арматури [122].

Коефіцієнт  $\eta_1$ , що враховує профіль арматури, пропонується приймати відповідно до критерію Рема [483] залежним від відносної площі зминання її поперечних ребер  $f_R$  (рис.6.18)

$$\eta_1 = 1 + 35 \cdot f_R - (12 \cdot f_R)^2, \quad (6.30)$$

отриманою завдяки обробці результатів експериментальних досліджень [266, 274]. Для гладкої арматури ( $f_R = 0$ ) зазначений коефіцієнт рівний  $1,0$ , а для арматури періодичного профілю, до унормування критерію  $f_R$ , його поки що необхідно обмежувати значенням  $\eta_1 = 2,0$ .

Загалом максимальне зусилля, що сприймається розтягнутим бетоном перед утворенням чергової тріщини  $N_{ct,cr}$ , необхідно знаходити за формулою (6.13) або за формулами (див. дод. Б (табл. Б.2)). Якщо ж площу перерізу розтягнутого бетону обмежувати відповідно до пропозицій Берга О. Я. [41] за радіусом ефективної взаємодії (активного зчеплення), то зазначене зусилля можна обчислювати за спрощеною формулою

$$N_{ct,cr} = \int \sigma_{ct}(x) \cdot b_n \cdot dx \cong f_{ctk} \cdot A_{ct,eff}, \quad (6.31)$$

де  $A_{ct,eff}$  – ефективна площа перерізу розтягнутого бетону в радіусі активної взаємодії, рівна  $A_{ct,eff} = b_n \cdot h_{ct,eff}$  (рис. 6.19).

За умов осьового розтягу, при однорідній епюрі напружень  $\sigma_{ct} = f_{ctk}$ , висота ефективної площі розтягнутого бетону є рівною висоті перерізу елемента  $h_{ct,eff} = h_n$ . Якщо ж для залізобетонного елемента, що зазнає неоднорідного деформування, розрахункові напруження в розтягнутому бетоні теж прийняти постійними та рівними  $\sigma_{ct} = f_{ctk}$ , то висоту його ефективної площі необхідно обчислювати за формулою

$$h_{ct,eff} = (h_n - x) / 3, \quad (6.32)$$

та обмежувати величинами  $h_{ct,eff} \leq h_n / 2$  і  $h_{ct,eff} \leq 2,5(h_n - d)$  згідно чинних норм [122; 243; 382].

Зміну зусиль в розтягнутій арматурі на ділянці між двома суміжними

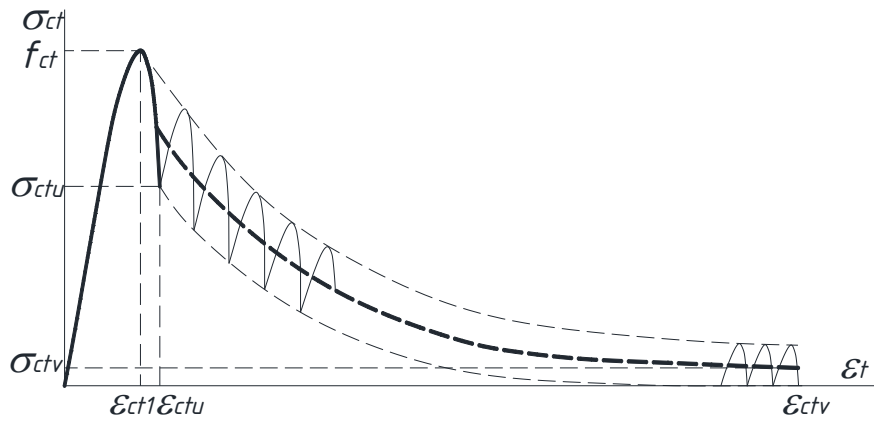


Рисунок 6.17 – До визначення коефіцієнта  $\psi_{ct}$

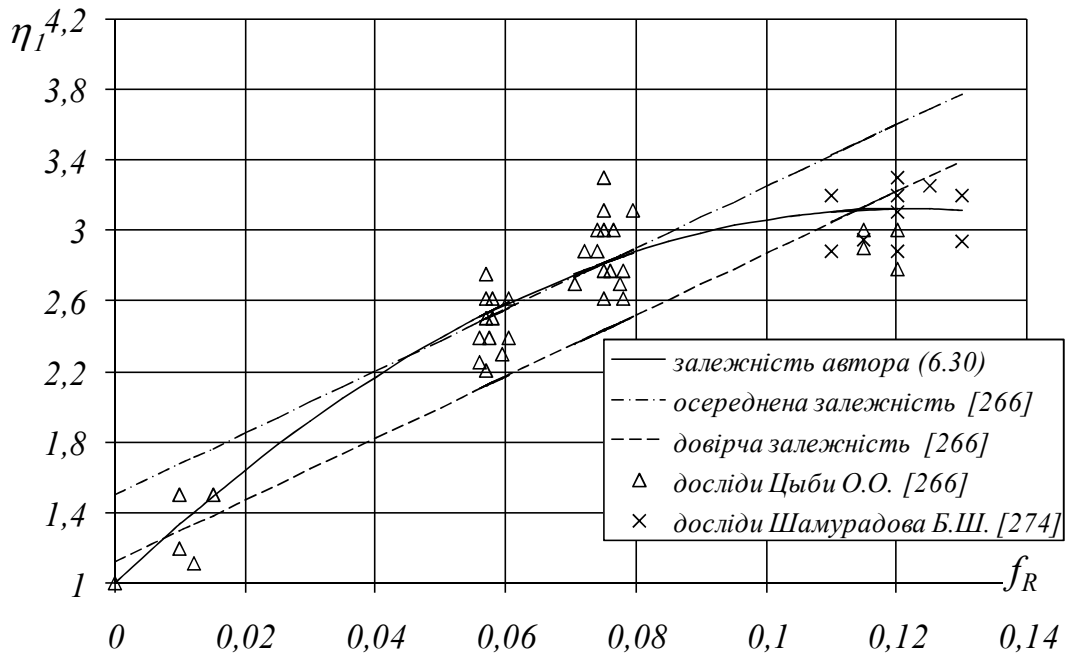


Рисунок 6.18 – Залежність коефіцієнта  $\eta_1$  від відносної площі змінання поперечних ребер арматури  $f_R$

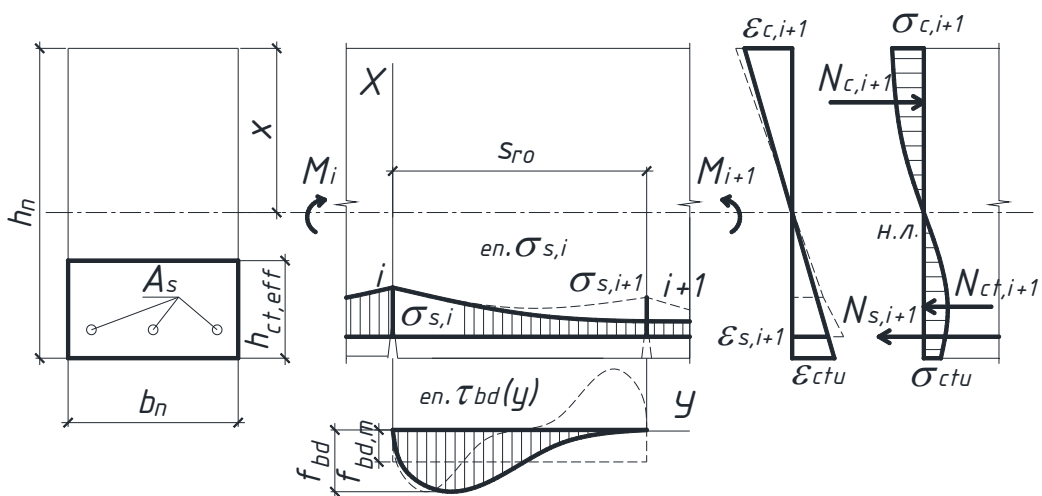


Рисунок 6.19 – До визначення максимального зусилля в розтягнутому бетоні в радіусі ефективної взаємодії перед утворенням тріщини

тріщинами обчислюють за виразом

$$\Delta N_{s,i} = \Delta \sigma_{s,i} \cdot A_s = (\sigma_{s,i} - \sigma_{s,i+1}) \cdot A_s = (\varepsilon_{s,i} - \varepsilon_{s,i+1}) \cdot E_s \cdot A_s, \quad (6.33)$$

де  $\sigma_{s,i}$ ,  $\varepsilon_{s,i}$  – напруження та відносні деформації в арматурному стержні у перерізі з раніше утвореною тріщиною;

$\sigma_{s,i+1}$ ,  $\varepsilon_{s,i+1}$  – напруження та відносні деформації в арматурному стержні у перерізі з новою ймовірною тріщиною в момент її появи.

Таким чином, з урахуванням всіх вищенаведених положень, базову відстань між тріщинами на рівні центру ваги розтягнутої арматури можна визначати за формулою

$$s_r = s_{ro} - \Delta s_r = \frac{\emptyset}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \left( \frac{N_{ct,cr}}{A_s \cdot f_{ctk}} - \frac{\Delta \sigma_{s,i}}{f_{ctk}} \right), \quad (6.34)$$

де  $\Delta s_r$  – зменшення базової відстані між тріщинами за рахунок зростання напружень в арматурі на ділянці її активного зчеплення з бетоном;

При заміні дійсної криволінійної епюри напружень в розтягнутому бетоні на еквівалентну прямокутну з ординатою  $f_{ctk}$  максимальне зусилля, що сприймається розтягнутим бетоном перед утворенням тріщини  $N_{ct,cr}$ , можна обчислювати за іншою спрощеною формулою

$$N_{ct,cr} = \int_{-\varepsilon_{cti}}^0 \sigma_{ct}(\varepsilon) d\varepsilon_{ct} \cong \alpha_{eq} \cdot A_{ct} \cdot f_{ctk}, \quad (6.35)$$

де  $A_{ct}$  – дійсна площа перерізу розтягнутого бетону перед утворенням тріщини, що рівна  $A_{ct} = x_{ct} \cdot b_n$ ;

$\alpha_{eq}$  – коефіцієнт приведення дійсної площі перерізу розтягнутого бетону до еквівалентної, рекомендується приймати рівним 1,0 за осьового розтягу та 0,8 за неоднорідного деформування.

З урахуванням виразу (6.35) формула (6.34) прийме остаточний вигляд

$$s_r = \frac{\emptyset}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \left( \frac{\alpha_{eq}}{\rho_{l,t}} - \frac{\Delta \sigma_{s,i}}{f_{ctk}} \right), \quad (6.36)$$

а за осьового розтягу, коли  $\Delta \sigma_{s,i} = 0$ , вона спрощується до виду

$$s_r = s_{ro} = \emptyset / (2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \rho_{l,t}), \quad (6.37)$$

де  $\rho_{l,t}$  – коефіцієнт армування розтягнутого бетону, рівний  $\rho_{l,t} = A_s / A_{ct}$ .

Залежність (6.37) з певними відмінностями та особливостями, але без порушення її фізичного змісту загалом, нині відображена в багатьох національних нормах з проектування бетонних та залізобетонних елементів [122; 243; 248; 382]. В зазначених документах, завдяки введенню цілого ряду емпіричних коефіцієнтів, вона поширена ще й на згинальні елементи. Однак, вибраний шлях універсалізації виразу (6.37) аж ніяк не можна визнати вдалим, оскільки він блокує ідею пошуку загальних рішень.

Крім того, більшості із вищевказаних норм властивий ще один суттєвий недолік: зв'язування відстані між нормальними тріщинами з товщиною захисного шару бетону [122; 243; 382]. В них подібний крок обґрунтовується проковзуванням арматури відносно бетону на ділянці її активного зчеплення та формуванням зони релаксації напружень в розтягнутому бетоні. За своєю суттю ділянка «проковзування» арматури якраз і формує ширину розкриття нормальних тріщин на рівні центру ваги арматурного стержня, а зона релаксації напружень збільшує її на поверхні бетону. За таких обставин кожний із зазначених параметрів є співрозмірним з шириною розкриття тріщин і аж ніяк не з захисним шаром бетону. Отже останній аж ніяк не може безпосередньо впливати на відстань між нормальними тріщинами на рівні центру ваги арматури.

Що ж до функцій (6.34) і (6.36), то вони принципово відрізняються від формули (6.37). Їх з однаковим успіхом можна застосовувати без обмежень як до центрально розтягнутих, так і до згинальних чи відцентрово завантажених залізобетонних елементів, а отже вони можуть претендувати на певну універсальність. До сказаного слід додати, що залежності (6.34) і (6.36) дозволяють описувати послідовність утворення нормальних тріщин протягом всього процесу деформування будь-яких залізобетонних елементів, оскільки прямо пов'язані з визначальними параметрами їх напружено-деформованого стану (зокрема, значеннями кривини  $1/r_i$ , величинами згинаючих моментів  $M_i$ , напруженнями в арматурі  $\sigma_{s,i}$  та її деформаціями  $\varepsilon_{s,i}$  тощо [197; 222;

224]) через систему нижченаведених рівнянь МДТТ (6.38)

$$\begin{aligned}
 & - s_r = \frac{\emptyset}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \left( \frac{N_{ct,cr}}{A_s \cdot f_{ctk}} - \frac{\Delta \sigma_{s,i}}{f_{ct,k}} \right) \text{ або } s_r = \frac{\emptyset}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \left( \frac{\alpha_{eq}}{\rho_{l,t}} - \frac{\Delta \sigma_{s,i}}{f_{ctk}} \right) \\
 & - \text{статичних співвідношень} \\
 & \quad M_i = f(\varepsilon_{c,i}, \varepsilon_{ct,i}, \varepsilon_{s,i}), \quad N = f(\varepsilon_{c,i}, \varepsilon_{ct,i}, \varepsilon_{s,i}); \\
 & - \text{геометричних співвідношень з гіпотезою плоских перерізів} \\
 & \quad 1/r_i = f(\varepsilon_{c,i}, \varepsilon_{s,i}) \text{ або } \varepsilon_{s,i} = f(1/r_i); \\
 & - \text{фізичних співвідношень: стану елементів } 1/r_i = f(M_i); \\
 & \text{стану матеріалів } \sigma_{c,i} = f(\varepsilon_{c,i}), \quad \sigma_{ct,i} = f(\varepsilon_{ct,i}), \quad \sigma_{s,i} = f(\varepsilon_{s,i}).
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

Розрахунок розкриття нормальних тріщин доцільно виконувати згідно гіпотези Томаса [530] з позицій послідовного накопичення взаємних зміщень арматури і бетону  $\varepsilon_\tau(y) = \varepsilon_s(y) - \varepsilon_{ct}(y)$  на ділянках активного зчеплення, розміщених з обох сторін від тріщини [52; 159]. Тому ширина розкриття тріщин в стадії стабілізованого тріщиноутворення, тобто за встановленої відстані між ними, може бути визначена за формулою

$$w_k = 2 \int_0^{0,5s_{ro}} \varepsilon_\tau(y) dy \cong s_r \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{ctm}), \tag{6.39}$$

де  $\varepsilon_{sm}$  – середні значення відносних деформацій розтягнутої арматури на ділянці між тріщинами;

$\varepsilon_{ctm}$  – середні значення відносних деформацій розтягнутого бетону на тій же ділянці.

Загалом середні деформації арматури слід визначати безпосередньо з діаграми стану елемента в осередненому перерізі блоку між тріщинами  $\varepsilon_{sm} = f(1/r)$  або знаходити за спрощеним виразом

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} - \frac{\alpha_{eq} \cdot f_{ctk}}{2 \cdot \rho_{l,t} \cdot E_s}. \tag{6.40}$$

Що ж до середніх деформацій розтягнутого бетону на ділянці між тріщинами, то їх рекомендується обчислювати за формулою

$$\varepsilon_{ctm} = 0,5 \cdot \varepsilon_{cti} \cdot (d - x)/(h_n - x) \tag{6.41}$$

або, з урахуванням залежності (6.13) при  $(d - x)/(h_n - x) \cong 0,8$ , знаходити за спрощеним виразом

$$\varepsilon_{ctm} = 0,8 \cdot f_{ctk} / E_{co}. \quad (6.42)$$

Таким чином, приймаючи до уваги залежності (6.34)...(6.41), ширину розкриття тріщин в залізобетонному елементі доцільно визначати за формулою (6.43), яка практично не містить емпіричних параметрів і коефіцієнтів

$$w_k = \frac{\varnothing}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot f_{ctk}} \left( \frac{N_{ct,cr}}{A_s} - \Delta \sigma_{s,i} \right) \cdot \left( \varepsilon_{sm} - \frac{\varepsilon_{ctu}}{2} \cdot \frac{d - x}{h_n - x} \right) \quad (6.43)$$

або, зважаючи на (6.40) та (6.42), обчислювати наближено за виразом (6.44), що містить мінімальну кількість таких параметрів

$$w_k = \frac{\varnothing}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot E_s} \left( \frac{\alpha_{eq} \cdot f_{ctk}}{\rho_{l,t}} - \Delta \sigma_{s,i} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_s}{f_{ctk}} - \frac{\alpha_{qv}}{2 \cdot \rho_{l,t}} - 0,8 \cdot n_{so} \right). \quad (6.44)$$

За осьового розтягу, коли  $\Delta \sigma_{s,i} = 0$ , обидві із вищенаведених функцій спрощуються до залежності

$$w_k = \frac{\varnothing}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \rho_{l,t} \cdot E_s} \cdot \left( \sigma_s - \frac{f_{ctk}}{2 \cdot \rho_{l,t}} - n_{so} \cdot \frac{f_{ctk}}{2} \right), \quad (6.45)$$

яка у дещо зміненій формі, але без порушення її фізичного змісту, нині теж відображена в окремих національних нормах з проектування бетонних і залізобетонних елементів [122; 243; 248; 382]. Тут, через застосування низки емпіричних коефіцієнтів, вона так само поширена і на згинальні та позацентрово завантажені елементи, але без забезпечення її універсальності.

Що ж до функцій (6.43) та (6.44), то вони в своїй основі принципово відрізняються від виразу (6.45) і в однаковій мірі є прийнятними як для центрально розтягнутих, так і для залізобетонних елементів, що зазнають неоднорідного деформування. До того ж, зазначені залежності дозволяють контролювати величину розкриття нормальних тріщин в будь-яких залізобетонних елементах протягом всього процесу їх деформування. Подібно до виразів (6.34) і (6.36) вони теж безпосередньо пов'язані з визначальними параметрами напружено-деформованого стану вказаних

елементів через приведену нижче систему рівнянь МДТТ (6.46)

$$\begin{aligned}
 & - w_k = \frac{\emptyset}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot f_{ct,k}} \left( \frac{N_{ct,cr}}{A_s} - \Delta \sigma_{s,i} \right) \cdot \left( \varepsilon_{sm} - \frac{\varepsilon_{ctu}}{2} \cdot \frac{d-x}{h_n-x} \right) \text{ або} \\
 & w_k = \frac{\emptyset}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot E_s} \left( \frac{\alpha_{eq} \cdot f_{ct,k}}{\rho_{l,t}} - \Delta \sigma_{s,i} \right) \cdot \left( \frac{\sigma_s}{f_{ct,k}} - \frac{\alpha_{eq}}{2 \cdot \rho_{l,t}} - 0,8 \cdot n_{so} \right); \\
 & - \text{статичних співвідношень} \\
 & \quad M_i = f(\varepsilon_{c,i}, \varepsilon_{ct,i}, \varepsilon_{s,i}), \quad N = f(\varepsilon_{c,i}, \varepsilon_{ct,i}, \varepsilon_{s,i}); \\
 & - \text{геометричних співвідношень з гіпотезою плоских перерізів} \\
 & \quad 1/r_i = f(\varepsilon_{c,i}, \varepsilon_{s,i}) \text{ або } \varepsilon_{s,i} = f(1/r_i); \\
 & - \text{фізичних співвідношень: стану елементів } 1/r_i = f(M_i); \\
 & \text{стану матеріалів } \sigma_{c,i} = f(\varepsilon_{c,i}), \quad \sigma_{ct,i} = f(\varepsilon_{ct,i}), \quad \sigma_{s,i} = f(\varepsilon_{s,i}).
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

Якщо ж говорити про ширину розкриття нормальних тріщин на поверхні залізобетонних елементів, то її приріст за рахунок релаксації напружень в бетоні можна обчислювати наближено на будь-якій стадії деформування за наступною формулою

$$\Delta w_{k,i} \cong (2 \cdot c + \emptyset) / r_i, \tag{6.47}$$

де  $c$  – захисний шар бетону арматурного стержня;

$1/r_i$  – кривина залізобетонного елемента на  $i$ -ій стадії деформування.

Таким чином, виходячи зі сказаного, слід відзначити, що розроблена модель утворення та розкриття нормальних тріщин в залізобетонних елементах конструкцій має ряд переваг перед іншими, оскільки:

- виступає складовою частиною узагальненої моделі їх деформування;
- є універсальною, бо у своїй основі максимально позбавлена впливу емпіричних параметрів і коефіцієнтів та в однаковій мірі прийнятна як для центрально розтягнутих, так і для згинальних або позацентрово чи косозавантажених залізобетонних елементів;
- враховує якісну та кількісну різницю між параметрами зчеплення арматури з бетоном до та після утворення тріщин;
- розглядає відстань між суміжними тріщинами як величину, що дискретно



змінюється протягом всього процесу деформування;

- відображає залежність усереднених розрахункових значень граничних напружень зчеплення арматури з розтягнутим бетоном від виду самої арматури;
- враховує вплив профілю арматури (відносної площі зминання її поперечних ребер) на процеси утворення, розвитку та розкриття нормальних тріщин;
- прямо пов'язує тріщиностійкість залізобетонних елементів з основними параметрами їх напружено-деформованого стану (значеннями кривини  $1/r_i$ , величинами згинаючих моментів  $M_i$ , напруженнями в арматурі  $\sigma_{s,i}$  та її деформаціями  $\varepsilon_{s,i}$  тощо);
- дозволяє контролювати процес утворення та розкриття нормальних тріщин в залізобетонних елементах на будь-якій стадії їх деформування;
- представляє процес розкриття нормальних тріщин як послідовне накопичення взаємних зміщень (проковзування) арматури відносно бетону на ділянках активного зчеплення;
- дозволяє, у разі потреби, визначати збільшену ширину розкриття нормальних тріщин на поверхні залізобетонних елементів за рахунок релаксації напружень в бетоні;
- сприяє повній методологічній єдності розрахунків залізобетонних елементів за граничними станами 1-ої та 2-ої групи.

## **6.6. Розрахунок прогинів залізобетонних елементів**

### **6.6.1. Методи розрахунку прогинів**

Пріоритетним завданням теорії бетону і залізобетону завжди було створення методик розрахунку, котрі якнайточніше відображали б дійсний напружено-деформованого стан залізобетонних елементів на всіх стадіях їхнього деформування. Оцінити ефективність таких методик можна досить

просто: через безпосереднє визначення в експериментальних дослідженнях параметрів, що характеризують зазначений стан. Серед параметрів, доступних для прямого контролю, перш за все можна назвати зусилля (згинаючі моменти  $M_i$ , поздовжні  $N_i$  і поперечні  $Q_i$  сили, тощо) та переміщення (прогини  $f_i$ , відносні деформації  $\varepsilon_{ci}$ ,  $\varepsilon_{si}$  і кути зсуву  $\gamma_z$ ). Цікаво, що всі вищезгадані величини пов'язані між собою за допомогою іншого розрахункового параметру – кривини  $1/r_i$ . За використання гіпотези плоских перерізів її теж можна контролювати безпосередньо з дослідів.

Водночас, за математичним визначенням, рівняння кривини плоскої кривої має наступний вигляд

$$\frac{1}{r_z} = \pm \frac{d^2 f / dz^2}{\sqrt{(1 + (df/dz)^2)^3}}. \quad (6.48)$$

Якщо прирівняти праві частини виразів (6.1) та (6.48), то отримаємо диференційне рівняння зігнутої осі балки, яке називають точним рівнянням її пружної лінії

$$\frac{d^2 f / dz^2}{\sqrt{(1 + (df/dz)^2)^3}} = \frac{M_x}{D_x}. \quad (6.49)$$

Зрозуміло, що інтегрування даного рівняння супроводжуватиметься певними труднощами. Якщо ж знехтувати квадратом першої похідної  $(df/dz)$ , із-за його відносної малості, то диференційне рівняння пружної лінії згинального елемента спроститься до загальновідомого виразу

$$d^2 f / dz^2 = M_x / D_x. \quad (6.50)$$

Зважаючи на (6.1), аналітичний розв'язок диференційного рівняння (6.50) можна знайти шляхом інтегрування обох його частин за змінною  $z$  (уздовж осі елемента):

$$\varphi(z) = \frac{df}{dz} = \int \frac{dz}{r_z} + C; \quad (6.51)$$

$$f(z) = \iint \frac{dz}{r_z} + C \cdot z + D. \quad (6.52)$$

де постійні інтегрування  $C$ ,  $D$  визначаються за граничними умовами – умовами закріплення елемента, при цьому для кожної його ділянки вони будуть різними.

Зрозуміло, що зазначений класичний підхід до визначення переміщень виявляється достатньо трудомістким та малопродатним для практичних розрахунків, оскільки за  $n$  ділянок в елементі число довільних констант ( $C_i$  і  $D_i$ ) зростає до  $2n$ . Зменшити об'єм обчислювальних робіт в таких випадках можна за допомогою методу початкових параметрів, який дозволяє за будь-якого числа ділянок звести подібні рішення до знаходження всього двох констант – прогину та кута повороту на початку координат. Однак, для реалізації зазначеного методу при складанні та інтегруванні рівнянь моментів на виділених ділянках необхідно дотримуватися правил Клебша [361].

Правда, навіть за беззаперечного дотримання зазначених правил, пряме інтегрування диференціальних рівнянь (6.51) та (6.52) дає доволі складні математичні рішення. Отримувати ж спрощені рішення можна за допомогою графоаналітичного методу «фіктивної балки» [256], суть якого полягає у певній аналогії між диференціальним рівнянням зігнутої осі та диференціальним рівнянням, що зв'язує згинаючий момент із зовнішнім навантаженням

$$d^2 f_x(z) / dz^2 = 1 / r_x(z); \quad (6.53)$$

$$d^2 M_x(z) / dz^2 = q_x(z). \quad (6.54)$$

Інакше кажучи, якщо за фіктивне навантаження  $q_x^f(z)$  для фіктивного стержня прийняти епюру кривини  $1/r_x(z)$  реального стержня, то епюра фіктивних моментів фіктивного стержня  $M_x^f(z)$  буде не чим іншим, як епюрою реальних прогинів  $f_x(z)$  реального стержня. За таких обставин розрахунок прогинів зводиться до визначення моментів від деякого фіктивного (умовного) навантаження у фіктивній балці (рис. 6.20)

$$f_x(z) = M_x^f(z). \quad (6.55)$$

Однак за криволінійної епюри фіктивних навантажень (дійсної кривини)

виникають певні ускладнення з визначенням фіктивних моментів (дійсних прогинів). Уникнути подібних ускладнень можна за допомогою узагальненої діаграми стану залізобетонних елементів конструкцій. Для цього дійсний стержень рекомендується розбити на окремі ділянки ( $n \geq 10$ ), а функцію кривини прийняти у вигляді еквівалентної ломаної лінії (рис. 6.20, б) зі значеннями кривини на межах кожної із них, визначеними за формулою (6.3). Варто зазначити, що цей метод хоч і дозволяє скоротити час розрахунку, але за складних схем завантаження може призводити до суттєвих ускладнень.

Тому для практичного застосування варто рекомендувати інші методи, наприклад енергетичні. Зокрема, в якості теоретичної основи для розрахунку переміщень будь-яких залізобетонних елементів доцільно використовувати класичний апарат будівельної механіки, що базується на визначенні переміщень за допомогою інтегралу Мора [446]

$$f_x(z) = \int \frac{M_k \cdot \bar{M}_k}{GI_k} dz + \int \frac{M_x \cdot \bar{M}_x}{EI_x} dz + \int \frac{M_y \cdot \bar{M}_y}{EI_y} dz + \int \frac{Q_x \cdot \bar{Q}_x}{GA} dz + \int \frac{Q_y \cdot \bar{Q}_y}{GA} dz + \int \frac{N_z \cdot \bar{N}_z}{EA} dz, \quad (6.56)$$

де  $M_k, M_x, M_y$  – крутний та згинальні моменти в характерному перерізі від заданого навантаження;

$Q_x, Q_y, N_z$  – поперечні та поздовжня сили в тому ж перерізі від заданого навантаження;

$\bar{M}_k, \bar{M}_x, \bar{M}_y$  – крутний та згинальні моменти від одиничного навантаження;

$\bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{N}_z$  – поперечні та поздовжня сили від одиничного навантаження;

$GI_k, EI_x, EI_y$  – жорсткість залізобетонного елемента за дії крутних та згинаючих навантажень відповідно;

$GA, EA$  – жорсткість залізобетонного елемента за дії зсувних та осьових навантажень відповідно.

Для плоскої системи зазначений інтеграл спрощується до наступного

вигляду

$$f_x(z) = \int \frac{M_x \cdot \bar{M}_x}{EI_x} dz + \int \frac{Q_x \cdot \bar{Q}_x}{GA} dz + \int \frac{N_z \cdot \bar{N}_z}{EA} dz. \quad (6.57)$$

Як видно з виразу (6.57), значення переміщень у загальному випадку залежать від згинальних, зсувних та осьових деформаційних характеристик залізобетонного елемента в його перерізах – кривини  $1/r(z)$ , кутів зсуву  $\gamma(z)$  та відносних поздовжніх деформацій  $\varepsilon(z)$

$$f_x(z) = \int \bar{M}_x(z) \frac{1}{r_x(z)} dz + \int \bar{Q}_x(z) \gamma_x(z) dz + \int \bar{N}(z) \varepsilon_x(z) dz. \quad (6.58)$$

Вертикальні переміщення перерізів залізобетонних елементів залежать переважно від деформацій згину. Тому зазвичай їх визначають за кривою і називають прогинами

$$f_x(z) = \int_0^l \bar{M}_x(z) \cdot \frac{1}{r_x(z)} dz. \quad (6.59)$$

Головним недоліком визначення переміщень за методом Мора вважають необхідність складання аналітичних виразів підінтегральних функцій, які у своїй переважній більшості не можуть бути виражені через елементарні функції, а тому задаються в табличній чи графічній формі. Наприклад, якщо прийняти до уваги функцію узагальненої діаграми стану залізобетонного елемента (6.2) та використати для його осередненого перерізу формулу кривини (6.3), то прогин навіть найпростішої балки доведеться обчислювати через інтегрування доволі непрості функції

$$f_x(z) = \int_0^l \bar{M}_x(z) \cdot \frac{1/r_u}{2 \cdot M_u} \left( \left(1 - \frac{M_x(z)}{M_u}\right) \frac{D_o}{r_u} + 2 \cdot M_x(z) - \sqrt{\left( \left(1 - \frac{M_x(z)}{M_u}\right) \frac{D_o}{r_u} + 2 \cdot M_x(z) \right)^2 - 4 \cdot M_x(z) \cdot M_u} \right) dz. \quad (6.60)$$

Для елементів зі змішаним армуванням та змінного перерізу, а також для стержневих систем, що мають багато ділянок (чи розбиті на багато ділянок), ця задача ще більше ускладнюється.

Спростити обчислення переміщень та прогинів можна доволі суттєво за

допомогою різних графоаналітичних методів, способів та правил (наприклад Верещагіна, «прямокутників», «трапецій», Сімпсона, «диригента» тощо). Але для цього необхідно, щоб епюра згинаючих моментів від одиничного навантаження описувалася прямою лінією, оскільки епюра кривини в принципі не може бути лінійною. Така умова завжди виконується для стержнів та систем, які складаються з прямих ділянок або стержнів.

За методом Верещагіна [62] інтеграл Мора дорівнює добутку площі епюри кривини стержня від дійсного навантаження  $\omega(1/r_x)$  на ординату прямолінійної епюри моментів  $m_{xc}$  від одиничного навантаження  $F=1$ , розташованої під центром ваги епюри кривини стержня від дійсного навантаження (рис. 6.21).

Однак слід зауважити, що при застосуванні зазначеного методу теж виникають певні труднощі з визначенням площ та положення центрів ваги геометричних фігур, обмежених криволінійною функцією дійсної кривини елементів від силового навантаження. Крім того, спосіб Верещагіна не можна використовувати в криволінійних стержнях, для яких обидві епюри є криволінійними, та для стержнів із неперервним змінним перерізом.

Загалом же інтегрування виразу (6.59) зручніше реалізовувати шляхом розбиття елемента на ряд ділянок (їх кількість рекомендується приймати парним та  $n \geq 10$ ) з визначенням кривини на їх межах при врахуванні знаку кривини.

Якщо прийняти лінійний розподіл кривини в межах кожної ділянки, то перемножування епюри кривини від силового навантаження з епюрою моментів від одиничного навантаження доцільно здійснювати за способом (правилом) трапецій [44]

$$f = \frac{l}{n} \left( \frac{m_{x0}}{2} \frac{1}{r_{x0}} + \frac{m_{xn}}{2} \frac{1}{r_{xn}} + m_{x1} \frac{1}{r_{x1}} + \dots + m_{xi} \frac{1}{r_{xi}} + \dots + m_{x,n-1} \frac{1}{r_{x,n-1}} \right), \quad (6.61)$$

де  $m_{x0}, \dots, m_{xn}$  – ординати епюри моментів від одиничної сили в напрямку осі  $X$  на межах кожної ділянки (рис.6.22);

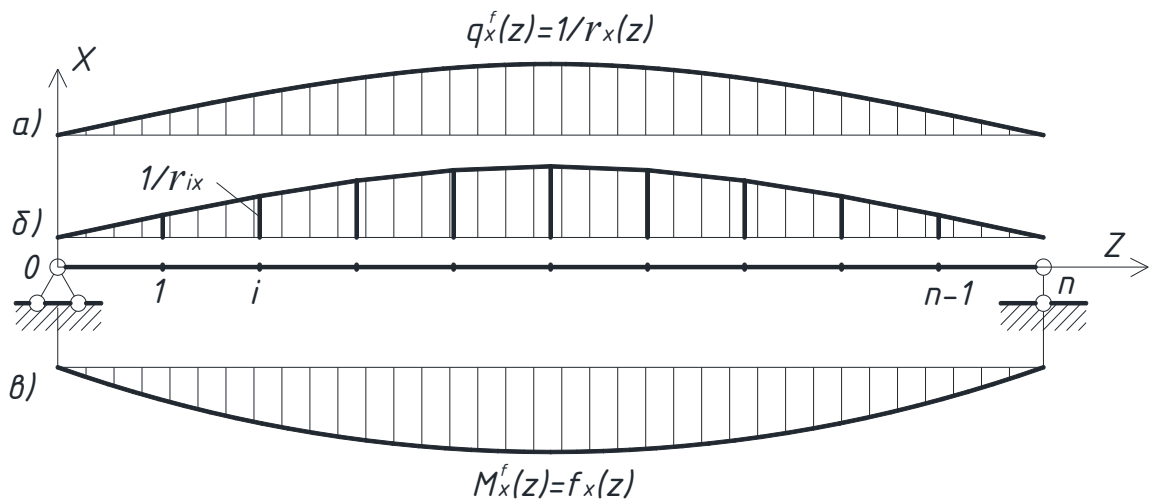


Рисунок 6.20 – До розрахунку прогинів балки за методом «фіктивної балки»:  
*a* – розрахункова схема завантаження; *б* – еквівалентна  
схема завантаження; *в* – епюра моментів (прогинів)

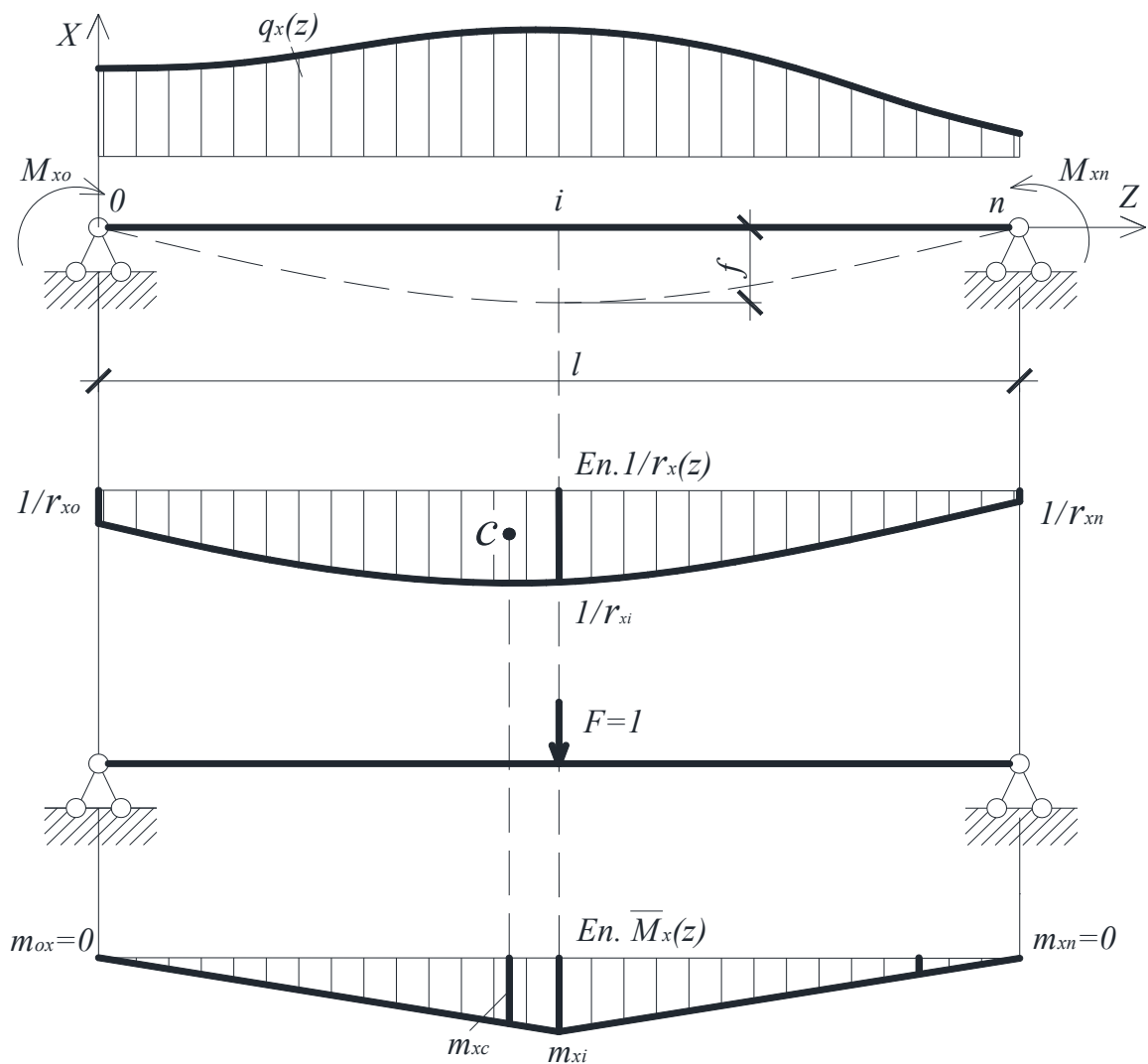


Рисунок 6.21 – До визначення прогинів за методом Верещагіна

$\frac{1}{r_{x0}}, \dots, \frac{1}{r_{xn}}$  ординати епюри кривини від зовнішнього навантаження на межах тих же ділянок, рекомендується визначати згідно узагальненої діаграми стану елемента за формулою (6.3).

При визначенні прогину в середині прольоту формула (6.61) набуває наступного вигляду [73]

$$f = \frac{l^2}{12n^2} \left\{ \left( \frac{1}{r_x} \right)_{\text{sup},l} + \left( \frac{1}{r_x} \right)_{\text{sup},r} + 6 \sum_{i=1}^{n/2-1} i \cdot \left[ \left( \frac{1}{r_x} \right)_{il} + \left( \frac{1}{r_x} \right)_{ir} \right] + (3n-2) \left( \frac{1}{r_x} \right)_m \right\}, \quad (6.62)$$

де  $(1/r_x)_{\text{sup},l}$  – кривина елемента на лівій опорі;

$(1/r_x)_{\text{sup},r}$  – теж саме на правій опорі;

$(1/r_x)_{il}, (1/r_x)_{ir}$  – кривина елемента в симетрично розташованих  $i$ -их перерізах ліворуч та праворуч від осі симетрії (середини прольоту);

$(1/r_x)_m$  – кривина елемента в середині прольоту.

Ординати епюри кривини від зовнішнього навантаження у всіх вищезазначених перерізах доцільно визначати за формулою (6.3) згідно узагальненої діаграми стану елемента (6.2).

За нелінійного (криволінійного) розподілу кривини на окремих ділянках залізобетонного елемента (рис.6.22) його прогини в практичних розрахунках рекомендується обчислювати за відомою формулою Сімпсона [44; 127]

$$f = \frac{l}{3n} \left[ m_{x0} \frac{1}{r_{x0}} + m_{xn} \frac{1}{r_{xn}} + 4 \cdot \left( m_{x1} \frac{1}{r_{x1}} + m_{x3} \frac{1}{r_{x3}} + \dots + m_{x,n-1} \frac{1}{r_{x,n-1}} \right) + 2 \cdot \left( m_{x2} \frac{1}{r_{x2}} + m_{x4} \frac{1}{r_{x4}} + \dots + m_{x,n-2} \frac{1}{r_{x,n-2}} \right) \right]. \quad (6.63)$$

Всі ординати епюри кривини від зовнішнього навантаження на межах кожної ділянки теж рекомендується визначати згідно узагальненої діаграми стану елемента за формулою (6.3).

Необхідно зауважити, що у випадку шарнірного закріплення кінців елемента перші два доданки у вищенаведених виразах (6.61), (6.62) і (6.63) завжди будуть відсутніми.



Для шарнірно (вільно) опертих та консольних елементів максимальний прогин можна визначати за ще більш простою формулою [73; 159; 250]

$$f_{\max} = s \cdot l^2 \cdot (1/r_x)_{\max}, \quad (6.64)$$

де  $s$  – коефіцієнт, що залежить від схем завантаження та закріплення елемента;

$(1/r_x)_{\max}$  – осереднена кривина елемента в перерізі з найбільшим згинаючим моментом (найменшою жорсткістю) від силового навантаження, за яким визначається прогин.

Основними перевагами формул (6.61)...(6.63) є те, що вони завжди лишаються незмінними за будь-яких розрахункових схем елементів.

### 6.6.2. Згинальні елементи

Загалом необхідно зауважити, що найбільший ефект від використання узагальненої діаграми стану бетонних та залізобетонних елементів проявляється в розрахунках їх прогинів. Оскільки зазначена діаграма дозволяє безпосередньо визначати кривину, а значить і прогини елементів на будь-якій стадії їх деформування, то для переважної більшості плоскозигнутих елементів взагалі відпадає необхідність в ітераційних розрахунках та перевірках двох загальноприйнятих рівнянь рівноваги (6.6) і (6.7). Що ж до розрахунку самих прогинів, то їх можна обчислювати за допомогою будь-якого із вищезгаданих методів (п. 6.6.1).

Сказане повною мірою стосується і косозигнутих елементів, якщо повністю знехтувати деяким незначним поворотом їх перерізів в процесі деформування. При цьому кут нахилу нейтральної лінії та напрямку лінії прогинів може прийматися за методикою п. 5.4.3 або ж наближено – за формулою (5.148). У протилежному випадку основні параметри напружено-деформованого стану косозигнутих елементів  $\varepsilon_{c2}$ ,  $\varepsilon_{s1}$ ,  $1/r$ ,  $tg\theta$  та  $\sigma_{cv}$  необхідно уточнювати за методикою п. 6.5.

### 6.6.3. Стиснуті елементи

#### 6.6.3.1. Центральні та позацентрові стиснуті елементи

Раніше уже зазначалося (п. 5.4.1), що всім залізобетонним елементам конструкцій властиві різноманітні технологічні недосконалості, які виникають на стадії їх проектування, виготовлення та монтажу. Тому навіть центрально стиснутий елемент слід завжди розраховувати як позацентрово стиснутий з початковим ексцентриситетом у вигляді випадкового  $e_a$  (рис. 6.23, а). Його величину в статично визначених елементах конструкцій за будь-яких обставин слід приймати більшою із наведених в (5. 143).

В гнучких елементах розрахунковий ексцентриситет зростатиме від початкового до кінцевого значення завдяки накопиченню самого прогину [197; 203]. Заздалегідь він є невідомим, але при врахуванні гіпотези плоских перерізів може бути визначений у першому наближенні наступним чином.

Для позацентрово стиснутого залізобетонного елемента (рис. 6.23, б) діаграму його стану (2.11) запишемо у вигляді

$$N \cdot e = M_u \cdot \frac{K \cdot (1/r) / (1/r_u) - ((1/r) / (1/r_u))^2}{1 + (K - 2) \cdot (1/r) / (1/r_u)}. \quad (6.65)$$

Коли ж прийняти до уваги, що

$$1/r_u = f_u / (s \cdot l^2); \quad 1/r = f / (s \cdot l^2); \quad (6.66)$$

$$K = D_o \cdot (1/r_u) / M_u = D_o \cdot f_u / (s \cdot l^2 \cdot M_u); \quad (6.67)$$

$$M_u = N_u \cdot e_u = N_u \cdot (\varepsilon_{cu} / (1/r_u) + e_c + f_u); \quad (6.68)$$

$$e = \varepsilon_{c2} / (1/r) + e_c + f; \quad e_c = e_o - h_n / 2, \quad (6.69)$$

то (6.65) перетвориться в кубічне рівняння відносно прогину елемента  $f$

$$\begin{aligned} & \left( N \frac{K-2}{f_u} + N_u \frac{e_u}{f_u^2} \right) \cdot f^3 + \left( N + N \frac{(K-2) \cdot e_c}{f_u} - N_u \frac{e_u \cdot K}{f_u^2} \right) \cdot f^2 + \\ & + \left( N \cdot e_c + N \frac{\varepsilon_{c2} \cdot s \cdot l^2 \cdot (K-2)}{f_u} \right) \cdot f + N \cdot \varepsilon_{c2} \cdot s \cdot l^2 = 0. \end{aligned} \quad (6.70)$$

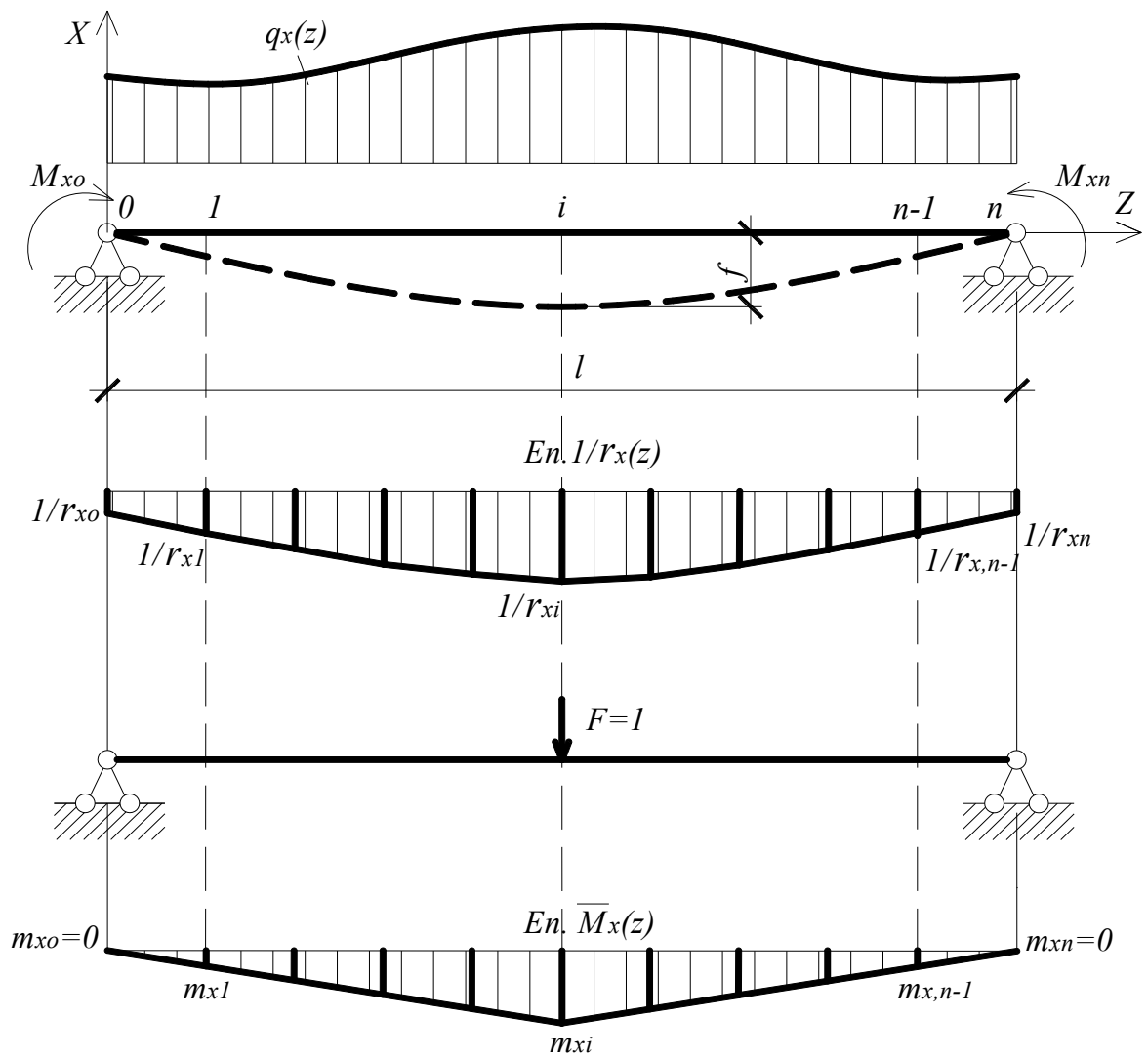


Рисунок 6.22 – До узагальненої методики визначення прогинів

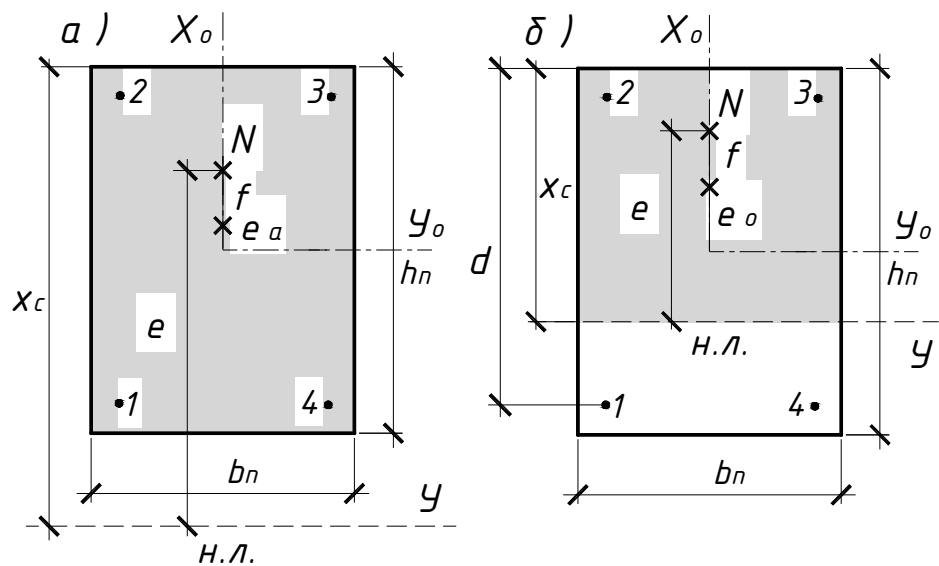


Рисунок 6.23 – Щодо визначення розрахункових ексцентриситетів в гнучких залізобетонних елементах: а) – центрально стиснутих; б) – позацентрово стиснутих

Після деяких спрощень та перетворень воно набере вигляду

$$f^3 + m_3 \cdot f^2 + n_3 \cdot f + p_3 = 0 \quad (6.71)$$

з відповідними параметрами

$$m_3 = (N \cdot (1 + e_c \cdot d_f) - d_l) / D_f; \quad (6.72)$$

$$n_3 = N \cdot (e_c + \varepsilon_{c2} \cdot s \cdot l^2 \cdot d_f) / D_f; \quad p_3 = N \cdot \varepsilon_{c2} \cdot s \cdot l^2 / D_f. \quad (6.73)$$

за наступних прийнятих позначень

$$D_f = N \cdot d_f + M_u / f_u^2; \quad d_f = d_l / M_u - 2 / f_u^2; \quad d_l = D_o / (s \cdot l^2). \quad (6.74)$$

$$M_u = N_u \cdot e_u = N_u \cdot (\varepsilon_{cu} \cdot s \cdot l^2 / f_u + e_c + f_u). \quad (6.75)$$

Згідно рішень Кордано [124] рівняння (6.71) за допомогою заміни  $f = y_3 - m_3 / 3$  приводиться до наступного «неповного» вигляду

$$y_3^3 + s_3 \cdot y_3 + q_3 = 0 \quad (6.76)$$

з параметрами  $s_3$  та  $q_3$ , що рівні відповідно

$$s_3 = -m_3^2 / 3 + n_3; \quad q_3 = 2 \cdot (m_3 / 3)^3 - m_3 \cdot n_3 / 3 + p_3. \quad (6.77)$$

Серед трьох коренів рівняння (6.76) лише один є дійсним, оскільки він не містить в собі комплексних чисел

$$y_3 = P_3 + S_3, \quad (6.78)$$

де відповідні параметри рівні

$$P_3 = \sqrt[3]{-q_3 / 2 + \sqrt{Q_3}}; \quad S_3 = \sqrt[3]{-q_3 / 2 - \sqrt{Q_3}}; \quad Q_3 = (s_3 / 3)^3 + (q_3 / 2)^2 \geq 0. \quad (6.79)$$

У протилежному випадку ( $Q_3 < 0$ ,  $s_3 < 0$ ) дійсним коренем виступає вираз

$$y_3 = 2 \cdot \sqrt{-s_3 / 3} \cdot \cos(\gamma / 3), \quad (6.80)$$

де

$$\cos \gamma = -q / (2 \sqrt{-(s_3 / 3)^3}). \quad (6.81)$$

Визначений у подібний спосіб прогин гнучкого елемента  $f = y_3 - m_3 / 3$  в подальшому уточнюється разом з основними параметрами його напружено-деформованого стану ( $\varepsilon_{c2}$ ,  $\varepsilon_{s1}$ ,  $\varepsilon_{ctv}$ ,  $1/r$ ,  $\theta$  тощо) за двома традиційними рівняннями рівноваги до незаперечного виконання додаткової умови

$$|(f_{i-1} - f_i) / f_{i-1}| \leq \delta = 0,01, \quad (6.82)$$

де  $f_{i-1}$  і  $f_i$  – уточнені значення прогину позацентрово стиснутого елемента на ітераційних етапах його розрахунку.

### 6.6.3.2. Косостиснуті елементи

Як уже зазначалося раніше (п. 5.4.2.2), в гнучкому косостиснутому елементі, внаслідок розвитку прогинів, кут нахилу силової площини змінюється від свого початкового значення  $\beta_o$  до деякого граничного значення  $\beta_f$ . При цьому, внаслідок непропорційного зміщення його перерізів в напрямку площин, що проходять через геометричні осі перерізу  $X_o$  і  $Y_o$ , відбувається непропорційне зростання згинаючих моментів в зазначених напрямках. Тим не менше, це не перешкоджає розраховувати прогини гнучких косостиснутих елементів на підставі діаграми їх стану, як і для позацентрово стиснутих, за формулами (6.65)...(6.82). Щоправда тут, на відміну від (6.69), початкове значення розрахункового ексцентриситету відносно крайніх фібр стиснутого бетону слід обчислювати за виразом

$$e_c = (e_o \cdot \cos \beta_o - h_n / 2) \cos \theta + (e_o \cdot \sin \beta_o - b_n / 2) \sin \theta. \quad (6.83)$$

Прогин гнучкого косостиснутого елемента, визначений у вищезгаданий спосіб як  $f = y_3 - m_3 / 3$ , в подальшому так само уточнюється разом з основними параметрами напружено-деформованого стану ( $\varepsilon_{c2}$ ,  $\varepsilon_{s1}$ ,  $\varepsilon_{ctv}$ ,  $1/r$  тощо) за двома загальноприйнятими рівняннями рівноваги до незаперечного виконання додаткової умови (6.82).

Водночас результати численних експериментальних досліджень [8; 127; 178; 184; 253] засвідчують, що лінія розвитку прогинів загалом залишається перпендикулярною до нейтральної лінії, але остання все ж таки зазнає певного повороту в процесі завантаження. Інакше кажучи, для вказаних елементів прогини у кожному перерізі матимуть не тільки свою величину, але й свій напрямок (рис. 6.24) при певному куті нахилу силової площини,

утворюючи деяку просторову поверхню прогинів [127]. В практичних розрахунках змінами кутів нахилу нейтральної лінії та лінії прогинів зазвичай нехтують, зважаючи на їх відносно малі значення. Водночас варто відзначити, що узагальнена діаграма стану  $M - 1/r$  дозволяє безпроблемно враховувати зміни зазначених кутів в розрахунках косостиснутих залізобетонних елементів через непропорційну зміну їх кривини в напрямку площин  $X_o$  та  $Y_o$ .

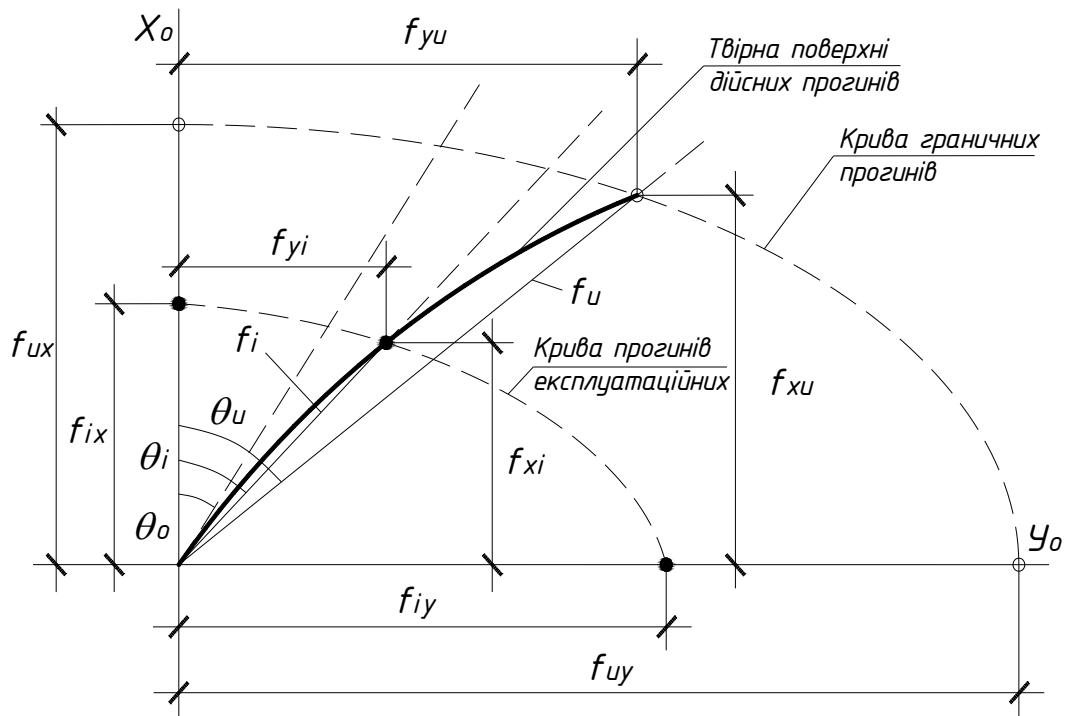


Рисунок 6.24 – До визначення прогинів косостиснутого залізобетонного елемента

Тому, зважаючи на сказане і на можливу відмінність розрахункових довжин в площинах  $X_o$  та  $Y_o$ , максимальні значення експлуатаційного прогину косостиснутих елементів ( $f_{ix}$  та  $f_{iy}$ ) в зазначених площинах рекомендується визначати з розрахунку їх на позацентровий стиск за класичними виразами (6.61)...(6.63) чи (6.64) на основі функції кривини (6.3).

Реальні значення експлуатаційного прогину  $f_i$  та його складових  $f_{xi}$  і  $f_{yi}$  слід обчислювати за формулами, ідентичними до (5.149) та (5.150)

$$f_i = f_{ix} + (f_{iy} - f_{ix}) \cdot \sin \theta_i; \quad (6.84)$$

$$f_{xi} = f_i \cdot \cos \theta_i; \quad f_{yi} = f_i \cdot \sin \theta_i, \quad (6.85)$$

при куті нахилу дійсної лінії прогинів до вертикалі ( $\theta_i$ ) – за виразом (5.148).

В подальшому значення експлуатаційного прогину уточнюється разом з основними параметрами напружено-деформованого стану елемента ( $\varepsilon_{c2}$ ,  $\varepsilon_{s1}$ ,  $\varepsilon_{ctv}$ ,  $1/r$ ,  $\theta$  тощо) за двома загальноприйнятими рівняннями рівноваги до незаперечного виконання додаткової умови (6.82).

## 6.7. Висновки

1. Згідно деформаційно-силової моделі стан залізобетонного елемента в будь-якому його перерізі доцільно визначати за осередненими значеннями інтегральної жорсткості та кривини, оскільки їх епюри мають плавний характер без переламів і стрибків та забезпечують отримання замкнутих нерозривних рішень з оцінки напружено-деформованого стану зазначених елементів навіть за наявності в них тріщин.
2. В деформаційно-силовій моделі саме узагальнена діаграма стану залізобетонних елементів  $M - 1/r$  сприяє розкриттю їх внутрішньої статичної невизначеності та забезпечує методологічну єдність розрахунків за граничними станами 1-ої та 2-ої групи, оскільки в її основу закладені загальні закономірності зміни інтегральної жорсткості зазначених елементів при їх деформуванні.
3. Розроблена модель тріщиностійкості залізобетонних елементів виступає складовою частиною узагальненої моделі їх деформування, оскільки в ній базова відстань між нормальними тріщинами та ширина їх розкриття безпосередньо пов'язані з визначальними параметрами напружено-деформованого стану елементів (кривиною  $1/r_i$ , згинаючими моментами  $M_i$ , напруженнями та деформаціями арматури  $\sigma_{s,i}$  і  $\varepsilon_{s,i}$  тощо).
4. В деформаційно-силової моделі вплив численних факторів і параметрів на розвиток та розкриття нормальних тріщин в залізобетонних елементах

конструкції враховується через зміну їх інтегральної жорсткості та кривини, завдяки чому відповідні розрахункові залежності максимально позбавленні емпіризму .

5. Моделювати процес перерозподілу зусиль в блоці між тріщинами з розтягнутого бетону на арматуру, в процесі їх утворення та розвитку, рекомендується одночасним застосуванням запропонованих коефіцієнтів  $\psi_{ct1}$  та  $\psi_{sl}$ . В практичних розрахунках доцільно нехтувати вищезгаданим перерозподілом зусиль та користуватися єдиним коефіцієнтом  $\psi_{ct}$ .
6. Використання узагальненої діаграми стану  $M - 1/r$  забезпечило для залізобетонних елементів отримання замкнутих рішень «жорсткість-кривина-прогин», чим суттєво спрощено розрахунок їх прогинів за допомогою будь-яких способів, а особливо енергетичних (включаючи й ті, що засновані на використанні правила трапецій чи методу Сімпсона).
7. Завдяки відносній простоті, високій продуктивності та точності, розроблені методи розрахунку з використанням узагальненої діаграми стану  $M - 1/r$  рекомендується використовувати в якості експрес-методів оцінки напружено-деформованого стану залізобетонних елементів на будь-якій стадії їхнього деформування.

Матеріали розділу опубліковані в роботах [14; 15; 197; 199; 204; 213; 214; 217; 218; 222-225; 228; 231; 234; 235]



## РОЗДІЛ 7

### РЕКОМЕНДАЦІЇ З РОЗРАХУНКУ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

#### 7.1. Види задач з розрахунку залізобетонних елементів

Вище уже зазначалося (п.6.3), що розроблена деформаційно-силова модель деформування залізобетонних елементів дозволяє з єдиних методологічних позицій розраховувати їх напружено-деформований стан на стадіях:

- утворення тріщин;
- розкриття тріщин та розвитку прогинів;
- граничної рівноваги.

У запропонованій деформаційно-силовій моделі залізобетонних елементів остання стадія їх деформування є визначальною, оскільки вона прямо пов'язана з гіпотезою граничної рівноваги. При цьому вона може реалізовуватися на двох рівнях: на нижньому – з досягненням розрахункової несучої здатності; на верхньому – з досягненням фактичної несучої здатності.

Верхній рівень граничної рівноваги є актуальним для наступних випадків:

- перевірки результатів експериментальних досліджень (випробувань);
- оцінки реального напружено-деформованого стану залізобетонних елементів при їх натурних дослідженнях;
- розрахунку реальних прогинів і тріщин в залізобетонних елементах.

Нижній рівень граничної рівноваги необхідно закладати в розрахунки залізобетонних елементів:

- при їх проектуванні;
- при прогнозуванні в них максимальних розрахункових прогинів та тріщин.

Крім того варто відзначити, що розроблена модель загалом дозволяє розв'язувати для залізобетонних елементів як пряму, так і обернену задачу не

тільки в стадії їх граничної рівноваги, але й в рамках двох перших стадій деформування. Під прямою варто розуміти будь-яку задачу, пов'язану з визначенням необхідної площі поперечного перерізу арматури або бетонного перерізу, які повинні забезпечити:

- сприйняття граничних навантажень;
- відсутність тріщин за певних навантажень;
- обмежене розкриття тріщин або обмежену величину прогину за певних навантажень.

Обернена задача для залізобетонних елементів (за відомих геометричних характеристик їх перерізів та встановлених фізико-механічних властивостей матеріалів) передбачає розрахунок чи перевірку:

- їх несучої здатності;
- виникнення в них тріщин за певних навантажень;
- ширини розкриття тріщин або величини прогину за певних навантажень.

Загалом же важливо пам'ятати, що вирішення всіх вищевказаних задач так чи інакше пов'язано з використанням узагальненої діаграми стану залізобетонних елементів, котра і забезпечує методологічну єдність всіх вищевказаних розрахунків.

## **7.2. Послідовність розв'язку задач з розрахунку залізобетонних елементів**

### **7.2.1. Загальні положення**

Слід чітко усвідомлювати, що руйнування залізобетонних елементів, які зазнають будь-якого стиску, згину чи розтягу, відбувається в наслідок вичерпання їх несучої здатності. Свідченням цього є порушення рівноваги зовнішніх та внутрішніх зусиль в двох її загальноприйнятих рівняннях. Причому, особливої уваги заслуговує саме рівняння моментів, оскільки воно є більш жорсткою умовою, для якої спрацьовує так званий екстремальний

критерій несучої здатності  $dM / d(1/r) = 0$ .

## 7.2.2. Розв'язок оберненої задачі

### 7.2.2.1. Визначення та перевірка несучої здатності

Розглянемо послідовність розв'язання оберненої задачі при визначенні несучої здатності залізобетонних елементів прямокутного поперечного перерізу за пропонованою методикою. Основними вихідними даними для неї є:  $h_n, b_n$  – висота і ширина перерізу елемента;  $a_{sh,1}, \dots, a_{sh,i}, a_{sb,1}, \dots, a_{sb,i}$  – параметри, що визначають розташування арматури вздовж зазначених сторін;  $A_{s1} \dots A_{si}$  – площі перерізу кожного з арматурних стержнів; класи використаних бетону та арматури з їх основними характеристиками ( $E_c$  та  $E_s, f_c$  чи  $f_{ck}; f_{ct}$  чи  $f_{ctk}; f_{yk}$  чи  $f_{uk}; \varepsilon_{uk}$  тощо); розрахункова схема та довжина елемента ( $l$ ).

Визначення несучої здатності необхідно виконувати у нижченаведеній послідовності.

1. Критичні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{c1}$  зазвичай визначаються шляхом випробування бетонних призм або за формулами (3.25) і (3.26). Для знаходження  $\varepsilon_{c1}$  дозволяється використовувати і інші функції [29; 382].
2. Критичні деформації бетону на розтяг  $\varepsilon_{ct,1}$  слід визначати за формулами (3.47) і (3.48). Дозволяється використання і інших залежностей [286; 487].
3. Параметри діаграм деформування бетону за стиску ( $a, b, c$ ) та за розтягу ( $a_t, b_t, c_t$ ) рекомендується обчислювати за виразами (3.9) та (3.45) відповідно.
4. Виходячи з екстремального критерію несучої здатності  $dM / d(1/r) = 0$ , в першому наближенні визначають граничні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$  за загальною формулою (4.28) або за формулами дод. Б (табл. Б.1). В

подальшому вони уточнюються аж до виконання умови (5.73) для згинальних елементів та умов (5.73) і (5.159) – для гнучких позацентрово завантажених елементів.

5. Записують та розв'язують два загальноприйнятих рівнянь рівноваги для найбільш напруженого перерізу (рідше – для декількох перерізів) залізобетонного елемента: (5.1) і (5.2) – для згинального ( $M_u$ ); (5.74) і (5.75) – для позацентрово чи косозавантаженого ( $N_u \cdot e_u$ ) або ж стиснуто-зігнутого ( $M_u + N_u \cdot e_u$ ).
6. Якщо прогин елемента впливає на зміну його напружено-деформованого стану, то такий елемент можна ділити по довжині на  $n$  ділянок однакової довжини (їх кількість рекомендується не менше 10-ти). В гнучких позацентрово та косозавантажених елементах кількість ділянок залежить від точності розрахунків (зокрема від точності визначення прогинів) та складності епюри початкових ексцентриситетів  $e_o$ . Однак слід застерегти, що дуже велика кількість ділянок може призводити до суттєвого ускладнення розрахунків в цілому, що не завжди виправдано.
7. Для розрахунку стиснутих (розтягнутих) елементів важливими є значення початкових ексцентриситетів відносно центральних осей перерізу  $X_o$  та  $Y_o$  на кожній ділянці. При розрахунку несучої здатності їх значення, як правило, задані.
8. Для зменшення кількості ітерацій, а то й повного їх уникнення, при розв'язку системи рівнянь (5.74) і (5.75) прогин гнучких стиснутих (розтягнутих) елементів в першому наближенні приймають за формулою (5.144), виходячи з повного використання деформативних властивостей стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  та міцнісних властивостей найбільш розтягнутої арматури  $\varepsilon_{s1} \geq \varepsilon_{so}$ .
9. В косозавантажених елементах форму стиснутої зони бетону (рис. 5.5) в першому наближенні приймають за кутом нахилу нейтральної лінії  $\theta$ , що визначають за формулою (5.148), та граничною висотою стиснутої зони

бетону  $x_{cu} = \varepsilon_{cu} / (1/r_u)$ .

10. Якщо ж у рівнянні рівноваги (5.75) присутні від'ємні початкові ексцентриситети  $e_o$ , то їх значення в розрахунках слід обов'язково приймати за абсолютною величиною.
11. В загальному випадку результатом розв'язку системи рівнянь рівноваги є граничні значення величин  $\varepsilon_{cu}$ ,  $\varepsilon_{s1,u}$ ,  $1/r_u$  та  $\theta_u$  для найбільш напруженого перерізу по довжині елемента. Загалом же для плоскозавантажених елементів граничні деформації найбільш розтягнутого арматурного стержня  $\varepsilon_{s1,u}$  в більшості випадків доцільніше визначати, виходячи з рівнянь рівноваги елементу та повноти використання міцнісних властивостей арматури, за формулами (5.11), (5.14), (5.18), (5.22) і (5.26) – для плоскозігнутих елементів та (5.82) або з кубічних рівнянь (5.85) і (5.96) – для позацентрово завантажених елементів.
12. Використовуючи узагальнену діаграму стану залізобетонного елемента (6.2), визначають за (6.3) значення кривини елемента на межах виділених ділянок та будують епюру його кривини.
13. Точне значення прогину в необхідному перерізі по довжині елемента обчислюють за формулами (6.61), (6.63) або (6.64) до обов'язкового виконання умов (5.147) та (5.73) при розв'язку системи рівнянь (5.74) і (5.75).

Перевірка несучої здатності залізобетонних елементів виконується згідно вищевказаних пунктів 1–13 з урахуванням наступних відмінностей:

- величину початкових ексцентриситетів в  $i$ -му перерізі позацентрово завантажених елементів визначають за вихідними даними або за зусиллями, отриманими зі статичного розрахунку стержневої системи

$$e_{o,i} = M_{o,i} / N;$$

- несуча здатність елемента на кожній його ділянці буде забезпечена при незаперечному виконанні умов рівноваги (5.74) і (5.75).

### 7.2.2.2. Розрахунок та перевірка утворення тріщин

Загалом розрахунок з утворення нормальних тріщин рекомендується виконувати у наступній послідовності.

1. Важливо пам'ятати, що стан граничної рівноваги залізобетонного елемента за вищенаведеними позиціями 1-13 п. 7.2.2.1 можна не визначати.
2. Виходячи з екстремального критерію міцності розтягнутого бетону  $dN_{ct} / d\varepsilon_{ct} = 0$ , граничні деформації бетону на розтяг  $\varepsilon_{ctu}$  в першому наближенні визначають з допомогою загальної формули (3.55) або за формулами дод. Б (табл. Б.2).
3. Відносні деформації крайніх фібр стиснутого бетону  $\varepsilon_{c2}$  при появі першої тріщини приймають у першому наближенні за табл. 6.1 або визначають з виразу (6.16).
4. Вид форми розтягнутої зони бетону в косозавантажених елементах попередньо приймають за її висотою  $x_{ct} = \varepsilon_{ctu} \cdot d / (\varepsilon_{ctu} + \varepsilon_{c2})$  та кутом нахилу нейтральної лінії  $\theta$ .
5. Після визначення форми розтягнутої (стиснутої) зони бетону уточнюють величину граничних деформацій  $\varepsilon_{ctu}$  за формулами дод. Б (табл. Б.2) з урахуванням ступенів неоднорідності деформування розтягнутого бетону  $m_{th}$  та  $m_{tb}$  в напрямку осей симетрії  $X_o$  та  $Y_o$  відповідно.
6. Записується та розв'язується (з використанням діаграми стану (6.2), рис. 6.5...6.11 та формул дод. В (табл. В.1 та табл. В.2)) система рівнянь рівноваги залізобетонного елемента (6.6) і (6.7). В процесі її розв'язку основні параметри напружено-деформованого стану залізобетонного елемента на момент появи тріщин в найбільш напруженому перерізі (деформації крайніх фібр бетону  $\varepsilon_{ctu}$  і  $\varepsilon_{c2}$  та арматури  $\varepsilon_{si}$ , кривина  $1/r_{cr}$ , а в гнучких позацентрово завантажених елементах – розрахунковий ексцентриситет  $e$  з урахуванням величини самого прогину  $f_{cr}$ ) уточнюються для згинальних та позацентрово завантажених елементів до

виконання умов (6.17) і (6.18) відповідно.

7. Точне значення прогину в необхідному перерізі по довжині елементу визначають за формулами (6.61), (6.63) або (6.64) до виконання умов (5.147) та (5.73) при розв'язку системи рівнянь (6.6) і (6.7).
8. Розрахунок повторюється до співпадання лівої та правої частин першого рівняння рівноваги (6.6) з точністю  $\delta \leq 1\%$ .
9. Тріщини в  $i$ -му перерізі залізобетонного елемента відсутні, якщо відносні деформації крайніх фібр розтягнутого бетону менші граничних величин  $\varepsilon_{cti}$ , тобто виконуються рівняння (6.6) і (6.7).

### 7.2.2.3. Розрахунок та перевірка розкриття тріщин

Розрахунок розкриття тріщин залізобетонних елементів рекомендується здійснювати у нижченаведеній послідовності.

1. Визначається стан граничної рівноваги залізобетонного елемента за позиціями 1-13 п. 7.2.2.1.
2. Встановлюють напружено-деформований стан залізобетонного елемента в момент появи в ньому тріщин за позиціями 2-9 п. 7.2.2.2.
3. Обчислюють базову відстань між суміжними тріщинами за формулою (6.34), знехтувавши у першому наближенні зміною зусиль в розтягнутій арматурі на ділянці між зазначеними тріщинами ( $\Delta \sigma_{s,i} = 0$ ).
4. Кривину залізобетонного елемента в найбільш напруженому перерізі визначають за виразом (6.3) відповідно до діаграми його стану (6.2).
5. Попередні значення відносних деформацій крайових фібр стиснутого бетону  $\varepsilon_{c2}$  приймають за виразом (6.21), а відносних деформацій найбільш розтягнутого арматурного стержня  $\varepsilon_{s1}$  обчислюють за (6.22).
6. Вплив розтягнутого бетону на напружено-деформований стан елемента, після появи в ньому тріщин, у спрощених розрахунках оцінюють за допомогою формули (6.26).

7. Відносні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{c2}$  та арматури  $\varepsilon_{s1}$  уточнюються разом з кривиною елемента  $1/r$  до виконання умов рівноваги (6.6) та (6.7) з точністю  $\delta \leq 1\%$ .
8. Уточнюють за (6.34) дійсну відстань між суміжними тріщинами при фактичній зміні зусиль в розтягнутій арматурі ( $\Delta\sigma_{s,i}$ ) на ділянці між зазначеними тріщинами.
9. Визначають ширину розкриття тріщин в найбільш напруженому перерізі залізобетонного елемента за формулою (6.43) з урахуванням виразів (6.34)...(6.42).

#### 7.2.2.4. Розрахунок та перевірка розвитку прогинів

Через свій прямий зв'язок з кривиною діаграма стану залізобетонних елементів є найбільш ефективною у розрахунку їх прогинів. Останні рекомендується визначати у наступній послідовності.

1. Встановлюється стан граничної рівноваги залізобетонного елемента за вищенаведеними позиціями 1-13 п. 7.2.2.1.
2. Залізобетонний елемент розділяють по його довжині на парну кількість ділянок однакової довжини (їх кількість слід приймати не менше 10-ти).
3. Використовуючи узагальнену діаграму стану елемента (6.2), визначають за (6.3) значення його кривини на межах виділених ділянок та будують епюру кривини.
4. Точне значення прогину в найбільш напруженому чи необхідному перерізі уздовж елемента визначають за формулами (6.61), (6.63) або (6.64) до виконання умов (5.147) та (5.73) при розв'язку системи рівнянь (5.74) і (5.75).
5. Необхідна жорсткість залізобетонного елемента буде забезпечена, якщо отримане максимальне значення його прогину буде меншим нормативно допустимого  $f_{\max} \leq f_n$ .



### 7.2.3. Розв'язок прямої задачі

Розв'язок будь-якої прямої задачі, пов'язаної з визначення необхідної площі перерізу поздовжньої арматури (зادля сприйняття граничних навантажень, відсутності тріщин чи обмеженого їх розкриття, необхідної жорсткості чи обмеженого розвитку прогинів) можна здійснювати двома методами. За першим із них попередньо задаються відсотком армування елемента в межах 1,5%...2% та розв'язують обернену задачу за пп. 7.2.2.1...7.2.2.4 з поступовим корегуванням площі перерізу арматури до її найменшого значення, за якого обоє рівняння рівноваги будуть виконуватися з обов'язковим дотриманням додаткових умов (5.73) та (5.147).

За другим методом послідовність розрахунку необхідної площі перерізу поздовжньої арматури є наступною.

1. Визначають основні параметри діаграм деформування стиснутого та розтягнутого бетону за позиціями 1- 4 п.7.2.2.1.
2. Залежно від повноти використання міцнісних властивостей арматури визначають відносні деформації найбільш розтягнутого арматурного стержня  $\varepsilon_{sI}$  за формулами (5.36), (5.42), (5.48) і (5.53) – для плоско зігнутих елементів та (5.110), (5.115) і (5.120) – для позацентрово завантажених елементів.
3. Необхідний коефіцієнт армування елемента або конструкції  $\rho_{l,i}$  визначають залежно від повноти використання міцнісних властивостей арматури за формулами (5.37), (5.43), (5.49) і (5.54) – для плоско зігнутих елементів та (5.111), (5.116) і (5.121) – для позацентрово завантажених елементів.
4. Для гнучких позацентрово завантажених елементів площа розрахованої у подібний спосіб арматури уточнюється шляхом перевірки системи рівнянь (5.74) і (5.75) до виконання умов (5.147) та (5.73).
5. Армування косозавантажених елементів, із-за особливої складності їх напружено-деформованого стану, все ж таки доцільніше розраховувати

шляхом уточнення відсотка армування елемента, що попередньо приймається в межах 1,5%...2%.

### **7.3. Експериментальна перевірка загальної моделі деформування залізобетонних елементів конструкцій**

Розроблена деформаційно-силова модель деформування бетонних та залізобетонних елементів покладена в основу єдиної методики їх розрахунку, що може реалізовуватися машинними і навіть «ручними» способами. На її базі створені загальна та окремі комп'ютерні програми з розрахунку залізобетонних елементів граничними станами 1-ї та 2-ї групи. Ці програми працюють в будь-якому середовищі EXCEL та можуть бути безпроблемно відтворені за наведеними в додатку Д алгоритмами навіть тими, хто має елементарну підготовку з комп'ютерного програмування.

Придатність розробленої узагальненої моделі деформування бетонних і залізобетонних елементів та запропонованих методів їх розрахунку була перевірена на результатах експериментальних досліджень різних залізобетонних елементів, випробуваних як вітчизняними, так і зарубіжними дослідниками. Зазначені результати опубліковані у різних наукових виданнях та відкриті для загального доступу. Результати цієї перевірки показані на рис.7.1...7.4 та наведені в нижче розміщених таблицях 7.1...7.5.

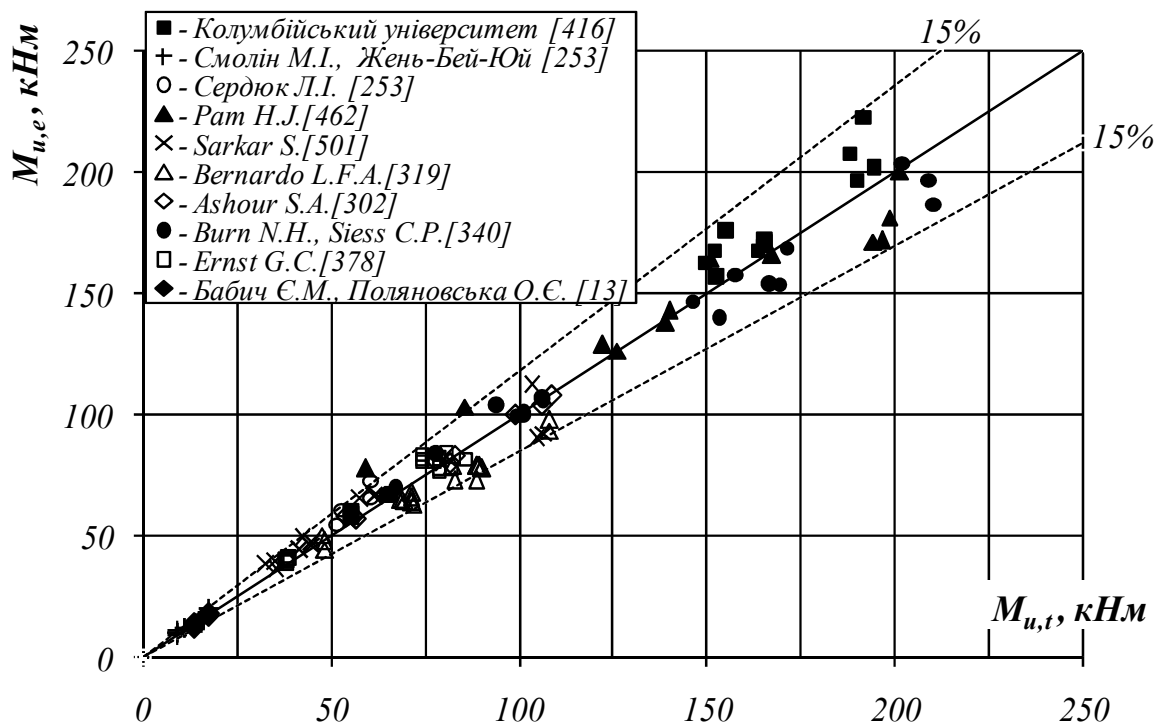


Рисунок 7.1 – Відхилення теоретичних (за автором) та дослідних значень несучої здатності зігнутих та косозігнутих залізобетонних елементів, випробуваних різними дослідниками

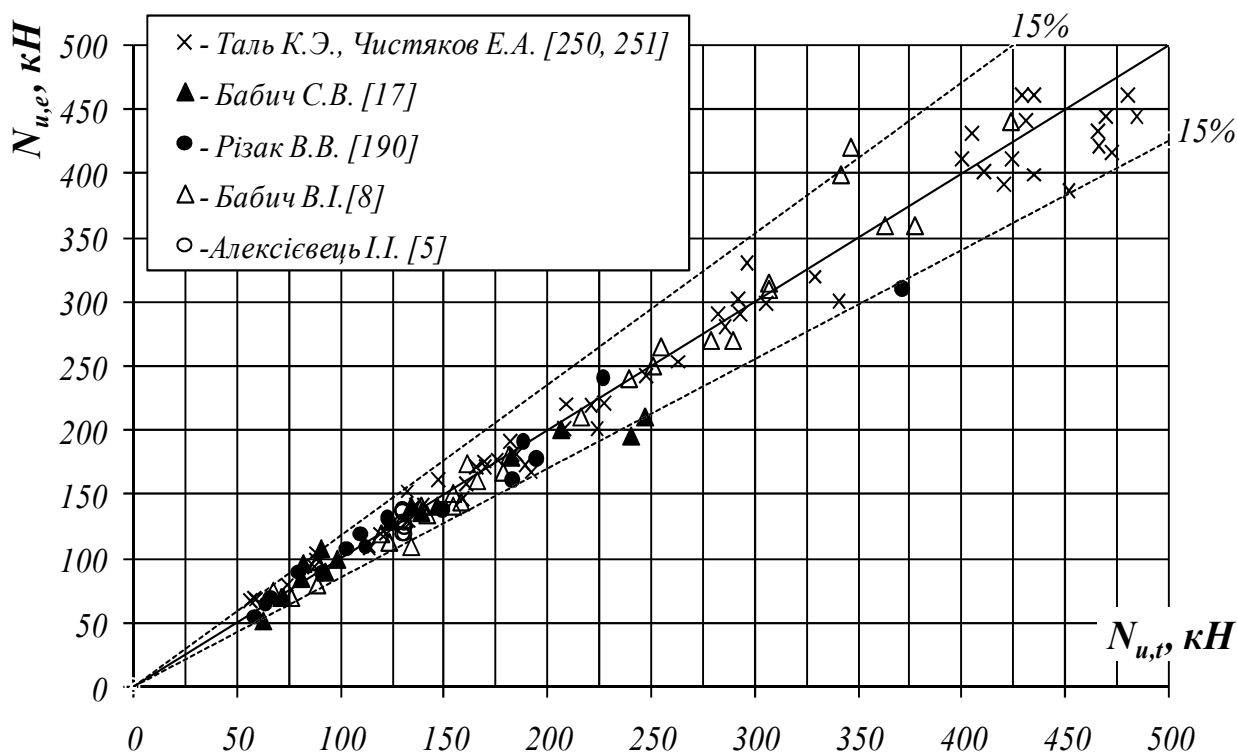


Рисунок 7.2 – Відхилення теоретичних (за автором) та дослідних значень несучої здатності позациентрово стиснутих, косостиснутих та стиснуто-зігнутих залізобетонних елементів, випробуваних різними дослідниками

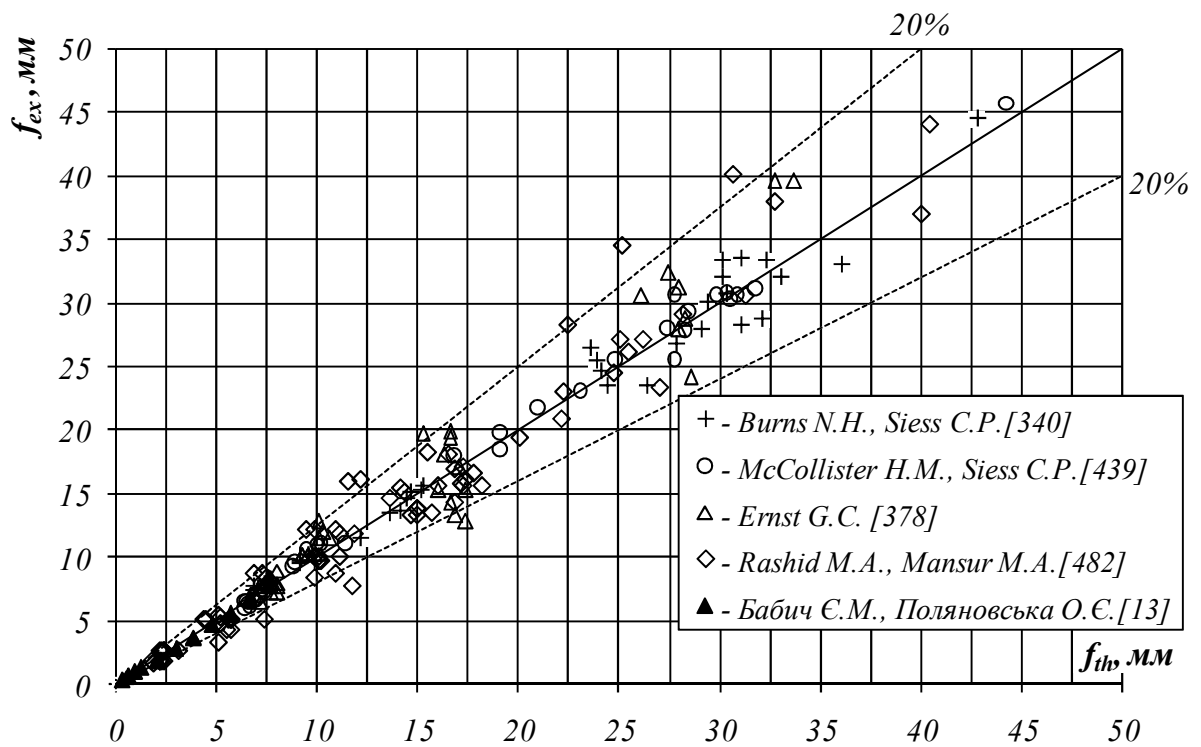


Рисунок 7.3 – Загальні відхилення теоретичних (за автором) та дослідних значень прогинів згинальних залізобетонних елементів, випробуваних різними дослідниками

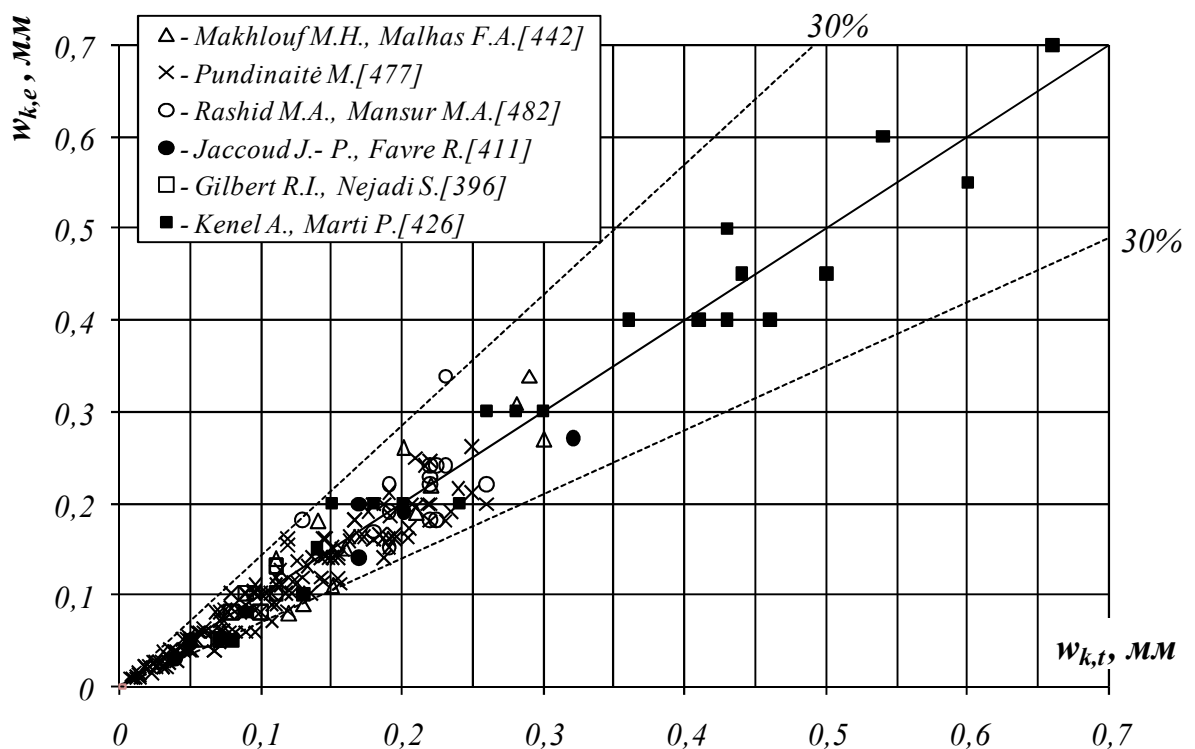


Рисунок 7.4 – Відхилення теоретичних (за автором) та дослідних значень прогинів на момент текучості арматури в згинальних залізобетонних елементах, випробуваних різними дослідниками

Таблиця 7.1 – Найважливіші характеристики дослідних зразків

Автори дослідів	Найважливіші характеристики та параметри випробування дослідних зразків									
	рік	розміри, мм				бетон, МПа		арматура, МПа (мм <sup>2</sup> ; %)		
		$h(d)$	$b$	$l_o$	$e_o$	$f_{ck}$	$E_c \cdot 10^3$	$f_{yk}$	$E_s \cdot 10^3$	$A_s(\rho_l)$
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
Балки										
Колумбійський університет [416]	1941	254,4-311,2	252-355,6	-	-	24,2-24,5	23	361-456,8	206,8	382,2-2343
Смолін М. І., Жень-Бей-Юй [253]	1951	192-280	115-140	-	-	17,1-31,7	25-33,8*	234-324,5	210*	236-398
McCollister H. M., Siess C.P., [439]	1954	259-272,3	152	2740	-	13,2-33,4	18,43-25,65	285-392,3	206	0,62-5,1%
Ernst G. C. [378]	1957	254	152	3650	-	22,3-32,5	22,74-25,46	310-327,5	206	1,03-5%
Burns N. H., Siess C. P. [340]	1962	254-457	152-203	2740	-	24,8-35,5	24,15-25,85	309-334,4	206	1,0-1,98%
Сердюк Л. І. [253]	1966	315	150	-	-	14,7-24,2	22,8-30,2*	432	206*	556
Jaccoud J.-P., Favre R [411]	1982	160	750	3100	-	31	30	384	205	565,5
Makhlouf H. M., Malhas F.A. [442]	1996	400	600	1900	-	40	33,4*	430	200	1249-2822
Sarkar S. [501]	1997	250	150	3240	-	77-107	39-44*	442-470	206*	339-1257
Ashour S. A. [302],	2000	250	200	3080	-	48,61-102,4	35-44*	530	200	509-1018
Pam H. J. [462]	2001	300	200	2600	-	37,4-102,5	33-44*	520-579	200	402-1809

Продовження таблиці 7.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Kenel A., Marti P.[426]	2002	200	1000	3600	-	36-81	34-40	508-563	202-208	314,1-628,3
Bernardo L. F. [319]	2004	263-275	120-139	2800	-	62,9-105,2	38-44*	534-575	200	452-1030
Gilbert R. I., Nejadi S.[396]	2004	161-348	250-400	3500	-	18	23	128-252	205	226,2-603,2
Rashid M. A., Mansur M. A. [482]	2005	400	200	3400	-	42,8-126,2	34-44*	460-537	200	1188-5044
Pundinaitė M. [477]	2010	298-305	275-285	3000	-	43,7-49,5	34,1-35,3*	578-632	199,3-223,5	229,3-776,8
Бабич Є. М., Поляновська О. Є. [13]	2017	200	100	1200, 1840	-	27,3; 31,8	28; 30,5*	498,8-594,7	200; 192	108+108
Колони та стійки										
Таль К. Є., Чистяков Е. А. [250, 251]	1961	119-152	235-246	3000-4500	20-115	12,3-40	23-36	235,5-495	210*	92-566
Бабич В. І. [8]	1972	199-206	127-134	2100-3000	9-140	15,8-28,1	24-32,3*	291-446	291-446	2,365-4,651%
Бабич С. В. [17]	1998	99-101,7	155-164	2740	0... 100	14,6-26,66	28,16	533-589	206-210	314-345
Різак В. В. [190]	2000	99- 101	159-162	3115-3201	20-100	21,3-46,1	26,9-35,0	495-529	196,4-218,1	452,6-480,8
Алексієвець І. І. [5]	2014	160	100	3000	100	14,59; 18,53	20; 23*	400	200	452

Таблиця 7.2 – Порівняння теоретичних та дослідних значень несучої здатності згинальних, стиснутих та стиснутозігнутих елементів

Автори дослідів, кількість зразків	Відхилення експериментальних даних від розрахункових, отриманих за методикою								
	ДСТУ +ДБН [123]			Eurocod-2 [382]			Ромашко В.М.		
	$\Delta$	$\sigma$	$\nu, \%$	$\Delta$	$\sigma$	$\nu, \%$	$\Delta$	$\sigma$	$\nu, \%$
<b>Згинальні елементи</b>									
Колумбійський ун-т [416], 20 зр.	0,934	0,037	3,93	0,934	0,036	3,89	0,953	0,037	3,89
Смолін М., Жень-Бей-Юй [253], 22 зр.	0,968	0,067	6,89	0,972	0,066	6,82	0,991	0,068	6,82
Сердюк Л. І. [253], 4 зр.	0,870	0,050	5,77	0,873	0,050	5,68	0,907	0,052	5,68
Ram H. J. [462], 12 зр.	0,974	0,126	12,94	0,978	0,125	12,79	0,986	0,113	11,4
Sarkar S. [501], 13 зр.	0,947	0,114	12,08	0,941	0,114	12,15	0,967	0,094	9,72
Bernardo L. F. [319], 19 зр.	1,131	0,065	5,73	1,137	0,064	5,66	1,1	0,062	5,65
Ashour S. A. [302], 9 зр.	0,976	0,030	3,08	0,98	0,030	3,08	0,99	0,031	3,08
Burns N. H., Siess C. P. [340], 17 зр.	1,036	0,060	5,821	1,037	0,060	5,81	1,021	0,059	5,82
Ernst G. C. [378], 20 зр.	0,962	0,043	4,45	0,958	0,042	4,42	0,977	0,043	4,41
Бабич Є.М., Поляновська О.Є. [13], 12 зр.	1,019	0,054	5,34	1,029	0,063	6,14	1,019	0,053	5,2
<b>Загалом, 148 зразків</b>	<b>0,992</b>	<b>0,064</b>	<b>6,45</b>	<b>0,994</b>	<b>0,064</b>	<b>6,47</b>	<b>0,999</b>	<b>0,061</b>	<b>6,07</b>
<b>Стиснуті та стиснутозігнуті елементи</b>									
Таль К., Чистяков Е. [250, 251], 68 зр.	1,028	0,082	7,99	1,023	0,081	7,95	1,009	0,076	7,56
Бабич В. І. [8], 30 зр.	1,011	0,044	4,31	1,004	0,043	4,24	1,014	0,043	4,24
Бабич С. В. [17], 15 зр.	1,053	0,127	12,09	1,05	0,127	12,09	1,026	0,115	11,2
Різак В. В. [190], 15 зр.	1,028	0,099	5,95	1,025	0,098	9,55	1,016	0,091	8,94
Алексівець І. І. [5], 9 зр.	0,886	0,128	14,4	0,931	0,083	8,88	1,018	0,057	5,58
<b>Загалом, 137 зразків</b>	<b>1,020</b>	<b>0,083</b>	<b>7,83</b>	<b>1,016</b>	<b>0,080</b>	<b>7,83</b>	<b>1,013</b>	<b>0,073</b>	<b>7,25</b>

Таблиця 7.3 – Порівняння теоретичних та дослідних значень прогинів

Автори дослідів, кількість зразків (вимірювань)	Відхилення експериментальних даних від розрахункових, отриманих за методикою								
	ДСТУ +ДБН [123]			Eurocod-2 [382]			Ромашко В.М.		
	$\Delta$	$\sigma$	$\nu, \%$	$\Delta$	$\sigma$	$\nu, \%$	$\Delta$	$\sigma$	$\nu, \%$
Burns N. H., Siess C. P. [340], 18 зр.	1,019	0,1553	15,24	1,022	0,1585	15,51	0,978	0,1104	11,29
McCollister H. M., Siess C. P. [439], 18 зр.	0,983	0,0832	8,46	0,978	0,065	8,69	0,997	0,083	8,32
Ernst G. C. [378], 20 зр.	1,011	0,1798	17,78	1,009	0,1881	18,64	1,018	0,1421	13,96
Rashid M. A., Mansur M. A. [482], 13 зр.	1,132	0,2316	20,46	1,137	0,2489	21,89	1,046	0,177	16,92
Бабич Є. М., Поляновська О. Є. [13], 7 зр.	1,06	0,151	14,25	1,039	0,149	14,34	1,075	0,122	11,35
<b>Загалом, 76 зр. (300 вимір.)</b>	<b>1,052</b>	<b>0,170</b>	<b>16,00</b>	<b>1,048</b>	<b>0,174</b>	<b>16,65</b>	<b>1,028</b>	<b>0,133</b>	<b>12,93</b>

Таблиця 7.4 – Порівняння теоретичних та дослідних значень ширини розкриття тріщин

Автори дослідів, кількість зразків (вимірювань)	Відхилення експериментальних даних від розрахункових за методикою								
	ДСТУ +ДБН [123]			Eurocod-2 [382]			Ромашко В.М.		
	$\Delta$	$\sigma$	$\nu, \%$	$\Delta$	$\sigma$	$\nu, \%$	$\Delta$	$\sigma$	$\nu, \%$
Makhlouf H., Malhas F. [442], 3 зр.	1,185	0,3635	30,68	1,193	0,3776	31,65	1,057	0,2609	24,68
Pundinaitė M. [477], 18 зр.	1,289	0,3002	23,29	1,334	0,3209	24,06	1,106	0,1988	18,31
Rashid M. A., Mansur M. A. [482], 15 зр.	0,923	0,1686	18,27	0,907	0,1655	18,25	1,004	0,1767	17,6
Jaccoud J.-P., Favre R. [411], 6 зр.	1,234	0,2763	22,39	1,27	0,3099	24,4	1,173	0,199	16,97
Gilbert R. I., Nejadi S. [396], 12 зр.	1,095	0,3321	30,33	1,103	0,3766	34,14	1,087	0,2102	19,34
Kenel A., Marti P. [426], 4 зр.	1,058	0,2523	23,85	1,075	0,2756	25,64	1,029	0,1798	17,72
<b>Загалом, 58 зр. (217 вимір.)</b>	<b>1,222</b>	<b>0,291</b>	<b>23,77</b>	<b>1,256</b>	<b>0,311</b>	<b>24,81</b>	<b>1,089</b>	<b>0,1994</b>	<b>18,57</b>



Таблиця 7.5 – Забезпеченість точності розрахунків залізобетонних елементів за пропонованою деформаційно-силовою моделлю їх опору

Вид елементів та досліджувані параметри	Кількість зразків (дослідів)	Оцінювані параметри	Забезпеченість точності у %				
			±5	±10	±15	±20	±25
Згинальні, несуча здатність	148	$M_{th} / M_{ex}$	58,78	89,82	98,56	99,89	99,99
Стиснуті, несуча здатність	137	$N_{th} / N_{ex}$	50,67	82,93	96,01	99,39	99,94
Згинальні, прогини	76 (300)	$f_{th} / f_{ex}$	29,31	54,8	74,07	86,66	93,93
Згинальні, прогини*	74* (288*)	$f_{th} / f_{ex}$	31,08	57,63	76,99	89,04	95,45
Згинальні, ширина тріщин	58 (217)	$w_{k,th} / w_{k,ex}$	19,82	38,40	54,83	68,42	79,01
Згинальні, ширина тріщин	58 (160), за $w_{k,ex} > 0,05$	$w_{k,th} / w_{k,ex}$	23,99	45,85	64,03	77,80	87,31

\* без двох балок Rashid M.A., Mansur M.A. [482]

Матеріали розділу опубліковані в роботах [197; 213; 223; 234; 490].

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В цілому отримані результати проведених досліджень дають підстави зробити низку наступних висновків.

1. Розроблена деформаційно-силова модель опору бетону та залізобетону розвиває та поглиблює сучасні деформаційні моделі опору залізобетонних елементів силовим впливам.
2. Проблему методологічної єдності розрахунків залізобетонних елементів в деформаційно-силовій моделі їх опору запропоновано вирішувати за допомогою універсальної діаграми стану «момент-кривина», яка дозволяє відстежити за силовими та деформаційними параметрами зміну жорсткості зазначених елементів на будь-якій стадії їх деформування.
3. Вперше діаграму стану залізобетонного елементу  $M-1/r$  отримано аналітичним шляхом за допомогою гіпотези «нелінійності» жорсткості та забезпечено її функціональну єдність з діаграмою деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , чим обґрунтовано пріоритетність використання обох діаграм в загальній теорії бетону та залізобетону.
4. Доведено, що отримана континуальна залежність діаграми стану  $M-1/r$  за певних вихідних умов трансформується у діаграму стану бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , забезпечуючи тим самим єдиний підхід до оцінки напружено-деформованого стану бетонних та залізобетонних елементів на будь-якій стадії їх деформування.
5. Вперше функцію граничних деформацій стиснутого бетону в залізобетонних елементах  $\varepsilon_{cu} = f(\varepsilon_{si}, \rho_{li}, x_{si}, m_h, m_b)$  пов'язано з основними параметрами їх армування та ступенем неоднорідності деформування бетону, чим забезпечено можливість прогнозування граничного стану зазначених елементів в розробленій моделі їх опору.
6. В деформаційно-силовій моделі систему статичних, геометричних та фізичних співвідношень МДТТ доповнено отриманими аналітичною залежністю діаграми стану елемента  $M-1/r$  та функцією граничних

деформацій стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu} = f(\varepsilon_{si}, \rho_{li}, x_{si}, m_h, m_b)$ , чим забезпечено розкриття внутрішньої статичної невизначеності перерізу залізобетонних елементів.

7. Відносні деформації стиснутого бетону в характерних (параметричних) точках діаграми  $\sigma_c - \varepsilon_c$  запропоновано моделювати (визначати) через пружну та пластичну складові з метою прогнозування деформацій крайніх фібр бетону за різних режимів його завантаження.
8. В деформаційно-силовій моделі базову відстань між нормальними тріщинами та ширину їх розкриття пов'язано універсальною діаграмою  $M - 1/r$  з основними параметрами напружено-деформованого стану залізобетонних елементів в системі статичних, геометричних та фізичних співвідношень, чим забезпечено відображення фізичної сутності процесів деформування в розрахункових залежностях при максимальному позбавленні їх емпіризму.
9. Запропонована континуальна залежність  $M - 1/r$  дозволяє отримувати епюру кривини залізобетонних елементів безпосередньо з діаграм їх стану, внаслідок чого суттєво підвищено ефективність енергетичних методів розрахунку прогинів та забезпечено замкнутість рішень жорсткість-кривина-прогин.
10. Відтворення реального стану залізобетонних елементів за допомогою аналітичної залежності  $M - 1/r$  суттєво зменшує число ітераційних операцій у відповідних розрахунках та забезпечує їх виконання за доволі простими і компактними алгоритмами без використання складного програмного забезпечення з одночасним збереженням фізичної сутності процесів деформування.
11. Методи розрахунку залізобетонних елементів за деформаційно-силовою моделлю їх опору вирізняються відносною простотою, відносно високою продуктивністю та точністю, а тому рекомендуються до використання в якості експрес-методів оцінки напружено-деформованого стану зазначених елементів. Вони пройшли апробацію при проектуванні

реальних об'єктів, в навчальному процесі та прийняті до використання у відповідному нормативному документі.

12. Достовірність розроблених методів розрахунку залізобетонних елементів конструкцій за узагальненою деформаційно-силовою моделлю їх опору підтверджено експериментально-статистичною оцінкою результатів розрахунку за граничними станами першої та другої групи більше 360-ти елементів, випробуваних різними вітчизняними та закордонними дослідниками.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азізов Т. Н. Інженерний метод визначення НДС залізобетонних балок порожнистого перерізу з нормальними тріщинами / Т. Н. Азізов, О. В. Мельник, О. С. Мельник // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – Рівне, 2011. – Вип. 22. – С. 154-161.
2. Азізов Т. Н. Использование аппроксимационных конечных элементов в расчетах конструкций / Т. Н. Азізов // Вісник ОДАБА. – 2010. – Вип. 39, ч. 1. – С. 4-9.
3. Азізов Т. Н. Способ определения граничных деформаций бетона на нисходящей ветви / Т. Н. Азізов // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – 2008. – Вип. 16, ч. 2. – С. 3–7.
4. Азізов Т. Н. Способ построения диаграмм состояния бетона / Т. Н. Азізов // Вісник ОДАБА: зб. наук. праць. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2007. – Вип. №28. – С. 3-8.
5. Алексієвець І. І. Несуча здатність, деформативність та тріщиностійкість позacentрово стиснутих залізобетонних елементів при дії малоциклових знакозмінних навантажень: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Алексієвець Іван Іванович. – Рівне, 2014. – 141 с.
6. Алмазов В. О. Проектирование железобетонных конструкций по евронормам / В. О. Алмазов. – М.: АСВ, 2007. – 216 с.
7. Бабич В. И. Расчет элементов железобетонных конструкций деформационным методом / В. И. Бабич, Д. В. Кочкаръев // Бетон и железобетон. – 2004. – № 2. – С. 12-16.
8. Бабич В. И. Экспериментально–теоретические исследования работы гибких железобетонных элементов прямоугольного сечения на косое внецентренное сжатие: дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Бабич Василий Иванович. – Львов, 1972. – 191 с.
9. Бабич В. І. Залежність між напругами та деформаціями у бетоні

- бетонних і залізобетонних стержнів за осьового стиску / В. І. Бабич, Д. В. Кочкар'юв // Бетон и железобетон в Украине. – 2006. – № 6. – С. 10-13.
10. Бабич В. І. Розрахунок міцності нормальних перерізів і прогинів залізобетонних зігнутих елементів спрощеним деформаційним методом / В. І. Бабич, Д. В. Кочкар'юв // Бетон и железобетон в Украине. – 2003. – №2. – С. 23-30.
  11. Бабич Е. М. Новые аппроксимации зависимости «напряжения-деформации», учитывающие нелинейность деформирования бетона / Е. М. Бабич, Ю. А. Крусь, Ю. В. Гарницкий // Изв. вузов: стр-во и арх-ра. – 1996. – № 2. – С. 39-44.
  12. Бабич Є. М. Бетонні та залізобетонні елементи в умовах малоциклових навантажень: монографія / Є. М. Бабич, Ю. О. Крусь. – Рівне: РДТУ, 1999. – 119 с.
  13. Бабич Є. М. Зчеплення з бетоном арматури серпоподібного профілю та її анкетування в згинальних залізобетонних елементах: монографія / Є. М. Бабич, В. Є. Бабич, О. Є. Поляновська. – Рівне: Волин. обереги, 2017. – 160 с.
  14. Бабич Є. М. Методологія розрахунку залізобетонних елементів за деформаційно-силовою моделлю / Є. М. Бабич, В. М. Ромашко // Наука та будівництво. – 2017. – № 3(13). – С. 16-21.
  15. Бабич Є. М. Особливості розрахунку косозавантажених елементів з використанням діаграм їх стану «момент-кривина» / Є. М. Бабич, В. М. Ромашко // Зб. наук. праць УкрДУЗТ. – Харків: УкрДУЗТ, 2017. – Вип. 171. – С. 62-69.
  16. Бабич Є. М. Розрахунок згинальних залізобетонних елементів на тріщиностійкість на основі деформаційної моделі / Є. М. Бабич, В. Є. Бабич, В. В. Савицький // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі і споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2005. – Вип. 12. – С. 85-90.

17. Бабич С. В. Робота та несуча здатність стиснутих залізобетонних елементів із різними ексцентриситетами на кінцях: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Бабич Сергій Васильович. – Рівне, 1998. – 193 с.
18. Байков В. Н. Определение предельного состояния внецентренно сжатых элементов по неупругим зависимостям «напряжение–деформация» бетона и арматуры / В. Н. Байков, С. В. Горбатов // Бетон и железобетон. – 1985. – № 6. – С. 13-14.
19. Байков В. Н. Железобетонные конструкции. Общий курс: учеб. для вузов / В. Н. Байков, Э. Е. Сигалов. – М.: Стройиздат, 1985. – 727 с.
20. Байков В. Н. Напряженно-деформированное состояние железобетонных элементов на базе обобщенных экспериментальных зависимостей физико-механических характеристик бетона и арматуры / В. Н. Байков // Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона: сб. науч. трудов. – Ростов-на-Дону: РИСИ, 1980. – С.3-11.
21. Байков В. Н. Общий случай расчёта прочности элементов по нормальным сечениям / В. Н. Байков и др. // Бетон и железобетон. – 1987. – №5. – С. 16-18.
22. Байков В. Н. Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей / В. Н. Байков, С. В. Горбатов, З. А. Димитров // Изв. вузов: Стр–во и арх-ра. – 1977. – № 6. – С. 15-18.
23. Байков В. Н. Расчет изгибаемых элементов с учетом экспериментальных зависимостей между напряжениями и деформациями для бетона и высокопрочной арматуры / В. Н. Байков // Изв. вузов: Стр–во и арх-ра. – 1981. – № 5. – С. 26-32.
24. Байрамуков С. Х. Расчет железобетонных конструкций с напряженной и ненапрягаемой арматурой с использованием диаграммы «момент-кривизна» / С. Х. Байрамуков // Бетон и железобетон. – 2003. – №2. – С. 13-15.
25. Бамбура А. М. Експериментальні основи прикладної деформаційної

- теорії залізобетону: дис. ... докт. техн. наук: 05.23.01 / Бамбура Андрій Миколайович. – Київ, 2005. – 379 с.
26. Бамбура А. М. Експериментальні дослідження впливу на діаграму „ $\sigma_b - \varepsilon_b$ ” бетону не багаторазово повторних навантажень високого рівня / А. М. Бамбура, Т. М. Подобенко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне, 2005. – Вип. 12. – С. 100-108.
  27. Бамбура А. М. Про втрату стійкості позацентрово стиснутих елементів з пружно-пластичного матеріалу / А. М. Бамбура // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів і конструкцій: зб. наук. пр. НАН України, ФМІ ім. Г. В. Карпенка. – Львів: Каменярь, 2002. – Вип. 5. – С. 213-218.
  28. Бамбура А. Н. Диаграмма «напряжения - деформация» для бетона при центральном сжатии / А. М. Бамбура // Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона: сб. науч. трудов. – Ростов-на-Дону: РИСИ, 1980. – С. 19-22.
  29. Бамбура А. Н. Развитие методов оценки напряженно-деформированного состояния и несущей способности железобетонных конструкций на основе реальных диаграмм деформирования материалов / А. Н. Бамбура // Научно-практические проблемы современного железобетона. Первая всеукраинская научно-техническая конференция: сб. тезисов. – Киев: НИИСК, 1996. – С. 36-39.
  30. Барашиков А. Я. Диаграмма деформирования бетона при одно- и двухосном сжатии / А. Я. Барашиков, В. Н. Барабаш, А. Д. Журавский // Строительные конструкции: респ. межведомст. науч.-техн. сб. НИИСК Госстроя СССР. – К.: Будівельник, 1990. – Вып. 43. – С. 85-99.
  31. Барашиков А. Я. Методика розрахунку залізобетонних конструкцій за деформаційною моделлю згідно з проектом нових норм України / А. Я. Барашиков // Сучасне промислове та цивільне будівництво. – 2005. – №1. – С. 36-39.
  32. Бахарева Е. А. Определение параметров равновесия при чистом изгибе



- балки из нелинейного материала одним итерационным методом / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // Математическое моделирование и краевые задачи. – 2009. – Ч.1. – С. 41-47.
33. Бачинский В. Я. О потере устойчивости деформирования изгибаемого бруса / В. Я. Бачинский // Строительные конструкции: респ. межведомст. науч.-техн. сб. НИИСК Госстроя СССР. – К.: Будівельник, 1982. – Вып. 35. – С. 55-58.
34. Бачинский В. Я. Связь между напряжениями и деформациями бетона при кратковременном неоднородном сжатии / В. Я. Бачинский, А. Н. Бамбура, С. С. Ватагин // Бетон и железобетон. – 1984. – №10. – С. 18-19.
35. Бачинский В. Я. Устойчивость внецентренно-сжатых железобетонных стержней, упругозащемленных по концам / В. Я. Бачинский, Р. Х. Каюмов, В. И. Чернобаев, А. Б. Голышев // Строительные конструкции: респ. межведомст. науч.-техн. сб. НИИСК Госстроя СССР. – К.: Будівельник, 1972. – Вып. XI. – С. 14-19.
36. Беглов А. Д. К вопросу о моделях евростандартов и СНиП по железобетону / А. Д. Беглов, Р. С. Санжаровский, В. М. Бондаренко // Бетон и железобетон. – 2004. – № 3. – С. 30-31.
37. Беглов А. Д. Теория расчета железобетонных конструкций на прочность и устойчивость. Современные нормы и евростандарты: монография / А. Д. Беглов, Р. С. Санжаровский. – Санкт-Петербург – М.: Изд-во АСВ, 2004. – 221 с.
38. Беккиев М. Ю. Расчет изгибаемых железобетонных элементов различной формы поперечного сечения с учетом нисходящей ветви деформирования: методические разработки / М. Ю.Беккиев, Л. Р. Маилян. – Нальчик: Кабардино-Балкарский агромилиоративный институт, 1985. – 132 с.
39. Белов В. И. Напряженно-деформированное состояние железобетонных балок как систем, составленных из упругих блоков / В. И. Белов // Изв. вузов: Стр-во и арх-ра. – 1971. – №4. – С. 22-27.

40. Берг О. Я. Высокопрочный бетон / О. Я. Берг, Е. Н. Щербаков, Г. Н. Писанко. – М.: Стройиздат, 1971. – 208 с.
41. Берг О. Я. Исследования процесса трещинообразования в железобетонных элементах с арматурой периодического профиля / О. Я. Берг // Сообщение ВНИИ железнодорожного стр-ва и проектирования. – М.: Трансжелдориздат, 1954. – № 44. – 24 с.
42. Берг О. Я. О предельном состоянии по трещинам в железобетонных мостовых конструкциях / О. Я. Берг // Вопросы проектирования и строительства железобетонных мостов: сб. науч. трудов. – М.: Трансжелдориздат, 1951. – Вып.13. – С. 5-59.
43. Берг О. Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона / О. Я. Берг. М.: Госстройиздат, 1962. – 96 с.
44. Березин И. С. Методы вычислений. Том 1 / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 1962. – 464 с.
45. Бліхарський З. Я. Розрахунок і конструювання нормальних та похилих перерізів залізобетонних елементів / З. Я. Бліхарський, І. І. Курхут, Р. Ф. Струк. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2014. – 144 с.
46. Бліхарський З. Я. Розрахунок міцності нормальних перерізів залізобетонних балок, підсилених при дії навантаження з урахуванням вимог нових норм проектування / З. Я. Бліхарський, Р. Є. Хміль, Д. І. Дубіжанський, І. В. Васільєв // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – 2013. – Вип. 78(1). – С. 307-314.
47. Бидный Г. Р. Расчет прогиба железобетонных балок с учетом влияния поперечной силы / Г. Р. Бидный, И. М. Чупак // Бетон и железобетон. – 1973. – №11. – С. 36-38.
48. Бич П.М. Экспериментально-теоретические исследования критических характеристик бетона / П. М. Бич // Бетон и железобетон. – 1987. – №3. – С. 26–27.
49. Бойко О. В. Оцінка міцності навскісно зігнутих балок на основі дволінійних розрахункових діаграм деформування бетону та арматури:

- дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Бойко Ольга Володимирівна. – Полтава: ПНТУ, 2009. – 230 с.
50. Бондаренко В. М. Инженерные методы нелинейной теории железобетона / В. М. Бондаренко, С. В. Бондаренко. – М.: Стройиздат, 1982. – 287 с.
  51. Бондаренко В. М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона / В. М. Бондаренко. – Харьков: Вища школа, изд-во при Харьковском университете, 1968. – 322 с.
  52. Бондаренко В. М. Расчетные модели силового сопротивления железобетона / В. М. Бондаренко, В. И. Колчунов. – Санкт-Петербург – Москва: АСВ, 2004. – 472 с.
  53. Бондаренко В. М. Элементы теории реконструкции железобетона / В. М. Бондаренко [и др.]; под общ. ред. В. М. Бондаренко. – Н. Новгород: Нижегород. гос. арх.- строит. университет, 2002. – 190 с.
  54. Боришанский М. С. Исследование напряжённо-деформированного состояния железобетонных элементов с учётом работы растянутого бетона над трещинами и пересмотр на этой основе теории расчёта деформаций и раскрытия трещин / М. С. Боришанский [и др.]; под ред. Гвоздева А. А. // Прочность и жёсткость железобетонных конструкций: сб. научн. трудов. – М.: НИИЖБ, 1968. – 232 с.
  55. Боровских А. В. Расчеты железобетонных конструкций по предельным состояниям и предельному равновесию: учеб. пособие / А. В. Боровских. – М.: Изд-во АСВ, 2004. – 320 с.
  56. Бровкина М. В. Прикладные методы расчета прочности и деформативности изгибаемых железобетонных элементов блочной структуры: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Бровкина Марина Вячеславовна. – Санкт-Петербург. – 2003. – 194 с.
  57. Бутенко С. А. Прочность внецентренно сжатых железобетонных сечений с учетом полной диаграммы деформирования бетона / С. А. Бутенко, И. В. Афанасьев // Снижение материалоемкости и трудоемкости

- железобетонных конструкций: сб. науч. трудов. – Омск, 1989. – С. 60-65.
58. Валовой О. І. Аналітичний метод оцінювання несучої спроможності згинальних елементів з використанням деформаційної методики розрахунку / О. І. Валовой, О. Ю. Єрьоменко // Вісник КТУ: зб. наук. праць. – Кривий Ріг: КТУ, 2010. – Вип. 25. – С. 123-126.
59. Васильев Б. Ф. Расчет железобетонных конструкций по прочности, деформациям, образованию и раскрытию трещин: пособие для проектировщиков / Б. Ф. Васильев, И. Л. Богаткин, А. С. Залесов, Л. Л. Панышин. – М.: Стройиздат, 1965. – 416 с.
60. Васильев П. И Об условиях образования продольных трещин в изгибаемых железобетонных элементах / П. И. Васильев, Е. Н. Пересыпкин // Изв. вузов: Стр-во и арх-ра. – 1983. – № 9. – С. 29-33.
61. Вахненко П. Ф. Про особливості деформування неармованого та армованого бетону / П. Ф. Вахненко, В. М. Кондель // Проблеми теорії і практики залізобетону: зб. наук праць. – Полтава: ПДТУ, 1997. – С. 77-80.
62. Верещагин А. К. Новые методы расчета статически неопределимых систем / А. К. Верещагин // Строительная промышленность. – 1925. – №9. – С. 654-657.
63. Гамаюнов Е. И. О величине предельных деформаций бетона при сжатии / Е. И. Гамаюнов // Сб. науч. тр. ЦНИИС. – М.: Транспорт, 1968. – Вып. 24. – С. 30-36.
64. Гаттас А. Ф. Трещиностойкость стержневых железобетонных элементов: дис...канд. техн. наук: 05.23.01/ Гаттас Антуан Фуад. – Киев, 1994. – 244 с.
65. Гвоздев А. А. Некоторые вопросы расчета прочности и деформаций железобетонных элементов при работе арматуры в пластической стадии / А. А. Гвоздев, Н. М. Мулин, Ю. П. Гуща // Изв. вузов: стр-во и арх-ра. – 1968. – № 6. – С. 7-12.
66. Гвоздев А. А. О перераспределении усилий в статически неопределимых обычных и предварительно напряжённых конструкциях / А. А. Гвоздев. – М.: Госстройиздат, 1955. – 29 с.

67. Гвоздев А. А. Определение разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации / А. А. Гвоздев // Проект и стандарт. – 1934. – №8. – С. 10-16.
68. Гвоздев А. А. О расчете перемещений (прогибов) железобетонных конструкций по проекту новых Норм (СНиП II-V-1-62) / А. А. Гвоздев, С. А. Дмитриев, Я. М. Немировский // Бетон и железобетон. – 1962. – №6. – С. 245-250.
69. Гвоздев А. А. Работа железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии / А. А. Гвоздев, Н. И. Карпенко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. – № 2. – С. 20-23.
70. Гвоздев А. А. Расчёт несущей способности конструкций по методу предельного равновесия: Сущность метода и его обоснование / А. А. Гвоздев. – М.: Госстройиздат, 1949. – 280 с.
71. Гениев Г. А. Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях: Научное издание / Г. А. Гениев, В. И. Колчунов, Н. В. Ключева и др. – М.: Изд-во АСВ, 2004. – 216 с.
72. Гольшев А. Б. К разработке прикладной теории расчёта железобетонных конструкций / А. Б. Гольшев, В. Я. Бачинский // Бетон и железобетон. – 1985. – №6. – С. 16-18.
73. Гольшев А. Б. Проектирование железобетонных конструкций: справоч. пособие / А. Б. Гольшев, В. Я. Бачинский, В. П. Полищук и др.; под ред. А. Б. Гольшева. – К.: Будівельник, 1985. – 496 с.
74. Гольденблат И. И. Основные положения метода расчета строительных конструкций по расчетным предельным состояниям и нагрузкам / И. И. Гольденблат. – М.: Госстройиздат, 1955. – 35 с.
75. Гомон С. С. Деформування бетону та арматури косостиснутих елементів при дії малоциклових навантажень / С. С. Гомон, В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць.– К.: НДІБК, 2006. – Вип. 65. – С. 187-192.

76. Гомон С. С. Экспериментально-статистичні дослідження залежностей  $(E'_l - \eta)$  та  $(E'_{tr} - \eta)$  за малоциклових навантажень різних рівнів / С. С. Гомон // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. Ч. 2. – Вип.4 (40). – Рівне: НУВГП, 2007. – С. 233-238.
77. Гомон С. С. Розрахунок стиснутих залізобетонних елементів за малоциклових навантажень з використанням деформаційної моделі / С. С. Гомон, В. М. Ромашко, Д. В. Кочкаръов С. С. Гомон, // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне, 2006. – Вип.14. – С. 151-158.
78. Городецкий А. С. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций: учеб. пособие / А. С. Городецкий, В. С. Шмуклер, А. В. Бондарев. – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2003. – 889 с.
79. Городецкий А. С. Расчет железобетонных балок-стенок с учетом образования трещин методом конечных элементов / А. С. Городецкий, В. С. Здоренко // Соппротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1975. – Вып. 57. – С. 59-66.
80. Городецкий Л. М. Исследования образования и развития трещин в элементах конструкций из плотного силикатного бетона: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Л. М. Городецкий. – К., 1973. – 32 с.
81. Гузеев Е. А. Исследование силовых и энергетических параметров разрушения бетона по полностью равновесным диаграммам его деформирования / Е. А. Гузеев, В. И. Шевченко, Л. А. Сейланов // Изв. вузов: стр-во и арх.-ра. –1986. – № 8. – С. 1–5.
82. Гуца Ю. П. Исследование ширины раскрытия нормальных трещин / Ю. П. Гуца // Прочность и жесткость железобетонных конструкций: сб. науч. трудов. – М.: НИИЖБ, 1971. – С. 18-36.
83. Гуца Ю. П. Расчет деформаций конструкций на всех стадиях при кратковременном и длительном нагружениях / Ю. П. Гуца, Л. Л. Лемыш // Бетон и железобетон. – 1985. – № 11. – С. 13-16.

84. Давыдов Н. Ф. Экспериментально-теоретическое исследование сопротивления бетона при внецентренном и местном сжатии / Н. Ф. Давыдов, О. М. Донченко // Железобетонные конструкции. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1964. – Вып.1(30). – С. 18-20.
85. Давидюк А. Н. Железобетон как фактор глобализации / А. Н. Давидюк, Ю. С. Волков // Технологии бетонов. – 2014. – №7. – С. 52-55.
86. Дегтярев В. В. Экспериментальное исследование напряженного состояния внецентренно сжатых армированных элементов из бетона повышенной прочности / В. В. Дегтярев, Ю. А. Гагарин // Исследование прочности бетонных и железобетонных элементов: сб. науч. трудов ЦНИИС Минтрансстроя. – М.: Стройиздат, 1973. – С. 46-54.
87. Десов А. Е. Макроструктурная гипотеза прочности бетона при сжатии и результаты ее экспериментальной проверки / А. Е. Десов // Изв. вузов: Стр-во и арх-ра. – 1972. – № 7. – С. 28-31.
88. Дорофеев В. С. Исследование напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов с учетом работы растянутого бетона над трещинами / В. С. Дорофеев и др. // Вісник ОДАБА. –2015. – Вип. 57. – С. 126-130.
89. Дорофеев В. С. К построению линеаризованных диаграмм деформирования изгибаемых железобетонных элементов / В. С. Дорофеев, А. В. Ковров, А. В. Ковтуненко, Н. К. Высочан // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць . – Рівне: НУВГП, 2011. – Вип. 22. – С. 320-327.
90. Дорофеев В. С. О применении линеаризованных диаграмм изгибающий момент–кривизна при расчете статически неопределимых железобетонных рамных конструкций / В. С. Дорофеев, А. В. Ковров // Вісник ОДАБА. –2012. – Вип. 46. – С. 96-101.
91. Дорофеев В. С. Прочность, трещиностойкость и деформативность неразрезных железобетонных балок / В. С. Дорофеев, В. М. Карпюк, Е. Н. Крантковская. – Одесса: Эвен, 2010. – 223 с.

92. Дорофеев В. С. Расчет изгибаемых элементов с учетом полной диаграммы деформирования бетона: монография / В. С. Дорофеев, В. Ю. Барданов. – Одесса: ОГАСА, 2003. – 210 с.
93. Дыховичный А. А. Статически неопределимые железобетонные конструкции / А. А. Дыховичный. – Киев: Будівельник, 1978. – 108 с.
94. Евграфов Г. К. О расчете железобетонных мостов по теории предельных состояний / Г. К. Евграфов // Техника железных дорог. – 1948. – № 12. – С. 12-15.
95. Железобетонные конструкции. Основы теории, расчета и конструирования: учеб. пособ. для студ. строит. спец. / [Н. П. Блещик, Д. Д. Жуков, Д. Н. Лазовский и др.]; под. ред. проф. Т. М. Пецольда и проф. В. В. Тура. – Брест: БГТУ, 2003. – 380 с.
96. Завьялов Г. Г. Соотношения метода конечных элементов для армированных конструкций с учетом трещинообразования / Г. Г. Завьялов, А. Л. Козак // Соппротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1978. – Вып.32. – С. 69-73.
97. Зайцев Ю. В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения / Ю. В. Зайцев. – М.: Стройиздат, 1982. – 196 с.
98. Зак М. Л. Аналитическое представление диаграммы сжатия бетона / М. Л. Зак, Ю. П. Гуца // Совершенствование методов расчета статически неопределимых железобетонных конструкций: сб. науч. трудов НИИЖБ Госстроя СССР. – М.: НИИЖБ, 1987. – С. 103-107.
99. Залесов А. С. Новые методы расчета железобетонных элементов по нормальным сечениям на основе деформационной расчетной модели / А. С. Залесов, Е. А. Чистяков, И. Ю. Ларичева // Бетон и железобетон. – 1997. – №5. – С. 31-34.
100. Залесов А. С. Практический метод расчета железобетонных конструкций по деформациям / А. С. Залесов, В. В. Фигаровский. – М.: Стройиздат, 1976. – 101 с.
101. Залесов А. С. Расчет железобетонных конструкций по прочности,



- трещиностойкости и деформациям / А. С. Залесов, Э. Н. Кодыш, Л. Л. Лемыш, И. К. Никитин. – М.: Стройиздат, 1988. – 320 с.
102. Залигер Р. Железобетон: его расчет и проектирование / Р. Залигер; пер. с немец. Рейнберга Л. В. и Чечулина Н. Н.; под ред. проф. Каменцева П. Я. – 5-е изд. – М.: – Л.: ГНТИ, 1931. – 671 с.
103. Звездов А. И. Расчёт прочности железобетонных конструкций при действии изгибающих моментов и продольных сил по новым нормативным документам / А. И. Звездов, А. С. Залесов, Т. А. Мухамедиев и др. // Бетон и железобетон. – 2002. – №2. – С. 21-25.
104. Золотов М. С. Несущая способность и деформативность гибких железобетонных стержней / М. С. Золотов, И. В. Симейко // Коммунальное хозяйство городов: науч.-техн. сб. – 2006. – Вып. 72. – С. 343-347.
105. Ильин О. Ф. Опыт построения обобщенного метода расчета прочности нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов с учетом особенностей свойств различных бетонов / О. Ф. Ильин, А. С. Залесов // Прочность, жесткость и трещиностойкость железобетонных конструкций: сб. науч. трудов. – М.: НИИЖБ, 1979. – С. 152-163.
106. Карпенко Н. И. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры / Н. И. Карпенко, Т. А. Мухамедиев, А. Н. Петров // Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций сб. науч. трудов. – М.: НИИЖБ, 1986. – С. 7-25.
107. Карпенко Н. И. К построению методики расчёта стержневых элементов на основе диаграмм деформирования материалов / Н. И. Карпенко, Т. А. Мухамедиев, М. А. Сапожников // Совершенствование методов расчёта статически неопределимых железобетонных конструкций. – М.: НИИЖБ, 1987. – С. 4-24.
108. Карпенко Н. И. К построению модели сцепления арматуры с бетоном, учитывающей контактные трещины / Н. И. Карпенко // Бетон и

железобетон. – 1973. – №1. – С. 19-23.

109. Карпенко Н. И. К построению общей методики расчёта статически неопределимых стержневых железобетонных конструкций на основе метода конечных элементов / Н. И. Карпенко, Т. А. Мухамедиев, М. А. Сапожников // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1989. – № 6. – С. 55-61.
110. Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона / Н. И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
111. Карпенко Н. И. Расчет стержневых железобетонных конструкций МКЭ с учетом уточненной матрицы жесткости / Н. И. Карпенко, Т. А. Мухамедиев, М. А. Сапожников // Изв. вузов: Стр-во. – 1991. – №3. – С. 7-11.
112. Карпенко Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами / Н. И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
113. Карпюк В. М. Розрахункові моделі силового опору прогінних залізобетонних конструкцій у загальному випадку напруженого стану: монографія / В. М. Карпюк. – Одеса: ОДАБА, 2014. – 352 с.
114. Карпюк В. М. Розрахунок залізобетонного стержня у загальному випадку напружено-деформованого стану / В. М. Карпюк, О. М. Петров, М. М. Петров // Коммунальное хозяйство городов: науч.-техн. сб. – 2012. – Вып. 105. – С. 83-99.
115. Кінаш Р. І. Визначення ширини розкриття нормальних тріщин в залізобетонній балці з позицій механіки руйнування / Р. І. Кінаш, П. В. Павленко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць РДТУ. – Рівне, 2000. – Вип. 5. – С. 178-184.
116. Клименко Є. В. Технічна експлуатація і реконструкція будівель та споруд / Є. В.Клименко. – Полтава: ПНТУ, 2004. – 280 с.
117. Клованич С. Ф. Метод конечных элементов в механике железобетона / С. Ф. Клованич, И.Н. Мироненко. – Одесса: ОГАСА, 2007. – 110 с.
118. Коковин О. А. Деформация изгибаемых и внецентренно сжатых

- элементов при кратковременно действующей нагрузке в стадиях, близких разрушению / О. А. Коковин // Прочность и жесткость железобетонных конструкций; под. ред. А. А. Гвоздева. М., 1968. – С. 104-125.
119. Колчунов В. И. Живучесть зданий и сооружений при запроектных воздействиях / В. И. Колчунов, Н. В. Клюева, Н. Б. Андросова, А. С. Бухтиярова. – М.: АСВ, 2014. – 208 с.
120. Колчунов В. И. Инженерный способ расчета несущей способности железобетонных элементов при совместном действии изгибающего момента и поперечной силы / В. И. Колчунов // Несущая способность и деформативность железобетонных конструкций. – К.: Вища школа, 1978. – С. 25-27.
121. Колчунов В. И. Методы расчёта конструкций зданий при реконструкции / В. И. Колчунов // Изв. вузов: стр-во и арх-ра. – 1998. – № 4-5. – С. 4-9.
122. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування / Мінрегіонбуд України: ДСТУ Б В.2.6-156: 2010. – [Чинний від 01.06.11]. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. - 123 с. – (Національний стандарт України).
123. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення / Мінрегіонбуд України: ДБН В.2.6-98:2009. – [Чинні від 01.06.11]. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 71 с. – (Національний стандарт України).
124. Корн Г. А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. А. Корн, Т. М. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
125. Кочкаръов Д. В. Нелінійний опір залізобетонних елементів і конструкцій силовим впливам: монографія / Д. В. Кочкаръов. – Рівне: О. Зень, 2015. – 384 с.
126. Кочкаръов Д. В. Передумови розрахунку та розрахунок прогинів залізобетонних елементів, що зазнають згину, з урахуванням нелінійного деформування матеріалів / Д. В. Кочкаръов, В. І. Бабич //

- Будівельні конструкції, вип. 74. – К.: ДП НДІБК, 2011. – С. 406-413.
127. Кочкаръов Д. В. Работа та несуча здатність залізобетонних елементів за дії осьової стискууючої сили та згину в двох площинах: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Кочкаръов Дмитро Вікторович. – Рівне, 2002. – 190 с.
128. Красновський Р. О. Аналитическое описание диаграммы деформирования бетона при кратковременном статическом сжатии / Р. О. Красновський, И. С. Кроль, С. А. Тихомиров // Исследования в области измерений механических свойств материалов: сб. науч. трудов. – М.: ВНИИФТРИ, 1976. – С. 58-65.
129. Краснощеков Ю. В. Теория железобетона и предпосылки развития науки о железобетонных конструкциях / Ю. В. Краснощеков // Бетон и железобетон. – 1997. – №2. – С. 23-25.
130. Кротовский С. С. Экспериментальное исследование жесткости внецентренно-сжатых железобетонных элементов / С. С. Кротовский // Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций: труды НИИЖБ, т. 4. – М.: Гостройиздат, 1959. – С. 215-275.
131. Крылов С. Б. Расчёт железобетонных конструкций методом гладко-сопряжённых элементов на основе точных частных решений: автореф. дисс. ... докт. техн. наук: 05.23.01 / С. Б. Крылов. – М.: НИИЖБ, 2003. – 43 с.
132. Крылов С. М. Перераспределение усилий в статически неопределимых железобетонных конструкциях / С. М. Крылов. – М.: Госстройиздат, 1964. – 168 с.
133. Крусь Ю. А. Аналитический метод трансформирования диаграмм деформирования бетона в условиях однородного растяжения и сжатия / Ю. А. Крусь // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2007. – Вип.67. – С. 195-206.
134. Крусь Ю. О. Моделювання зв'язку між напруженнями і деформаціями центрально стисненого бетону при різних режимах його навантажування / Ю. О. Крусь, О. Ю. Крусь // Ресурсоекономні матеріали, конструкції,

- будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне, 2012. – Вип. 23. – С. 285-292.
135. Кузнецов А. Н. Раскрытие трещин в центрально-растянутых железобетонных элементах / А. Н. Кузнецов // Строительная промышленность. – 1940. – С. 42-48.
136. Курс лекций по сопротивлению железобетона: кандидатский минимум, гл. 3, 4 и 5 / [Голышев А. Б., Бачинский В. Я. и др.]. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1987. – 32 с.
137. Лазарев Д. М. Експериментальні дослідження міцності та граничної деформації бетону стиснутих та зігнутих залізобетонних елементів / Д. М. Лазарев // Совершенствование расчетов прочности элементов бетонных, железобетонных и каменных конструкций: сб. науч. тр. – Полтава: Полт. НТУ, 2007. – С. 256-264.
138. Лейтес Е. С. К построению теории деформирования бетона, учитывающей нисходящую ветвь деформирования материала / Е. С. Лейтес // Новые исследования элементов железобетонных конструкций: сб. науч. трудов. – М.: НИИЖБ, 1982. – С. 24-32.
139. Лемыш Л. Л. Расчет железобетонных конструкций с использованием полных диаграмм бетона и арматуры / Л. Л. Лемыш // Бетон и железобетон, 1991. – №7. – С. 21-23.
140. Леонтьев Н. Л. Техника статистических вычислений / Н. Л. Леонтьев. – М.: Лесная промышленность, 1966. – 250 с.
141. Лолейт А. Ф. Инструкция для подбора сечений железобетонных элементов по критическим усилиям / А. Ф. Лолейт. – М.: ВНИИТОБ, 1933. – 82 с.
142. Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики / П. А. Лукаш. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
143. Лучко Й. Й. Інженерна методика розрахунку міцності нормальних перерізів армованих бетонополімерних балкових елементів / Й. Й. Лучко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.:НДІБК, 2007. – Вип. 67. – С. 219-230.

144. Маилян Л. Р. Влияние армирования и эксцентриситета сжимающего усилия на деформативность бетона и характер диаграммы сжатия / Л. Р. Маилян // Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона: сб. науч. трудов. – Ростов-на Дону, 1979. – С.70-82.
145. Маилян Л. Р. Градиентные эффекты в железобетонных конструкциях / Л. Р. Маилян, М. Ю. Беккиев. – Нальчик: Изд-во КБГСХА, 2001. – 245 с.
146. Маилян Л. Р. Об использовании в расчетах железобетонных элементов диаграммы « $\sigma - \varepsilon$ » бетонных призм / Л. Р. Маилян, Г. К. Рубен // Совершенствование конструкций сельскохозяйственного строительства на Северном Кавказе: сб. науч. трудов. – Ростов-на-Дону, 1984. – С. 134-138.
147. Маилян Л. Р. Расчет преднапряженных гибких железобетонных колон по деформированной схеме / Л. Р. Маилян // Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона: сб. науч. трудов. – Ростов-на-Дону: РИСИ, 1980. – С. 95-104.
148. Маилян Л. Р. Сопротивление железобетонных статически неопределимых балок силовым воздействиям / Л. Р. Маилян. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1989. – 176 с.
149. Макаренко Л. П. Практический способ определения модуля упругости и упругопластических характеристик бетона при сжатии / Л. П. Макаренко, Г. А. Фенко // Изв. вузов: стр-во и арх-ра. – 1970. – №10. – С. 141–147.
150. Методические рекомендации по уточненному расчету железобетонных элементов с учетом полной диаграммы сжатия бетона / А. Н. Бамбура, В. Я. Бачинский, Н. В. Журавлева, И. Н. Пешкова. – К.: НИИСК Госстроя СССР, 1987. – 25 с.
151. Мирсаяпов И. Т. Оценка сейсмостойкости многоэтажных каркасных зданий с учетом нелинейного поведения конструкций и взаимодействия с основанием / И. Т. Мирсаяпов, Д. М. Нуриева // Известия КГАСУ, 2005, №1(3). – С. 24-27.

152. Митрофанов В. П. До розрахунку граничних значень деформацій бетону у розв'язанні задач міцності нормальних перерізів залізобетонних елементів / В. П. Митрофанов, А. М. Павліков // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПНТУ, 2003. – Вип. 13. – С. 28-33.
153. Митрофанов В. П. Практическое применение деформационной модели с экстремальным критерием прочности железобетонных элементов / В. П. Митрофанов // Коммунальное хозяйство городов. – 2004. – Вып. 60. – С. 29-48.
154. Митрофанов В. П. Предельная сжимаемость бетона нормальных сечений железобетонных элементов / В. П. Митрофанов, С. И. Арцев // Проблемы теории і практики залізобетону: зб. наук. статей. – Полтава: ПДТУ ім. Ю. Кондратюка, 1997. – С. 333-337.
155. Михайлов В. В. Некоторые предложения по описанию диаграммы деформаций бетона при загрузении / В. В. Михайлов, М. П. Емельянов, Л. С. Додулаев, В. М. Митасов // Изв. вузов: стр-во и арх-ра. – 1984. – №2. – С. 23–27.
156. Молодченко Г. А. Исследование процесса трещинообразования в железобетоне при растяжении / Г. А. Молодченко // Строительные конструкции: сб. науч. трудов. – К.: Будівельник, 1972. – Вып. XIX. – С. 80-84.
157. Мости та труби. Правила проектування [Текст] / НТУ, Київсоюзшляхпроект: ДБН В.2.3-14: 2006. – [Чинні від 01.02.07]. – К.: Мінбуд України, 2006. – 217 с.
158. Мулин Н. М. Прочность балок и их деформации в стадии, близкой к разрушению / Н. М. Мулин, Ю. П. Гуца, Т. И. Мамедов // Новое о прочности железобетона. – М.: Стройиздат, 1977. – С. 30-47.
159. Мурашев В. И. Трещиностойчивость, жесткость и прочность железобетона / В. И. Мурашев. – М.: Машстройиздат, 1950.– 268 с.
160. Мурашко Л. А. Розрахунок за міцністю перерізів нормальних та

похилих до поздовжньої осі згинальних залізобетонних елементів за ДБН В.2.6-98: 2009 / Л. А. Мурашко, В. М. Колякова, Д. В. Сморгалов. – Київ: «Київський університет», 2012. – 72 с.

161. Назаренко В. Г. Диаграмма деформирования бетона с учетом ниспадающей ветви / В. Г. Назаренко, А. В. Боровских // Бетон и железобетон. – 1999. – № 2. – С. 18-22.
162. Нелепов А. Р. Прочность преднапряженных стержневых статически неопределимых железобетонных конструкций с внецентренно-загруженными элементами: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Нелепов Александр Романович. – М.: НИИЖБ, 1982. – 273 с.
163. Немировский Я. М. Влияние растянутой и сжатой зон бетона на деформации обычных изгибаемых железобетонных элементов после возникновения в них трещин / Я. М. Немировский, О. И. Кочетков // Особенности деформаций бетона и железобетона и использование ЭВМ для оценки их влияния на поведение конструкций: сб. науч. трудов. – М.: Госстройиздат, 1969. – С. 106-156.
164. Немировский Я. М. Исследование напряженного деформированного состояния железобетонных элементов с учетом работы растянутого бетона над трещинами / Я. М. Немировский // Прочность и жесткость железобетонных конструкций: сб. науч. трудов. – М.: Стройиздат, 1968. – С. 152-173.
165. Немировский Я. М. К расчету деформаций по проекту новых норм / Я. М. Немировский, В. В. Фигаровский, Л. Л. Лемыш // Бетон и железобетон. – 1971. – № 5. – С. 22-23.
166. Немчинов Ю. И. Расчет тонкостенных пространственных систем методом конечных элементов / Ю. И. Немчинов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1976. – №5. – С. 14-17.
167. Несветаев Г. В. К вопросу определения основных констант деформирования бетона / Г. В. Несветаев // Изв. вузов: стр-во и арх-ра. – 1999. – № 5. – С. 136-139.



168. Несветаев Г. В. К определению деформативных свойств бетона при сжатии / Г. В. Несветаев // Бетон и железобетон. – 1994. – №5. – С. 10-11.
169. Несветаев Г. В. Энергетический подход к определению предельной сжимаемости бетона / Г. В. Несветаев, А. П. Коробкин // Изв. вузов: стро-во и арх-ра. – 1995. – № 2. – С. 8-11.
170. Новое о прочности железобетона / А. А. Гвоздев, С. А. Дмитриев, С. М. Крылов [и др.]; под ред. д-ра техн. наук, проф. К. В. Михайлова. – М.: Стройиздат, 1977. – 272 с.
171. Оатул А. А. Основы сцепления арматуры с бетоном / А. А. Оатул // Исследования по бетону и железобетону. – Челябинск, 1967. – № 46. – С. 143-162.
172. Онищик Л. И. Прочность и устойчивость каменных конструкций. Ч.1. Работа элементов каменных конструкций / Л. И. Онищик. – М.-Л.: ОНТИ: НКТП, 1937. – 291 с.
173. Осипов В. К. Определение коэффициента упругопластичности бетона сжатой зоны / В. К. Осипов, В. Г. Акопов // Бетон и железобетон. – 1988. – № 4. – С. 36-37.
174. Остапенко А. Ф. Универсальная зависимость для диаграмм деформирования бетона, арматуры и железобетонных конструкций / А.Ф. Остапенко // Бетон и железобетон. – 1992. – № 7. – С. 23-24.
175. Павліков А. М. Визначення розрахункових значень деформацій бетону стиснутої грані в залізобетонних згинальних елементах / А. М. Павліков // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2005. – Вип.62. – С. 219-224.
176. Павліков А. М. Застосування діаграми стану бетону в розрахунках моменту утворення тріщин / А. М. Павліков, Д. Ф. Федотов // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2010. – Вип.20. – С. 271–276.
177. Павліков А. М. Нелінійна деформаційна модель в інженерних розрахунках міцності залізобетонних елементів / А. М. Павліков, О. В.

- Бойко, Д. Ф. Федоров та ін. // Вісник ОДАБА: зб. наук. праць. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2012. – Вип. №47. – С. 261-268.
178. Павліков А. М. Нелінійна модель напружено-деформованого стану косо завантажених залізобетонних елементів у закритичній стадії: монографія / А. М. Павліков. – Полтава: ПНТУ ім. Юрія Кондратюка, 2007. – 259 с.
179. Панышин Л. Л. Оценка эффективности неупругой деформационной модели при расчете нормальных сечений / Л. Л. Панышин, М. В. Крашенинников // Бетон и железобетон, 2003. – №3. – С. 19-22.
180. Пастернак П. Л. Замечания к проекту новых норм проектирования железобетонных конструкций / П. Л. Пастернак // Строительная промышленность. – 1944. – №7. – С. 20-23.
181. Пекус-Сахновский Д. Н. Исследование устойчивости железобетонных стоек при длительном действии нагрузки / Д. Н. Пекус-Сахновский // Строительные конструкции: сб. науч. трудов.– К.: Будівельник, 1965. – Вып. 1. – С. 120-134.
182. Пересыпкин Е. Н. Механика разрушения армированных бетонов / Е. Н. Пересыпкин // Бетон и железобетон. – 1984. – № 4. – С. 24-25.
183. Писанко Г. Н. Предельная деформативность бетона при сжатии / Г. Н. Писанко, Е. Н. Щербаков // Строительные конструкции. – Киев: Будівельник. – 1971. – Вып.15. – С. 105-109.
184. Попков Ю. В. Напряженно-деформированное состояние сжатых железобетонных конструкций с кососимметричным расположением арматурных стержней в поперечном сечении / Ю. В. Попков, С. К. Ромеро Веларде // Вестник Полоцкого государственного университета: серия F. – 2013. – № 8. – С. 47-53.
185. Портер Э. Г. Исследование ширины раскрытия трещин в растянутых элементах железобетонных стержневых систем / Э. Г. Портер, В. А. Клевцов, Г. И. Бердычевский // Предварительно напряженные железобетонные конструкции производственных зданий и инженерных сооружений: сб. науч. трудов. – М.: Госстройиздат, 1969. – С. 26-42.

186. Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелых и легких бетонов без предварительного напряжения арматуры (к СНиП 2.03.01-84) [Текст]. – М.: ЦИТП, 1986. – 192 с.
187. Расторгуев Б. С. Упрощённая методика получения диаграммы деформирования стержневых элементов в стадии с трещинами / Б. С. Расторгуев // Бетон и железобетон. – 1993. – № 5. – С. 13-15.
188. Рискинд Б. Я. Исследование работы сжатых железобетонных элементов с термически упрочненной арматурой / Б. Я. Рискинд, Г. И. Шорникова // Железобетонные конструкции: сб. науч. трудов. – Челябинск: УралНИИСтромпроект, 1972. – Вып. VI. – С. 42-71.
189. Рискинд Б. Я. Прочность сжатых железобетонных стоек с термически упрочненной арматурой / Б. Я. Рискинд // Бетон и железобетон. – 1972. – №11. – С. 31.
190. Різак В. В. Робота та несуча здатність стиснуто–зігнутих залізобетонних елементів за короткочасного навантаження: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Різак Василь Васильович. – Рівне, 2000. – 175 с.
191. Роговой С. И. Нелинейное деформирование в теории железобетона и расчет прочности нормальных сечений: монография / С. И. Роговой. – Полтава: ПНТУ, 2002. – 183 с.
192. Ромашко В. М. Величина критичних деформацій розтягнутого бетону / В. М. Ромашко, О. В. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції,будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип.18. – С. 304–309.
193. Ромашко В. М. Визначальні особливості деформування бетону в залізобетонних елементах та конструкціях / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП. – 2014. – Вип.29. – С. 334-340.
194. Ромашко В. М. Гранична деформативність бетону в залізобетонних елементах за осьового стиску / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне:

- НУВГП. – 2008. – Вип.16(2). – С. 325-331.
195. Ромашко В. М. Гранична деформативність бетону в позацентрово розтягнутих бетонних елементах / В. М. Ромашко, О. В. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип.2 (46), ч.1. – С. 200–205.
196. Ромашко В. М. Гранична рівновага та граничні стани в деформуванні бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2014. – Вип.28. – С. 284–289.
197. Ромашко В. М. Деформаційно-силова модель опору бетону і залізобетону: монографія / В. М. Ромашко. – Рівне: О. Зень, 2016. – 424 с.
198. Ромашко В. М. Деформування бетону та критерії вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПНТУ, 2014. – Вип. 3 (42), т. 2. – С. 108-114.
199. Ромашко В. М. Деякі особливості визначення моменту утворення нормальних тріщин в бетонних елементах / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2011. – Вип.21. – С. 317-322.
200. Ромашко В. М. Деякі особливості діаграми деформування бетону / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2006. – Вип.14. – С. 294-301.
201. Ромашко В.М. До визначення граничних деформацій бетону / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2006. – Вип.65. – С. 193-198.
202. Ромашко В. М. До моделей нелінійного деформування бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2016. – Вип.33. – С. 200-205.

203. Ромашко В. М. До розрахунку поздовжньоозігнутих залізобетонних елементів / В. М. Ромашко, А. В. Подворний // Вісник УДАВГ: зб. наук. праць. – Рівне: УДАВГ, 1998. – Вип. 1, ч. 2. – С. 171-174.
204. Ромашко В. М. Жорсткість залізобетонних елементів і конструкцій за умов неоднорідного деформування / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2010. – Вип.20. – С. 286-291.
205. Ромашко В. М. Жорсткість та гранична деформативність бетону в позацентрово стиснутих бетонних елементах / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2008. – Вип.70. – С. 229-236.
206. Ромашко В. М. Жорсткість та модуль деформацій бетону в деформаційній моделі / В. М. Ромашко // Бетон и железобетон в Украине. – 2007. – № 6. – С. 2-6.
207. Ромашко В. М. Методика експериментальних досліджень роботи косостиснутих залізобетонних елементів за змінних рівнів навантажень / В. М. Ромашко, С. С. Гомон // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне, 2005. – Вип.12. – С.280-288.
208. Ромашко В. М. Модуль деформацій бетону за дії тривалих та малоциклових навантажень / В. М. Ромашко, О. В. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2008. – Вип. 70. – С. 143-150.
209. Ромашко В. М. Напружено-деформований стан косостиснутих залізобетонних елементів за змінних рівнів тривалого навантаження / В. М. Ромашко, С. С. Гомон // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне, 2000. – Вип.5. – С.258-262.
210. Ромашко В. М. Основи деформаційно-силової моделі залізобетонних елементів і конструкцій / Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2015. – Вип. 30. – С. 247-254.

211. Ромашко В. М. Основи загальної моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип. 3(47), ч.2. – С. 118-123.
212. Ромашко В. М. Основи загальної теорії деформування бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2012. – Вип. 24. – С. 229-234.
213. Ромашко В. М. Основи розрахунку залізобетонних елементів та конструкцій за деформаційно-силовою моделлю їх опору / В. М. Ромашко // Зб. наук. праць УкрДУЗТ. – Харків: УкрДУЗТ, 2017. – Вип. 168. – С. 103-110.
214. Ромашко В. М. Основи теорії тріщиностійкості залізобетонних елементів та конструкцій / В. М. Ромашко // Теорія і практика будівництва: Вісник НУ «Львівська політехніка». – Львів, 2013. – № 755. – С. 357-363.
215. Ромашко В. М. Основи та особливості деформування залізобетонних елементів за відцентрового стиску / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2012.– Вип. 23. – С. 403-409.
216. Ромашко В.М. Особливості деформування відцентрово стиснутих бетонних елементів / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2011.– Вип. 22. – С. 473-478.
217. Ромашко В. М. Особливості деформування залізобетонних елементів з тріщинами / В. М. Ромашко // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПНТУ, 2009. – Вип. 3 (25), т. 3. – С. 153-156.
218. Ромашко В. М. Оцінка роботи розтягнутого бетону в блоці між тріщинами / В. М. Ромашко // Вісник ОДАБА: зб. наук. праць. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. – Вип. №33. – С. 135-139.

219. Ромашко В. М. Повна діаграма деформування бетону в бетонних та залізобетонних елементах / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2007. – Вип. 67. – С. 299-309.
220. Ромашко В. М. Повна діаграма деформування розтягнутого бетону в бетонних та залізобетонних елементах / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип. 18. – С. 296-303.
221. Ромашко В. М. Режими роботи та завантаження стиснутих залізобетонних елементів в реальних умовах / В. М. Ромашко, С. С. Гомон // Вісник УДУВГП: зб. наук. праць. Ч. 3. – Рівне: УДУВГП, 2002. – Вип. 5(18). – С. 47-53.
222. Ромашко В. М. Розрахункова модель утворення тріщин в залізобетонних елементах та конструкціях / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: ДП НДІБК, 2013. – Вип. 78 (ч. 2). – С. 161-168.
223. Ромашко В. М. Розрахунок залізобетонних елементів і конструкцій за деформаційно-силовою моделлю: рекомендації / В. М. Ромашко. – Рівне: НУВГП, 2016. – 126 с.
224. Ромашко В. М. Тріщиноутворення в залізобетонних елементах та конструкціях за загальною моделлю їх деформування / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2013. – Вип. 25. – С. 418-424.
225. Ромашко В. М. Узагальнена діаграма стану бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Вісник ОДАБА: зб. наук. праць. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2015. – Вип. №57. – С. 387-393.
226. Ромашко В. М. Узагальнений критерій вичерпання несучої здатності залізобетонних та сталезалізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПНТУ, 2012. – Вип. 3(33). – С. 202-206.
227. Ромашко В. М. Щодо визначення модуля деформацій бетону / В. М. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2007. –

Вип. 4(40), ч. 2. – С. 292-297.

228. Ромашко В. М. Щодо визначення моменту утворення нормальних тріщин в згинальних залізобетонних елементах / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: ДП НДІБК, 2011. – Вип. 74 (ч. 1). – С. 365-372.
229. Ромашко В. М. Щодо екстремального критерію міцності бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Вісник ОДАБА: зб. наук. праць. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2012. – Вип. 46. – С. 305-310.
230. Ромашко В. М. Щодо параметричних точок діаграми деформування бетону / В. М. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2006. – Вип. 4(36), ч. 1. – С. 207-212.
231. Ромашко В. Н. Жесткость и кривизна железобетонных элементов и конструкций в обобщенной модели их деформирования / В.Н. Ромашко // Methods of effective science-based satisfaction of the increasing social needs in the field of engineering, construction and architecture: Peer-reviewed materials digest (collective monograph) published following the results of the CXXIII International Research and Practice Conference and I stage of the Championship in Technical sciences, Architecture and Construction. (London, May 12 – May 17, 2016). – London: IASHE, 2016. – P. 57-59.
232. Ромашко В. Н. Критерии исчерпания несущей способности железобетонных элементов и конструкций / В. Н. Ромашко // Budownictwo o zoptymalizowanym potencjale energetycznym: Construction of Optimized Energy Potential. – CZĘSTOCHOWA: Politechniki Częstochowskiej, 2015. – №2(16). – s. 75-83.
233. Ромашко В.Н. Обобщенная модель деформирования железобетонных элементов и конструкций / В. Н. Ромашко // International Scientific Journal (Міжнародний науковий журнал), 2016. – № 3. – С. 84-86.
234. Ромашко В. Н. Прогибы железобетонных элементов и конструкций по обобщенной модели их деформирования / В. Н. Ромашко // Solving



problems of optimal combination of standards of quality, innovative technical solutions and comfort of operation when developing and producing devices and construction objects: Peer-reviewed materials digest (collective monograph) published following the results of the CXXX International Research and Practice Conference and II stage of the Championship in Technical sciences, Architecture and Construction (London, September 13 – September 19, 2016). – London: IASHE, 2016. – P.41-45.

235. Ромашко В. Н. Расчет прогибов сложнодеформирующихся железобетонных элементов и конструкций / В. Н. Ромашко // Міжнародний науковий журнал (International Scientific Journal), 2016. – №10(20), 1 т. – С. 126-129.
236. Саврасов И. П. Прочность, трещиностойкость и деформативность изгибаемых железобетонных элементов, армированных сталью класса А500 с различным периодическим профилем: автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / И. П. Саврасов. – М.: ОАО НИЦ «Строительство», 2010. – 22 с.
237. Сахаров А. С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров и др. – Киев: Вища школа, 1982. – 480 с.
238. Сборные железобетонные конструкции из высокопрочного бетона / В. А. Беликов, Ю. П. Гуца [и др.]; под ред. А.В Васильева, НИИЖБ. – М.: Стройиздат, 1976. – 184 с.
239. Семко А. В. Учет значительной изменчивости геометрических параметров в расчете сталежелезобетонных конструкций / А. В. Семко // Бетон и железобетон в Украине. – 2001. – №2(6). – С.20-22.
240. Серых Р. Л. К вопросу об определении параметра упругопластических свойств бетона при длительном действии нагрузки / Р. Л. Серых, О. Ф. Ильин // Работоспособность строительных материалов в условиях воздействия различных эксплуатационных факторов: межвуз. сб. науч. трудов. – Казань, 1980. – С. 49-51.
241. Симейко В. В. К расчёту гибких сжатых железобетонных стержней с

- учётом переменной жёсткости по их длине / В. В.Симейко, М. П. Виланов // Строительные изделия, конструкции и сооружения. – Том I. – М.: Стройиздат, 1974. – С. 56-68.
242. Соломенцев Г. Г. О закономерностях продольного деформирования бетона при осевом сжатии / Г. Г. Соломенцев // Бетон и железобетон. – 1971. – №4. – С. 2-4.
243. СНБ 5.03.01-02. Конструкции бетонные и железобетонные. – Мн.: Стройтехнорм, 2003. – 144 с. – (Стандарт Білорусіі).
244. СНиП 2.03.01–84\*. Бетонные и железобетонные конструкции: нормы проектирования. – М.: Госстрой СССР, 1989. – 80 с.
245. СНиП 2.05.03-84\*. Мосты и трубы. – М.: Стройиздат, 1991. – 244 с.
246. СНиП 2.06.08-87. Бетонные и железобетонные конструкции гидротехнических сооружений/ Минэн ерго СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР. 1988. – 32 с.
247. СНиП II-21-75. Бетонные и железобетонные конструкции: нормы проектирования. – М.: Стройиздат, 1976. – 92 с.
248. СП 52–101–2003. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. – М.: ЦПП НИИЖБ, 2004. – 53 с. – (Стандарт Росіі).
249. Столяров Я.В. Введение в теорию железобетона / Я. В. Столяров. – М.–Л.: Стройиздат. – 1941. – 447 с.
250. Таль К. Э. Исследование несущей способности гибких железобетонных колонн, работающих по первому случаю внецентренного сжатия / К. Э. Таль, Е. А. Чистяков // Расчёт железобетонных конструкций. Экспериментально-теоретические исследования по усовершенствованию расчёта: труды НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1961. – Вып. 23. – С. 127-195.
251. Таль К. Э. Экспериментальное исследование гибких железобетонных стержней при длительном нагружении / К. Э. Таль, Е. А. Чистяков // Исследование прочности, жесткости и трещиностойкости

- железобетонных конструкций: труды НИИЖБ. – М.: Госстройиздат, 1962. – Вып. 26. – С. 30-58.
252. Тихий М. Расчет железобетонных рамных конструкций в пластической стадии. Перераспределение усилий / М. Тихий, Й. Ракошник; пер. с чешс. Б. М. Сергеенко. – М.: Стройиздат, 1976. – 198 с.
253. Торяник М. С. Расчет железобетонных конструкций при сложных деформациях / М. С. Торяник и др.; под ред. М. С. Торяника. – М.: Стройиздат, 1974. – 295 с.
254. Туркалов Б. Ф. К вопросу о расчете стержневых железобетонных элементов с учетом полных диаграмм деформирования материалов / Б. Ф. Туркалов, Б. Таинг // Бетон и железобетон. – 2004. – № 5. – С. 23-27.
255. Узун И. А. Трансформирование диаграммы деформирования бетона при сжатии / И. А. Узун // Изв. вузов: стр-во и арх-ра. – 1991. – №11. – С.7-12.
256. Уманский А. А. Специальный курс строительной механики. Ч.1: Балки переменного сечения. Балки на упругом основании. Решение линейных уравнений. Справочные таблицы / А. А. Уманский. – М. – Л: ОНТИ, 1935. – 238 с.
257. Федоренко М. М. Про утворення тріщин і роботу розтягнутого бетону між тріщинами в елементах залізобетонних конструкцій / М. М. Федоренко // Будівельні матеріали і конструкції. – 1968. – №4. – С.39-46.
258. Федоров В. С. Расчетные модели в теории железобетона / В. С. Федоров, В. Е. Левитский // Перспективы развития строительного комплекса. – 2014. – С. 268-279.
259. Фесик С. П. Справочник по сопротивлению материалов / С. П. Фесик – К.: Будівельник, 1982. – 280 с.
260. Фомица Л. Н. Измерение напряжений в железобетонных конструкциях / Л. Н. Фомица, Р. А. Сумбатов.– К.: Будівельник, 1994. – 168 с.
261. Фомин С. Л. Инженерные деформационные методы расчета прочности железобетонных элементов / С. Л. Фомин, П. А. Резник // Будівельні конструкції. – 2013. – Вип. 78(1). – С. 504-519.

262. Хакимов Ш. А. Особенности трещинообразования в балках с различной толщиной защитного слоя бетона / Ш. А. Хакимов // Воздействие статических, динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций: сб. науч. трудов. – М.: Стройиздат, 1972. – С. 65-85.
263. Холмянский М. М. К механизму деформирования и разрушения бетона при сжатии и растяжении / М. М. Холмянский // Бетон и железобетон. – 1989. – № 9. – С. 25-26.
264. Холмянский М. М. Контакт арматуры с бетоном / М. М. Холмянский. – М.: Стройиздат, 1981. – 184 с.
265. Холмянский М. М. О процессе деформирования бетона и развития одиночных поперечных трещин или разрезов при внецентренном сжатии бетонных элементов / М. М. Холмянский // Бетон и железобетон. – 1998. – № 3. – С. 15–18, – № 4. – С. 25–27.
266. Цыба О. О. Трещиностойкость и деформативность растянутого бетона с ненапрягаемой и напрягаемой стержневой арматурой, имеющей различную относительную площадь смятия поперечных ребер: автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / О. О. Цыба. – М.: ОАО НИЦ «Строительство», 2011. – 24 с.
267. Чайка В. П. Особенности деформирования тяжелого бетона при неоднородном кратковременном сжатии / В. П. Чайка // Бетон и железобетон. – 1987. – №1. – С. 42-43.
268. Чайка В. П. Оценка прочности и деформативности бетона при сжатии с градиентом напряжений / В. П. Чайка // Изв. вузов: стр-во и арх-ра. – 1970. – № 10. – С. 3-6.
269. Чеканович М. Г. Обґрунтування моделі повної діаграми роботи бетону / М. Г. Чеканович // Бетон и железобетон в Украине. – 2008. – №1. – С. 19-26.
270. Чистяков Е. А. О деформативности бетона при внецентренном сжатии железобетонных элементов / Е. А. Чистяков // Прочность, жёсткость и

- трещиностойкость железобетонных конструкций: труды НИИЖБ. – М.: Стройиздат, 1979. – С. 108-125.
271. Чистяков Е. А. Прочность и деформации сжатых элементов с косвенным Армированием / Е. А. Чистяков, К. К. Бакиров // Новое о прочности железобетона. – М.: Стройиздат, 1977. – С. 47-60.
272. Чистяков Е. А. Расчет гибких сжатых железобетонных стержней с приближённой оценкой изменения кривизны по их длине / Е. А. Чистяков, И. А. Нисканен // Влияние скорости нагружения, гибкости и крутящих моментов на прочность железобетонных конструкций: сб. трудов НИИЖБ. – М.: Стройиздат, 1970. – С. 111-125.
273. Чубриков В. М. Результаты исследований работы бетона на срез со сжатием и их применение к расчету коротких железобетонных консолей / В. М. Чубриков // Вопросы современного строительства: Вестник Львов. политех. ин-та, вып. 19. – Львов, 1967. – С. 30-35.
274. Шамурадов Б. Ш. Ширина раскрытия нормальных трещин в железобетонных элементах: автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Б. Ш. Шамурадов. – Киев, 1987. – 19 с.
275. Шейкин А. Е. К вопросу прочности, упругости и пластичности бетона / А. Е. Шейкин // Строительная механика и мосты: труды МИИТ. – М.: Трансжелдориздат, 1946. – Вып. 69. – С. 66-69. – С. 48-52.
276. Шкурупий А. А. Расчет железобетонных элементов с переменной жесткостью при косом сжатии методом начальных параметров / А. А. Шкурупий // Бетон и железобетон в Украине. – 2000. – № 1. – С. 17-21.
277. Шмуклер В. С. К упрощению нелинейного расчета железобетонных элементов / В. С. Шмуклер // Бетон и железобетон в Украине. – 2012. – Вып. №4 – С. 17-20.
278. Шмуклер В. С. Учет полной диаграммы  $\sigma_c - \varepsilon_c$  в алгоритме расчета железобетонных элементов / В. С. Шмуклер, И. Я. Лучковский // Будівельні конструкції: зб. наук, праць. – К.: НДІБК, 2003. – Вип.59. – С. 143-150.

279. Шмуклер В. С. Формирование расчетных моделей в условиях регулирования напряженно-деформированным состоянием конструкции / В. С. Шмуклер, А. С. Городецкий // Коммунальное хозяйство городов. – 2002/6/20, № 39. – С. 36-42.
280. Щербаков Е. Н. К оценке величин модуля упругости бетона и раствора / Е. Н. Щербаков // Бетон и железобетон, 1970. – № 3. – С. 32-35.
281. Яременко А. Ф. О применении диаграмм деформирования материалов к расчету строительных конструкций / А. Ф. Яременко, Е. А. Яременко // Бетон и железобетон в Украине. – 2004. – № 2. – С. 8-12.
282. Яременко Е. А. Диаграммы деформирования бетона и каменной кладки / Е. А. Яременко // Бетон и железобетон в Украине. – 2001.–№ 1.– С.10-13.
283. Яшин А. В. Некоторые данные о деформациях и структурных изменениях бетона при осевом сжатии / А. В. Яшин // Новое о прочности железобетона: сб. науч. трудов, [А. А. Гвоздев, С. А. Дмитриев, С. М. Крилов и др.]; под ред. К.В.Михайлова. – М.: Стройиздат, 1977. – С. 3-45.
284. Яшин А. В. О некоторых деформативных особенностях бетона при сжатии / А. В. Яшин // Теория железобетона: сб. науч. трудов. – М.: Стройиздат, 1972. – С. 131-137.
285. Ящук В. Е. К описанию диаграмм сжатия и разгрузки бетона / В. Е. Ящук // Изв. вузов: стр-во и арх-ра. – 1982. – №3. – С. 5-11.
286. Ящук В. Е. О прочности и деформациях бетона при растяжении / В. Е. Ящук, П. Г. Курган // Изв. вузов: стр-во и архитектура. – 1980. – №11. – С. 31-36.
287. AASHTO. Standard specifications for highway bridges, 16th Edition. – Washington: American Association of State Highway and Transportation Officials, D.C., 1996. – 677 p.
288. Achintha, P. M. M. Moment-Curvature and Strain Energy of Beams with External Fiber-Reinforced Polymer Reinforcement / P. M. M. Achintha, C. J. Burgoyne // ACI Structural Journal, Vol. 106, № 1, Januar-Februar 2009. – P.

20-29.

289. ACI Committee 224. Cracking of concrete members in direct tension: ACI 224.2R-86 // ACI Journal, 1986, Vol.84, № 1. – P. 3-13.
290. ACI Committee 224. Control of Cracking in Concrete Structures: ACI 224R-01. – ACI, Farmington Hills, Michigan, 2001. – 46 p. – (Стандарт США).
291. ACI Committee 435. Control of Deflection in Concrete Structures: ACI 435R-95. – ACI, Farmington Hills, Michigan, 2003. – 77 p. – (Стандарт США).
292. ACI Committee 435. Deflection of Reinforced Concrete Flexural Members // ACI Journal, Proceedings Vol. 63, №6, Part 1, June 1966. – P. 637-674.
293. ACI Committee 440. Guide for the Design and Construction of Concrete Reinforced with FRP Bars: ACI 440.1R-03. – ACI, Farmington Hills, Michigan, 2003. – 42 p. – (Стандарт США).
294. ACI Committee 440. Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars: ACI 440.1R-06. – ACI, Farmington Hills, Michigan, 2006. – 44 p. – (Стандарт США).
295. ACI 318-11. Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. – ACI, Farmington Hills, Michigan, 2011. – 497 p. – (Стандарт США).
296. ACI 318–95. Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary. – ACI, Farmington Hills, Michigan, 1996. – 369 p. – (Стандарт США).
297. Agrawal, G. L. Response of Doubly Reinforced Concrete Beams to Cyclic Loading / G. L. Agrawal, L. G. Tulin, K. H Gerstle// ACI Journal, Proceedings, Vol. 62, №7, July 1965. – P. 823-835.
298. Ahmad, S. H. Stress-strain curves of concrete confined by spiral Reinforcement / S. H. Ahmad, S. P. Shah // ACI Journal, Proceedings, Vol. 79, № 6, November-December 1982. – P. 484-490.
299. Almusallam, T. H. Stress-strain relationship of normal, hight and lightweight concrete / T.H. Almusallam, S.H. Alsayed // Magazine of Concrete Research,

Vol. 47, №170, 1995. – P.39-44.

300. Al-Zaid, R. Z. Effect of Loading Type on the Effective Moment of Inertia of Reinforced Concrete Beams / R. Z. Al-Zaid, A. H. Al-Shaikh, M. M. Abu-Hussein // *ACI Structural Journal*, Vol. 88, №2, 1991. – P. 184-190.
301. Araújo, J. M. Improvement of the ACI method for calculation of deflections of reinforced concrete beams / J. M. Araújo // *Teoria e Prática na Engenharia Civil*, №7, Setembro 2005. – P. 49-60.
302. Ashour, S. A. Effect of compressive strength and tensile reinforcement ratio on flexural behavior of high-strength concrete beams / S. A. Ashour // *Engineering Structures*, Vol. 22, 2000. – P. 413-423.
303. AS 3600-2001. Australian Standard™: Concrete Structures // Standards Association of Australia. – Sydney, 2001. – 181 p. – (Стандарт Австралії).
304. Attard, M. M. Stress-strain relationship of confined and unconfined concrete / M. M. Attard, S. Setunge // *ACI Materials Journal*, Vol. 93, №5, 1996. – P. 432-442.
305. Bach, G. Untersuchungen von Granit inbezug auf Zug-, Druck-, Biegungs- und Schubfestigkeit, sowie in Hinsicht auf Zug-, Druck- und Biegungselastizität / G. Bach // *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, Band XXXXI, № 9, Februar 1897. – P. 241-252.
306. B. A. E. L. 91: règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé, suivant la méthode des états limites. – Paris: Eyrolles, 1992. – 308 p. – (Стандарт Франції).
307. Baes, L. Compression simple et flambement des piliers en béton armé / L. Baes, L. Vandperre // *Congrès International pour l'essai des matériaux*, (Amsterdam, 12–17 Septembre, 1927). – La Haye Martinus Nijhoff, 1928. – P. 18-31.
308. Balazs, G. L. Cracking Analysis Based on Slip and Bond Stresses / G. L. Balazs // *ACI Materials Journal*, Vol. 90, № 4, 1993. – P. 340-348.
309. Base, G. D. Control of Flexural Cracking in Reinforced Concrete, *Civil Engineering Transactions* / G. D. Base // *The Institution of Engineers*



- Australia, Vol. CE18, №1, 1976. – P. 20-23.
310. Bazant, Z. P. Deformation of Progressively Cracking Reinforced Concrete Beams / Z. P. Bazant, B. H. Oh // ACI Journal, Vol. 81, № 3, May-June 1984. – P. 268-278.
311. Beeby, A. W. Prediction and Control of Flexural Cracking in Reinforced concrete Members: Cracking, Deflection and Ultimate Load of Concrete Slab Systems, SP-20 / A. W. Beeby // ACI, Farmington Hills, Michigan, 1971. – P. 55-75.
312. Beeby, A. W. Short-term Deformations of Reinforced Concrete Members. Cement and Concrete Association / A. W. Beeby // Technical Report TRA 408. – London, March 1968. – 32 p.
313. Beeby, A. W. The Prediction of Crack Widths in Hardened Concrete / A. W. Beeby // Structural Engineer (UK), Vol. 57A, №1, January 1979. – p. 9-17.
314. Belarbi, A. Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete / A. Belarbi, T. T. C. Hsu // ACI Structural Journal , Vol. 91, №4, 1994. – P. 465-474.
315. Belarbi, A. Stirrup Stresses in Reinforced Concrete Beams / A. Belarbi, T. T. C. Hsu // ACI Structural Journal, Vol. 87, №5, September-October 1990. – P. 530-538.
316. Benmokrane, B. Flexural response of concrete beams reinforced with FRP reinforcing bar / B. Benmokrane, O. Chaallal, R. Masmoudi // ACI Structural Journal, Vol. 93, №1, 1996. – P. 46-55.
317. Bentz, E. Response 2000, Shell 2000, Triax 2000 and Membrane 2000: User Manual / E. Bentz, M. P. Collins. – University of Toronto: Toronto, September 2001. – 85 p.
318. Bernardi, S. Study of high-strength concretes reinforced with high-strength reinforcement: study of bonding laws and cracking in static system / S. Bernardi, B. Mesureur, P. Rivillon // ACI Materials Journal, Vol. 96, № 4, 1999. – P. 491-499.
319. Bernardo, L. F. A. Neutral Axis Depth versus Flexural Ductility in High-

- Strength Concrete Beams / L. F. A. Bernardo, S. M. R. Lopes // ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 130, №3, March 2004. – P. 425-459.
320. Bernoulli, J. Veritable hypothese de la resistance des solides avec la demonstration de la courbure des corps qui font ressort / J. Bernoulli // Histoire de l'Académie des sciences de Paris, Vol. 2, 1705.– P. 176-186.
321. Bischoff, P. H. Deflection calculation of FRP reinforced concrete beams based on modifications to the existing Branson equation / P. H. Bischoff // Journal of Composites for Construction, Vol.11, №1, 2007. – P. 4-14.
322. Bischoff, P. H. Reevaluation of deflection prediction for concrete beams reinforced with steel and fiber reinforced polymer bars / P. H. Bischoff // Journal Structures Engineering, Vol.131, №5, 2005. – P. 752-767.
323. Bloxham, J. W. Investigation of the flexural properties of reinforced concrete beams strengthened by externally bonded steel plates: Thesis ... the Degree of Doctor of Philosophy in the Faculty of Engineering / John W. Bloxham. – 1980. – 285 p.
324. Boukendakdji, M. Stress-strain behaviour of slag cement concrete / M. Boukendakdji // Int. J. of GEOMATE, Vol. 7, № 1 (Sl. №13), September 2014. – P. 974-979.
325. Braam, C. R. The Cracking Behaviour of Reinforced Concrete Structures / C.R. Braam // Annual Report of Delft University, Vol.1, 1990. – P. 1-17.
326. Brandtzaeg, A. Der Bruchspannungszustand und der Sicherheitsgrad von rechteckigen Eisenbetonquerschnitten unter Biegung oder aussermittigen Druk / A. Brandtzaeg // Norges Tekniske Høiskole, Avhandlingar til 25-arsjubillet 1935. – P. 667-764.
327. Branson, D. E. Deflection of reinforced concrete flexural members / D. E. Branson // ACI Journal, Vol. 63, №6, 1966. – P. 637-674.
328. Branson, D. E. Deformation of Concrete Structures / D. E. Branson. – McGraw-Hill Book Co., New York, 1977. – 546 p.
329. Branson, D. E. Instantaneous and Time-Dependent Deflections of Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams / D. E. Branson // HPR Report No. 7,

- Part 1, Alabama Highway Department, U. S. Bureau of Public Roads, Auburn University, August 1965. – P. 1-78.
330. Boms, B. B. Crack width and crack spacing in reinforced concrete members / B. B. Boms // ACI Journal, Vol. 62, №10, 1965. – P. 1237-1256.
331. Boms, B. B. Effects of arrangement of reinforcement on crack width and spacing of reinforced concrete members / B. B. Boms, L. A. Lutz // ACI Journal, Vol. 62, №11, 1965. – P. 1395-1409.
332. Bruggeling, A. S. G. Structure concrete: Theory and its application / A. S. G. Bruggeling. – Rotterdam, Netherlands; Brookfield, VT: A. A. Balkema, 1991. – 470 p.
333. BS 8007:1987. Code of practice for: Design of concrete structures for retaining aqueous liquids. – London: British Standard Institution, 1987. – 39 p. – (Британський стандарт).
334. BS 8110-1:1985. British Standard. Structural use of Concrete. Part 1: Code of Practice for design and Construction. – London: British Standard Institution. 1985. -210 p. – (Британський стандарт).
335. BS-8110-1:1997. British Standard. Structural use of Concrete. Part 1: Code of Practice for design and Construction. – London: British Standard Institution, 2005. –159 p. – (Британський стандарт).
336. Buelfinger, G. B. De solidorum resistentia specimen / G. B. Buelfinger // Commentarii Academiae Scientiarum imperialis Petropolitanae ad annum 1729. – Petroli. – 1735. – T. IV. – P. 164-181.
337. Building Code Requirements for Environmental Engineering Concrete Structures (ACI 350R-01) and Commentary (ACI 350R-01): An ACI Standard. – ACI, Detroit, Michigan, 2001. – 387 p.
338. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05) and Commentary (ACI 318R-05). – ACI, Detroit, Michigan, 2005. – 430 p.
339. Burns, C. Serviceability Analysis of Reinforced Concrete Based on the Tension Chord Model: Dissertation ETH № 19979. A dissertation ... the degree of Doctor of Sciences / Clare Burns. – Eidgenössischen Technischen

- Hochschule Zürich, 2011. – 149 p.
340. Burns, N. H. Load-deformation characteristics of beam-column connections in reinforced concrete: A report of a research project / N. H. Burns, C. P. Siess. – University of Illinois, Urbana, Illinois, January 1962. – 261 p.
341. Burns, N. H. Plastic Hinging in Reinforced Concrete / N. H. Burns, C. P. Siess // Proceedings ASCE, Vol. 92, ST5, October 1966. – P. 45-64.
342. Calabrese, A. Numerical issues in distributed inelasticity modeling of RC frame elements for seismic analysis: A Dissertation ... the Master Degree in Earthquake Engineering / Calabrese Armando. – Istituto Universitario di Studi Superiori di Pavia. – 2008. – 132 p.
343. CAN3-A23.3-M94. Design of Concrete Structures for Buildings. – Canadian Standards Association (CSA), Toronto, Ontario, Canada, 1994. – 199 p. – (Стандарт Канади).
344. Carreira, D. J. Stress-Strain Relationship for Plain Concrete in Compression / D. J. Carreira, K. H. Chu // ACI Journal, Proceedings, Vol. 82, 1985. – P. 797-804.
345. Carreira, D. J. Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension / D. J. Carreira, K. H. Chu // ACI Journal, Vol. 80, №1, January-February 1986. – P. 21-28.
346. CEB-FIP. International recommendations for the design and construction of concrete structures // FIP Sixth Congress. Prague English Edition, June 1970. – 80 p.
347. CEB-FIP Model Code for Concrete Structures. – Comité Euro-International du Béton, Paris, France, 1978. – 348 p.
348. CEB-FIP Model Code 1990: Design Code. – Comité Euro-International du Béton, Lausanne, Switzerland, 1993. – 437 p.
349. Çelik, T. Nonlinear Analysis of RC Frames and Calculations of Failure Loads / T. Çelik // Tubitak 7-th Science Congress: Engineering Research Group Bulletin. – Aydın, 1980. – P. 1069-1081.
350. Chambaud, R. Etude expérimentale de la flexion dans les pièces en béton

- Arme / R. Chambaud // Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, №61 Beton, Beton Arme №4. – Paris, Feb.1949. – 36 p.
351. Chan, Simon H. C. Bond and cracking of reinforced concrete: PhD Thesis ... / Chan Simon Hang Chi. – Cardiff University, March 2012. – 171 p.
352. Chan, W. W. L. The Ultimate Strength and Deformation of Plastic Hinges in Reinforced Concrete Frameworks / W. W. L. Chan // Magazine of Concrete Research (London), Vol.7, № 41, November 1955. – P. 121-132.
353. Charkas, H. Rigorous Procedure for Calculating Deflections of Fiber-Reinforced Polymer-Strengthened Reinforced Concrete Beams / H. Charkas, H. A. Rasheed, H. Melhem // ACI Structural Journal, Vol. 100, № 4, July-August 2003. – p. 529-539.
354. Chen, M. Flexural Strength Design of RC Beams with Consideration of Strain Gradient Effect / M. Chen, J. C. Ming Ho // World Academy of Science: Engineering and Technology International Journal of Civil, Architectural, Structural and Construction Engineering, Vol.8, № 6, 2014. – P. 726 –732.
355. Chi, M. Flexural cracks in reinforced concrete beams / M. Chi, A. F Kirstein // ACI Journal, Proceedings, Vol. 54, April 1958. – P. 865-878.
356. Chowdhury, S. H. A new formula for prediction of crack widths in reinforced and partially prestressed concrete beams / S. H. Chowdhury, Y. C. Loo // Advances in Structural Engineering, Vol. 4, № 2, 2001. – P. 101-110.
357. Chowdhury, S. H. Cracking and damping in reinforced high strength concrete beams / S. H. Chowdhury, Y. C. Loo // Proceedings 18th Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials (ACMSM 18), (University of Western Australia, Perth, Australia, 1-3 December 2004), Vol. 2, 2004. – P. 749-754.
358. Chowdhury, S. H. Crack width formula for reinforced and partially prestressed concrete beams / S. H. Chowdhury, Y. C. Loo // Proceedings International Conference on Maintenance and Durability of Concrete Structures, (JNT University, Hyderabad, India, March 4-6, 1997). – 1997. – P. 46-51.

359. Çiftci, G. K. Nonlinear analysis of reinforced concrete frame structures: in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Civil Engineering / Güçlü Koray Çiftci. – January 2013. – 57 p.
360. Clark, A. P. Cracking in reinforced concrete flexural members / A. P. Clark // ACI Journal, Proceedings, Vol. 52, № 8, April 1956. – P. 851-862.
361. Clebsch, A. R. F. Theorie der Elasticitaet fester Koerper / A. R. F. Clebsch. – Leipzig: Druck und Verlag von B.G. Teuberg, 1862. – 424 s.
362. Coleman, J. Localization on issues in force-based frame elements / J. Coleman, E. Spacone // Journal of Structural Engineering, Vol. 127, №11, 2001. – P. 1257-1265.
363. Collins, M. P. Prestressed Concrete Structures / M. P. Collins, D. Mitchell. – Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991. – 766 p.
364. Collins, M. P. Structural Design Considerations for High-Strength Concrete / M. P. Collins, D. Mitchell, J.G. MacGregor // Concrete International, ACI, Vol. 15, № 5, May 1993. – P. 27-34.
365. Concrete Structures: National Building Code of Finland RakMK B4, 1983. – Suomen betoniyhdistys, 152 p. – (Стандарт Фінляндії).
366. Çoşgun, T. Non-Linear and Failure Load Analysis of Reinforced Concrete Frames / T. Çoşgun, B. Sayin // Study of Civil Engineering and Architecture (SCEA), Vol. 2, Issue 3, September 2013. – P. 66-76.
367. Creazza, G. Bending Moment-Mean Curvature Relationship With constant Axial Load in the Presence of Tension Stiffening / G. Creazza, R. Di Marco // Materials and Structures, Paris, France, № 26, 1993. – P. 196-206.
368. Creazza, G. Tension stiffening in reinforced concrete elements / G. Creazza, R. Di Marco // IABSE reports = Rapports AIPC = IVBH Berichte, № 62, 1991. – P. 147-152.
369. CSA-S474-04. Concrete Structures. – Canadian Standards Association (CSA), Mississauga, Ontario, Canada, 2004. – 68 p. – (Стандарт Канади).
370. Daugevičius, M. Deflection analysis of reinforced concrete beams strengthened with carbon fiber reinforced polymer under long-term load

- action / M. Daugevičius, J. Valivonis, G. Marčiukaitis // Journal of Zhejiang University (Applied Physics & Engineering), vol.13, №8, 2012. – P. 571-583.
371. Dawood, N. An Analytical Model for Crack Spacing of Thick Reinforced Concrete Plates / N. Dawood, H. Marzouk // Journal Engineering Structures, Vol. 32, № 2, 2010. – P. 472-482.
372. De Nicolo, B. Strain of concrete at peak compressive stress for a wide range of compressive strength / B. De Nicolo, L. Pani, E. Pozzo // Materials and Structures, Vol. 27, №168, May 1994. – P. 206-210.
373. Desayi, P. Determination of Maximum Crack Width in Two-Way Reinforced Concrete Slabs / P. Desayi, A. B. Kulkarni // Proceedings of the Institution of Civil Engineers (London), Vol. 61, № pt 2, 1976. – P. 343-349.
374. Desayi, P. Equation of the stress–strain curves of Concrete / P. Desayi, S. Krishnan // ACI Journal, Vol. 61, №3, 1964. – P. 345-350.
375. DIN 1045. Beton und Stahlbeton. Bemessung und Ausführung. – Berlin: Beuth Verlag GmbH, 1997. – 143 s. – (Німецький стандарт).
376. DIN 1045-1: 2008-08. Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 1: Bemessung und Konstruktion: – Berlin: Beuth Verlag GmbH, 2008. –178 s. – (Німецький стандарт).
377. Emperger, F. Der Beiwert  $n=15$  und die zulässigen Biegespannungen / F. Emperger // Beton und Eisen, Vol. 30, №19, 1931. – P. 340–346.
378. Ernst, G. C. Plastic hinging at the intersection of beams and columns / G. C. Ernst // ACI Journal, Vol. 28, № 12, (Journal Proceedings, Vol. 53), June 1957. – P. 1119-1144.
379. Ersoy, U. Moment–curvature relationship of confined concrete / U. Ersoy, G. Ozcebe // Teknik Dergi, vol. 9, №. 4, 1998. – P. 1799-1827.
380. Espion, B. Moment curvature relationship of reinforced concrete sections under combined bending and normal force / B. Espion, P. Halleux // Materials and Structures, Paris, France, vol. 21, 1988. – P. 341-351.
381. Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules and Rules for Buildings: ENV 1992-1-1. – Brussels: CEN. – 2001. – 274 p. –

(Європейський стандарт).

382. Eurocode 2: Design of Concrete Structures. – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings: EN 1992-1-1, (Final Draft, December, 2004). – Brussels: CEN. – 2004. – 225 p. – (Європейський стандарт).
383. Everard, N. J. Ultimate Strength Design Service – ability. A Unified Method on Reinforced Concrete Bridge Design: Monograph / N. J. Everard // Proceedings International Symposium on Bridge Design (Toronto, Ontario, Canada). – ACI Special Publication, 1969. – P. 385-405.
384. Fantilli, A. P. Flexural Deformability of Reinforced Concrete Beams / A. P. Fantilli, D. Ferretti, I. Iori, P. Vallini // Journal of Structural Engineering, Vol. 124, №9, September 1998. – P. 1041-1049.
385. Favre, R. Effets différés, fissuration et déformations des structures en béton / R. Favre, M. Koprna, A. Radojicic // Edition Georgi, EPFL – CEBAP, St Saphorin, Suisse, 1980. – 210 p.
386. Faza, S. S. Pre- and Post-Cracking Deflection Behavior of Concrete Beams Reinforced with Fiber-Reinforced Plastic Rebars / S. S. Faza, H. V. S. Ganga Rao // Proceedings of The First International Conference on the Use of Advanced Composite Materials in Bridges and Structures. – Canadian Society for Civil Engineering, Montreal, Canada, 1992. – P. 151-160.
387. Fehling, E. Zur Rissbreiten Beschränkung im Stahlbetonbau / E. Fehling, G. König // Beton- und Stahlbetonbau. – 1988, №6. – S.161-167; – 1988, №7. – S. 199-204.
388. Ferry-Borges, J. Cracking and Deformability of Reinforced Concrete Beams / J. Ferry-Borges // International Association for Bridge and Structural Engineering Publications, Zürich, Vol. 26, 1966. – P. 75-95.
389. Fikry, A. M. Development of a Model for the Effective Moment of Inertia of One-Way Reinforced Concrete Elements / A. M. Fikry, C. Thomas // ACI Structural Journal, Vol. 95, №4, July-August 1998. – P. 444-455.
390. Frank, E. Der Einfluss veränderlichen Querschnitts auf die Biegemomente kontinuierlicher Träger, unter besonderer Berücksichtigung von



- Betoneisenkonstruktionen / E. Frank // Beton und Eisen, Vol. 5, №12, 1906. – P. 315-318.
391. Frosch, R. J. Another Look at Cracking and Crack Control in Reinforced Concrete / R. J. Frosch // ACI Structural Journal, Vol. 96, № 3, 1999. – P. 437-442.
392. Gelfi, P. Local moment-curvature relationship for rc beams under bending and shear. Experimental analysis by means of moire method / P. Gelfi, E. Giuriani // Atti del X Convegno Nazionale A. I. A. S., Universita del la Calabria, Cosenza, Italy, 1982. – P. 625-640.
393. Gergely, P. Maximum Crack Width in Reinforced Concrete Flexural Members: Causes, Mechanism and Control of Cracking in Concrete, SP-20 / P. Gergely, L. A. Lutz // American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 1968, – P. 87-117.
394. Gerstner, F. J. R. Handbuch der Mechanik. Band 1: Mechanik fester Körper / F. J. R. Gerstner. – Prag: 1831. – 663 p.
395. Ghali, A. Deflection of Reinforced Concrete Members: A Critical Review / A. Ghali // ACI Structural Journal, Vol. 90, №4, July-August 1993. – P. 364-373.
396. Gilbert, R. I. An Experimental Study of Flexural Cracking in Reinforced Concrete Members under Sustained Loads / R. I. Gilbert, S. Nejadi // UNICIV Report, № R-435, School of Civil and Environmental Engineering, University of New South Wales, Sydney, 2004, – 59 p.
397. Gilbert, R. I. Tension stiffening in reinforced concrete slabs / R. I. Gilbert, R. E. Warner // J. Struct. Div., ASCE, Vol. 104, №12, 1978. – P. 1885-1900.
398. Giuriani, E. Relationships between local and average moment-curvature for a RC beam under increasing and repeated imposed curvatures – Experimental research by means of the Moire method with superimposed grids / E. Giuriani, C. Sforza // Studi e Ricerche, Politecnico di Milano, Milan, Italy, 3, 1981. – P. 177-204.
399. Grossman, J. S. Simplified Computations for Effective Moment of Inertia and

- Minimum Thickness to Avoid Deflection Computations / J.S. Grossman // ACI Journal, Vol.78, №6, November-December 1981. – P.423-434.
400. Guan, G.X. Comparison of Moment-Curvature Models for Fiber-Reinforced Polymer Plate-End Debonding Studies Using Energy Balance Approach / G. X. Guan, C. J. Burgoyne // ACI Structural Journal, № 111-S03, January-February 2014. – P. 27-36.
401. Hagen, G. R. Performance-Based Analysis of a Reinforced Concrete Shear Wall Building: A Thesis of the Requirements for the Degree Master ... in Architectural Engineering / Garrett Richard Hagen – Faculty of California Polytechnic State University, June 2012. – 113 p.
402. Hognestad, E. A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members / E. Hognestad // University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin Series № 399, Bulletin № 1, 1951. – P. 43-46.
403. Hognestad, E. Concrete stress distribution in ultimate strength design / E. Hognestad, N. W. Hanson, D. McHenry // Proceeding of the ACI, Vol. 52, № 6, December 1955, – P. 455-480.
404. Holmberg, A. Flexural Crack Widths / A. Holmberg // Nordisk Betong, Vol. 4, 1970. – P. 343-345.
405. Holmberg, A. Unbonded Portions Between Concrete Cracks / A. Holmberg // Bygningsstatistiske Meddelelser (Danish Society for Structural Science and Engineering), Vol.55, № 4, 1984. – P. 113-117.
406. Hooke, R. Lectures de potentia restitutiva, or of spring, explaining the power of springing bodies / R. Hooke. – London: J. Martyn, 1678; Early Science in Oxford. Vol. VIII. // Ed. R. T. Gunther. – Oxford: R. T. Gunther, 1931. – P. 331-356.
407. Hsu, L. S. Complete stress-strain behaviour of high-strength of concrete in compression / L. S. Hsu, C. -T. T. Hsu // Magazine of Concrete Research, Vol. 46, №169, December 1994. – P. 301-312.
408. Hughes, B. P. Comparison of Early-Age Crack Width Formulas for Reinforced Concrete / B. P. Hughes, C. V. Cifuentes // Structural Journal,

Vol. 85, №2, March 1988. – P. 158-166.

409. Hwang, L. W. Effective tensile stress-strain characteristics for reinforced concrete / L. W. Hwang, S. H. Rizkalla // Proceedings of the Canadian Structural Concrete Conference (June 1-3, 1983). – Ottawa: Canadian Society for Civil Engineering, 1983. – P. 1-19.
410. Jaccoud, J. -P. Armature minimale pour le controle de la fissuration des structures en béton / J. -P. Jaccoud // École Polytechnique Fédérale de Lausanne: Thèse №666, 1987. – 180 p.
411. Jaccoud, J. -P. Flèche des structures en béton armé, vérification expérimentale d'une méthode de calcul / J. -P. Jaccoud, R. Favre // Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics, Série: Béton, Vol. 406, №208, 1982. – P. 21-66.
412. Jankó, L. Determination of Crack Widths by Hungarian and European (DIN, CEB-FIP, EC2) Approaches / L. Jankó // Közlekedésépítés- és Mélyépítéstudományi Szemle, XLIV, №4, 1994. – P. 106-117.
413. Janovic, K. Beschränkung der Rissbreite bei teilweiser Vorspannung / K. Janovic, H. Kupfer // Bauingenieur, №57, 1982. – S.109-114.
414. Janovic, K. Zur Rissbildung im Stahlbeton- und Spannbetonbau / K. Janovic, H. Kupfer // Betonwerk und Fertigteil-Technik, №12, 1986. – S. 161-169.
415. Japan Society of Civil Engineers: Recommendation for Design and Construction of Concrete Structures Using Continuous Fiber Reinforcing Materials. – JSCE, Tokyo, Concrete Engineering Series, Vol. 23, 1997. – 325 p.
416. Jensen, V. P. Ultimate strength of reinforced concrete beams as related to the plasticity ratio of concrete: A report of an investigation conducted by the engineering experiment station University of Illinois: monograph / V. P. Jensen. – University of Illinois, Bulletin series № 345, Vol. 40, № 44, June 22, 1943. – 62 p.
417. Jirasek, M. Inelastic Analysis of Structures / M. Jirasek, Z. P. Bazant // John Wiley & Sons., New York, 2002. – 758 p.

418. Jo, B. W. A Proposal of Stress-Strain Relations Model for Recycled-PET Polymer Concrete under Uniaxial Stress / B. W. Jo, R. G. Moon, S. K. Park // Journal of the Korea Concrete Institute, Vol. 16, №6, 2004. – P. 767-776.
419. JSCE-SSCS-2007. Standard specification for concrete structures – 2007: Design. – Japan Society of Civil Engineers, Yotsuya 1-chome, Shinjuku-ku, Tokyo 160-0004, JAPAN, 2007. – 469 p. – (Стандарт Японії).
420. Kaar, P. H. High strength bars as concrete reinforcement. – Part 4: Control of Cracking / P. H. Kaar, A. Mattock // Journal of Portland Cement Association, Research and Development Laboratories, Vol. 5, №1, Januar 1963. – P.15-38.
421. Kaar, P.H. High strength bars as concrete reinforcement / P. H. Kaar, E. Hognestad // Journal PCA, Research and Development Laboratories, Vol. 7, № 1, January 1965. – P. 42-53.
422. Kabaila, A. Discussion of Equation for the Stress–Strain Curve by P. Desayi and S. Krishnan / A. Kabaila // ACI Journal, Vol. 61, № 3, 1964. – P. 1227-1239.
423. Kaklauskas, G. Stress-strain relations for cracked tensile concrete from RC beam tests / G. Kaklauskas, J. Ghaboussi // ASCE Journal of Structural Engineering, №127(1), 2001. – P. 64-73.
424. Kassimali, A. Structural Analysis / A. Kassimali. – PWS Publishing, Boston, MA, 1995. – 736 p.
425. Kazinczy, G. Kísérletek befalazott tartókkal / G. Kazinczy// Betonszemle. – 1914. – évfolyam II, szám 4, 5 és 6. – Old. 68-71, 83-87 és 101-104.
426. Kenel, A. Faseroptische Dehnungsmessungen an einbetonierten Bewehrungsstäben / A. Kenel, P. Marti // Bericht № 271, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH, Zürich, 2002. – 93 p.
427. Kent, D. C. Flexural members with confined concrete / D. C. Kent, R. Park // Journal of Structural Division, Vol. 97, №. 7, 1971. – P. 1964-1990.
428. Krishna Mohan Rao, S. Time Dependent Analysis of Cracked Partially Prestressed Concrete Members / S. Krishna Mohan Rao, A. Prasada Rao, W.

- Dilger // Journal Structures Engineering, Vol. 119, № 12, 1993. – P. 3571-3589.
429. Kuczynski, W. Kontynualna teoria zginania zelbetu / W. Kuczynski. – PWN, Warszawa, 1971. – 271 s.
430. Kumar, P. S. High performance reinforced concrete beams made with sandstone reactive aggregates / P. S. Kumar, Md. A. Mannan, V. J. Kurian // The Open Civil Engineering Journal, Vol. 2, 2008. – P. 41-50.
431. Lan, Z. Crack Width in Reinforced Concrete Members / Z. Lan, D. Ding // International Journal of Structures, Vol. 12, № 2, 1992. – P. 137-163.
432. Leonhardt, F. Crack Control in Concrete Structures: IABSE Surveys, № S-4/77 / F. Leonhardt. – International Association for Bridge and Structural Engineering, Zürich, August 1977. – 26 p.
433. Levi, F. On Minimum Reinforcement in Concrete Structures / F. Levi // ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 111, №12, 1985. – P. 2791-2796.
434. Liebenberg, A. C. Stress–Strain Function for Concrete Subjected to Short-Term Loading / A. C. Liebenberg // Magazine of Concrete Research (London), Vol.14, № 41, July 1962. – P. 85–90.
435. Lutz, L. A. Graphical Evaluation of the Effective Moment of Inertia for Deflection / L. A. Lutz // ACI Journal, Proceedings, Vol. 70, March 1973. – P. 207-213.
436. Lu, Y. Q. The Flexural behavior of Concrete-Filled Hollow Structural Section: Structural Engineering Report 178 / Y. Q. Lu, D. J. L. Kennedy // Department of Civil Engineering University of Alberta, Edmonton, Canada, T6G 2G7, April 1992. – 167 p.
437. Lüthold, A. K. Biegetragverhalten und Mindestbewehrung von Stahlbetonbauteilen: Dissertation ETH № 14874. Abhandlung zur Erlangung des Titels Doktor der Technischen Wissenschaften / Albin Kenel Lüthold. – Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, 2002. – 115 s.
438. Macchi, G. Ductility Condition for Simplified Design without Check of

- Compatibility / G. Macchi // Bulletin d'Information, vol. 105, Comité Européen du Béton, Paris, Februar 1976. – P. 115-142.
439. McCollister, H. M. Load-Deformation Characteristics of Simulated Beam Column Connections in Reinforced Concrete. A technical report of a research project / H. M. McCollister, C. P. Siess, N. M. Newmark. – University of Illinois. Urbana, Illinois, June 1954. – 172 p.
440. MacGregor, J. G. Design of Slender Concrete Columns / J. G. MacGregor, J. E. Breen, E. O. Pfrang // Journal ACI, vol. 67, № 1, January 1970. – P. 6-28.
441. MacGregor, J. G. Reinforced Concrete: Mechanics and Design / J. G. MacGregor. – 3rd. ed., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997. – 939 p.
442. Makhlof, H. M. The effect of thick concrete cover on the maximum flexural crack width under service load / H. M. Makhlof, F. A. Malhas // ACI Structural Journal, Vol.93, №3, 1996. – P. 257–265.
443. Makhtouf, H. M. Preventing Reinforced Concrete Deterioration in the Arabian Gulf / H. M. Makhtouf, B. H. Ahmadi, J. Al-Jabal // Concrete International, Vol. 13, № 5, May 1991. – P. 65-67.
444. Mander, J. B. Theoretical stress-strain model for confined concrete / J. B. Mander, M. J. N. Priestley, R. Park // Journal Structural Engineering, ASCE, Vol.114, 1988. – P. 1804-1825.
445. Menn, C. Zwang und Mindestbewehrung / C. Menn // Beton- und Stahlbetonbau, Vol. 81, Heft 4, 1986. – S. 94-99.
446. Mohr, O. C. Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen / O. C. Mohr // Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, №14, 1868. – S.20-52, – S. 397-400.
447. Monnier, Th. The Moment-curvature Relation of Reinforced Concrete / Th. Monnier. – Stevin-Laboratory of the Department of Civil Engineering: Delft University of Technology; Reijswijk (ZH): Institute TNO for Building Materials and Building Structures, 1970. – 101 p.
448. Montejo, L. A. CUMBIA-Set of codes for the analysis of reinforced concrete members: Technical Report No: IS-07-01 / L. A. Montejo, M. J. Kowalsky. –

- CFL, North Carolina State University, Raleigh, USA, 2007. – 41 p.
449. Narayanan, R. S. Introduction to Design for Civil Engineers / R. S. Narayanan, A.W. Beeby. – Spon (E & F), 2001. – 205 p.
450. Navier, C. L. M. H. Memoire sur les lois de l'equilibre et du mouvement des corps solides elastiques / C. L. M. H. Navier // Memoires de l'Academie des Sciences de Paris, Vol. 7, 1827. – P. 375-393.
451. Nawy, E. G. Flexural cracking behaviour of pretensioned and post-tensioned beams: the state of the art / E. G. Nawy // ACI Journal, Vol. 82, № 6, 1985. – P. 890-900.
452. NEN 6720:1995nl. TGB 1990 - Voorschriften Beton - Constructieve eisen en rekenmethoden (VBC 1995). – Nederlands Normalisatie-instituut, 1995. – 245 p. – (Стандарт Нідерландів).
453. Ngo, D. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams / D. Ngo, A. C. Scordelis // ACI Journal, Proceedings, Vol. 64, № 3, March 1967. – P. 152-163.
454. Noakowski, P. Verbund orientierte, kontinuierliche Theorie zur Ermittlung der Rissbreite / P. Noakowski // Beton - und Stahlbetonbau, № 7, 1985. – S.185-190; №8, 1985. – S. 215-221.
455. NS 3473:1992. Concrete Structures - Design rules. – Norwegian Council for Building Standardisation, 4th edition, Oslo, Norway, 1992. – 103 p. – (Стандарт Норвегії).
456. NZS 3101-1: 1982. Code of Practice for the Design of Concrete Structures. – Standards Association of New Zealand, Wellington, 1982. – 127 p. – (Стандарт Нової Зеландії).
457. Oh, B. H. New formulas for maximum crack width and crack spacing in reinforced concrete flexural members / B. H. Oh, Y- J. Kang // ACI Structural Journal, Vol. 85, № 2, 1987. – P.103-112.
458. Okamura, H. Nonlinear Analysis and Constitutive Models of Reinforced Concrete / H. Okamura, K. Maekawa. – Giho-do Press, University of Tokyo, Japan, 1991. – 182 p.

459. Olivia, M. Curvature ductility of reinforced concrete beam / M. Olivia, P. Mandal // *Jornal Teknik Sipil*, Vol. 6, №1, Oktober 2005. – P. 1-13.
460. Ožbolt, J. Trodimenzijski proračun prearmiranih betonskih greda / J. Ožbolt, D. Meštrović, I. Kožar // *Građevinar*, № 58, 2006. – S. 95-101.
461. Padmarajaiah, S. K. Crack Width Predictions for High Strength Concrete Fully. Partially Prestressed Beam Specimens Containing Steel Fibers / S. K. Padmarajaiah, A. Ramaswamy // *ACI Structural Journal*, Vol. 98, №6, November-December 2001. – P. 852-861.
462. Pam, H. J. Flexural strength and ductility of reinforced normal- and high-strength concrete beams / H. J. Pam, A. K. H Kwan, M. S. Islam // *Structures & Buildings*, Vol. 146, № 4, 2001. – P. 381-389.
463. Pantazopoulou, S. J. Detailing for Reinforcement Stability in RC Members / S. J. Pantazopoulou // *Journal of Structural Engineering*, Vol. 124, №6, June 1998. – P. 623-632.
464. Parent, A. De la veritable mecanique de resistance des solides et reflections sur la systeme de M. Bernoulli de Bale / A. Parent // *Essais et recherches des mathematiques et des physiques*, Vol. 3, 1713. – P. 187-201.
465. Park, R. Reinforced Concrete Structures / R. Park, T. Paulay. – New York: John Wiley and Sons, 1975. – 769 p.
466. Petersson, P. -E. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. Techn. Report LUTVDG/TVBM-1006 / P. -E. Petersson. – Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1981. – 174 p.
467. Pfrang, E. O. Load-Moment-Curvature Characteristics of Reinforced Concrete Cross Sections / E. O. Pfrang, C. P. Siess, M. A. Sozen // *ACI Journal, Proceedings*, Vol. 61, №7, Juli 1964. – P. 763-778.
468. Pfyl, T. Versuche an stahlfaserverstärkten Stahlbetonelementen. ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 268 / T. Pfyl, P. Marti. – Birkhäuser, Basel, Switzerland, 2001. – 137 p.
469. Pillai, S. U. Reinforced Concrete Design / S. U. Pillai, D. Menon. – New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 2003. – 867 p.



470. PN-B-03264: Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie. –Sektor Budownictwa i Konstrukcji Budowlanych, 1984. – 38 s. (Польські норми).
471. Polak, M. A. Effective stiffness model for reinforced concrete slabs / M. A. Polak // ASCE Journal of Structural Engineering, Vol.122, №9, 1996. – P. 1025-1030.
472. Polak, M. A. The Influence of the Reinforcing Bar Diameter on the Behavior of Members in Bending and In-Plane Tension / M. A. Polak, D. T. Killen //ACI Structural Journal, Vol.95, №5, September-October, 1998. – P.471-479.
473. Popovics, S. A. Preview of Stress-Strain Relationship for Concrete / S. A. Popovics // ACI Journal, Proceedings, Vol. 67, № 3, 1970. – P. 243-248.
474. Prakhya, G. K. V. Tension-stiffening and moment-curvature relations of reinforced concrete elements / G. K. V. Prakhya, C. T. Morley // ACI Structural Journal, Vol. 87, №5, 1990. – P. 597-605.
475. Priestley, M. J. N. Displacement – Based Seismic Design of Structures / M. J. N. Priestley, M. C. Calvi, M. J. Kowalsky // IUSS Press, Pavia Italy, 2007. – 670 p.
476. Priestley, M. J. N. Myths and Fallacies in Earthquake Engineering, Revisited: The Ninth Mallet Milne Lecture / M. J. N. Priestley. – Rose School, Pavia Italy, May 2003. – 98 p.
477. Pundinaitė, M. Lenkiamųjų gelžbetoninių elementų pleišėjimo eksperimentiniai ir teoriniai tyrimai: Baigiamasis magistro darbas / Milda Pundinaitė. – Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas, Vilnius, 2010. – 103 p.
478. Quyang, C. Fracture energy approach for predicting cracking of reinforced concrete tensile members / C. Ouyang, S. P. Shah // ACI Structural Journal, Vol. 91, №1, 1994. – P. 69-78.
479. Rafi, M. M. Evaluation of ACI 440 deflection model for fiber-reinforced polymer reinforced concrete beams and suggested modification / M. M. Rafi, A. Nadjai // ACI Structural Journal, Vol. 106, №6, 2009. – P. 762-771.

480. Rao, P. S. Trisegmental moment curvature relations for reinforced concrete members / P. S. Rao, B. V. Subrahmanyam // ACI Journal, Proceedings, Vol. 70, №5, 1973. – P. 346-351.
481. Rao, S. V. K. M. Control of flexural crack width in cracked prestressed concrete members / S. V. K. M. Rao, W. H. Dilger // ACI Structural Journal, Vol. 89, № 2, 1992. – P. 127-138.
482. Rashid, M. A. Reinforced High-Strength Concrete Beams in Flexure / M. A. Rashid, M. A. Mansur // ACI Structural Journal, Vol. 102, № 3, May 2005. – P. 462- 471.
483. Rehm, G. Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton / G. Rehm // Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, № 1381, 1961. – 59 p.
484. Reynolds, C. E. Reinforced Concrete Designer's: Handbook / C. E. Reynolds, J.C. Steedman. – 10th ed. E & FN Spon, London, 1988. – 449 p.
485. Rilem TC 162–TDF: Test and design methods for steel fibre reinforced concrete,  $\sigma - \varepsilon$  design method. Final Recommendation // Materials and Structures, Vol. 36, 2003. – P. 560-567.
486. Ritter, W. Die Bauweise Hennebique / W. Ritter. – Schweizerische Bauzeitung, 1899, Vol. 33, №5. – P.41-43; №6. – P.49-52; №7. – P. 59-61.
487. Rizkalla, S. H. Crack Prediction for Members in Uniaxial Tension / S. H. Rizkalla, L. W. Hwang // ACI Journal, Proceedings, Vol. 81, №6, November-December 1984. – P. 572-579.
488. Rizk, E. New Formula to Calculate Crack Spacing for Concrete Plates / E. Rizk, H. A. Marzouk // ACI Struct. Journal, Vol. 107, №1, 2010. – P. 43-52.
489. Romashko, V. N. The reinforced concrete elements and structures stiffness during their deformation / V. N. Romashko // European Conference on Innovations in Technical and Natural Sciences. Proceedings of the 11<sup>th</sup> International scientific conference (June 02, 2016). – Vienna: East West, 2016. – P. 64-69.
490. Romashko, V. The construction peculiarities of the deformation and power model of concrete and reinforced concrete resistance / V. Romashko, O.

- Romashko // MATEC Web of Conf. 116, 02028, 1-8 (2017).
491. Roš, M. Festigkeit und Verformung von auf Biegung beanspruchten Eisenbeton-Balken, bewehrt mit TOR-STAHLE, Hochwertigem STAHL ST 52, Normalstahl STN / M. Roš. – EMPA-Bericht, № 141, 1942. – 87 s.
492. Ruiz, M. F. Relationship between Nonlinear Creep and Cracking of Concrete under Uniaxial Compression / M. F. Ruiz, A. Muttoni, P. G. Gambarova // Journal of Advanced Concrete Technology, Vol. 5, №3, 2007. – P. 1-11.
493. Rusch, H. Research toward a General Flexural Theory for Structural Concrete / H. Rusch // ACI Journal, Vol. 57, №1, July 1960. – P. 1-28.
494. Saenz's, L. P. Discussion of Equation for the stress-strain curve of concrete' by P. Desayi and S. Krishnan / L. P. Saenz's // ACI Journal, Vol.61, № 9, 1964. – P. 1229-1235.
495. Safan, M. A. Behaviour of Fiber Reinforced Concrete Beams with Spliced Tension Steel Reinforcement / M. A. Safan // Concrete Research Letters, Vol. 3(1), 2012. – P. 564-574.
496. Saint-Venant, B. Memoire sur l'impulsion transversale et la resistance vive des barres elastiques appuyees aux extremités / B. Saint-Venant // Comptes rendus, T.14, 1857. – P. 204-208.
497. Saliger, R. Die neue Theorie des Stahlbetons auf Grund der Bildsamkeit im Bruchzustand / R. Saliger. – Wien: Deuticke, 1947. – 106 s.
498. Saliger, R. High Grade Steel in Reinforced Concrete / R. Saliger // Preliminary Publication, 2nd Congress, International Association Bridge and Structural Engineering, Berlin-Munich, 1936. – P. 293-315.
499. Sargin, M. Stress–strain relationships for concrete and the analysis of structural concrete sections / M. Sargin. – Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1971. – 167 p.
500. Sarja, A. Two methods for analyzing the stability of slender concrete columns and frames / A. Sarja // Nordisk Betong, №5, 1974.– P. 9.
501. Sarkar, S. High strength concrete: an investigation of the flexural behavior of high strength RC beams / S. Sarkar, O. Adwan, J. G. L. Munday // The

- Structural Engineer, Vol. 75, №7, April 1997. – P. 115-121.
502. Scanlon, A. Time Dependent Reinforced Concrete Slab Deflection / A. Scanlon, D. W. Murray // Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 100, №9, 1974. – P. 1911-1924.
503. Schiessl, P. Konstruktionsregeln zur Beschränkung der Rissbreite / P. Schiessl, E. Wölfel // Beton- und Stahlbetonbau, 1986. – S. 8-15.
504. Scholz, H. Simple deflection and cracking rules for partially prestressed members / H. Scholz // ACI Struct. Journal, 1991, Vol. 88, №2. – P. 199-203.
505. Schüle, F. Untersuchung des Einflusses der Druckspannungen in Eisenbetonbalken und der Breite der Druckplatten. Längenänderungen von Mörtel und Beton beim Erhärten: Mitteilungen der Materialprüfungs-Anstalt am Schweiz. Polytechnikum in Zürich / F. Schüle. – Zürich: Selbstverl, 1909. – 86 s.
506. Scordelis, A. C. Finite Element Study of Reinforced Concrete Beams with Diagonal Tension Cracks / A. C. Scordelis, D. Ngo, H. A. Franklin // Proceedings of Symposium on Shear in Reinforced Concrete (Detroit, Michigan), ACI, Publication SP-42, Vol. 1, 1974. – P. 79-102.
507. Scott, B. D. Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rates / B. D. Scott, R. Park, M. J. N. Priestley // ACI Journal, Proceedings, V. 79, №1, Januar-Februar 1982. – P. 13-27.
508. Shah, S. P. Cyclic loading of spirally reinforced concrete / S. P. Shah, A. Faftis, P. Arnold // ASCE, Vol. 109, № ST7, July 1983. – P. 1695-1710.
509. Shah, S. P. Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and Other Quasi-Brittle Materials / S. P. Shah, S. E. Swartz, C. Quyang. – John Wiley & Sons, New York, 1995. – 552 p.
510. Shah, S. P. Inelastic Behaviour and Fracture of Concrete / S. P. Shah, G. Winter // ACI Journal, Vol.63, № 9, 1966. – P. 451-466.
511. Shalmani, A. Z. Analytical and experimental investigation of cracking in two-way reinforced concrete panels: A Dissertation ... Degree of Doctor of Philosophy of Civil Engineering / Shalmani Armin Ziari. – Ryerson

- University, Toronto, Ontario, Canada, 2011. – 287 p.
512. Sheikh, S. A. Mechanism of Confinement in Tied Columns / S. A. Sheikh, S. M. Uzumeri // Proceedings, 7th World Concrete on Earthquake Engineering (Istanbul, September 1980), Kelaynak Printing Company, Ankara, 1980. – P. 71-78.
513. Sherif, A. G. Critical Review of CSA A23.3-94 Deflection Prediction for Normal and High Strength Concrete Beams / A. G. Sherif, W. H. Dilger // Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 25, 1998. – P. 474-489.
514. Shmukler V. Nonlinear Analysis of Flexural Reinforced Concrete Structures Strength / V. Shmukler, I. Luchkovsky // IABSE Symposium Report. – 2004/1/1, Vol. 88, № 5, – P. 239-241.
515. Siddique, M. A. A. Effect of Material Properties on Ductility Factor of Singly Rc Beam Sections / M. A. A. Siddique, Md. A. Rouf // Malaysia, Kuala Lumpur, Proceedings of the 6th Asia-Pacific Structural Engineering and Construction Conference, (5– 6 September, 2006), 2006. – P. A-83 – A-90.
516. Sinha, B. P. Response of Singly Reinforced Beams of Cyclic Loading / B. P. Sinha, K. H. Gerstle, L. G. Tulin // ACI Journal, Proceedings, Vol. 61, №.8, August 1964. – P. 1021-1038.
517. Sinha, B. P. Stress-Strain Relations for Concrete under Cyclic Loading / B. P. Sinha, K. H. Gerstle, L. G. Tulin // ACI Journal, Vol. 61, № 2, 1964. – P. 195-212.
518. Smith, G. M. Ultimate Flexural Analysis Based on Stress–Strain Curves of Cylinders / G. M. Smith, L. E. Young // ACI Journal, Vol. 53, № 6, 1955. – P. 597-609.
519. SNI 03-2847-2002. Tata Cara Perhitungan Struktur Beton Untuk Bangunan Gedung. – Bandung, Desember 2002. – 278 p. – (Стандарт Індонезії).
520. Sokolov, A. Tension Stiffening Model for Reinforced Concrete Beams: Doctoral Dissertation ... Civil Engineering (02T) / Aleksandr Sokolov. – Vilnius: VGTU leidykla Technika, 2010. – 149 p.
521. Soliman, M. T. M. The Flexural Stress–Strain Relationship of Concrete

- Confined by Rectangular Transverse Reinforcement / M. T. M. Soliman, C. M. Yu // Magazine of Concrete Research (London), Vol. 19, № 61, December 1967. – P.223-238.
522. Sorelli, L. G. Bending and Uniaxial Tensile Tests on Concrete Reinforced with Hybrid Steel Fibers / L. G. Sorelli, A. Meda, G. A. Plizzari // Journal of materials in civil engineering ASCE, September-October 2005. – P. 519-527.
523. Starosolski, W. Konstrukcje żelbetowe, T.1 / W. Starosolski. – Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003. – 450 s.
524. Sturman, G. M. Effect of flexural strain gradients on microcracking and stress–strain behaviour of concrete / G. M. Sturman, S. P. Shah, G. Winter // ACI Journal, Vol. 62, № 3, 1965. – P. 805-822.
525. Suri, K. M. Crack Width of Partially Prestressed Concrete Members / K. M. Suri, W.H. Dilger // ACI Journal, Vol. 83, № 5, 1986. – P. 784-797.
526. Sygula, S. Vergleichende Untersuchungen über Biegerissformeln für Stahlbeton / S.Sygula // Beton- und Stahlbetonbau, Vol.5, 1981. – P. 114-117.
527. Tabassum, J. Analysis of current methods of flexural design for high strength concrete beams: thesis for the degree of Master of Engineering / Javeria Tabassum. – School of Civil, Environmental & Chemical Engineering RMIT University, October 2007. – 330 p.
528. Tasdemir, M. A. Evaluation of Strains at Peak Stresses in Concrete: A Three-Phase Composite Model Approach / M. A. Tasdemir, C. Tadesmir, S. Akyuz, et al. // Cement and Concrete Composites, №20, 1998. – P. 301-318.
529. Tasnimi, A. A. Mathematical model for complete stress-strain curve prediction of normal, light-weight and high-strength concretes / A. A. Tasnimi // Magazine of Concrete Research, Vol. 56, №1, 2004. – P. 23-34.
530. Thomas, F. G. Cracking in Reinforced Concrete / F. G. Thomas // The Structural Engineer (London), Vol. 14, № 7, July 1936. – P. 298-320.
531. Tomaszewicz, A. Betongens Arbeitsdiagram: SINTEF Report № STF 65A84065 / A. Tomaszewicz. – Trondheim-NTH, 1984. – 21 p.
532. Toutanji, H. A. Deflection and crack width predictions of concrete beams

- reinforced with fiber reinforced polymer bars / H. A. Toutanji, M. Saafi // Proceedings of the Fourth International Symposium FRPRCS-4, (ACI SP-188), ACI, Detroit, MI, 1999. – P. 1023-1034.
533. Toutanji, H. A. Flexural behaviour of concrete beams reinforced with glass fiber-reinforced polymer (GFRP) bars / H. A. Toutanji, M. Saafi // ACI Structural Journal, Vol. 97, № 5, 2000. – P. 712-719.
534. Tulin, L. G. Simplified Description of Creep Surface for a Portland Cement Mortar / L. G. Tulin // ACI Journal, Vol. 65, № 6, 1968. – P. 470-476.
535. Van Gysel, A. Analytical formulation of the complete stress-strain curve for high strength concrete / A. Van Gysel, L. Taerwe // Materials and structures, (Univ. Ghent, Belgium), Vol. 29, №193, Nov. 1996. – P. 529-533.
536. Vecchio, F. J. Approximate analysis of reinforced concrete slabs / F. J. Vecchio, M. P. Collins // Structural Engineering and Mechanics, Vol. 8, № 1, 1999. – P. 1-18.
537. Vecchio, F. J. Finite Element Modeling of Concrete Expansion and Confinement / F. J. Vecchio // Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.118, №9, 1992. – P. 2390-2406.
538. Vecchio, F. J. The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear / F. J. Vecchio, M. P. Collins // ACI Journal, Vol. 83, №2, March-April 1986. – P. 219-231.
539. Vecchio, F. J. The response of reinforced concrete to in plane shear and normal stresses: Technical report 82-03 / F. J. Vecchio, M. P. Collins. – Department of Civil Engineering, Univ. of Toronto, March 1982. – 332 p.
540. Veen van der, C. Dynamic Elasto-Plastic Model Reinforced Concrete Members / C. van der Veen, J. Blaauwendraad // Heron, Vol. 28, № 1, 1983. – P. 1-54.
541. Venkateswarlu, B. Cracking and bond slip in concrete beams / B. Venkateswarlu, H. Gesund // Journal ASCE, Proceedings, Vol. 98, № ST12, December 1972. – P. 2663-2685.
542. Vis, W. C. Perhitungan perencanaan sederhana untuk beton bertulang / W. C.

- Vis, R. Sagel. – Nederland: Stuvo, 1987. – 308 p.
543. Wang, P. -T. Stress-strain curves of normal and lightweight concrete in compression / P. -T. Wang, S. P. Shah, A. E. Naaman // ACI Journal, Vol. 75, November 1978. – P. 603-611.
544. Watstein, D. Width and spacing of tensile cracks in axially reinforced concrete cylinders / D. Watstein, D. E. Parsons // Journal of Research, National Bureau of Standards, Vol. 31, № RP1545, July 1943. – P.1-24.
545. Wee, T. H. Stress-strain relationship of high-strength concrete in compression / T. H. Wee, M. S. Chin, M. A. Mansur // Journal of Materials in Civil Engineering, Vol. 8, № 2, May 1996. – P. 70-76.
546. Welch, G. B. Width and Spacing of Tensile Cracks in Reinforced Concrete / G. B. Welch, M. A. Janjua. – Uniciv Report № R-76, School of Civil Engineering, University of New South Wales, Kensington, NSW, Australia, December 1971. – 82 p.
547. Westergaard, H. M. Bearing pressures and cracks / H. M. Westergaard // Journal of Applied Mechanics, Vol. 6, 1939. – P. 49-53.
548. Westergaard, H. M. General solution of the problem of elastostatics of an  $n$  - dimensional homogeneous isotropic solid in an  $n$  - dimensional space / H. M. Westergaard // Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 41, №10, 1935. – P. 695-699.
549. Yost, J. R. Effective Moment of Inertia for Glass Fiber-Reinforced Polymer-Reinforced Concrete Beams / J. R. Yost, S. P. Gross, D. W. Dinehart // ACI Structural Journal, Vol.100, №6, 2003. – P. 732-739.
550. Yu, W. Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams under Working Loads / W. Yu, G. Winter // ACI Journal, Proceedings, Vol. 57, № 1, July 1960. – P. 29-50.
551. Zongjin, Li. Uniaxial tensile behaviour of concrete reinforced with randomly distributed short fibers / Li Zongjin, Li Faming, P. C. Tse-Yung, M. Yiu-Wing // ACI Materials Journal, Vol. 95-M54, September-October 1998. – P. 564-574.



## Додаток А

### До розвитку теорії опору бетону і залізобетону силовим впливам

Таблиця А.1– Різновиди моделей силового опору залізобетону

№ з/п	Автор	Рік	Сутність моделі та її особливості
1	2	3	4
<b>1. За формою представлення основних параметрів стану матеріалів</b>			
<b>1.1. Силові моделі</b>			
1.	Лолейт А. Ф. [141]	1933	Моделюється стан граничної рівноваги за «текучістю» матеріалів на основі «пластичного шарніру»
	Пастернак П. Л. [180]	1944	
	Гвоздев А. А. [70]	1949	
	Таль К. Э., Чистяков Е. А. [250]	1961	
2.	Мурашов В. И. [159]	1950	Моделюється стан в експлуатаційній стадії за принципом усереднення деформацій матеріалів
	Васильев Б. Ф. и др. [59]	1965	
	Немировский Я. М. [164]	1968	
<b>1.2. Деформаційні моделі</b>			
3.	Hognestad, E. et al. [403]	1955	Моделюється стан анізотропного тіла за допомогою спрощених діаграм деформування матеріалу
	Smith, G., Young, L. [518]	1955	
	Rusch, H. [493]	1960	
	Гольшев А. Б., Бачинский В. Я. [72]	1985	
4.	Байков В. Н. и др. [21], [23]	1981, 1987	Моделюється стан анізотропного тіла з інтегруванням діаграми деформування бетону
	Гуца Ю. П., Лемьш Л. Л. [83]	1985	
	Бамбура А. Н. и др. [150]	1987	
5.	Карпенко Н. И. и др. [107]	1987	Моделюється стан анізотропного тіла за матрицею жорсткості
	Залесов А. С. и др. [103]	2002	

1	2	3	4
<b>2. За формою представлення стану елементів конструкцій в перерізі</b>			
<b>2.1. Інтегральні моделі</b>			
<b>2.1. Модель інтегральних оцінок</b>			
6.	Бондаренко В. М. [51], Бондаренко С. В. [50]	1968, 1982	Моделюється стан анізотропного тіла за інтегральним модулем деформацій
<b>2.1.2. Квазісуцільні моделі</b>			
7.	Пекус-Сахновский Д. Н. [181]	1965	Моделюється стан умовно суцільного анізотропного тіла з інтегруванням епюри напружень в бетоні
	Гольшев А. Б., Бачинский В. Я. [72]	1985	
	Расторгуев Б. С. [187]	1993	
	Боровских А. В., Назаренко В. Г. [55]	2000	
	Гениев Г. А. и др. [71]	2004	
<b>2.1.3. Модель «пружних блоків»</b>			
8.	Westergaard, Н. М. [547], [548]	1935, 1939	Моделюється залізобетон у вигляді системи пружних блоків, що взаємодіють між собою по стиснутій зоні та розтягнутій арматурі
	Гвоздев А. А., Карпенко Н. И. [69]	1965	
	Белов В. И. [39]	1971	
	Карпенко Н. И. [108]	1973	
	Зайцев Ю. В. [97]	1982	
	Васильев П. И. [60], Пересыпкин Е. Н. [182]	1983, 1984	
	Бровкина М. В. [56]	2003	
	Бондаренко В. М., Колчунов В. И. [52]	2004	

1	2	3	4
<b>2.2. Дискретні моделі</b>			
<b>2.2.1. Деформаційні моделі</b>			
9.	Дыховичный А. А. [93]	1978	Переріз елемента чи конструкції моделюється великою кількістю елементарних ділянок, в межах кожної з яких властивості матеріалу приймаються постійними
	Байков В. Н. и др. [21], [23]	1981, 1987	
	Vecchio, F. J., Collins, M. P. [538], [539]	1982, 1986	
	Гуца Ю. П., Лемьш Л. Л. [83]	1985	
	Бамбура А. Н. и др. [150]	1987	
	Карпенко Н. И. и др. [107]	1987	
	Залесов А. С. и др. [103]	2002	
<b>2.2.2. Моделі МСЕ</b>			
10.	Ngo, D., Scordelis, A. [453]	1967	Переріз моделюється сукупністю кінцевих елементів певної форми, з'єднаних між собою у вузлах кінцевим числом зв'язків.
	Scordelis, A. C., Ngo, D., Franklin, H. A. [506]	1974	
	Городецкий А. С., Здоренко В. С. [79]	1975	
	Немчинов Ю. И. [166]	1976	
	Завьялов Г. Г., Козак А. Л. [96]	1978	
	Сахаров А. С. и др. [237]	1982	
	Карпенко Н. И. и др. [111]	1991	
	Крылов С. Б. [131]	2003	
	Клованич С. Ф. [117]	2007	

Таблиця А.2 – До різновидів діаграм стану залізобетонних елементів конструкцій

№ з/п	Автор	Рік	Вид діаграми стану залізобетонних елементів конструкцій
1	2	3	4
<b>3 окресленими ділянками утворення тріщин</b>			
1.	Giuriani, E., Sforza, C. [398]	1981	Рис.1.2, а
	Gelfi, P., Giuriani, E. [392]	1982	
	Creazza, G., Di Marco, R. [367], [368]	1991, 1993	
	Polak, M. A., Killen, D. T. [471]	1998	
	Pfyl, T., Marti, P. [468]	2001	
	Eurocode-2 [382]	2004	
	Burns, C. [339]	2011	
2.	Мурашев В. И. [159]	1950	Рис.1.2, б
	Немировский Я. М. [164]	1968	
	Кочкаръов Д. В. [125]	2015	
3.	Branson, D. E. [327]	1966	Рис.1.2, в
	Beeby, A. W. [312]	1968	
	Rao, P. S., Subrahmanyam, B. V. [480]	1973	
	Gilbert, R. I., Warner, R. E. [397]	1978	
	Favre, R., Корна, М. [385]	1980	
	Espion, B., Halleux, P. [380]	1988	
	Prakhya, G. K. V., Morley, C. T. [474]	1990	
	Дорофеев В. С., Ковров А. В. та ін. [89; 90]	2011	

1	2	3	4
4.	Дорофеев В. С., Ковров А. В. та ін. [89; 90]	2011	Рис.1.2, з
5.	Дорофеев В. С., Ковров А. В. та ін. [89; 90]	2011	Рис.1.2, д
6.	MacGregor, J. G. [441]	1997	Рис.1.2, е
7.	Sokolov, A. [529]	2010	Рис.1.2, ж
8.	PN-B-03264 [470]	1984	Рис.1.2, и
	Lüthold, A. K. [437]	2002	
	Pillai, S. U., Menon, D. [469]	2003	
9.	Favre, R., Корна, М., Radojicic, A. [385]	1980	Рис.1.2, к
	Bruggeling, A. [332]	1991	
	CEB-FIP MC 1990 [348]	1993	
<b>З фіксованим моментом появи тріщин</b>			
10.	Branson, D. E. [328]	1977	Рис.1.3, а
	Espion, B., Halleux, P. [380]	1988	
	Guan, G. X., Burgoyne, C. J. [400]	2014	
11.	Monnier, Th. [447]	1970	Рис.1.3, б
	Macchi, G. [438]	1976	
	Çelik, T. [349]	1980	
	Паньшин Л.Л. [179]	2003	
	Charkas, H., Rasheed, H. A., Melhem, H. [353]	2003	
	Siddique, M. A., Rouf, Md. A. [515]	2006	
	Çoşgun, T., Sayin, B. [366]	2013	

1	2	3	4
12.	Burns, N. H., Siess, C. P. [341]	1966	Рис.1.3, в
	Bazant, Z. P., Oh, B. H. [310]	1984	
	Levi, F. [433]	1985	
	Fantilli. A.P. and etc. [384]	1998	
13.	Sinha, B. P., Gerstle, K. H., Tulin, L. G. [516]	1964	Рис.1.3, з
	Agrawal, G. L., Tulin, L. G., Gerstle, K. H. [297]	1965	
	Burns, N. H., Siess, C. P. [341]	1966	
	Bazant, Z. P., Oh, B. H. [310]	1984	
14.	Таль К. Э., Чистяков Е. А. [250]	1961	Рис.1.3, д
	Gelfi, P., Giuriani, E. [392]	1982	
	Lüthold, A. K. [437]	2002	
	Pillai, S. U., Menon, D. [469]	2003	
	Calabrese, A. [342]	2008	
15.	Guan, G. X., Burgoyne, C. J. [400]	2014	Рис.1.3, е
<b>З вираженими ділянками текучості арматури</b>			
16.	Тихий М., Ракосник Й. [252]	1976	Рис.1.4, а
	Veen van der C. [540]	1983	
	Ersoy, U. [379]	1998	
	Jirasek, M., Bazant, Z. P. [417]	2002	
	Pillai, S. U., Menon, D. [469]	2003	
	Priestley, M. J. N. [476]	2003	
	Araújo, J. M. [301]	2005	

1	2	3	4
17.	Pfrang, E. O., Siess, C. P., Sozen, M. A. [467]	1964	Рис.1.4, б
	MacGregor, J. G., Breen, J. E., Pfrang, E. O. [440]	1970	
	Lu Y.Q., Kennedy, D. J.L.[436]	1992	
	Shmukler, V., Luchkovsky, I. [514]	2004	
18.	Priestley, M. J. N. [476]	2003	Рис.1.4, в
	Priestley, M. J. N., Calvi, M. C., Kowalsky, M. J. [475]	2007	
	Hagen G. R. [401]	2012	
19.	Veen van der C. [540]	1983	Рис.1.4, г
	Lüthold, A. K. [437]	2002	
20.	Тихий М., Ракосник Й. [252]	1976	Рис.1.4, д
	Bentz, E. [317]	2001	
	Montejo, L. A., Kowalsky, M. J. [448]	2007	
<b>Загальні</b>			
21.	Kuczynski, W. [429]	1971	Рис.1.5, а
22.	Кротовский С.С. [130]	1959	Рис.1.5, б
	Таль К. Э., Чистяков Е. А. [250]	1961	
	Kuczynski, W. [429]	1971	
	Jirasek, M., Bazant, Z. P. [417]	2002	
	Starosolski, W. [523]	2003	
	Achintha, P. M., Burgoyne, C. J. [288]	2009	

1	2	3	4
23.	MacGregor, J. G., Breen, J. E., Pfrang, E. O. [440]	1970	Рис.1.5, в
	Маилян Л. Р. [148]	1989	
	Лемьш Л. Л. [139]	1991	
	Бамбура А. М. [25]	2005	
	Бахарева Е. А., Стружанов В. В., [32]	2009	
	Chen, M., Ming Ho, J. C. [354]	2014	
24.	Бамбура А. М. [25]	2005	Рис.1.5, з
	Ožbolt, J., Meštrović, D., Kožar, I. [460]	2006	
	Валовой О. І., Єрьоменко О. Ю. [58]	2010	
	Çiftci, G. K. [359]	2013	
25.	Мирсаяпов И. Т., Нуриева Д. М. [151]	2005	Рис.1.5, д



Таблиця А.3 – Аналітичні залежності з визначення жорсткості залізобетонних елементів

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежності $D$
1	2	3	4
<b>Залежності з використанням коефіцієнта <math>\psi_s</math></b>			
1.	Мурашов В. И. [159]	1950	$D = M \cdot \psi_s / (1 / r)$
2.	Гвоздев А. А. и др. [65]	1968	$D = d \cdot z / \left( \frac{\psi_s}{E_s A_s} + \frac{\psi_c}{\nu_c E_c A_{oc}} \right)$
	Залесов А. С., Фигаровский В. В. [100]	1976	
	Тихий М., Ракосник Й. [252]	1976	
	Колчунов В. И. [52]	2004	
3.	СП 52-101-2003 [248]	2004	$D = \Sigma(I_{ci} \cdot E_c \cdot \nu_{ci}) + \Sigma(I_{sj} \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj})$
<b>Континуальні залежності</b>			
4.	Бондаренко В. М. [51]	1968	$D = D_o \cdot (1 - (1 - D_u / D_o) \cdot M / M_u^{exc})$
	Золотов М. С., Симейко И. В. [104]	2006	
5.	Kuczynski, W. [429]	1971	$D = D_o \cdot (1 - k_e \cdot M / M_u)$ ; $D = D_o \cdot (1 - (M / M_u)^m)$
<b>Поліноміальні та дискретні залежності</b>			
6.	Симейко В. В., Виланов М. П. [241]	1974	$D_x = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3 + D_4 x^4$
7.	Бондаренко В. М. [50]	1982	$D_{int} = \sum_{i=1}^n D_i \cdot l_i / L$
	Бабич С. В. [17]	1998	
<b>Функції зведеної жорсткості</b>			
8.	Yu W., Winter, G. [550] ... Bischoff, P. H. [322], [321] (див. таблицю А.4)	1960- 2009	$D = E_{c,eff} \cdot I_{eff}$

1	2	3	4
9.	Гур В. В. [95]	2003	$D = E_{c,eff} I_n / \left( 1 + \beta_1 \beta_2 \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \cdot \left( 1 - \frac{I_{II}}{I_I} \right) \right)$
	Eurocode-2 [382]	2004	
	ДСТУ Б В.2.6-156:2010 [122]	2011	
<b>Лінеаризовані функції</b>			
10.	Monnier, Th. [447]	1970	$D = (M - M_{cr}) / (1/r - 1/r_{cr})$
11.	Park, R., Paulay, T. [465]	1975	$D_i = (1/r) \cdot A_i + B_i, \text{ де } i=1...5$
	Olivia, M., Mandal, P. [459]	2005	
	Дорофеев В. С., Ковров А. В. [89]	2011	
	Кочкаръов Д. В. [125]	2015	

Таблиця А.4 – Аналітичні залежності з визначення ефективного моменту інерції приведенного перерізу залізобетонних елементів конструкцій

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежності $I_{eff}$
1	2	3	4
1.	Yu W., Winter, G. [550]	1960	$I_{eff} = I_{cr} / (1 - b \cdot 0,1 \cdot f_c^{2/3} \cdot h \cdot (h - k \cdot d) / M)$
2.	Branson, D. E. [329]	1965	$I_e = I_g \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^\alpha + \left( 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^\alpha \right) \cdot I_{cr}$
	Lutz, L. A. [435]	1973	
	Polak, M. A. [471]	1996	
	Vecchio, F.J., Tata, M. [536]	1999	
3.	Grossman, J. S. [399]	1981	$I_e = I_g \cdot (M_{cr} / M)^2$ при $M / M_{cr} \leq 1,6$ ; $I_e = 0,1 \cdot I_g \cdot (M / M_{cr})$ при $M / M_{cr} > 1,6$
4.	Al-Zaid, R. Z. et al. [300]	1991	$I_e = I_g \cdot \left( \frac{L_{cr}}{L} \right)^m + \left( 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^m \right) \cdot I_{cr}$ , де $m = 3 - 0,8 \cdot \rho$
5.	Faza, S. S, Ganga Rao, H. V. S. [386]	1992	$I_m = 23 \cdot I_{cr} \cdot I_e / (8 \cdot I_{cr} + 15 \cdot I_e)$
6.	Benmokrane, B. et al. [316]	1996	$I_e = \beta \cdot I_g \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^3 + \left( 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^3 \right) \cdot \gamma \cdot I_{cr}$
	ACI 440.1R-03 [293]	2003	
	Yost, J. R. et al. [549]	2003	
	ACI 440.1R-06 [294]	2006	
	Rafi, M., Nadjai, A. [479]	2009	
7.	Fikry, A., Thomas, C. [389]	1998	$I_e = (\alpha + \beta \cdot \eta \cdot \rho) \cdot b \cdot d^3 / 12$
8.	Bischoff, P. H. [321], [322]	2005, 2007	$I_e = I_{cr} / (1 - (1 - I_{cr} / I_g) \cdot (M_{cr} / M)^2)$

Таблиця А.5 – Залежності модуля деформацій бетону

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежності $E_{cc}$
1	2	3	4
<b>I. Лінійні залежності типу <math>E_{cc} = f(\eta_c)</math></b>			
1.	Евграфов Г. К. [94]	1948	$E_{cc} = E_{co} \cdot (1 - \sigma_c / f_{cd})$
2.	Мурашов В. І. [159]	1950	$E_{cc} = E_{co} \cdot \nu$
3.	Макаренко Л. П., Фенко Г. А. [149]	1970	$E_{cc} = E_{co} \cdot (1 - (1 - 1/k) \cdot \eta)$
	Бабич В. І., Кочкаръов Д. В. [9]	2006	
4.	Осипов В. К., Акопов В. Г. [173]	1988	$E_{cc} = E_c \cdot (0,5 - 0,256 \cdot (\eta - 0,3))$
<b>II. Нелінійні залежності типу <math>E_{cc} = f(\eta_c)</math></b>			
5.	Столяров Я. В. [249]	1941	$E_{cc} = E_{co} \cdot \sqrt{1 - \sigma_c / f_{cd}}$
6.	Коковин О. А. [118]	1968	$E_{cc} = E_{co} \cdot \frac{0,45 - (0,45 - 32 \cdot \frac{f_{cm}}{E_{co}}) \cdot \frac{\sigma_c}{f_{ck}}}{1 - 0,88 \cdot \sigma_c / f_{ck}}$
7.	Щербаков Е. Н. [280]	1970	$E_{cc} = E_{cm} \cdot f_{cm} / (S_k + f_{cm})$
8.	Соломенцев Г. Г. [242]	1971	$E_{cc} = \frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c1}} \cdot \frac{\eta}{1 - (1 - \eta)^m}$
9.	Карпенко Н. И. [112]	1976	$E_{cc} = E_{co} \cdot \frac{0,5 - (0,5 - 32 \cdot \frac{f_{cm}}{E_{co}}) \cdot \frac{\sigma_c}{f_{ck}}}{1 - 0,88 \cdot \sigma_c / f_{ck}};$
			$E_{cc} = E_{co} \cdot \bar{\nu}_c \cdot \chi / \psi_c$
10.	Ящук В. Е. [285]	1982	$E_{cc} = E_c \cdot (1 - \eta)^{(k-1)/k}$
11.	Беглов А. Д., Санжаровский Р. С. [37]	2004	$E_{cc} = \frac{1}{B_1 + B_2 \cdot \sigma_c + B_3 \cdot \sigma_c^2 + B_4 \cdot \sigma_c^3}$

1	2	3	4
<b>Нелінійні залежності типу <math>E_{cc} = f(\eta_\varepsilon)</math></b>			
12.	Байков В. Н. [23]	1981	$E_{cc} = A_o + B_o \cdot \varepsilon_c + C_o \cdot \varepsilon_c^2 + D_o \cdot \varepsilon_c^3 + F_o \cdot \varepsilon_c^4$
13.	Дорофеев В. С., Барданов В. Ю. [92]	2003	$E_{cc} = E_{co} - E_{c1} \cdot \varepsilon_c$ ; $E_{cc} = E_{co} - E_{c1} \cdot \varepsilon_c + E_{c2} \cdot \varepsilon_c (1 - 1/\eta_\varepsilon)^2$
14.	Чеканович М. Г. [269]	2008	$E_{cc} = E_{c,el} + E_{c,pl} + E_{c,cr} = E_{c,1} \cdot \sum_{i=1}^5 i \cdot a_i \times$ $\times \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c,1}}\right)^{i-1}$
<b>Інші залежності</b>			
15.	Карпенко М. И., Мухамедиев Т. И. [106]	1986	$E_{cc} = E_{co} (\bar{v}_c \pm (v_o - \bar{v}_c) \sqrt{1 - \omega_1 \eta - \omega_2 \eta^2})$
	Узун И. А. [255]	1991	
	Яременко А. Ф. [281]	2004	
16.	Шкурупій О. А. [276]	2000	$E_{cc} = E_c v_s \cdot (1 - (1 - v_c)(1 - x/x_c)^{\frac{\alpha_c}{1-\alpha_c}})$

Таблиця А.6 – Зв'язок між напруженнями і деформаціями стиснутого бетону

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежності $\sigma_c - \varepsilon_c$
1	2	3	4
<b>I. Степеневі та поліноміальні функції</b>			
1.	Buelfinger, G. B. [336]	1729	$\sigma_c = A \cdot \varepsilon_c^k$
2.	Gerstner, F. J. [394]	1831	$\sigma_c = \alpha \cdot \varepsilon_c - \beta \cdot \varepsilon_c^2$
	Залігер Р. [102]	1931	
	Столяров Я. В. [249]	1941	
3.	Saint-Venant, A. [496]	1857	$\sigma_c = A \cdot (1 - (1 - \varepsilon_c / \varepsilon_{cl})^n)$
4.	Bach, G. [305]	1897	$\sigma_c = A \cdot \sqrt[m]{\varepsilon_c}$
5.	Schüle, F. [505]	1909	$\sigma_c = \alpha \cdot \varepsilon_c^m - \beta \cdot \varepsilon_c^2$
6.	Emperger, F. [377]	1931	$\sigma_c = \frac{5}{3} f_c \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} (1 - 0,4 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}})$
7.	Лолейт А. Ф. [141]	1933	$\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c - A_3 \cdot \varepsilon_c^3$
8.	Liebenberg, A. C. [434]	1962	$\sigma_c = \alpha \cdot \sqrt{f_c} [1 - \beta \varepsilon_c^n] \cdot \varepsilon_c$
9.	Kabaila, A. [422]	1964	$\sigma_c = f_c \cdot (a \cdot \varepsilon_c + b \cdot \varepsilon_c^2 + c \cdot \varepsilon_c^3 + d \cdot \varepsilon_c^4)$
10.	Sturman, G., Shah, S., Winter, G. [524]	1965	$\sigma_c = \alpha \cdot \varepsilon_c + \beta \cdot \varepsilon_c^n$
	Соломенцев Г. Г. [242]	1971	
11.	Красновський Р. О. та ін. [128]	1976	$\sigma_c = f_c (1 - (1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}})^\alpha)$
	Ящук В. Е. [285]	1982	
	Shah, S. P. et al. [508]	1983	
12.	Байков В. Н., Горбатов С. В., Димитров З. А. [22]	1977	$\sigma_c = f_c \cdot \sum_{i=1}^5 a_i \cdot (\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}})^i$
	Бамбура А. Н., Бачинский В. Я. [28], [150]	1980, 1987	
	ДСТУ Б В.2.6-156:2010 [122]	2011	

1	2	3	4
13.	Лукаш П. А. [142]	1978	$\sigma_c = A_1 \cdot \varepsilon_c^{k_1} - A_3 \cdot \varepsilon_c^{k_3}; \sigma_c = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \varepsilon_c^{k_i}$
14.	Гуца Ю. П., Лемьш Л. Л. [83]	1985	$\sigma_c = f_c \cdot \sum_{i=1}^n k_i \cdot (\varepsilon_c / \varepsilon_{cl})^i$
15.	Vecchio, F. J., Collins, M. P. [538]	1986	$\sigma_c = f_c (2\varepsilon_c / \varepsilon_{cl} - (\varepsilon_c / \varepsilon_{cl})^2)$
16.	Карпенко Н. И., Мухамедиев Т. А., Петров А. Н. [106]	1986	$\sigma_c = \nu_c \cdot E_c \cdot \varepsilon_c,$ де $\nu_c = f(\eta_\varepsilon, \eta_\sigma)$
	Расторгуев Б. С. [187]	1993	
	Яременко Е. А. [282]	2001	
17.	Бабич Е. М., Крусь Ю. А., Гарницкий Ю. В. [11]	1996	$\sigma_c = f_c \cdot (\varepsilon_c / \varepsilon_{cl})^{\nu_{cl}}$
18.	Холмянский М. М. [265]	1998	$\sigma_c = a_1 \cdot \varepsilon_c + a_2 \cdot \varepsilon_c^2$
	Бабич В. И., Кочкаръов Д. В. [7]	2004	
19.	Беглов А. Д., Санжаровский Р. С. [37]	2004	$\sigma_c = \sum_{i=1}^4 A_i \cdot \varepsilon_c^i$
<b>II. Сплайн-функції</b>			
20.	Hognestad, E. et al. [403]	1955	$\sigma_c = f_c (2\varepsilon_c / \varepsilon_{cl} - (\varepsilon_c / \varepsilon_{cl})^2);$ $\sigma_c = f_c (1 - 0,15 \times (\varepsilon_c - \varepsilon_{cl}) / (\varepsilon_{cul} - \varepsilon_{cl}))$
	ACI 318-95 [296]	1996	
	ACI 318-11 [295]	2011	
21.	Chan, W. W. L. [352]	1955	$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c; \sigma_c = \lambda_1 \cdot E_c \cdot \varepsilon_c;$ $\sigma_c = \lambda_2 \cdot E_c \cdot \varepsilon_c$
22.	Soliman, M. T. M., Yu C. M. [521]	1967	$\sigma_c = f_c (\alpha \cdot \varepsilon_c + \beta \cdot \varepsilon_c^2); \sigma_c = f_c;$ $\sigma_c = f_c - c \cdot \varepsilon_c$
	Sheikh, S. A., Uzumeri, S. M. [512]	1980	

1	2	3	4
23.	Михайлов В. В., Ємельянов М. П., Додулаев Л. С., Митасов В. М. [155]	1984	$\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c$ ; $\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c + m_1(\varepsilon_c - \varepsilon_{c0})^2 + m_2(\varepsilon_c - \varepsilon_{c0})$ ; $\sigma_c = f_c + m_3(\varepsilon_{c1} - \varepsilon_1)^2 + m_4(\varepsilon_{c1} - \varepsilon_1)$ ; $\sigma_c = f_c + m_5(\varepsilon_c - \varepsilon_{c1})^2$
24.	BS 8110 [334]	1985	$\sigma_c = f_c \cdot (1 - (1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}})^n)$ ; $\sigma_c = f_c$
	BS-8110-1-1997 [335]	2005	
	CEB-FIP MC 1990 [348]	1993	
	Eurocode-2 [382]	2004	
	DIN 1045 [375]	1997	
	DIN1045-1:2008-08 [376]	2008	
25.	Вахненко П. Ф., Кондель В. М. [61]	1997	$\sigma_c = C_1 \cdot \varepsilon_c + C_2 \cdot \varepsilon_c^2 + C_3 \cdot \varepsilon_c^3$ ; $\sigma_c = D_0 + D_1 \cdot \varepsilon_c + D_2 \cdot \varepsilon_c^2$
	Роговий С. И. [191]	2002	
26.	Дорофеев В. С., Барданов В. Ю. [92]	2003	$\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c - \bar{E}_1 \cdot \varepsilon_c^2 + //_{\varepsilon_{c1}} \bar{E}_2 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{c1})^2$
27.	Стандарт Росії СП 52-101-2003 [248]	2004	$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c$ ; $\sigma_c = f_c \cdot ((1 - \frac{\sigma_{c1}}{f_c}) \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c0} - \varepsilon_{c1}} + \frac{\sigma_{c1}}{f_c})$ ; $\sigma_c = f_c$
28.	Митрофанов В. П. [153]	2004	$\sigma_c = C_1 \cdot \varepsilon_c + C_2 \cdot \varepsilon_c^2 + C_3 \cdot \varepsilon_c^3$ ; $\sigma_c = D_0 + D_1 \cdot \varepsilon_c + D_2 \cdot \varepsilon_c^2 + D_3 \cdot \varepsilon_c^3$
<b>III. Показникові залежності</b>			
29.	Ritter, W. [486]	1899	$\sigma_c = f_c \cdot (1 - e^{-m \cdot \varepsilon_c})$
	Берг О. Я. [43]	1962	
	Фомица Л. Н., Сумбатов Р. А. [260]	1994	



1	2	3	4
30.	Baes, L., Vandserre, L. [307]	1927	$\sigma_c = f_{cd} \cdot \eta \cdot (1 - e^{-m \cdot \varepsilon_c})$
31.	Онищик Л. И. [172]		$\sigma_c = 1,1 \cdot f_c \cdot (1 - e^{-E_{cm} \cdot \varepsilon_c / (1,1 \cdot f_c)})$
	Фомица Л. Н., Сумбатов Р. А. [260]		
32.	Smith, G., Young, L. [518]	1955	$\sigma_c = f_c \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \cdot e^{1 - \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}}$
	Sarja, A. [500]	1974	
	Назаренко В. Г., Боровских А. В. [161]	1999	
33.	Shah, S., Winter, G. [510]	1966	$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c \cdot e^{-(E_c \cdot \varepsilon_c - 2)^m / x_0}$
34.	Бондаренко В. М. [51]	1968	$\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c \cdot e^{-\varepsilon_c / \varepsilon_{c1}}$
35.	Маилян Р. Л., Рубен Г. К. [146]	1984	$\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c \times \sqrt[m]{e^{-(\varepsilon_c / \varepsilon_{c1})^m}}$
<b>IV. Тригонометричні функції</b>			
36.	Everard, N. J. [383]	1969	$\sigma_c = f_c \cdot \sin(\pi \cdot \varepsilon_c / (2 \cdot \varepsilon_{c1}))$
37.	Яшин А. В. [284]	1972	$\sigma_c = f_c \left[ \left( \frac{\varepsilon_{c1}}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon_{co}} + \frac{3}{4} \right) \cdot \sin \frac{\pi \cdot \varepsilon_c}{2 \cdot \varepsilon_{c1}} + \left( \frac{\varepsilon_{c1}}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon_{co}} - \frac{1}{4} \right) \times \sin \frac{3\pi \cdot \varepsilon_c}{2 \cdot \varepsilon_{c1}} \right]$
38.	Остапенко А. Ф. [174]	1992	$\sigma_c = A \cdot \sin(F \cdot \varepsilon_c) + B \cdot \cos(F \cdot \varepsilon_c) + C \cdot \varepsilon_c + D$
<b>V. Дробові залежності</b>			
39.	Frank, E. [390]	1906	$\sigma_c = \alpha \cdot \varepsilon_c / (1 + \beta \cdot \varepsilon_c)$
40.	Соколовський В. В. [142]	1960	$\sigma_c = s \cdot \varepsilon_c / \sqrt{1 + (\varepsilon_c / t)^2}$
41.	Давыдов Н. Ф., Донченко О. М. [84]	1964	$\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c \cdot f_{cm} / (f_{cm} + E_{cm} \cdot \varepsilon_c)$

1	2	3	4
42.	Desayi, P., Krishnan, S. [374]	1964	$\sigma_c = n \cdot E_c \cdot \varepsilon_c / (n - 1 + (\varepsilon_c / \varepsilon_{c1})^{nk})$
	Tomaszeiwicz, A. [531]	1984	
	Carreira, D. J., Chu, K. H. [344]	1985	
	Wee, T. H., Chin, M. S., Mansur, M. A. [545]	1996	
43.	Saenz's, Luis P. [494]	1964	$\sigma_c = \frac{E_c \cdot \varepsilon_c}{1 + \alpha_3 \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \alpha_2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2 + \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^3}$
44.	Sinha, B. P., Gestle, K. H., Tulin, L. G. [517]	1964	$\sigma_c = \alpha \cdot \varepsilon_c / (a + (\beta \cdot \varepsilon_c)^b)$
45.	Popovics, S. A. [473]	1970	$\sigma_c = f_c \cdot k \cdot \eta_\varepsilon / (1 + (k - 1) \cdot \eta_\varepsilon^{k/(k-1)})$
	Крусъ Ю. О., Крусъ О. Ю. [134]	2012	
46.	Макаренко Л. П. [149]	1970	$\sigma_c = \frac{E_c + b \cdot \varepsilon_c}{1 + c \cdot \varepsilon_c}$
	Бабич В. І., Кочкаръов Д. В. [9]	2006	
47.	Sargin, M. [499]	1971	$\sigma_c = f_c \frac{k \cdot \eta_\varepsilon - \eta_\varepsilon^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta_\varepsilon}$
	CEB-FIP Model Code 1990 [348]	1993	
	Eurocode-2 [382]	2004	
	Беглов А.Д., Санжаровский Р. С., Бондаренко В. М. [36]	2004	
48.	Wang, P. -T., Shah, S. P., Naaman, A. E. [543]	1978	$\sigma_c = f_c \frac{A \cdot \eta_\varepsilon + B \cdot \eta_\varepsilon^2}{1 + (A - 2) \cdot \eta_\varepsilon + (B + 1) \cdot \eta_\varepsilon^2}$
	Ahmad, S. H., Shah, S. P. [298]	1982	
	Attard, M. M., Setunge, S. [304]	1996	

## Продовження таблиці А.6

1	2	3	4
49.	Зак М. Л., Гуца Ю. П. [98]	1987	$\sigma_c = f_{cd} \cdot k \cdot \eta_\varepsilon / (1 + (k - 1) \cdot A)$ , де $A = (0,75\eta_\varepsilon + 0,25\eta_\varepsilon^3) \cdot k / (1,5 \cdot (k - 1))$
50.	Mander, J. B., Priestley, M. J. N., Park, R. [444]	1988	$\sigma_c = f_c \frac{r \cdot \eta_\varepsilon}{r - 1 + \eta_\varepsilon^r}$ , де $r = E_c / (E_c - E_{cl})$
51.	Hsu, L.S., Hsu, C.T.T.[407]	1994	$\sigma_c = \beta \cdot E_c \cdot \varepsilon_c / (\beta - 1 + (\varepsilon_c / \varepsilon_{cl})^\beta)$
	Jo B. W., Moon, R. G., Park, S. K. [418]	2004	
52.	Ruiz, M. F., Muttoni, A., Gambarova, P. G. [492]	2007	$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c / (1 + (\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}})^\alpha)$ , де $\alpha = 0,5 + f_c / 20 + f_c^2 / 1500$

Таблиця А.7 – Основні залежності з визначення критичних деформацій стиснутого бетону

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежності $\varepsilon_{c1}$
1	2	3	4
<b>I. Лінійні залежності</b>			
1.	Gerstner, F. J. [394]	1831	$\varepsilon_{c1} = 2 \cdot f_{cd} / E_c$
	Hognestad, E. [402]	1951	
2.	Rusch, H. [493]	1960	$\varepsilon_{c1} = 2 \cdot C - f_{cd} / E_c$
3.	Писанко Г. Н., Щербачков Е. Н. [183]	1971	$\varepsilon_{c1} = (110 + f_{cd}) \cdot 10^{-5}$
4.	Соломенцев Г. Г. [242]	1971	$\varepsilon_{c1} = (140 + f_{cd}) \cdot 10^{-5}$
5.	Беликов В. А., ...[238]	1976	$\varepsilon_{c1} = (215 - 0,3 \cdot f_{cd}) \cdot 10^{-5}$
6.	Ahmad, S. H., Shah, S. P. [298]	1982	$\varepsilon_{c1} = (164,8 + 1,6533 \cdot f_{ck}) \cdot 10^{-5}$
7.	Carreira, D. J., Chu, K. H. [344]	1985	$\varepsilon_{c1} = (168 + 0,71 \cdot f_{ck}) \cdot 10^{-5}$
8.	Стандарт Норвегії NS 3473 [455]	1992	$\varepsilon_{c1} = (1,9 + 0,004 \cdot f_{cn}) \cdot 10^{-3}$ , де $f_{cn} = 0,56 \cdot f_{ck} + 2,8$
9.	CEB-FIP MC 1990 [348]	1993	$\varepsilon_{c1} = 0,002 + 0,5 \cdot (f_{ck} - 50) \cdot 10^{-5}$
10.	Hsu, L. S., Hsu, C. -T. [407]	1994	$\varepsilon_{c1} = (211,4 + 1,2905 \cdot f_{ck}) \cdot 10^{-5}$
11.	Almusallam, T. H., Alsayed, S. H. [299]	1995	$\varepsilon_{c1} = (181,47 + 3,98 \cdot f_{cd}) \cdot 10^{-5}$
12.	Бабич В. І., Кочкаръов Д. В. [7]	2004	$\varepsilon_{c1} = (165 + 0,7 \cdot f_{cd}) \cdot 10^{-5}$
13.	Eurocode-2 [382]	2004	$\varepsilon_{c3} = (1,75 + 0,55 \cdot (f_{ck} - 50) / 40) \cdot 10^{-3}$
<b>II. Нелінійні залежності</b>			
14.	Шейкин А. Е. [275]	1946	$\varepsilon_{c1} = f_{cd} / E_c + k \cdot f_{cd}^2$
	Десов А. Е. [87]	1972	

1	2	3	4
15.	Chambaud, R. [350]	1949	$\varepsilon_{c1} = \left[ 27f_{cd}^2 \pm \sqrt{27f_{cd}^3(27f_{cd} - 16/E_c)} \right] / (8 \cdot E_c^2)$
16.	Давыдов Н. Ф., Донченко О. М. [84]	1964	$\varepsilon_{c1} = 1 / (1/f_{cd} - 1/f'_{cv}) \cdot 10^{-5}$ , де $f'_{cv} = \varphi(f_{cd}, v, t, \dots)$
17.	Porovics, S. A. [473]	1970	$\varepsilon_{c1} = 0,000875 \cdot f_{ck}^{0,25}$
18.	Яшин А. В. [283]	1977	$\varepsilon_{c1} = \frac{f_{cd}}{E_c} \left( 1, 1 + \frac{24}{2 + f_{cd}} \right)$
19.	Серых Р. Л., Ильин О. Ф. [240]	1980	$\varepsilon_{c1} = (f_{ck, cube} / E_c) \cdot \lambda \cdot (1 + 0,75 \cdot \lambda \times$ $\times f_{ck, cube} / 60) / (0,12 + f_{ck, cube} / 60)$
20.	Нелепов А. Р. [162]	1982	$\varepsilon_{c1} = (1 + 37/f_{cm}) \cdot f_{cm} / E_c$
21.	Tomaszewicz, A. [531]	1984	$\varepsilon_{c1} = 0,0007 \cdot f_{cm}^{0,31}$
	Van Gysel, A., Taerve, L. [535]	1996	
	Eurocode-2 [382]	2004	
22.	Британський стандарт BS 8110 [334]	1985	$\varepsilon_{c1} = \sqrt{f_{cm}} \cdot 24 \cdot 10^{-5}$
23.	Карпенко Н. И., Мухамедиев Т. А., Петров А. Н. [106]	1986	$\varepsilon_{c1} = [(a + b \cdot f_{ck}) / (b - c \cdot f_{ck})] \cdot \lambda \times$ $\times (62f_{ck} + 0,68f_{ck}^2 + 22) / (7f_{ck} + f_{ck}^2 + 22)$
	Яременко А. Ф. [281]	2004	
24.	Бутенко С. А., Афанасьев И. В. [57]	1989	$\varepsilon_{c1} = k_v \cdot f_{cd} / (v_{cu} \cdot E_c)$
25.	Collins, M. P., Mitchell, D. et al. [363], [364]	1991, 1993	$\varepsilon_{c1} = \frac{f_{ck}}{E_c} \cdot \frac{0,8 + f_{ck} / 17}{f_{ck} / 17 - 0,2}$
26.	De Nicolo, B., Pani, L., Pozzo, E. [372]	1994	$\varepsilon_{c1} = 0,00076 + \sqrt{(0,626 \cdot f_{ck} - 4,33) \cdot 10^{-7}}$
27.	Несветаев Г. В. [168]	1994	$\varepsilon_{c1} = f_{cd} / (v_{cu} E_c)$ , де $v_{cu} = 169 \sqrt{f_{cd} / E_c}$

1	2	3	4
28.	Attard, M. M., Setunge, S. [304]	1996	$\varepsilon_{c1} = 4,11 \cdot f_{cd}^{0,75} / E_c$
29.	Wee, T. H., Chin, M. S., Mansur, M. A. [545]	1996	$\varepsilon_{c1} = 0,00078 \cdot f_{cd}^{0,25}$
30.	Бамбура А. Н. [29]	1996	$\varepsilon_{c1} = [235 - 81 / (1 + 7,75 \cdot 10^{-4} f_{ck}^2)] 10^{-5}$
	Байрамуков С. Х. [24]	2003	
31.	Вахненко П. Ф., Кондель В. М. [61]	1997	$\varepsilon_{c1} = A_o + A_1 \cdot f_{ck} + A_2 \cdot f_{ck}^2$
32.	Несветаев Г. В. [167]	1999	$\varepsilon_{c1} = [0,0216 \cdot (\rho / 24) + 0,0364] \cdot \sqrt{f_{cm} / E_c}$
33.	Tasnimi, A. A. [529]	2004	$\varepsilon_{c1} = (65,57 \cdot f_{cd}^{0,44} - 6,748) \cdot 10^{-5}$
34.	Eurocode-2 [382]	2004	$\varepsilon_{c2} = (2 + 0,085 \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53}) \cdot 10^{-3}$
35.	Ruiz, M. F., Muttoni, A., Gambarova, P. G. [492]	2007	$\varepsilon_{c1} = \alpha \cdot f_c / (E_c \cdot (\alpha - 1)^{(1-1/\alpha)})$ , де $\alpha = 0,5 + f_c / 20 + f_c^2 / 1500$
<b>III. Числові значення</b>			
36.	Sarja, A. [500]	1974	$\varepsilon_{c1} = 220 \cdot 10^{-5}$
	Стандарт Франції В. А. Е. L. 91 [306]	1992	
37.	Стандарт Фінляндії Rak МК В4 [365]	1983	від $\varepsilon_{c1} = 180 \cdot 10^{-5}$ для C60; до $\varepsilon_{c1} = 220 \cdot 10^{-5}$ для C100
38.	Стандарт США ACI 318-95 [296]	1996	$\varepsilon_{c1} = 200 \cdot 10^{-5}$
	Німецький стандарт DIN 1045 [375]	1997	
	Стандарт Росії СП 52-101-2003 [248]	2004	
39.	Стандарт Нідерландів NEN 6720:1995nl [452]	1995	від $\varepsilon_{c1} = 175 \cdot 10^{-5}$ для C65; до $\varepsilon_{c1} = 190 \cdot 10^{-5}$ для C105

Таблиця А.8 – Граничні деформації стиснутого бетону

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежності $\varepsilon_{cu}$
1	2	3	4
<b>I. Лінійні залежності</b>			
1.	Brandtzaeg, A. [326]	1935	$\varepsilon_{cu} = (6,88 - 0,77 \cdot f_{ck} / 1000) \cdot 10^{-3}$
2.	Saliger, R. [497]	1947	$\varepsilon_{cu} = 1,75 \cdot f_{ck} \cdot 10^{-6}$
3.	Ильин О. Ф. [105]	1979	$\varepsilon_{cu} = (4,6 - 0,02 \cdot f_{ck}) \cdot 10^{-3}$
4.	СЕВ-FIP MC 1990 [348]	1993	$\varepsilon_{cu} = 0,0025 + 0,002 \cdot (1 - f_{ck} / 100)$
5.	Вахненко П. Ф., Кондель В. М. [61]	1997	$\varepsilon_{cu} = B_o + B_1 \cdot f_{ck}$
6.	Бабич В. І., Кочкаръов Д. В. [10]	2003	$\varepsilon_{cu} = 1,268 \cdot \varepsilon_{c1}$ ; $\varepsilon_{cu} = 1,1 \cdot \varepsilon_{c1}$
7.	Дорофеев В. С., Барданов В. Ю. [92]	2003	$\varepsilon_{cu} = (4,03 - 0,02 \cdot f_{ck}) \cdot 10^{-3}$
8.	Eurocode-2 [382]	2004	$\varepsilon_{cu1} = (3,5 \dots 2,8) \cdot 10^{-3}$ для $f_{ck} < 50 \text{ МПа}$ ; $\varepsilon_{cu1} = (2,8 + 27 \cdot ((98 - f_{cm}) / 100)^4) \cdot 10^{-3}$ для $f_{ck} \geq 50 \text{ МПа}$ ; $\varepsilon_{cu2} = (3,5 \dots 2,6) \cdot 10^{-3}$ для $f_{ck} < 50 \text{ МПа}$ ; $\varepsilon_{cu2} = (2,6 + 35 \cdot ((90 - f_{ck}) / 100)^4) \cdot 10^{-3}$ для $f_{ck} \geq 50 \text{ МПа}$
9.	Лучко Й. Й. [143]	2007	$\varepsilon_{cu} = (350 - 0,7 \cdot f_{cd}) \cdot 10^{-5}$
<b>Лінійні залежності з параметрами армування</b>			
10.	Scott, B. D., Park, R., Priestley, M. J. N. [507]	1982	$\varepsilon_{cu} = 0,004 + 0,9 \cdot \rho_s \cdot f_y'' / 300$ , де $\rho_s = 2 \cdot (b + d) \cdot A_s'' / (b \cdot d \cdot s)$
<b>II. Нелінійні залежності</b>			
11.	Roš, M. [491]	1942	$\varepsilon_{cu1} = (3,5 + 2860 / f_{ck}) \cdot 10^{-3}$

1	2	3	4
12.	Jensen, V. P. [416]	1943	$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{co} / (1 - 1 / (1 + (f_{ck} / 4000)^2))$
13.	Kent, D. C., Park, R. [427]	1971	$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} + G_f^c / (0,6 f_c \cdot L_{ip}) - 0,8 f_c / E_{co}$
	Coleman, J., Sparcone, E. [362]	2001	
	Calabrese, A. [342]	2008	
14.	Чистяков Е. А., Бакиров К. К. [271]	1977	$\varepsilon_{cu,s} = (240 + 1400 \cdot \alpha_c) \cdot 10^{-5}$ , де $\alpha_c = \rho_k \cdot f_y / (f_{cd} + 10)$
15.	Чистяков Е. А. [270]	1979	$\varepsilon_{cu} = ((3\xi_c - 1,5)^2 - 4,5) \cdot 10^{-3}$
16.	Байков В. Н. [20]	1980	$\varepsilon_{cu,s} = \varepsilon_{cu} / (1 - N_s / N_c)$
17.	Стандарт Норвегії NS 3473 [455]	1992	$\varepsilon_{cu} = (2,5 \cdot \varepsilon_{c1} / \varepsilon_{cn} - 1,5) \cdot \varepsilon_{cn}$ , де $\varepsilon_{cn} = f_{cn} / (9500 \cdot f_{cn}^{0,3})$
18.	Бамбура А. Н. [29]	1996	$\varepsilon_{cu} = [235 + 320 / (1 + 6 \cdot 10^{-5} \cdot f_{cd}^3)] \cdot 10^{-5}$
19.	Attard, M. M., Setunge, S. [304]	1996	$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot (2,50 - 0,30 \cdot \ln f_{ck})$
20.	Несветаев Г. В. [167]	1999	$\varepsilon_{cu} = \frac{\varepsilon_{c1}}{\eta} \cdot \left( \frac{1}{(k-2)^2} + \frac{2k-1}{2(k-2)} - \frac{\ln(k-1) \cdot (k-1)^2}{(k-2)^3} + 0,15 \cdot k \right) + \left( 1 + \frac{k-1}{k+1} \right) \cdot \frac{\eta \cdot f_{cm}}{2 \cdot E_c}$
21.	Павліков А. М. [175], [178]	2005, 2007	$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot (e^\lambda - 1) / (k - 2)$ , де $k \neq 2$ , а $\lambda$ - корінь характеристичного рівняння для стадії руйнування
<b>III. Числові значення</b>			
22.	Британський стандарт BS 8110 [334]	1985	$\varepsilon_{cu} = 350 \cdot 10^{-5}$



1	2	3	4
22.	Стандарт Франції В.А.Е.Л.-91 [306]	1991	$\varepsilon_{cu} = 350 \cdot 10^{-5}$
	Німецький стандарт DIN 1045 [375]	1997	
	Стандарт Росії СП 52–101–2003 [248]	2004	
23.	Стандарт США ACI 318–95 [296]	1996	$\varepsilon_{cu} = 300 \cdot 10^{-5}$

Таблиця А.9 – Основні закономірності деформування розтягнутого бетону

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежностей $\sigma_{ct}$ , $\varepsilon_{ct,1}$ та $\varepsilon_{ct,u}$
1	2	3	4
<b>I. Діаграма деформування</b>			
<b>Сплайн-функції</b>			
1.	Scanlon, A., Murray, D. W. [502]	1974	$\sigma_{ct} = E_c \cdot \varepsilon_{ct}$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} \leq 1,0$ ;
	Okamura, H., Maekawa, K. [458]	1991	$\sigma_{ct} = f_{ct} \cdot (\varepsilon_{ct1}/\varepsilon_{ct})^c$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} > 1,0$
2.	Vecchio, F. J., Collins, M. P. [537], [538], [539]	1982 ... 1992	$\sigma_{ct} = E_c \cdot \varepsilon_{ct}$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} \leq 1,0$ ; $\sigma_{ct} = f_{ct} / (1 + \sqrt{200 \cdot \varepsilon_{ct}})$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} > 1,0$
3.	Hwang, L. S., Rizkalla, S. H. [409], [487]	1983, 1984	$\sigma_{ct} = E_c \cdot \varepsilon_{ct}$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} \leq 1,0$ ; $\sigma_{ct} = f_{ct} \cdot e^{-(\varepsilon_{ctu} - \varepsilon_{ct1}) \cdot 10^3}$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} > 1,0$
4.	Belarbi, A., Hsu, T. T. C. [314], [315]	1990, 1994	$\sigma_{ct} = E_c \cdot \varepsilon_{ct}$ для $\varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_{ct1} = 8 \cdot 10^{-5}$ ; $\sigma_{ct} = f_{ct} \cdot (\varepsilon_{ct1}/\varepsilon_{ct})^{0,4}$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} > 1,0$
5.	CEB-FIP MC-90 [348]	1993	$\sigma_{ct} = E_c \cdot \varepsilon_{ct}$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} \leq 1,0$ ; $\sigma_{ct} = f_{ct} \cdot (\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1})^{0,6}$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} > 1,0$
6.	Zongjin, Li, Faming, Li, Tse-Yung Paul Chang, Yiu-Wing Mai [551]	1998	$\sigma_{ct} = f_{ct} \cdot (1,2 \cdot \varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} - 0,2 \cdot (\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1})^6)$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} \leq 1,0$ ;
	Тур В. В. [95]	2003	$\sigma_{ct} = f_{ct} \cdot \frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{ct1}} / (\alpha (\frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{ct1}} - 1)^\beta + \frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{ct1}})$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} > 1,0$
7.	Vecchio, F. J., Tata, M. [536]	1999	$\sigma_{ct} = E_c \cdot \varepsilon_{ct}$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} \leq 1,0$ ; $\sigma_{ct} = f_{ct} / (1 + \sqrt{500 \cdot \varepsilon_{ct}})$ для $\varepsilon_{ct}/\varepsilon_{ct1} > 1,0$
<b>Поліноміальні залежності</b>			

1	2	3	4
8.	Байков В. Н. [20]	1980	$\sigma_{ct} = f_{ct} \cdot \sum_{i=1}^5 a_i \cdot (\varepsilon_{ct} / \varepsilon_{ct1})^i$
	Бамбура А. Н. [29]	1996	
<b>Дробові залежності</b>			
9.	Carreira, D. J., Chu, K. -H. [344]	1985	$\sigma_{ct} = f_{ct} \beta_t (\varepsilon_{ct} / \varepsilon_{ct1}) / (\beta_t - 1 + (\varepsilon_{ct} / \varepsilon_{ct1})^{\beta_t})$
10.	Kaklauskas, G., Ghaboussi, J. [423]	2001	$\sigma_{ct} = 0,625 \cdot f_{ct} \cdot (1 - \varepsilon_{ct} / (\varepsilon_{ct1} \cdot \beta) + (1 + 0,6 \cdot \beta) \cdot \varepsilon_{ct1} / \varepsilon_{ct}),$  де $\beta = 32,8 - 27,6 \cdot \rho_l + 7,12 \rho_l^2$
<b>II. Критичні деформації</b>			
11.	Байков В. Н. [20]	1980	$\varepsilon_{ct1} = 2 \cdot f_{ctd} / E_c$
12.	Михайлов В. В., Емельянов М. П., Додулаев Л. С. [155]	1984	$\varepsilon_{ct1} = 2 \cdot f_{ctd} / E_c$
	СНиП 2.03.01-84* [244]	1989	
	Роговой С. И. [191]	2002	
	Бабич В. И., Кочкаръов Д. В. [7]	2004	
	Бамбура А. Н. [25]	2005	
13.	Ящук В. Е., Курган П. Е. [286]	1980	$\varepsilon_{ct1} = 5,35 \cdot \sqrt{f_{ctd}} \cdot 10^{-5}$
14.	Hwang, L. S., Rizkalla, S. H. [409], [487]	1983, 1984	$\varepsilon_{ct1} = f_{ctk} / E_c$
15.	Carreira, D. J., Chu, K. -H. [345]	1986	$\varepsilon_{ct1} = \varepsilon_{cl} \cdot f_{ctk} / f_{ck}$
16.	Лемыш Л. Л. [139]	1991	$\varepsilon_{ct1} = 1,75 \cdot f_{ctd} / E_c$
17.	Карпенко Н. И. [110]	1996	$\varepsilon_{ct1} = f_{ctd} / (E_c \cdot (0,6 + 15 \cdot f_{ctd} / 25))$

1	2	3	4
18.	Тур В. В. [95]	2003	$\varepsilon_{ct1} = 4,4 \cdot f_{ctd} \cdot 10^{-5}$
<b>III. Граничні деформації</b>			
19.	Михайлов В. В., Емельянов М. П., Додулаев Л. С. [155]	1984	$\varepsilon_{ctu} = 3 \cdot f_{ctd} / E_c$
20.	Tasdemir, M. A. et al. [528]	1998	$\varepsilon_{ctu} = (-0,009 \cdot f_{ck}^2 + 2,633 \cdot f_{ck} + 45,7) \cdot 10^{-6};$ $\varepsilon_{ctu,f} = (-0,0007 f_{ck}^2 + 1,825 f_{ck} + 67,7) \cdot 10^{-6}$
21.	Стандарт Росії СП 52–101–2003 [248]	2003	$\varepsilon_{ctu} = 2 \cdot f_{ctk} / E_{ck}$
	Стандарт України ДСТУ Б В.2.6-156:2010 [122]	2011	

Таблиця А.10 – Параметри врахування роботи розтягнутого бетону

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежностей для визначення параметрів $\psi_s, \psi_{bt}, \alpha$
1	2	3	4
<b>І. «Стиснутий бетон – порожнина – розтягнута арматура»</b>			
<b>Інтегрально параметром <math>\psi_s</math></b>			
1.	Мурашов В. И. [159]	1950	$\psi_s = \varepsilon_{sm} / \varepsilon_s = \sigma_{sm} / \sigma_s \leq 1$
2.	Таль К. Є., Чистяков Е. А. [250]	1961	$\psi_s = 1 - \omega_1 \cdot (1 - N_{sm} / N_s)$
3.	Васильев Б. Ф. и др. [59]	1965	$\psi_s = 1,3 - \lambda \cdot M_{ct} / M$
4.	ACI Committee 435 [292]	1966	$\psi_s = 1 - (2/3) \cdot (M_{crc} / M)^2$
5.	Немировский Я. М. [164]	1968	$\psi_{sd} = \psi_s \cdot (1 - M_{ct} / M)$
6.	Бондаренко В. М. [51]	1968	$\psi_s = a + b \cdot (M / M_u)^c$
7.	Карпенко Н. И. [110], [112]	1976, 1996	$\psi_s = 1 - \omega \cdot f_{cd} / (\sigma_{s1} \cdot \rho_l) =$ $= 1 - 0,7 \cdot f_{cd(t)} / (\sigma_{s1} \cdot \rho_l)$
8.	Мулин М. Н., Гуша Ю. П., Мамедов Т.И. [158]	1977	$\psi_{\varepsilon 1} = \bar{\psi}_s - \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{s,to}}{\varepsilon_{s,t1} - \varepsilon_{s,to}} \cdot (\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_{\varepsilon 1})$
9.	Колчунов В. И. [52]	2004	$\psi_r = \sigma_s \cdot A_s \cdot (1 - \psi_s) / (A_{ct,m} \cdot \omega_{ct})$
10.	Стандарт Росії СП 52-101-2003 [248]	2004	$\psi_s = 1 - \omega \cdot \frac{\sigma_{s,crc}}{\sigma_s} = 1 - \omega \cdot \frac{M_{bt,crc}}{M}$
11.	Клованич С. Ф. [117]	2007	$\psi_s = 1 - \omega_o \cdot \eta \cdot e^{-(\eta-1)} \cdot \sigma_{s,crc} / \sigma_s$
<b>За радіусом армування <math>R_r</math></b>			
12.	Берг О. Я. [42]	1951	$\psi = k \cdot R_r^m = k \cdot (A_r / \Sigma \beta n d)^m$
	СНиП 2.05.03-84*[245]	1984	
	ДБН В.2.3-14:2006 [157]	2006	
<b>За взаємним зміщенням арматури і бетону (гіпотеза Томаса)</b>			
13.	Федоренко М. М. [257]	1968	$\psi_s = 1 - S \cdot K \cdot (1 - k_1 / x_1)$

1	2	3	4
<b>Емпірично</b>			
14.	Гуца Ю. П. [83]	1985	$\psi_s = 1,25 - s \cdot m_i - d(1 - m_i) /$ $/(3,5 - 2 \cdot m_i) \cdot e_n$
	Карпенко Н. И. [112]	1976	
15.	СНиП II-21-75 [247]	1976	$\psi_s = 1,25 - \varphi_l \cdot \varphi_m - \frac{1 - \varphi_m^2}{(3,5 - 1,8\varphi_m) e_{s,tot}} / d$
	Залесов А. С., Фигаровский В. В. [100]	1976	
	Маилян Л. Р. [147]	1980	
	СНиП 2.03.01-84* [244]	1989	
<b>II. «Бетон-суцільне тіло»</b>			
16.	Пекус- Сахновский Д. Н. [181]	1965	$\psi_{ct} = M_{crc} / M \leq 1$
	Бачинский В. Я. и др.[35]	1972	
	Бамбура А. М. [25]	2005	
17.	Scanlon, A., Murray, D. W. [502]	1974	$\psi_{ct} = (\varepsilon_{ct1} / \varepsilon_{ct})^c$ для $\varepsilon_{ct} / \varepsilon_{ct1} > 1,0$
	Belarbi, A., Hsu, T. T. C. [314], [315]	1990, 1994	
	Okamura, H., Maekawa, K. [458]	1991	
	СЕВ-FIP MC-90 [348]	1993	
<b>III. Інтегрально без параметрів <math>\psi_s</math> та <math>\psi_{ct}</math></b>			
18.	Eurocode-2 [381]	2001	$\alpha = \left( 1 - \beta \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right) \cdot \alpha_{II} + \beta \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \cdot \alpha_I$
	СНБ 5.03.01-02 [243]	2003	
	ДСТУ Б В.2.6-156 [122]	2011	

Таблиця А.11 – Основні пропозиції з визначення кривини залізобетонних елементів

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежності $1/r$
1	2	3	4
<b>За параметрами розтягнутої або стиснутої зони</b>			
1.	Мурашев В. И. [159]	1950	$1/r = M \cdot \psi / (E_s \cdot W_s \cdot (d - x))$
	Кротовский С. С. [130]	1959	
2.	Таль К. Э., Чистяков Е. А. [250]	1961	$1/r = \sigma_s \cdot \psi / (E_s \cdot d \cdot (1 - \xi_m))$
3.	Веебу, А. W. [312]	1968	$1/r = M_{cr} / (E_c \cdot I_u) + (M - M_{cr}) / (k \cdot E_c \cdot I_{cr})$
4.	Маилян Л. Р. [147]	1980	$\frac{1}{r} = \frac{M}{\kappa_n \cdot \nu_c \cdot E_c \cdot I_n} - \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{en}}$ – без тріщин
	Залесов А. С. и др. [101]	1988	
<b>За параметрами розтягнутої і стиснутої зон</b>			
5.	Гвоздев А. А. и др. [68]	1962	$\frac{1}{r} = \frac{M}{d \cdot z} \left( \frac{\psi_s}{E_s A_s} + \frac{\psi_c}{\nu_c E_c A_{oc}} \right) + \frac{N \cdot \psi_s}{d \cdot E_s \cdot A_s}$
	Немировский Я. М. и др. [165]	1971	
	Залесов А. С., Фигаровский В. В. [100]	1976	
	Тихий М., Ракосник Й. [252]	1976	
	Маилян Л. Р. [147]	1980	
	Голишев А. Б., Бачинский В. Я. и др. [73]	1985	
	Залесов А. С. и др. [101]	1988	
6.	Байков В. Н. [20]	1980	$1/r = (\psi_s \cdot \varepsilon_s + \psi_c \cdot \varepsilon_c) / d$
	Гуща Ю. П., Лемыш Л. Л. [83]	1985	
7.	СП 52–101–2003 [248]	2004	$1/r = M / (\Sigma(I_{ci} \cdot E_c \cdot \nu_{ci}) + \Sigma(I_{sj} \cdot E_{sj} \cdot \nu_{sj}))$

1	2	3	4
<b>За ефективним або приведеним перерізом</b>			
8.	Ghali, A. [395]	1993	$1/r = M / (E_c \cdot I_{eff})$
	СЕВ-FIP MC-90 [348]	1993	
	Kassimali, A. [424]	1995	
9.	Бабич В. І., Кочкаръов Д. В. [10]	2003	$1/r = M / (k \cdot D)$
<b>За осередненим значенням в блоці між тріщинами</b>			
10.	Дыховичный А. А. [93]	1978	$1/r = \alpha \cdot M - \beta \cdot M^2$
11.	Ghali, A. [395]	1993	$\frac{1}{r} = \left( 1 - \beta \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \right) \cdot \left( \frac{1}{r} \right)_{cr} +$ $+ \beta \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{r} \right)_o$
	СЕВ-FIP MC-90 [348]	1993	
	Стандарт Канади CAN3-A23.3-M94 [343]	1994	
	Sherif, A. G., Dilger, W. H. [513]	1998	
	Eurocode-2 [381]	2001	
	Стандарт Білорусії СНБ 5.03.01-02 [243]	2003	
	Національний стандарт ДСТУ Б В.2.6-156 [122]	2011	
12.	Achintha, P. M. M., Burgoyne, C. J. [288]	2009	$\frac{1}{r} = \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^4 \left( 1 - \left( \frac{M - M_{cr}}{M_y - M_{cr}} \right)^4 \right)$



Таблиця А.12 – Аналітичні залежності з визначення прогинів

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежності $f$
1	2	3	4
<b>Спрощені методи</b>			
1.	Мурашев В. И. [159]	1950	$f = s \cdot \frac{1}{r_{\max}} \cdot l^2$
	Таль К. Э., Чистяков Е., Нисканен И. [250], [272]	1961, 1970	
	Пособие к СНиП 2.03.01-84 [186]	1986	
	СП 52–101–2003 [248]	2004	
2.	ACI Committee 435 [292]	1966	$f = k \cdot L^2 \cdot (f_s + \eta \cdot f_c) / (\psi_s \cdot E_s \cdot d)$
3.	Бидный Г. Р., Чупак И. М. [47]	1973	$f = f_M + f_Q = s \cdot \frac{1}{r} \cdot l^2 + \frac{2,87 \cdot Q \cdot a}{\xi \cdot b \cdot d \cdot v_c \cdot E_c}$
4.	Vloxham, J. W. [323]	1980	$f = k \cdot l^2 \cdot \left( \frac{M_{cr}}{E_c \cdot I_u} + \frac{4}{3 \cdot E_s \cdot A_s \cdot d^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{M - M_{cr}}{(1 - 2q) \cdot (1 - 2q/3)} \right),$ де $q = A_s \cdot f_y / (b \cdot d \cdot f_{cu})$
5.	Makhtouf, H. M., ... [443]	1991	$f = \frac{K \cdot L^2}{E_c} \left( \frac{M'_{cr}}{2 \cdot I_g} + \frac{1}{0,85} \cdot \frac{M - M'_{cr}/2}{I_{cr}} \right)$
	ACI 435R-95 [291]	2003	
6.	Daugevičius, M., Valivonis, J., Marčiukaitis, G. [370]	2012	$f = \frac{s \cdot l^2}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{ch(\lambda \cdot l / 2) - 1}{\lambda^2 \cdot ch(\lambda \cdot l / 2)}$
<b>Енергетичні методи</b>			
7.	Залесов А. С., Фигаровский В. В. [100]	1976	$f = \frac{l^2}{12n^2} \left[ \left( \frac{1}{r} \right)_{\text{sup}l} + \left( \frac{1}{r} \right)_{\text{sup}r} + (3n-2) \cdot \left( \frac{1}{r} \right)_m + \right. \\ \left. + 6 \sum_{i=1}^{n/2-1} i \cdot \left[ \left( \frac{1}{r} \right)_{il} + \left( \frac{1}{r} \right)_{ir} \right] \right]$
	Гольшев О. Б. и др. [73]	1985	
	Залесов А. С. и др. [101]	1988	
	СП 52–101–2003 [248]	2004	

1	2	3	4
8.	СНиП II-21-75 [247]	1976	$f = \int_0^l \overline{M}_x \cdot \frac{1}{r}(x) \cdot dx + \int_0^l \overline{Q}_x \cdot \gamma(x) \cdot dx$
	Гольшев А. Б. и др. [73]	1985	
	Стандарт Росії СП 52–101–2003 [248]	2004	
9.	Маилян Л. Р. [147]	1980	$f = \frac{l^2}{(2 \cdot s)^2} \left( \sum_{j=1}^{s-1} j \cdot r_j - i \cdot \left( \frac{r_s}{2} + \sum_{j=1}^{s-1} r_j \right) \right) - (r_o - r_i) / 6$
10.	Маилян Л. Р. [147]	1980	$f_i = \sum_{i=1}^{25} \frac{1}{r_i} \cdot M_{1i} \cdot \Delta l_i$
11.	Кочкаръов Д. В. [127]	2002	$f = \frac{l}{3n} \left( m_0 \frac{1}{r_0} + m_n \frac{1}{r_n} + 4 \cdot \left( m_1 \frac{1}{r_1} + m_3 \frac{1}{r_3} + \dots + m_{n-1} \frac{1}{r_{n-1}} \right) + 2 \cdot \left( m_2 \frac{1}{r_2} + m_4 \frac{1}{r_4} + \dots + m_{n-2} \frac{1}{r_{n-2}} \right) \right)$
<b>Аналiтичні методи</b>			
12.	Фесик С. П. [259]	1982	$f(z) = M^\Phi(z)$
13.	Шкурупій А. А. [276]	2000	$f_i = f_{i-1} + \varphi_{i-1} \Delta l + 0,5 \varepsilon_{bi-1} \Delta l^2 / x'_{ci-1}$
<b>Дискретний</b>			
14.	Eurocode–2 [382]	2004	$f = \left( 1 - \beta \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 \right) f_{cr} + \beta \cdot \left( \frac{M_{cr}}{M} \right)^2 f_o$
	Стандарт Білорусії СНБ 5.03.01-02 [243]	2003	
	Національний стандарт ДСТУ Б В.2.6-156 [122]	2011	

Таблиця А.13 – Аналітичні залежності з визначення відстані між нормальними тріщинами

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежності $s_r$
1	2	3	4
<b>I. Залежності типу <math>s_r = f(f_{ct}, f_{ct}, \dots, \tau_{bm} \dots)</math></b>			
1.	Saliger, R. [497], [498]	1936, 1947	$s_{r,m} = 0,157 \cdot \varnothing_s \cdot f_{ct} / (4 \cdot \rho_s \cdot \tau_{bm})$
2.	Watstein, D., Parsons, D. E. [544]	1943	$s_{r,m} = k_1 \cdot f_{ct} \cdot \varnothing_s / (\tau_{b,max} \cdot \rho_s)$
3.	Desayi, P., Kulkarni, A. B. [373]	1976	$s_{m,x} = \frac{k_t \cdot f_{ct} \cdot A_{ct,x}}{\pi \cdot d_{bx} \cdot k_b \cdot \tau_t / s_x + d_{by} \cdot f_{bb} / s_y}$
4.	Байков В. Н., Сигалов Э. Е. [19]	1985	$s_{ro} = k_1 \cdot f_{ct,k} \cdot A / (\tau_{max} \cdot a_s \cdot \omega)$
5.	Noakowski, P. [454]	1985	$s_{rm} = 3,1 \cdot k \cdot \left( \frac{(0,22 \cdot f_{ctm} / \varphi)^{0,88}}{f_{ctm}^{0,66}} \cdot \varnothing_s \right)^{0,89}$
6.	Dawood, N., Marzouk, H. [371]	2010	$s_{m,x} = \frac{k_t \cdot f_{ctm} \cdot A_{ct,x} - 0,67 \cdot d_{by} \cdot f_{ctm}}{2 \cdot \pi \cdot d_{bx} \cdot \tau_{tp} \cdot n_x / 3}$
	Rizk, E., Marzouk, H.[488]	2010	
7.	Shalmani, A. Z. [511]	2011	$s_{min,x} = \frac{d_{t,efx} \cdot s_x}{\alpha_{sp} \cdot \beta_b \cdot \tau_{tpx} \cdot \pi \cdot d_{bx}} (f_{ctm} - \sigma_{csx});$ $s_{max,x} = 2 \cdot s_{min,x}$
8.	Chan Simon, H. C.[351]	2012	$s_{ro} = f_{ct} \cdot \varnothing_s / (4 \cdot \beta \cdot \tau_{b,max} \cdot \rho)$
<b>Залежності типу <math>s_r = f(\sigma_s, f_{ct}, \dots, \tau_{bm} \dots)</math></b>			
9.	Мурашев В. І. [159]	1950	$s_{ro} = \frac{(\sigma_{s,crc} - 2 \cdot \alpha_s \cdot f_{ct,k}) \cdot A_s}{\omega \cdot \tau_{max} \cdot s}$
	Молодченко Г. А. [156]	1972	
10.	Немировский Я. М. [163]	1969	$s_{ro} = \frac{2 \cdot (\sigma_s - \sigma_{s1}) \cdot A_s}{\tau_m \cdot s}$

1	2	3	4
11.	Jankó, L. [412]	1994	$s_{r,m} = \sigma_{s2} \cdot \varnothing_s / (2 \cdot \alpha \cdot \sigma_{cl})$
12.	Bernardi, S., Mesureur, B. Rivillon, P. [318]	1999	$s_{r,m} = 2 \cdot (d + Ach^{-1} \sqrt{\sigma_s / (\sigma_s - (f_{ctm} / \rho_{ef})})}$
13.	Кочкаръов Д. В., Бабич В. І. [126]	2011	$s_{ro} = \frac{(\sigma_{s,i} - \sigma_{s,i+1}) \cdot f_{yd} \cdot d}{4 \cdot \alpha \cdot f_{cd} \cdot \sigma_{s,i}}$
<b>Спрощені на позиціях <math>s_r = f(\sigma_s, f_{ct}, \dots)</math></b>			
14.	Гуца Ю. П. [82]	1971	$s_{r,max} = \delta \cdot \eta \cdot k \cdot (3,5 - 100 \rho_l) \cdot \sqrt[3]{\varnothing}$
	Байков В. Н., Сигалов Э. Е. [19]	1985	
	Залесов А. С., Кодыш Э. И. и др. [101]	1988	
	СНиП 2.03.01-84* [244]	1989	
15.	Карпенко Н. И. [112]	1976	$s_{r,m} = k_p \cdot e_o \cdot \eta_c \cdot (3,5 - 100 \cdot A_n / h) \times$ $\times \sqrt[3]{d_o^2 \cdot d_c} \cdot (1 - (0,15 \cdot A_n^o / A_n) \cdot  \sin 2\alpha )$
16.	СНиП 2.06.08-87 [246]	1988	$s_{r,max} = \delta \cdot \eta \cdot k_1 \cdot (4 - 100 \cdot \rho_l) \sqrt{\varnothing}$
17.	Залесов А. С., Чистяков Е. А., Ларичева И. Ю. [99]	1997	$s_{ro} = 2 \cdot \omega \cdot N_{ct,crc} / (\pi \cdot \varnothing_s \cdot \eta \cdot f_{ct,k})$
<b>Залежності типу <math>s_r = f(R_r)</math></b>			
18.	Берг О.Я. [41]	1954	$s_{ro} = \frac{0,16 \cdot R_r \cdot (1 - \mu)}{0,7 - 0,085 \cdot \ln(1000 / R_r)}$ , де $R_r = A_r / (\sum \beta_i \cdot n_i \cdot \varnothing_i)$
	СНиП 2.05.03-84* [245]	1984	
	Національний стандарт ДБН В.2.3-14:2006 [157]	2006	
<b>Інші</b>			
19.	Гольшев А.Б., Бачинский В. Я. и др. [135]	1987	$s_{r,m} = \frac{2}{B_s} \cdot (4,6 - \frac{13,5 \cdot \theta_s}{2 + \theta_s})$ , де $B_s = u_s \cdot G_{qs} / (A_s \cdot E_s \cdot \varphi_s)$

1	2	3	4
20.	Кінаш Р. І., Павленко П. В. [115]	2000	$s_{ro} = \left(\frac{W_{p1} \cdot E}{W_s \cdot E_1} - 2\right) \frac{E_1 \cdot A_s}{E \cdot p_1} \cdot \eta_1$
<b>II. Найпростіші емпіричні</b>			
21.	Broms, B. B., Lutz, L. A. [331]	1965	$s_{r,m} = k \cdot c$
22.	Broms, B. B. [330]	1965	$s_{r,m} = k_1 \cdot c + k_2 \cdot \varnothing_s$
	Welch, G. B., Janjua, M. A. [546]	1971	
23.	Janovic, K., ... [413]	1982	$s_{r,m} = 50 + k \cdot s$
24.	Janovic, K., ... [414]	1986	$s_{r,m} = 50 + 0,637 \cdot s \cdot \varnothing_s / 25$
25.	Jaccoud, J. -P. [410]	1987	$s_{r,m} = (50 + 1,5 \cdot k \cdot s) \cdot 4 / 3$
26.	JSCE [415]	1997	$s_{r,m} = k \cdot (4 \cdot c + 0,7 \cdot (s - \varnothing_s))$
27.	Стандарт Японії JSCE-SSCS-2007 [419]	2007	$s_{r,max} = 1,1 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 (4 \cdot C + 0,7(c_s - \varnothing))$
<b>Емпіричні, пов'язані з <math>\rho_{ef}(\rho_s)</math></b>			
28.	Clark, A. P. [360]	1956	$s_{ro} = C_1 \cdot c + C_2 \cdot s + C_3 \cdot \varnothing_s / \rho$
29.	Ferry-Borges, J. [388]	1966	$s_{r,m} = k_1 \cdot c + k_2 \cdot \varnothing_s / \rho_{ef}$
	CEB-FIP 1970 [346]	1970	
	Leonhardt, F. [432]	1977	
	Beeby, A. W. [313]	1979	
30.	Holmberg, A. [404]	1970	$s_{r,m} = 1,65 + 0,56 \sqrt{c \cdot A_{c,ef} / (\Sigma \varnothing_s)}$
31.	Leonhardt, F. [432]	1977	$s_{r,m} = 5 \cdot (\varnothing_s - 7,2) + 0,08 \cdot \varnothing_s / \rho_{ef} + k_1(c; s)$
32.	CEB-FIP Model Code 1978 [347]	1978	$s_{r,m} = 2 \cdot (c + s / 10) + k_2 \cdot k_3 \cdot \varnothing_s / \rho_{ef}$
33.	Menn, C. [445]	1986	$s_{r,m} = 2 \cdot (c + s / 10) + k \cdot \varnothing_s / (10 \cdot \rho_{ef})$

1	2	3	4
34.	Oh B. H., Kang, Y.-J. [457]	1987	$s_{r,m} = \varnothing_s \cdot (25,7 \cdot \left(\frac{h-d}{h-x_2}\right)^{4,5} + 1,66 \cdot \left(\frac{A_{c,ef}}{n \cdot A_s}\right)^{1/3} + 0,236 \cdot 10^{-6} / \varepsilon_{s2}^2)$
35.	Fehling, E., König, G. [387]	1988	$s_{r,m} = (30 + 0,25 \cdot \varnothing_s / \rho_{ef}) / 1,7$
36.	Braam, C. R. [325]	1990	$s_{r,m} = k_1 \cdot c + 0,25 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \varnothing_s / \rho_{ef}$
37.	CEB-FIP MC 1990 [348]	1993	$s_{r,m} = 2 \cdot \varnothing_s / (3 \cdot 3,6 \cdot \rho_{ef})$
38.	Chowdhury, S. H., Loo, Y. C. [358]	1997	$s_{ro} = 0,6 \cdot (c - s) + 0,1 \cdot \varnothing_s / \rho$
39.	Eurocode-2 [381]	2001	$s_{r,m} = 50 + 0,25 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \varnothing_s / \rho_{ef}$
40.	Стандарт Білорусії СНБ 5.03.01-02 [243]	2003	$s_{r,max} = k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \varnothing_s / \rho_{p,eff}$
	Eurocode-2 [382]	2004	
	Національний стандарт ДСТУ Б В.2.6-156:2010 [122]	2011	
41.	Rilem TC 162-TDF [485]	2003	$s_{r,max} = \beta \cdot (k_3 + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \varnothing / \rho) \frac{k_5}{L/D}$
42.	Стандарт Росії СП 52-101-2003 [248]	2004	$s_{ro} = 0,5 \cdot \varnothing_s / \rho_s, \text{ де } 1/\rho_s = A_{ct}/A_s$
43.	Стандарт Канади CSA-S474-04 [369]	2004	$s_{r,max} = 2(c + 0,1 \cdot s) + k_1 \cdot k_2 \cdot \varnothing / \rho_{p,eff}$

Таблиця А.14 – Аналітичні залежності з визначення ширини розкриття нормальних тріщин в залізобетонних елементах

№ з/п	Автор	Рік	Вид залежності $w_k$
1	2	3	4
<b>I. За накопиченням взаємних зсувів бетону і арматури</b>			
1.	Saliger, R. [498]	1936	$w_k = \int_0^y (\varepsilon_{sy} - \varepsilon_{cty}) dy$
	Thomas, F. G. [530]	1936	
2.	Кузнецов А. Н. [135]	1940	$w_k = 2 \int_0^{0,5s_{ro}} \varepsilon_{\tau}(y) dy \cong s_{ro} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{ctm})$
	Оатул О. О. [171]	1967	
	Городецкий Л. М. [80]	1973	
	Карпенко Н. И. [112]	1976	
	Гольшев А. Б. и др. [73]	1985	
	Колчунов В. И. [52]	2004	
3.	Гольшев А. Б., Бачинский В. Я. и др. [136]	1987	$w_k = \frac{2 \cdot \sigma_{s2}}{E_s \cdot B_s} \cdot (1,15 - \frac{125}{(0,5 \cdot B_s \cdot s_{r,m} + 3,12)^4})$ , де $B_s = u_s \cdot G_{qs} / (A_s \cdot E_s \cdot \varphi_s)$
4.	Padmarajaiah, S. K., Ramaswamy, A. [461]	2001	$w_k = \frac{D-x}{d-x} \cdot \frac{4 \cdot A_{ef} \cdot k_t \cdot \sigma_t}{k_b \cdot f_{bu} \cdot \Sigma(\pi \cdot d)} \cdot \frac{f_s}{E_s}$
<b>За різницею видовжень розтягнутого бетону і арматури</b>			
5.	Watstein, D., Parsons, D. E. [544]	1943	$w_k = \frac{k_1 \cdot f_{cm}}{\tau_{b,max}} \cdot \frac{\varnothing_s}{\rho_s} \cdot (\frac{\sigma_{s2}}{E_s} - \frac{k_2 \cdot f_{cm}}{E_s} (\frac{1}{\rho_s} + \alpha_s))$
6.	Saliger, R. [497]	1947	$w_k = 2 \cdot (0,157 \cdot \frac{\varnothing_s \cdot f_{cm}}{4 \cdot \rho_s \cdot \tau_{bm}}) \times$ $\times \frac{\sigma_{s2} - f_{cm} \cdot (0,05 / \rho_s + 2)}{E_s}$
7.	Мурашев В. И. [159]	1950	$w_k = s_{ro} \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \psi_s$ , де $\psi_s = (1 - \omega_1 \cdot \frac{f_{ctk}}{\sigma_s} \cdot \frac{1 + \alpha_s \cdot \rho_l}{\rho_l})$

8.	Chi, M., Kirstein, A. F. [355]	1958	$w_k = \frac{5 \cdot \tau \cdot \varnothing_s}{E_s} \cdot \left( \sigma_s - \frac{438}{\tau \cdot \varnothing_s} \right)$
9.	Ferry-Borges, J. [388]	1966	$w_k = \frac{1,7}{E_s} \left( 1,5 \cdot c + \frac{0,04 \cdot d_b}{\rho_w} \right) \left( \sigma_s - \frac{0,75}{\rho_w} \right)$
10.	CEB-FIP Model Code 1978 [347]	1978	$w_k = 1,7 \cdot \left( 2 \cdot \left( c + \frac{s}{10} \right) + a_1 \cdot a_2 \cdot \frac{\varnothing_s}{\rho_r} \right) \times$ $\times \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left( 1 - b_1 \cdot b_2 \cdot \left( \sigma_{sr} / \sigma_s \right)^2 \right)$
	Норми Нової Зеландії NZS 3101-1: 1982 [456]	1982	
11.	Noakowski, P. [454]	1985	$w_k = 1,5 \cdot k \cdot 3,1 \cdot \left[ \frac{(0,22 \cdot f_{ctm} / \rho)^{0,88}}{f_{ctm}^{0,66}} \varnothing_s \right]^{0,89} \times$ $\times (\sigma_{s2} - 0,56 \cdot k \cdot 0,22 \cdot f_{ctm} / \rho) / E_s$
12.	Oh, B. H., Kang, Y.-J. [457]	1987	$w_k = \left[ 159 \cdot \left( \frac{h-d}{h-x_2} \right)^{4,5} + 2,83 \cdot \left( \frac{A_{c,ef}}{n \cdot A_s} \right)^{1/3} \right] \times$ $\times (\varepsilon_s - 0,0002) \cdot \varnothing_s$
13.	Залесов А. С., Кодыш Э. И. и др. [101]	1988	$w_k = \psi_s \cdot \varepsilon_s \cdot S_{ro}$
	Стандарт Росії СП 52-101-2003 [248]	2003	
14.	Lan, Z., Ding, D. [431]	1992	$w_k = 1,41 \cdot (2,7 \cdot c + 0,11 \cdot \varnothing_s / \rho_{te}) \times$ $\times v \cdot \varepsilon_s \cdot \psi$
15.	CEB-FIP MC 1990 [348]	1993	$w_k = \varnothing_s \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} - \varepsilon_{cs}) / (3,6 \cdot \rho_{ef})$
16.	Jankó, L. [412]	1994	$w_k = \frac{\sigma_{s2}^2 \cdot \varnothing_s}{2 \cdot k \cdot \sigma_{ct,i} \cdot E_s} \cdot \left( 1 - \frac{k \cdot f_{ctd}}{3 \cdot \sigma_{ct,i}} \right)$
17.	Quyang, C., Shah, S. P. [478]	1994	$w_k = \varnothing_s \frac{\left[ E_c (1 - \rho) / (E_s \cdot \rho \cdot e^{\xi N}) + 1 \right] \cdot \varepsilon_{cm} - \eta}{1 - N \cdot d / l - \eta \cdot d / w_c},$ де $\eta = (1 - \rho) \cdot f_{ct} / (E_s \cdot \rho) + f_{ct} / E_c$
	Shah, S. P., Swartz, S. E., Quyang, C. [509]	1995	



1	2	3	4
18.	Eurocode 2 [381]	2001	$w_k = 1,7 \cdot (50 + k_1 \cdot k_2 \cdot \frac{\varnothing_s}{4 \cdot \rho_s}) \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \times$ $\times (1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\sigma_{sr} / \sigma_s)^2)$
	Narayanan, R. S., Veeby, A. W. [449]	2001	
19.	Норми Білорусії СНБ 5.03.01-02 [243]	2003	$w_k = s_{r, \max} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{ctm}) = s_{r, \max} \times$ $\times \frac{\sigma_s - k_t \cdot f_{ct, \text{eff}} (1 + \alpha_e \cdot \rho_{p, \text{eff}}) / \rho_{p, \text{eff}}}{E_s}$
	Eurocode 2 [382]	2004	
	Стандарт України ДСТУ Б В.2.6-156:2010 [122]	2011	
20.	Shalmani, A. Z. [511]	2011	$w_{k,x} = \beta_{gx} \cdot s_{\max,x} \cdot (\varepsilon_{sm,x} - \varepsilon_{cm,x} - \varepsilon_{cs})$
21.	Chan Simon, H. C. [351]	2012	$w_{\max} = f_{ct} \cdot \varnothing_s \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) / (2 \cdot \beta \cdot \tau_{\max} \cdot \rho)$
<b>За радіусом активної взаємодії: <math>w_k = f(R_r)</math></b>			
22.	Берг О. Я. [41]	1954	$w_k = (\sigma_s / E_s) \cdot \psi_s \cdot \sqrt{R_r(\beta)}$
<b>II. За осередненими деформаціями арматури: <math>w_k = f(\varepsilon_s)</math></b>			
23.	Broms, B. B. [330]	1965	$w_k = 4 \cdot (c + \varnothing_s / 2) \cdot \varepsilon_{sm}$
24.	Broms, B. B., Lutz, L. A. [331]	1965	$w_k = 4 \cdot t_\varepsilon \cdot \varepsilon_{sm}$
25.	Veeby, A. W. [311]	1971	$w_k = 3 \cdot a_{cr} \cdot \varepsilon_m / (1 + 2 \cdot (\frac{a_{cr} - c_{\min}}{h - x}))$
	Британський стандарт BS 8007:1987 [333]	1987	
	Reynolds, C. E., Steedman, J. C. [484]	1988	
26.	Гуца Ю. П. [82]	1971	$w_k = \delta \cdot \varphi_l \cdot \eta \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot k(3,5 - 100 \rho_l) \cdot \sqrt[3]{\varnothing_s}$
	Гольшев А. Б. [73]	1985	
	Залесов А. С., Кодыш Э. И. и др. [101]	1988	
	СНиП 2.03.01-84* [244]	1989	

1	2	3	4
27.	Base, G. D. [309]	1976	$w_k = \varepsilon_m \cdot (k_1 \cdot c - k_2 \cdot \varnothing / \rho)$
	Beeby, A. W. [313]	1979	
28.	Syguła, S. [526]	1981	$w_k = k \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot 20 \cdot (3,5 - 100 \cdot \rho) \cdot \sqrt{\varnothing_s}$
29.	Janovic, K., Kupfer, H. [413]	1982	$w_k = 1,7 \cdot (50 + 0,75 \cdot s) \cdot 0,8 \cdot \frac{\sigma_{s2}}{E_s}$
	Schiessl, P., Wölfel, E. [503]	1986	
30.	Holmberg, A. [405]	1984	$w_m = \varepsilon_s \cdot s_{rm} \cdot (0,378 - 0,11 \cdot c / \varnothing_s) +$ $+ c \cdot \sqrt{\sigma_s / 30} \cdot (45,4 - 9,9 \cdot c / \varnothing_s) \cdot 10^{-4}$
31.	Hughes, B. P., Cifuentes, C. V. [408]	1988	$w_k = 0,25 \cdot \frac{f_t \cdot d_b}{\mu \cdot \rho_c} \cdot \frac{1 + n \cdot \rho_c}{1 + 2 \cdot n \cdot \rho_c} \cdot \frac{\sigma_s}{E_s}$
32.	СНиП 2.06.08-87 [246]	1988	$w_k = \delta \cdot \varphi \cdot \eta \cdot \frac{\sigma_s - \sigma_{s,bg}}{E_s} \cdot 7(4 - 100 \rho_l) \cdot \sqrt{\varnothing_s}$
33.	Balazs, G. L. [308]	1993	$w_k = 0,4 \cdot \left( \frac{\sigma_s^2 \cdot d_b}{E_s \cdot \sqrt{f_c}} \right)^{1/1,4}$
34.	Chowdhury, S. H., Loo, Y.C. [356], [358]	1997, 2001	$w_k = (0,6 \cdot (c - s) + 0,1 \cdot \frac{\varnothing_s}{\rho}) \cdot \frac{f_s}{E_s}$
35.	Frosch, R. J. [391]	1999	$w_k = 2\beta_g \cdot \frac{\sigma_{s,cr}}{E_s} \cdot \sqrt{d_c^2 + (s/2)^2}$
	Стандарт США ACI 318R-05 [315]	2005	
36.	Toutanji, H. A., Saafi, M. [533]	2000	$w_k = \left[ d + A \tan h \left( \cosh^{-1} \sqrt{\frac{\sigma_s}{\sigma_s - (f_{ctm} / \rho)}} \right) \right] \times$ $\times 2 \cdot \sigma_s / E_s$
37.	Норми США ACI 224R-01 [290]	2001	$w_k = 2,2 \cdot \beta \cdot \varepsilon_s \cdot \sqrt[3]{d_c \cdot A}$

1	2	3	4
<b>За осередненими напруженнями в арматурі <math>w_k = f(\sigma_s)</math></b>			
38.	Clark, A. P. [360]	1956	$w_k = 1,29 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{h-d}{d} \cdot \frac{\varnothing_s}{\rho} \times$ $\times (2,56 \cdot \sigma_s - 1/\rho + 8)$
39.	Kaar, P., Mattock, A. [420]	1963	$w_k = 1,57 \cdot 10^{-5} \cdot \sigma_s \cdot \sqrt[4]{A_e}$
40.	Kaar, P. H., Hognestad, E. [421]	1965	$w_k = k \cdot \frac{d-x}{h-x} \cdot \sigma_{s2} \cdot \sqrt[4]{A_{c,ef} / n}$
41.	Gergely, P., Lutz, L. [393]	1968	$w_k = k \cdot \frac{d-x}{h-x} \cdot \sigma_{s2} \cdot \sqrt[3]{(h-d) \cdot A_{c,ef}}$
	Toutanji, H. A., Saafi M. [532]	1999	
42.	Venkateswarlu, B., Gesund, H. [541]	1972	$w_k = \frac{2,4 \cdot 10^{-5} \cdot \varnothing_s \cdot (1462 - \sigma_s) \cdot \sigma_s}{1 + n \cdot \rho_m \cdot (662 - \sigma_s)}$
43.	Nawy, E. G. [451]	1985	$w_k = k \cdot A_{c,ef} \cdot \Delta\sigma_s / (\Sigma u)$
44.	ACI 224.2R-86 [289]	1986	$w_k = k \cdot \sigma_{s2} \cdot (h-d) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{s}{4 \cdot (h-d)}\right)^2}$
45.	Suri, K. M., Dilger, W. H. [525]	1986	$w_k = k \cdot \sigma_{s2} \cdot (h-d) \cdot \sqrt{A_{ct} / A_s}$
	Rao, S. V. K. M., Dilger, W. H. [481]	1992	
46.	Vis, W. C., Sagel, R. [542]	1987	$w_k = 0,2 \cdot \frac{f_t \cdot d_b}{\mu \cdot \rho_e} \cdot \sigma_s \cdot 10^{-5}$
47.	Scholz, H. [504]	1991	$w_k = k \cdot A_{ct,1} \cdot \sigma_s \cdot (h-x) / (A_s \cdot (d-x))$
48.	Krishna Mohan Rao, S., Prasada Rao A., Dilger, W. [428]	1993	$w_k = 2,25 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma_s \cdot d_c \sqrt{A_t / A_s}$
49.	AASHTO [287]	1996	$w_k = 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot \beta \cdot \sigma_s \cdot \sqrt[3]{d_c \cdot A}$
	ACI 350R-01 [337]	2001	
	SNI 03-2847-2002 [519]	2002	

## Додаток Б

### Рівні граничних деформацій стиснутого та розтягнутого бетону

Таблиця Б.1– Залежності з визначення рівня граничних деформацій стиснутого бетону в крайових фібрах

Вид деформування	Умови деформування	Залежність для визначення рівня граничних деформацій крайових фібр
1	2	3
<b>Стиснутий бетон в бетонних елементах (<math>m = \varepsilon_{co} / \varepsilon_{c2}</math>)</b>		
Осьовий стиск	$m = 1$	$\eta_{\varepsilon u} = \varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c1} = 1$ , де $\varepsilon_{c1} = f_{ck} / E_{co} + (140 - 0,7 \cdot f_{ck}) \cdot 10^{-5}$
Позацентричний стиск	$0 < m < 1$	$\eta_{\varepsilon u} = 1 + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m)^2)(1 - m^{3/2})(1 - 0,1m/k)\sqrt{(\ln k)^{(1-m^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m)))^2}$
	$m = 0$	$\eta_{\varepsilon u} = 1 + \frac{0,398 \cdot \sqrt{\ln k}}{1 + ((k - 2)/6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2}$
Косий стиск	$0 < m_h = \frac{\varepsilon_{co,h}}{\varepsilon_{c2}} < 1$ ; $0 < m_b = \frac{\varepsilon_{co,b}}{\varepsilon_{c2}} < 1$	$\eta_{\varepsilon u} = \varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c1} = 1 + \left[ \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_h)^2)(1 - m_h^{3/2})(1 - m_h/k)\sqrt{(\ln k)^{(1-m_h^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_h^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m_h)))^2} + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_b)^2)(1 - m_b^{3/2})(1 - m_b/k)\sqrt{(\ln k)^{(1-m_b^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_b^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m_b)))^2} \right]$
	$m_h = 0$ ; $m_b = 0$	$\eta_{\varepsilon u} = 1 + \frac{0,796 \cdot \sqrt{\ln k}}{1 + ((k - 2)/6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2}$

1	2	3
<b>Стиснутий бетон в залізобетонних елементах</b>		
Плоский згин	$0 < m < 1;$ $\varepsilon_s < \varepsilon_{so}$	$\eta_{eu} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot (k - 1) / (6 - k) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot (x_{si} / x)^2 +$ $+ 0,81 \cdot \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m)^2)(1 - m^{3/2})(1 - m/k) \sqrt{(\ln k)^{(1 - m^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m)))^2}$
	$m = 0; \varepsilon_s \geq \varepsilon_{so}$	$\eta_{eu} = 1 + 0,322 \cdot \sqrt{\ln k} / \left[ 1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2 \right]$
Косий згин	$0 < m_h < 1;$ $0 < m_b < 1;$ $\varepsilon_s < \varepsilon_{so}$	$\eta_{eu} = \varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c1} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot \frac{(k - 1)}{(6 - k)} \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \left( \frac{x_{si}}{x} \right)^2 + 0,81 \times$ $\times \left[ \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_h)^2)(1 - m_h^{3/2})(1 - m_h/k) \sqrt{(\ln k)^{(1 - m_h^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_h^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m_h)))^2} + \right.$ $\left. + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_b)^2)(1 - m_b^{3/2})(1 - m_b/k) \sqrt{(\ln k)^{(1 - m_b^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_b^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m_b)))^2} \right]$
	$m_h = 0; m_b = 0;$ $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{so}$	$\eta_{eu} = 1 + \frac{0,645 \cdot \sqrt{\ln k}}{1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2}$
Осьовий стиск	$m = 1$	$\eta_{eu} = \frac{1}{k - 2} \cdot \left( \frac{k - 1}{\sqrt{1 - \rho_{l,c} \cdot n_s \cdot k \cdot (k - 2)}} - 1 \right), \text{ при } k = 2 \quad \eta_{eu} = 1 + \rho_{l,c} \cdot n_s;$ <p>– <math>\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1}</math>, ЯКЩО <math>\varepsilon_s = \varepsilon_{so} \leq \varepsilon_{c1}</math>; – <math>\varepsilon_{c1} &lt; \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon_{so}</math>, ЯКЩО <math>\varepsilon_s = \varepsilon_{so} &gt; \varepsilon_{c1}</math></p>

1	2	3
Позацентричний стиск	$0 < m < 1;$ $\varepsilon_s < \varepsilon_{so}$	$\eta_{\varepsilon u} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot (k-1)/(6-k) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot (x_{si}/x)^2 +$ $+ \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m)^2)(1 - m^{3/2})(1 - m/k)\sqrt{(\ln k)^{(1-m^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m^2)(k-2)\ln(6/k - 2(0,1 - m)))^2}$
	$m = 0; \varepsilon_s < \varepsilon_{so}$	$\eta_{\varepsilon u} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot \frac{(k-1)}{(6-k)} \cdot \rho_{l1} \cdot \left(\frac{a_1}{h}\right)^2 + \frac{0,398 \cdot \sqrt{\ln k}}{1 + ((k-2)/6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2}$
	$m = 0;$ $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{so}$	$\eta_{\varepsilon u} = 1 + \frac{0,398 \cdot \sqrt{\ln k}}{1 + ((k-2)/6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2}$
Косий стиск	$0 < m_h < 1;$ $0 < m_b < 1;$ $\varepsilon_s < \varepsilon_{so}$	$\eta_{\varepsilon u} = \varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c1} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot \frac{(k-1)}{(6-k)} \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \left(\frac{x_{si}}{x}\right)^2 + \beta_F \times$ $\times \left[ \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_h)^2)(1 - m_h^{3/2})(1 - m_h/k)\sqrt{(\ln k)^{(1-m_h^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_h^2)(k-2)\ln(6/k - 2(0,1 - m_h)))^2} + \right.$ $\left. + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_b)^2)(1 - m_b^{3/2})(1 - m_b/k)\sqrt{(\ln k)^{(1-m_b^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_b^2)(k-2)\ln(6/k - 2(0,1 - m_b)))^2} \right]$
Косий стиск	$m_h = 0; m_b = 0;$ $\varepsilon_s < \varepsilon_{so}$	$\eta_{\varepsilon u} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot \frac{(k-1)}{(6-k)} \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \left(\frac{x_{si}}{x}\right)^2 + \frac{0,796 \cdot \sqrt{\ln k}}{1 + ((k-2)/6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2}$

1	2	3
Косий стиск	$m_h = 0; m_b = 0;$ $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{so}$	$\eta_{eu} = 1 + \frac{0,796 \cdot \sqrt{\ln k}}{1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6 / k - 0,2))^2}$

Таблиця Б.2 – Залежності з визначення рівня граничних деформацій розтягнутого бетону в крайових фібрах

Вид деформування	Умови деформування	Залежність для визначення рівня граничних деформацій крайових фібр
1	2	3
<b>Розтягнутий бетон в бетонних та залізобетонних елементах (<math>m_t = \varepsilon_{cto} / \varepsilon_{ct2}</math>)</b>		
Плоский згин	$0 < m_t < 1$	$\eta_{etu} = 1 + 0,81 \cdot \frac{(0,66 - 0,2(0,3 - m_t)^2)(1 - m_t^{4/3})(1 - m_t / k_t) \sqrt{(\ln k_t)^{(1,4 - m_t^{4/3})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot m_t^2)(k_t - 2) \ln(36 / k_t^2 - 2(0,1 - m_t)))^2}$
	$m_t = 0$	$\eta_{etu} = 1 + \frac{0,52 \cdot \sqrt{(\ln k_t)^{1,4}}}{1 + ((k_t - 2) / 6 \cdot \ln(36 / k_t^2 - 0,2))^2}$
Косий згин	$0 < m_{th} = \frac{\varepsilon_{cto,h}}{\varepsilon_{ct2}} < 1;$ $0 < m_{tb} = \frac{\varepsilon_{cto,b}}{\varepsilon_{ct2}} < 1$	$\eta_{etu} = 1 + 0,81 \cdot \left[ \frac{(0,66 - 0,2(0,3 - m_{th})^2)(1 - m_{th}^{4/3})(1 - m_{th} / k_t) \sqrt{(\ln k_t)^{(1,4 - m_{th}^{4/3})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot m_{th}^2)(k_t - 2) \ln(36 / k_t^2 - 2(0,1 - m_{th})))^2} + \frac{(0,66 - 0,2(0,3 - m_{tb})^2)(1 - m_{tb}^{4/3})(1 - m_{tb} / k_t) \sqrt{(\ln k_t)^{(1,4 - m_{tb}^{4/3})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot m_{tb}^2)(k_t - 2) \ln(36 / k_t^2 - 2(0,1 - m_{tb})))^2} \right]$

1	2	3
Косий згин	$m_{th} = 0;$ $m_{tb} = 0$	$\eta_{\varepsilon tu} = 1 + \frac{1,04 \cdot \sqrt{(\ln k_t)^{1,4}}}{1 + ((k_t - 2) / 6 \cdot \ln(36 / k_t^2 - 0,2))^2}$
Осьовий розтяг	$m_t = 1$	$\eta_{\varepsilon tu} = \varepsilon_{ctu} / \varepsilon_{ct1} = 1, \text{ де } \varepsilon_{ct1} = f_{ctk} / E_{co} + (3 - f_{ctk} / 3) \cdot 10^{-5}$
Позацентровий розтяг (стиск)	$0 < m_t < 1$	$\eta_{\varepsilon tu} = 1 + \frac{(0,66 - 0,2(0,3 - m_t)^2)(1 - m_t^{4/3})(1 - m_t / k_t) \sqrt{(\ln k_t)^{(1,4 - m_t^{4/3})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot m_t^2)(k_t - 2) \ln(36 / k_t^2 - 2(0,1 - m_t)))^2}$
	$m_t = 0$	$\eta_{\varepsilon tu} = 1 + \frac{0,642 \cdot \sqrt{(\ln k_t)^{1,4}}}{1 + ((k_t - 2) / 6 \cdot \ln(36 / k_t^2 - 0,2))^2}$
Косий розтяг (стиск)	$0 < m_{th} < 1;$ $0 < m_{tb} < 1$	$\eta_{\varepsilon tu} = 1 + 1,0 \cdot \left[ \frac{(0,66 - 0,2(0,3 - m_{th})^2)(1 - m_{th}^{4/3})(1 - m_{th} / k_t) \sqrt{(\ln k_t)^{(1,4 - m_{th}^{4/3})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot m_{th}^2)(k_t - 2) \ln(36 / k_t^2 - 2(0,1 - m_{th})))^2} + \right.$ $\left. + \frac{(0,66 - 0,2(0,3 - m_{tb})^2)(1 - m_{tb}^{4/3})(1 - m_{tb} / k_t) \sqrt{(\ln k_t)^{(1,4 - m_{tb}^{4/3})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot m_{tb}^2)(k_t - 2) \ln(36 / k_t^2 - 2(0,1 - m_{tb})))^2} \right]$
	$m_{th} = 0;$ $m_{tb} = 0$	$\eta_{\varepsilon tu} = 1 + \frac{1,284 \cdot \sqrt{(\ln k_t)^{1,4}}}{1 + ((k_t - 2) / 6 \cdot \ln(36 / k_t^2 - 0,2))^2}$



## Додаток В

### До визначення зусиль в бетоні залізобетонних елементів

Таблиця В.1– Формули для визначення зусиль в стиснутому бетоні залізобетонних елементів

Стадія (стан елемента)	Розрахункові деформації та напруження в бетоні	Формули для визначення зусиль
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>Плоскозавантажені елементи, форма стиснутої зони перерізу – чотирикутник (рис. 6.5, 6.6)</b>		
гранична рівновага	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}, \sigma_c = f_{ck}$	$N_c = \frac{b_n}{1/r} \cdot \frac{(a \cdot c + b)}{c^3} \left( -\varepsilon_c^2 \frac{b \cdot c^2}{2 \cdot (a \cdot c + b)} + \varepsilon_c \cdot c - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c) \right);$
несуча здатність	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu},$ $\sigma_c = f_{cd}$	$M_c = \frac{b_n}{(1/r)^2} \cdot \frac{a \cdot c + b}{c^4} \left( -\varepsilon_c^3 \frac{b \cdot c^3}{3 \cdot (a \cdot c + b)} + \varepsilon_c^2 \frac{c^2}{2} - \varepsilon_c \cdot c + \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c) \right).$
утворення та розкриття тріщин, розвиток прогинів	$\varepsilon_c = \varepsilon_{c2},$ $\sigma_c = \sigma_{c2}$	
<b>Косозавантажені елементи, форма стиснутої зони перерізу – трикутник (рис. 6.7)</b>		
гранична рівновага	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}, \sigma_c = f_{ck}$	$N_c = \frac{(a \cdot c + b)}{(1/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( -\varepsilon_c^3 \frac{b \cdot c^3}{6(a \cdot c + b)} + \varepsilon_c^2 \frac{c^2}{2} + \varepsilon_c \cdot c \cdot (1 - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c)) - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c) \right);$
несуча здатність	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu},$ $\sigma_c = f_{cd}$	$M_c = \frac{a \cdot c + b}{(1/r)^3 c^5 \sin \theta \cos \theta} \left( -\varepsilon_c^4 \frac{b \cdot c^4}{12 (a \cdot c + b)} + \varepsilon_c^3 \frac{c^3}{6} - \varepsilon_c^2 \frac{c^2}{2} - \varepsilon_c \cdot c \cdot (1 - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c)) + \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c) \right).$

1	2	3
утворення та розкриття тріщин, розвиток прогинів	$\varepsilon_c = \varepsilon_{c2},$ $\sigma_c = \sigma_{c2}$	
Косозавантажені елементи, форма стиснутої зони перерізу – <b>трапеція</b> з основою $h_n$ , ( $\varepsilon_h = (1/r) \cdot h_n \cdot c \cdot \cos \theta$ )		
гранична рівновага	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}, \sigma_c = f_{ck}$	$N_c = \frac{1}{(1/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b \cdot \varepsilon_h}{2} (-\varepsilon_c^2 \cdot c^2 + \varepsilon_c \cdot c \cdot \varepsilon_h - \frac{\varepsilon_h^2}{3}) + (a \cdot c + b)(\varepsilon_c \cdot c \cdot \varepsilon_h +$
несуча здатність	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu},$ $\sigma_c = f_{cd}$	$+ (\varepsilon_c \cdot c + 1) \times \ln(1 - \frac{\varepsilon_h}{1 + c \cdot \varepsilon_c}) + \varepsilon_h (1 - \frac{\varepsilon_h}{2} - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h))));$
утворення та розкриття тріщин, розвиток прогинів	$\varepsilon_c = \varepsilon_{c2},$ $\sigma_c = \sigma_{c2}$	$M_c = \frac{1}{(1/r)^3 c^5 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b \cdot \varepsilon_h}{2} (-\varepsilon_c^3 \frac{2 \cdot c^3}{3} + \varepsilon_c^2 \cdot c^2 \cdot \varepsilon_h - \varepsilon_c \cdot c \frac{2 \cdot \varepsilon_h^2}{3} + \frac{\varepsilon_h^3}{6}) + (a \cdot c + b) \times \right.$ $\times (\varepsilon_c^2 \cdot \varepsilon_h \frac{c^2}{2} - \varepsilon_c \cdot c \cdot \varepsilon_h \cdot (1 + \frac{\varepsilon_h}{2}) - (\varepsilon_c \cdot c + 1) \cdot \ln(1 - \frac{\varepsilon_h}{1 + c \cdot \varepsilon_c}) + \varepsilon_h \cdot (\frac{\varepsilon_h^2}{6} + \frac{\varepsilon_h}{2} - 1 +$ $\left. + \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h)))).$
Косозавантажені елементи, форма стиснутої зони перерізу – <b>трапеція</b> з основою $b_n$ , ( $\varepsilon_b = (1/r) \cdot b_n \cdot c \cdot \sin \theta$ )		
гранична рівновага	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}, \sigma_c = f_{ck}$	$N_c = \frac{1}{(1/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b \cdot \varepsilon_b}{2} (-\varepsilon_c^2 \cdot c^2 + \varepsilon_c \cdot c \cdot \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_b^2}{3}) + (a \cdot c + b)(\varepsilon_c \cdot c \cdot \varepsilon_b + (\varepsilon_c \cdot c + 1) \times \right.$ $\times \ln(1 - \frac{\varepsilon_b}{1 + c \cdot \varepsilon_c}) + \varepsilon_b (1 - \frac{\varepsilon_b}{2} - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_b))));$

1	2	3
несуча здатність	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}, \sigma_c = f_{cd}$	$M_c = \frac{1}{(l/r)^3 c^5 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b \cdot \varepsilon_b}{2} \left( -\varepsilon_c^3 \frac{2 \cdot c^3}{3} + \varepsilon_c^2 \cdot c^2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_c \cdot c \frac{2 \cdot \varepsilon_b^2}{3} + \frac{\varepsilon_b^3}{6} \right) + (a \cdot c + b) \times \right.$ $\times \left( \varepsilon_c^2 \cdot \varepsilon_b \frac{c^2}{2} - \varepsilon_c \cdot c \cdot \varepsilon_b \cdot \left( 1 + \frac{\varepsilon_b}{2} \right) - (\varepsilon_c \cdot c + 1) \cdot \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon_b}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \right) + \varepsilon_b \cdot \left( \frac{\varepsilon_b^2}{6} + \frac{\varepsilon_b}{2} - 1 + \right.$ $\left. \left. + \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_b) \right) \right).$
утворення та розкриття тріщин, розвиток прогинів	$\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}, \sigma_c = \sigma_{c2}$	
<b>Косозавантажені елементи, форма стиснутої зони перерізу – п'ятикутник (рис. 6.10)</b>		
гранична рівновага	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}, \sigma_c = f_{ck}$	$N_c = \frac{1}{(l/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b}{2} \left( -\varepsilon_c^2 c^2 (\varepsilon_h + \varepsilon_b) + \varepsilon_c c \cdot (\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2) - \frac{\varepsilon_h^3 + \varepsilon_b^3}{3} \right) + (a \cdot c + b) (\varepsilon_c^3 \times \right.$ $\times \frac{b \cdot c^3}{6(a \cdot c + b)} - \varepsilon_c^2 \frac{c^2}{2} + \varepsilon_c \cdot c \cdot (\varepsilon_h + \varepsilon_b - 1) + (\varepsilon_c \cdot c + 1) \cdot \ln \left( \frac{(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h)(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_b)}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \right) +$ $\left. \left. + \varepsilon_h + \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2}{2} - \varepsilon_h \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h) - \varepsilon_b \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_b) \right) \right);$ $M_c = \frac{1}{(l/r)^3 c^5 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b}{2} \left( -\varepsilon_c^3 \frac{2 \cdot c^3 (\varepsilon_h + \varepsilon_b)}{3} + \varepsilon_c^2 \cdot c^2 (\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2) - 2 \cdot \varepsilon_c \cdot c \frac{\varepsilon_h^3 + \varepsilon_b^3}{3} + \right.$ $\left. + \frac{\varepsilon_h^4 + \varepsilon_b^4}{6} \right) + (a \cdot c + b) \left( \varepsilon_c^4 \frac{b \cdot c^4}{12(a \cdot c + b)} - \varepsilon_c^3 \frac{c^3}{6} + \varepsilon_c^2 \frac{c^2}{2} (\varepsilon_h + \varepsilon_b + 1) - \varepsilon_c \cdot c \cdot (\varepsilon_h + \varepsilon_b - 1) - \right.$ $\left. - \varepsilon_c \cdot c \frac{\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2}{2} - (\varepsilon_c \cdot c + 1) \cdot \ln \frac{(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h)(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_b)}{1 + c \cdot \varepsilon_c} - (\varepsilon_h + \varepsilon_b) + \frac{\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2}{2} + \right.$
несуча здатність	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}, \sigma_c = f_{cd}$	
утворення та розкриття тріщин, розвиток прогинів	$\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}, \sigma_c = \sigma_{c2}$	

1	2	3
	$\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}, \sigma_c = \sigma_{c2}$	$+\frac{\varepsilon_h^3 + \varepsilon_b^3}{6} + \varepsilon_h \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h) + \varepsilon_b \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_b))$ .
Косозавантажені елементи, форма стиснутої зони перерізу – <b>чотирикутник</b> (рис. 5.17)		
гранична рівновага	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}, \sigma_c = f_{ck}$	$N_c = \frac{1}{(l/r)^2 c^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b}{2} (\varepsilon_c \cdot c + \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b) \cdot (\varepsilon_h + \varepsilon_b) + \frac{\varepsilon_h^3 + \varepsilon_b^3}{3} - \frac{\varepsilon_h^4 + \varepsilon_b^4}{3} \right) + (a \cdot c + b) \times$
несуча здатність	$\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}, \sigma_c = f_{cd}$	$\times \left( (\varepsilon_c \cdot c + 1) \cdot \ln \left( \frac{(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h)(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_b)}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \right) + (\varepsilon_h + \varepsilon_b - \varepsilon_c - 1) \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h - \varepsilon_b) + \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_h \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h) - \varepsilon_b \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_b) \right);$ $M_c = \frac{1}{(l/r)^3 c^5 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b}{2} (-2 \cdot \varepsilon_c^2 \cdot c^2 \cdot \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b + 2 \cdot \varepsilon_c \cdot c \cdot (\varepsilon_h^2 \cdot \varepsilon_b + \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b^2)) + \frac{4 \cdot \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b}{3} \times \right.$ $\times (\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2) - \varepsilon_h^2 \varepsilon_b^2) + (a \cdot c + b) (\varepsilon_c c \cdot \varepsilon_h \varepsilon_b - (\varepsilon_c \cdot c + 1) \times \ln \frac{(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h)(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_b)}{1 + c \cdot \varepsilon_c} +$ $+ (\varepsilon_c c + 1 - \varepsilon_h - \varepsilon_b) \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h - \varepsilon_b) - \frac{\varepsilon_h^2 \cdot \varepsilon_b + \varepsilon_h \cdot \varepsilon_b^2}{2} + \varepsilon_h \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_h) +$ $+ \varepsilon_b \cdot \ln(1 + c \cdot \varepsilon_c - \varepsilon_b) \left. \right).$

Таблиця В.2 – Формули для визначення зусиль в розтягнутому бетоні залізобетонних елементів  
залежно від форми їх розтягнутої зони

Стадія (стан елемента)	Розрахункові деформації та напруження в бетоні	Формули для визначення зусиль
1	2	3
Плоскозавантажені елементи, форма розтягнутої зони перерізу – <b>чотирикутник</b> (рис. 6.5, 6.6)		
гранична рівновага	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ або повне нехтування $N_{ct} = 0, M_{ct} = 0.$
несуча здатність	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctd} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	
утворення тріщин	$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}, \sigma_{ct} = f_{ctk}$	$N_{ct} = \frac{b_n}{1/r_{cr}} \cdot \frac{(a_t \cdot c_t + b_t)}{c_t^3} \left( -\varepsilon_{ct}^2 \frac{b_t \cdot c_t^2}{2 \cdot (a_t \cdot c_t + b_t)} + \varepsilon_{ct} \cdot c_t - \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}) \right);$ $M_{ct} = \frac{b_n}{(1/r_{cr})^2} \cdot \frac{a_t \cdot c_t + b_t}{c_t^4} \left( -\varepsilon_{ct}^3 \frac{b_t \cdot c_t^3}{3 \cdot (a_t \cdot c_t + b_t)} + \varepsilon_{ct}^2 \frac{c_t^2}{2} - \varepsilon_{ct} \cdot c_t + \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}) \right).$
розкриття тріщин, розвиток прогинів	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}.$
Косозавантажені елементи, форма розтягнутої зони перерізу – <b>трикутник</b> (рис. 6.10)		
гранична рівновага	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ або повне нехтування $N_{ct} = 0, M_{ct} = 0.$

1	2	3
несуча здатність	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctd} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}$ , $M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ або повне нехтування $N_{ct} = 0$ , $M_{ct} = 0$ .
утворення тріщин	$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}, \sigma_{ct} = f_{ctk}$	$N_{ct} = \frac{a_t \cdot c_t + b_t}{(1/r_{cr})^2 c_t^4 \sin \theta \cos \theta} \left( -\varepsilon_{ct}^3 \frac{b_t \cdot c_t^3}{6(a_t \cdot c_t + b_t)} + \varepsilon_{ct}^2 \frac{c_t^2}{2} + \varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot (1 - \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct})) - \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}) \right);$ $M_{ct} = \frac{a_t \cdot c_t + b_t}{(1/r_{cr})^3 c_t^5 \sin \theta \cos \theta} \left( -\varepsilon_{ct}^4 \frac{b_t \cdot c_t^4}{12(a_t \cdot c_t + b_t)} + \varepsilon_{ct}^3 \frac{c_t^3}{6} - \varepsilon_{ct}^2 \frac{c_t^2}{2} - \varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot (1 - \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct})) + \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}) \right).$
розкриття тріщин, розвиток прогинів	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}$ , $M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ .
Косозавантажені елементи, форма розтягнутої зони перерізу – <b>трапеція</b> з основою $h_n$ , $\varepsilon_{ht} = (1/\rho) \cdot h_n \cdot c_t \cdot \cos \theta$ )		
гранична рівновага	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}$ , $M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ або повне нехтування $N_{ct} = 0$ , $M_{ct} = 0$ .
несуча здатність	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctd} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	
утворення тріщин	$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}, \sigma_{ct} = f_{ctk}$	$N_{ct} = \frac{1}{(1/r_{cr})^2 c_t^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b_t \cdot \varepsilon_{ht}}{2} (-\varepsilon_{ct}^2 c_t^2 + \varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot \varepsilon_{ht} - \frac{\varepsilon_{ht}^2}{3}) + (a_t \cdot c_t + b_t) (\varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot \varepsilon_{ht} + \right.$

1	2	3
утворення тріщин	$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}, \sigma_{ct} = f_{ctk}$	$+(\varepsilon_{ct} \cdot c_t + 1) \cdot \ln\left(1 - \frac{\varepsilon_{ht}}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}}\right) + \varepsilon_{ht} \left(1 - \frac{\varepsilon_{ht}}{2} - \ln\left(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{ht}\right)\right));$ $M_{ct} = \frac{1}{(1/r_{cr})^3 c_t^5 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b_t \cdot \varepsilon_{ht}}{2} \left( -\varepsilon_{ct}^3 \frac{2 \cdot c_t^3}{3} + \varepsilon_{ct}^2 \cdot c_t^2 \cdot \varepsilon_{ht} - \varepsilon_{ct} \cdot c_t \frac{2 \cdot \varepsilon_{ht}^2}{3} + \frac{\varepsilon_{ht}^3}{6} \right) + \right.$ $\left. + (a_t \cdot c_t + b_t) \cdot \left( \varepsilon_{ct}^2 \cdot \varepsilon_{ht} \frac{c_t^2}{2} - \varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot \varepsilon_{ht} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon_{ht}}{2}\right) - (\varepsilon_{ct} \cdot c_t + 1) \cdot \ln\left(1 - \frac{\varepsilon_{ht}}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}}\right) + \right.$ $\left. + \varepsilon_{ht} \cdot \left( \frac{\varepsilon_{ht}^2}{6} + \frac{\varepsilon_{ht}}{2} - 1 + \ln\left(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{ht}\right) \right) \right).$
розкриття тріщин, розвиток прогинів	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ .
Косозавантажені елементи, форма розтягнутої зони перерізу – <b>трапеція</b> з основою $b_n, (\varepsilon_{bt} = (1/\rho) \cdot b_n \cdot c_t \cdot \sin \theta)$		
гранична рівновага	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ або повне нехтування $N_{ct} = 0, M_{ct} = 0$ .
несуча здатність	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctd} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	
утворення тріщин	$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}, \sigma_{ct} = f_{ctk}$	$N_{ct} = \frac{1}{(1/r_{cr})^2 c_t^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b_t \cdot \varepsilon_{bt}}{2} \left( -\varepsilon_{ct}^2 \cdot c_t^2 + \varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot \varepsilon_{bt} - \frac{\varepsilon_{bt}^2}{3} \right) + (a_t \cdot c_t + b_t) (\varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot \varepsilon_{bt} + \right.$ $\left. + (\varepsilon_{ct} \cdot c_t + 1) \cdot \ln\left(1 - \frac{\varepsilon_{bt}}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}}\right) + \varepsilon_{bt} \left(1 - \frac{\varepsilon_{bt}}{2} - \ln\left(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{bt}\right)\right) \right);$

1	2	3
утворення тріщин	$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}, \sigma_{ct} = f_{ctk}$	$M_{ct} = \frac{1}{(1/r_{cr})^3 c_t^5 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b_t \varepsilon_{bt}}{2} \left( -\varepsilon_{ct}^3 \frac{2 \cdot c_t^3}{3} + \varepsilon_{ct}^2 \cdot c_t^2 \cdot \varepsilon_{bt} - \varepsilon_{ct} \cdot c_t \frac{2 \cdot \varepsilon_{bt}^2}{3} + \frac{\varepsilon_{bt}^3}{6} \right) + \right. \\ \left. + (a_t \cdot c_t + b_t) \times \left( \varepsilon_{ct}^2 \cdot \varepsilon_{bt} \frac{c_t^2}{2} - \varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot \varepsilon_{bt} \cdot \left( 1 + \frac{\varepsilon_{bt}}{2} \right) - (\varepsilon_{ct} \cdot c_t + 1) \cdot \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon_{bt}}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_{bt} \cdot \left( \frac{\varepsilon_{bt}^2}{6} + \frac{\varepsilon_{bt}}{2} - 1 + \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{bt}) \right) \right) \right).$
розкриття тріщин, розвиток прогинів	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ .
<b>Косозавантажені елементи, форма розтягнутої зони перерізу - п'ятикутник (рис. 6.7)</b>		
гранична рівновага	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ або повне нехтування $N_{ct} = 0, M_{ct} = 0$ .
несуча здатність	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctd} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ або повне нехтування $N_{ct} = 0, M_{ct} = 0$ .
утворення тріщин	$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}, \sigma_{ct} = f_{ctk}$	$N_{ct} = \frac{1}{(1/r_{cr})^2 c_t^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b_t}{2} \left( -\varepsilon_{ct}^2 \cdot c_t^2 (\varepsilon_{ht} + \varepsilon_{bt}) + \varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot (\varepsilon_{ht}^2 + \varepsilon_{bt}^2) - \frac{\varepsilon_{ht}^3 + \varepsilon_{bt}^3}{3} \right) + \right. \\ \left. + (a_t \cdot c_t + b_t) \left( \varepsilon_{ct}^3 \frac{b_t \cdot c_t^3}{6(a_t \cdot c_t + b_t)} - \varepsilon_{ct}^2 \frac{c_t^2}{2} + \varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot (\varepsilon_{ht} + \varepsilon_{bt} - 1) + (\varepsilon_{ct} \cdot c_t + 1) \times \right. \right.$



1	2	3
утворення тріщин	$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}, \sigma_{ct} = f_{ctk}$	$\times \ln\left(\frac{(1+c_t \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{ht})(1+c_t \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{bt})}{1+c_t \cdot \varepsilon_{ct}}\right) + \varepsilon_{ht} + \varepsilon_{bt} - \frac{\varepsilon_{ht}^2 + \varepsilon_{bt}^2}{2} - \varepsilon_{ht} \cdot \ln(1+c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{ht}) - \varepsilon_{bt} \cdot \ln(1+c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{bt}));$ $M_{ct} = \frac{1}{(l/r_{cr})^3 c_t^5 \sin\theta \cos\theta} \left( \frac{b_t}{2} (-\varepsilon_{ct}^3 \frac{2 \cdot c_t^3 (\varepsilon_{ht} + \varepsilon_{bt})}{3} + \varepsilon_{ct}^2 \cdot c_t^2 (\varepsilon_{ht}^2 + \varepsilon_{bt}^2) - 2 \cdot \varepsilon_{ct} \times \right.$ $\times c_t \frac{\varepsilon_{ht}^3 + \varepsilon_{bt}^3}{3} + \frac{\varepsilon_{ht}^4 + \varepsilon_{bt}^4}{6} \left. + (a_t \cdot c_t + b_t) (\varepsilon_{ct}^4 \frac{b_t \cdot c_t^4}{12(a_t \cdot c_t + b_t)} - \varepsilon_{ct}^3 \frac{c_t^3}{6} + \varepsilon_{ct}^2 \frac{c_t^2}{2} \times \right.$ $\times (\varepsilon_{ht} + \varepsilon_{bt} + 1) - \varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot (\varepsilon_{ht} + \varepsilon_{bt} - 1) - \varepsilon_{ct} \cdot c_t \frac{\varepsilon_{ht}^2 + \varepsilon_{bt}^2}{2} - (\varepsilon_{ct} \cdot c_t + 1) \times$ $\times \ln \frac{(1+c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{ht})(1+c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{bt})}{1+c_t \cdot \varepsilon_{ct}} - (\varepsilon_{ht} + \varepsilon_{bt}) + \frac{\varepsilon_{ht}^2 + \varepsilon_{bt}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{ht}^3 + \varepsilon_{bt}^3}{6} +$ $\left. + \varepsilon_{ht} \cdot \ln(1+c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{ht}) + \varepsilon_{bt} \cdot \ln(1+c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{bt}) \right).$
розкриття тріщин, розвиток прогинів	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ .
Косозавантажені елементи, форма розтягнутої зони перерізу – <b>чотирикутник</b> (рис. 6.11)		
гранична рівновага	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ або повне нехтування $N_{ct} = 0, M_{ct} = 0$ .

1	2	3
Косозавантажені елементи, форма розтягнутої зони перерізу – <b>чотирикутник</b> (рис. 6.11)		
несуча здатність	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctd} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}$ або повне нехтування $N_{ct} = 0, M_{ct} = 0.$
утворення тріщин	$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ctu}, \sigma_{ct} = f_{ctk}$	$N_{ct} = \frac{1}{(1/r_{cr})^2 c_t^4 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b_t}{2} (\varepsilon_{ct} \cdot c_t + \varepsilon_{ht} \cdot \varepsilon_{bt}) \cdot (\varepsilon_{ht} + \varepsilon_{bt}) + \frac{\varepsilon_{ht}^3 + \varepsilon_{bt}^3}{3} - \frac{\varepsilon_{ht}^4 + \varepsilon_{bt}^4}{3} \right) +$ $+ (a_t \cdot c_t + b_t) ((\varepsilon_{ct} \cdot c_t + 1) \cdot \ln \left( \frac{(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{ht})(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{bt})}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}} \right) + (\varepsilon_{ht} + \varepsilon_{bt} - \varepsilon_{ct} - 1) \times$ $\times \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{ht} - \varepsilon_{bt}) + \varepsilon_{ht} \cdot \varepsilon_{bt} - \varepsilon_{ht} \cdot \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{ht}) - \varepsilon_{bt} \cdot \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{bt}));$ $M_{ct} = \frac{1}{(1/r_{cr})^3 c_t^5 \sin \theta \cos \theta} \left( \frac{b_t}{2} (-2 \cdot \varepsilon_{ct}^2 \cdot c_t^2 \cdot \varepsilon_{ht} \cdot \varepsilon_{bt} + 2 \cdot \varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot (\varepsilon_{ht}^2 \cdot \varepsilon_{bt} + \varepsilon_{ht} \cdot \varepsilon_{bt}^2)) + \right.$ $+ \frac{4 \cdot \varepsilon_{ht} \cdot \varepsilon_{bt}}{3} (\varepsilon_{ht}^2 + \varepsilon_{bt}^2) - \varepsilon_{ht}^2 \cdot \varepsilon_{bt}^2 + (a_t \cdot c_t + b_t) \cdot (\varepsilon_{ct} \cdot c_t \cdot \varepsilon_{ht} \cdot \varepsilon_{bt} - (\varepsilon_{ct} \cdot c_t + 1) \times$ $\times \ln \frac{(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{ht})(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{bt})}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}} + (\varepsilon_{ct} c_t + 1 - \varepsilon_{ht} - \varepsilon_{bt}) \ln(1 + c_t \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{ht} - \varepsilon_{bt}) -$ $\left. - \frac{\varepsilon_{ht}^2 \cdot \varepsilon_{bt} + \varepsilon_{ht} \cdot \varepsilon_{bt}^2}{2} + \varepsilon_{ht} \cdot \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ctu} - \varepsilon_{ht}) + \varepsilon_{bt} \cdot \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ctu} - \varepsilon_{bt}) \right).$
розкриття тріщин, розвиток прогинів	$\varepsilon_{ctv} = \varepsilon_{s1}, \sigma_{ct} = f_{ctk} \left( \frac{\varepsilon_{ct1}}{\varepsilon_{ctv}} \right)^c$	Наближено $N_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct}, M_{ct} = A_{ct} \cdot \sigma_{ct} \cdot x_{z,ct}.$

## Додаток Г

### Приклади розрахунку залізобетонних елементів конструкцій

В цьому додатку наведені приклади розв'язку характерних задач з розрахунку різних залізобетонних елементів за граничними станами.

**Приклад Г.1.** Розрахувати несучу здатність плоскозигнутої ( $\beta_o = 0$ ) залізобетонної балки № 4 [462] прямокутного перерізу  $b_n \times h_n = 200 \times 300 \text{ мм}$  (рис. Г.1), виготовленої з важкого бетону класу  $\approx C50/60$  ( $f_{ck} = 42,3 \text{ МПа}$ ,  $E_c = 39 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ ) та армованої в розтягнутій зоні стержнями  $2\text{Ø}25$  класу  $\approx A500C$  ( $A_{s1} = 982 \text{ мм}^2$ ,  $a_{s1} = 40 \text{ мм}$ ,  $f_{yk} = 536 \text{ МПа}$ ,  $E_s = 2,0 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ).

Несуча здатність зазначеної балки за результатами експериментальних досліджень становить  $M_{ex} = 126,5 \text{ кНм}$ , а її теоретичне значення за Єврокод-2 [382] –  $M_{th,E2} = 117,59 \text{ кНм}$ .

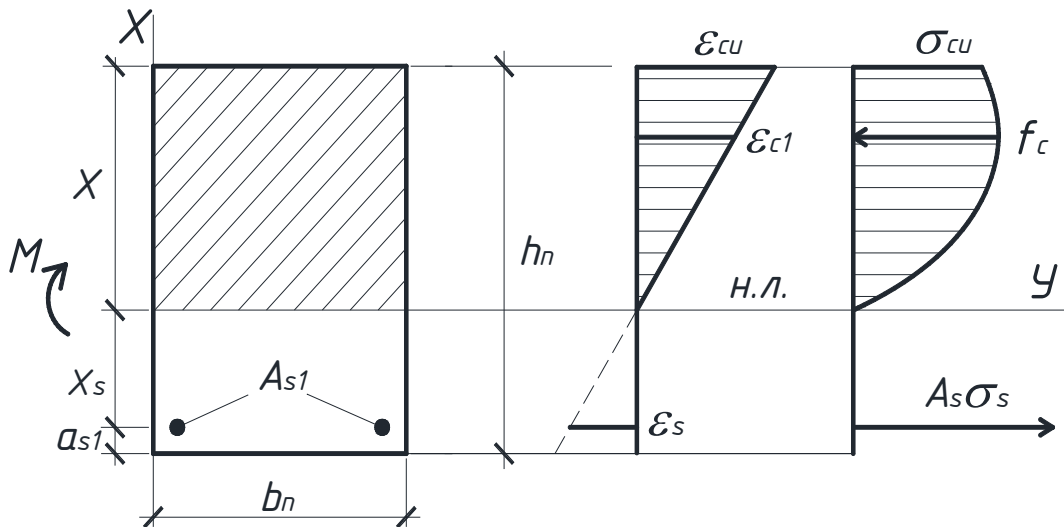


Рисунок Г.1 – Розрахункова схема перерізу залізобетонної балки № 4 [462]

**Розв'язок.** Початковий модуль пружності бетону (при  $\sigma_c = 0$ ) згідно табл.3.2 складає  $E_{co} = E_c \cdot k_o = 39 \cdot 10^3 \cdot 1,11 = 43,29 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , а критичні деформації стиснутого бетону за формулою (3.26) становитимуть

$$\varepsilon_{c1} = f_{ck} / E_{co} + (140 - 0,7 f_{ck}) \cdot 10^{-5} = (42,3 / 43290 + 140 - 0,7 \cdot 42,3) \cdot 10^{-5} = 2081 \cdot 10^{-5}.$$

Основні параметри діаграми деформування бетону на стиск обчислюємо за виразом (3.9)

$$a = E_{co} = 43,29 \cdot 10^3 \text{ МПа} ; \quad b = f_{ck} / \varepsilon_{c1}^2 = 42,3 / (208,1 \cdot 10^{-5})^2 = 97,678 \cdot 10^5 \text{ МПа} ;$$

$$c = E_{co} / f_{ck} - 2 / \varepsilon_{c1} = 43,29 \cdot 10^3 / 42,3 - 2 / (208,1 \cdot 10^{-5}) = 62,33.$$

Граничні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$  визначаємо за загальною формулою (4.38) або за відповідними формулами дод. Б (табл. Б.1)

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot (1 + 0,322 \cdot \sqrt{\ln k} / [1 + ((k-2) / 6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2]) = 208,1 \cdot 10^{-5} \times$$

$$\times (1 + 0,322 \cdot \sqrt{\ln 2,13} / [1 + ((2,13-2) / 6 \cdot \ln(6/2,13 - 0,2))^2]) = 266,34 \cdot 10^{-5},$$

де параметр  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{ck} = 43,29 \cdot 208,1 \cdot 10^{-2} / 42,3 = 2,13$ .

При раціональному армуванні згинальних елементів напруження в розтягнутій арматурі в граничній стадії зазвичай досягають межі текучості ( $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{so}$ ), а тому її деформації знайдемо за виразом (5.14)

$$\varepsilon_s = \frac{\delta_c \cdot \alpha_c}{f_{yk} \cdot \rho_l} - \varepsilon_{cu} = \frac{3208,7 \cdot 2,608 \cdot 10^{-5}}{536 \cdot 0,01888} - 266,34 \cdot 10^{-5} = 560,59 \cdot 10^{-5},$$

при коефіцієнті армування балки -  $\rho_l = A_s / (b_n \cdot d) = 982 / (200 \cdot 260) = 0,01888$  та параметрах  $\delta_c$  і  $\alpha_c$ , рівних за формулами (5.10) відповідно

$$\delta_c = (a + b/c) / c = (43,29 \cdot 10^3 + 97,678 \cdot 10^5 / 62,33) / 62,33 = 3208,7 \text{ МПа} ;$$

$$\alpha_c = -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^2}{2 \cdot (a + b/c)} + \varepsilon_{cu} - \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c} = -\frac{97,678 \cdot 10^5 \cdot (266,34 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot (43,29 \cdot 10^3 + 97,678 \cdot 10^5 / 62,33)} +$$

$$+ 266,34 \cdot 10^{-5} - \frac{\ln(1 + 62,33 \cdot 266,34 \cdot 10^{-5})}{62,33} = 2,608 \cdot 10^{-5}.$$

Кривина балки в стадії граничної рівноваги становитиме

$$1/r_u = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_{cu}}{d} = \frac{(560,59 + 266,34) \cdot 10^{-5}}{0,26} = \frac{826,93 \cdot 10^{-5}}{0,26} = 0,0318 \text{ м}^{-1},$$

а її несуча здатність за формулою (5.15) остаточно складатиме

$$M_u = \frac{b_n}{(1/r_u)^2} (\beta_c \cdot \delta_c + f_{yk} \cdot \rho_l \cdot \varepsilon_s (\varepsilon_s + \varepsilon_{cu})) = \frac{0,2 \cdot 10^3}{0,0318^2} \cdot (418 \times$$

$$\times 3208,7 + 536 \cdot 0,01888 \cdot 560,59 \cdot (560,59 + 266,34)) \cdot 10^{-10} = 119,31 \text{ кНм},$$

де параметр  $\beta_c$  за формулою (5.13) дорівнює

$$\begin{aligned}\beta_c &= -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^3}{3 \cdot (a + b/c)} + \frac{\varepsilon_{cu}^2}{2} - \frac{\varepsilon_{cu}}{c} + \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c^2} = \\ &= -\frac{97,678 \cdot 10^5 \cdot (266,34 \cdot 10^{-5})^3}{3 \cdot (43,29 \cdot 10^3 + 97,678 \cdot 10^5 / 62,33)} + \frac{(266,34 \cdot 10^{-5})^2}{2} - \\ &- \frac{266,34 \cdot 10^{-5}}{62,33} + \frac{\ln(1 + 62,33 \cdot 266,34 \cdot 10^{-5})}{62,33^2} = 418 \cdot 10^{-10}.\end{aligned}$$

Розходження результатів теоретичних розрахунків з даними експериментів становлять:

за розробленою методикою  $\Delta M = M_u / M_{ex} = 119,31 / 126,5 = 0,9432$  (5,68%);

за методикою Єврокод-2  $\Delta M = M_{th,E2} / M_{ex} = 117,59 / 126,5 = 0,9296$  (7,04%).

**Приклад Г.2.** Визначити, яке значення поздовжньої сили може сприйняти шарнірно закріплена з обох кінців залізобетонна колона КГ-Х-2 [250] перерізом  $b_n \times h_n = 240 \times 150$  мм (рис. Г.2), що виготовлена з бетону класу  $\approx C12,5/15$  ( $f_{ck} = 12,5$  МПа,  $E_c = 24 \cdot 10^3$  МПа) та армована симетрично стержнями  $4\varnothing 19$  АІІ ( $A_{s1} = A_{s2} = 563$  мм<sup>2</sup>,  $a_{s1} = 19,9$  мм,  $a_{s2} = 20,4$  мм,  $f_{yk} = 286$  МПа,  $E_s = 2,1 \cdot 10^5$  МПа). Початковий ексцентриситет прикладання стискаючої сили в напрямку площини  $X$  ( $\beta_o = 0$ ) становить  $e_o = 75$  мм, а її розрахункова довжина рівна  $l_o = 4,65$  м.

Несуча здатність зазначеної колони за результатами експериментальних досліджень становить  $N_{ex} = 18m = 183,3$  кН.

**Розв'язок.** Початковий модуль пружності бетону (при  $\sigma_c = 0$ ) згідно табл.3.2 складає  $E_{co} = E_c \cdot k_o = 24 \cdot 10^3 \cdot 1,218 = 29,232 \cdot 10^3$  МПа, а критичні деформації стиснутого бетону за формулою (3.26) становитимуть  $\varepsilon_{cl} = f_{ck} / E_{co} + (140 - 0,7 f_{ck}) \cdot 10^{-5} = (12,5 / 29,232 + 140 - 0,7 \cdot 12,5) \cdot 10^{-5} = 174 \cdot 10^{-5}$ .

Основні параметри діаграми деформування бетону на стиск обчислюємо за виразом (3.9)

$$a = E_{co} = 29,232 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad b = f_{ck} / \varepsilon_{cl}^2 = 12,5 / (174 \cdot 10^{-5})^2 = 41,287 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$c = E_{co} / f_{ck} - 2 / \varepsilon_{c1} = 29,232 \cdot 10^3 / 12,5 - 2 / (174 \cdot 10^{-5}) = 1189,1.$$

Граничні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$  визначаємо за загальною формулою (4.21) або за відповідними формулами дод. Б (табл. Б.1)

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot \left( 1 + 0,398 \cdot \sqrt{\ln k} / \left[ 1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6 / k - 0,2))^2 \right] \right) = 174 \cdot 10^{-5} \times$$

$$\times \left( 1 + 0,398 \cdot \sqrt{\ln 4,069} / \left[ 1 + ((4,069 - 2) / 6 \cdot \ln(6 / 4,069 - 0,2))^2 \right] \right) = 255,47 \cdot 10^{-5},$$

де параметр  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{ck} = 29,232 \cdot 174 \cdot 10^{-2} / 12,5 = 4,069$ .

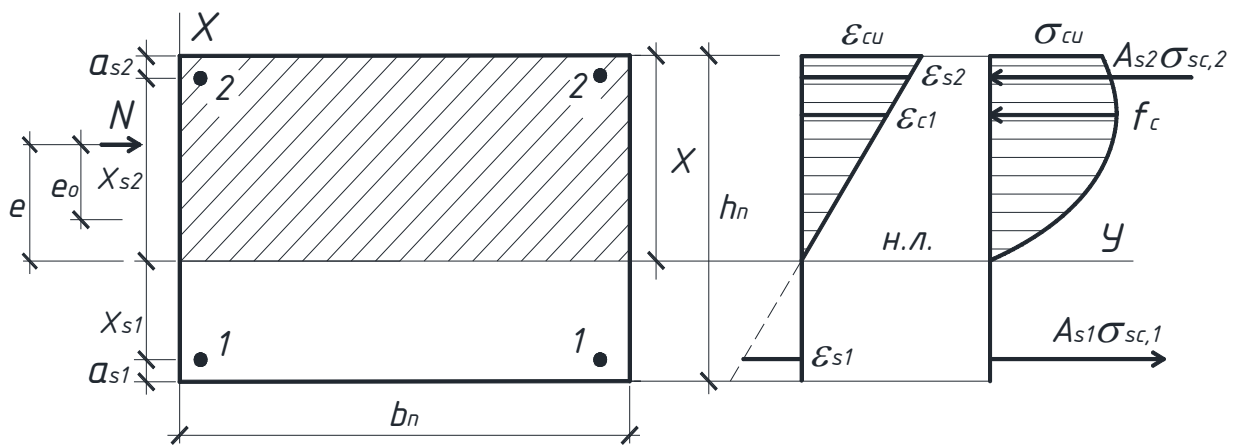


Рисунок Г.2 – Розрахункова схема перерізу позациентрово стиснутої залізобетонної колони КГ-Х-2 [250]

Оскільки гнучкість колони в напрямку площини  $X$  дорівнює  $\lambda = l_o / d = 4,65 / 0,131 = 35,5$ , то необхідно враховувати вплив прогину на її напружено-деформований стан.

У першому наближенні прогин гнучких стиснутих елементів приймаємо за формулою (5.144), виходячи з повного використання деформативних властивостей стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  та міцнісних властивостей найбільш розтягнутої арматури

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{so} = f_{yk} / E_s = 286 / 210000 = 136,19 \cdot 10^{-5},$$

$$f_u = s \cdot (1/r_u) \cdot l_o^2 = \frac{1}{10} \cdot 3,01 \cdot 10^{-5} \cdot 4650^2 = 65,08 \text{ мм},$$

$$\text{де } 1/r_u = \frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s1}}{d} = \frac{(255,47 + 136,19) \cdot 10^{-5}}{130,1} = 3,01 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}.$$

Водночас за повного використання всіх арматурних стержнів, коли напруження в них у граничній стадії сягають межі текучості ( $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{so}$ ), деформації найбільш розтягнутих стержнів за виразом (5.82) становитимуть

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu} (A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1}) = 255,47 \cdot 10^{-5} (-0,2913 + \sqrt{0,2913^2 + 0,7797}) = 16312 \cdot 10^{-5}$$

де параметри  $A_1$  та  $B_1$  рівні відповідно

$$A_1 = -\frac{1}{2} - \frac{f_{yk} \rho_k (1 + t_e) + \alpha_c \delta_c t_e / \varepsilon_{cu}}{2 \cdot f_{yk} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} = -\frac{1}{2} - \frac{286 \cdot 0 \cdot (1 + 0,5002)}{2 \cdot 286 \cdot (0,5002 \cdot 0 - 0,04372)} - \frac{96,92 \cdot 10^{-5} \cdot 27,5 \cdot 0,5002 / (255,47 \cdot 10^{-5})}{2 \cdot 286 \cdot (0,5002 \cdot 0 - 0,04372)} = -0,2913;$$

$$B_1 = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (1 + t_e) \cdot (\alpha_c \cdot \delta_c + \varepsilon_{cu} \cdot f_{yk} \cdot \rho_k) - \beta_c \cdot \delta_c}{\varepsilon_{cu}^2 \cdot f_{yk} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} = \frac{255,47 \cdot 10^{-5} \cdot (1 - 0,5002) \cdot (96,92 \cdot 10^{-5} \cdot 27,5 + 255,47 \cdot 10^{-5} \cdot 286 \cdot 0)}{(255,47 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 286 \cdot (-0,5002 \cdot 0 - 0,04372)} - \frac{0,1401 \cdot 10^{-5} \cdot 27,5}{(255,47 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 286 \cdot (-0,5002 \cdot 0 - 0,04372)} = -0,7797.$$

При цьому коефіцієнти армування балки стержнями 1 і 2 складають

$$\rho_{l1} = A_{s1} / (b_n \cdot d) = 563 / (240 \cdot 130,1) = 0,01803 \text{ і } \rho_{l2} = \rho_{l1} = 0,01803 ,$$

а інші параметри за формулами (5.41), (5.79), (5.10) та (5.13) рівні відповідно (з урахуванням розміщення арматури: - для розтягнутої, + для стиснутої)

$$\rho_k = \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} = \rho_{l1} (-1 + \frac{\rho_{l2}}{\rho_{l1}}) = 0,01803 \cdot (-1 + 1) = 0;$$

$$\rho_{k1} = \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si} = \rho_{l1} (-1 \frac{x_{s1}}{|x_{s1}|} + \frac{\rho_{l2}}{\rho_{l1}} \cdot \frac{x_{s2}}{|x_{s1}|}) = 0,01803 (-\frac{-45,246}{45,246} + 1 \cdot 64,474 / 45,246) = 0,04372;$$

$$x_{s1} = -\varepsilon_{s1} / (1/r_u) = -\frac{286 / (2,1 \cdot 10^5)}{3,01 \cdot 10^{-5}} = -45,246 \text{ мм};$$

$$x_{s2} = \varepsilon_{cu} / (1/r_u) - a_{s2} = 255,47 \cdot 10^{-5} / (3,01 \cdot 10^{-5}) - 20,4 = 64,474 \text{ мм};$$

$$t_e = (f_u + e_o - h/2) / d = (65,08 + 75 - 150/2) / 130,1 = 0,5002 ;$$

$$\delta_c = \frac{a + b/c}{c} = \frac{29,232 \cdot 10^3 + 41,287 \cdot 10^5 / 1189,1}{1189,1} = 27,5 \text{ МПа};$$

$$\alpha_c = -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^2}{2 \cdot (a + b/c)} + \varepsilon_{cu} - \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c} = -\frac{41,287 \cdot 10^5 \cdot (255,47 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot (29,232 \cdot 10^3 + 41,287 \cdot 10^5 / 1189,1)} + 255,47 \cdot 10^{-5} - \frac{\ln(1 + 1189,1 \cdot 255,47 \cdot 10^{-5})}{1189,1} = 96,92 \cdot 10^{-5};$$

$$\beta_c = -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^3}{3 \cdot (a + b/c)} + \frac{\varepsilon_{cu}^2}{2} - \frac{\varepsilon_{cu}}{c} + \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c^2} = -\frac{41,287 \cdot 10^5 \cdot (255,47 \cdot 10^{-5})^3}{3 \cdot (29,232 \cdot 10^3 + 41,287 \cdot 10^5 / 1189,1)} + \frac{(255,47 \cdot 10^{-5})^2}{2} - \frac{255,47 \cdot 10^{-5}}{1189,1} + \frac{\ln(1 + 1189,1 \cdot 255,47 \cdot 10^{-5})}{1189,1^2} = 0,1401 \cdot 10^{-5}.$$

Несуча здатність колони за попередніми деформаціями розтягнутої арматури дорівнює

$$N = \frac{b_n}{(1/r_u)} \cdot (\alpha_c \cdot \delta_c + E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) \cdot \rho_k) = \frac{240}{3,01 \cdot 10^{-5}} \times (96,92 \cdot 10^{-5} \cdot 27,5 + 286 \cdot (136,19 + 255,47) \cdot 10^{-5} \cdot 0) = 212516 \text{ Н} = 212,52 \text{ кН}.$$

Оскільки розрахункові деформації розтягнутої арматури суттєво відрізняються від попередніх  $\Delta \varepsilon_s = 163,12 / 136,19 = 1,198 > 1,01$ , то визначену несучу здатність колони уточнимо за осередненими деформаціями розтягнутої арматури  $\varepsilon_{s1} = (163,12 + 136,19) / 2 \cdot 10^{-5} = 149,66 \cdot 10^{-5}$ .

Після 2-го наближення отримуємо  $\varepsilon_{s1} = 175,49 \cdot 10^{-5}$  і  $N = 205,4 \text{ кН}$  при  $\Delta f_u = f_{u,2} / f_{u,1} = 67,33 / 65,08 = 1,0346 > 1,01$ ;  $\Delta N = 205,4 / 212,52 = 0,966 < 0,99$ ;  $\Delta \varepsilon_s = 175,49 / 149,66 = 1,173 > 1,01$ .

Оскільки несуча здатність колони падає зі зростанням деформацій розтягнутої арматури, то ітераційний процес за  $\varepsilon_{s1}$  є розбіжним. Тому корегувати слід граничні деформації стиснутого бетону. В 3-му наближенні приймаємо  $\varepsilon_{cu,3} = \varepsilon_{cu,1} / \Delta \varepsilon_s = 255,47 \cdot 10^{-5} / 1,173 = 217,79 \cdot 10^{-5}$  за початкових деформацій розтягнутої арматури  $\varepsilon_{s1} = 136,19 \cdot 10^{-5}$ .



В процесі наступних наближень отримуємо:

після 3-го –  $\varepsilon_{s1} = 139,05 \cdot 10^{-5}$ ,  $N = 195,02 \text{ кН}$  за  $\Delta N = 195,02 / 205,4 = 0,949 < 0,99$ ;

$\Delta \varepsilon_s = 139,05 / 136,19 = 1,021 > 1,01$ ;  $\Delta f_u = f_{u,3} / f_{u,2} = 58,85 / 67,33 = 0,874 < 0,99$ ;

після 5-го –  $\varepsilon_{s1} = 136,2 \cdot 10^{-5}$ ,  $N = 192,7 \text{ кН}$  за  $\Delta N = 192,7 / 192,6 = 1,001 < 1,01$ ;

$\Delta \varepsilon_s = 136,2 / 136,19 = 1,0 < 1,01$ ;  $\Delta f_u = f_{u,5} / f_{u,4} = 58,133 / 58,104 = 1,001 < 1,01$ .

Розходження результатів теоретичних розрахунків за розробленою методикою з даними експерименту рівні  $\Delta N = N / N_{ex} = 192,7 / 183,3 = 1,0513$  (5,13%). Несуча здатність колони КГ-Х-2 за методикою Єврокод-2 [382] сягає  $N_{th,E2} = 195,89 \cdot 10^{-5} \text{ кН}$ , а аналогічні розходження з експериментом становлять  $\Delta = N_{th,E2} / N_{ex} = 195,89 / 183,3 = 1,0685$  (6,85%).

**Приклад Г.3.** Визначити розрахункову несучу здатність косозігнутої ( $\beta_o = 27^\circ$ ) залізобетонної балки прямокутного перерізу з розмірами  $b_n \times h_n = 160 \times 240 \text{ мм}$ , виготовленої з бетону класу С32/40 та армованої в розтягнутій зоні 4Ø14 А400С (рис.Г.3).

**Розв'язок.** Основні характеристики бетону і арматури є наступними:  
 $f_{cd} = 22 \text{ МПа}$ ;  $E_c = 31,78 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ ;  $f_{yd} = 365 \text{ МПа}$ ;  $E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Початковий модуль пружності бетону (при  $\sigma_c = 0$ ) згідно табл.3.2 складатиме  $E_{co} = E_c \cdot k_o = 31,78 \cdot 10^3 \cdot 1,172 = 37,244 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , а критичні деформації стиснутого бетону за формулою (3.26) становитимуть

$$\varepsilon_{c1} = f_{cd} / E_{co} + (140 - 0,7 f_{cd}) \cdot 10^{-5} = (22 / 37,244 + 140 - 0,7 \cdot 22) \cdot 10^{-5} = 183,7 \cdot 10^{-5}.$$

Основні параметри розрахункової діаграми деформування бетону на стиск обчислюємо за виразом (3.9)

$$a = E_{co} = 37,244 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad b = f_{cd} / \varepsilon_{c1}^2 = 22 / (183,7 \cdot 10^{-5})^2 = 65,21 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$c = E_{co} / f_{cd} - 2 / \varepsilon_{c1} = 37,244 \cdot 10^3 / 22 - 2 / (183,7 \cdot 10^{-5}) = 604.$$

Граничні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$  визначаємо за загальною формулою (4.39) або за відповідними формулами дод. Б (табл. Б.1) (при

ймовірній трикутній формі стиснутої зони бетону)

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot (1 + 0,644 \cdot \sqrt{\ln k} / [1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6 / k - 0,2))^2]) = 183,7 \cdot 10^{-5} \times$$

$$\times (1 + 0,644 \cdot \sqrt{\ln 3,109} / [1 + ((3,109 - 2) / 6 \cdot \ln(6 / 3,109 - 0,2))^2]) = 308 \cdot 10^{-5},$$

де параметр  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{cd} = 37,244 \cdot 183,7 \cdot 10^{-2} / 22 = 3,109$ .

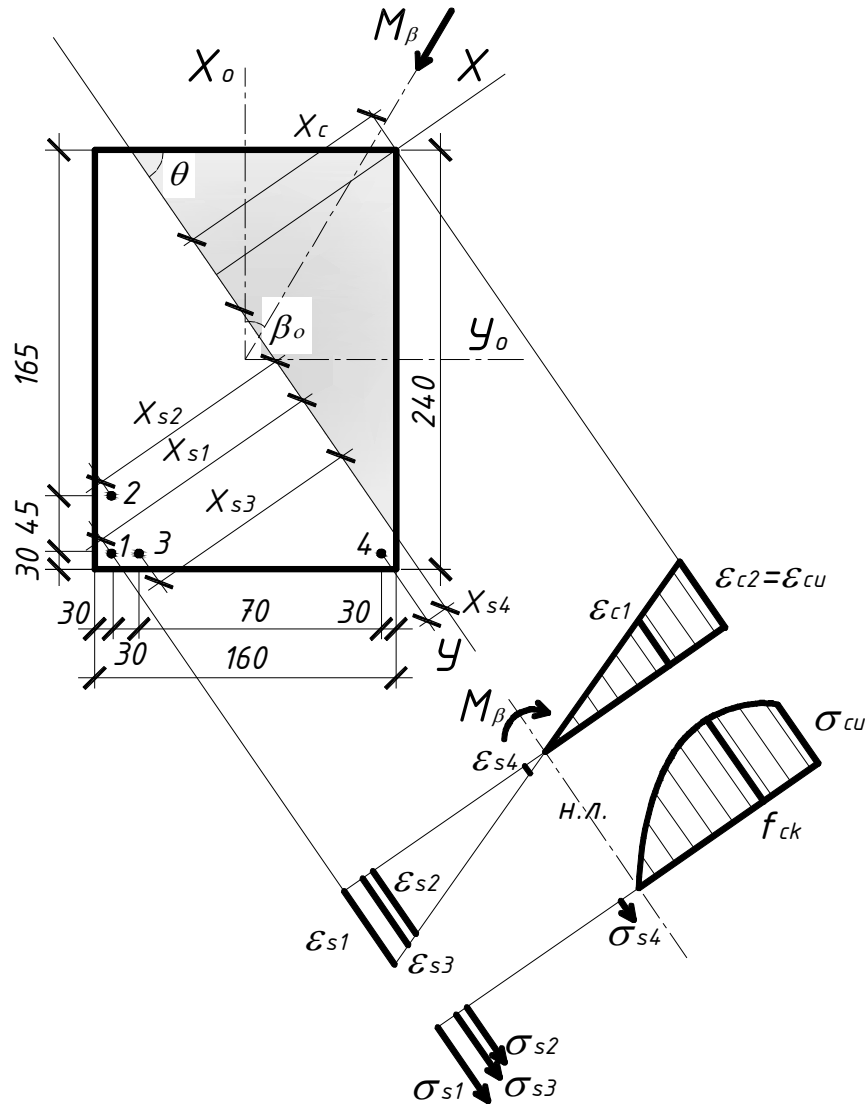


Рисунок Г.3 – Розрахункова схема перерізу косозігнутої залізобетонної балки до прикладу Г.3

При повному вичерпанні міцнісних властивостей арматури ( $\varepsilon_{si} \geq \varepsilon_{so} = f_{yd} / E_s = 365 / 210000 = 173,8 \cdot 10^{-5}$ ) відносні деформації найбільш розтягнутого стержня в граничному стані визначимо з рівняння (5.63)

$$\varepsilon_{s1} = \sqrt{\alpha_1 \cdot (-\varepsilon_{cu}^3 \cdot \beta_1 + \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} + \varepsilon_{cu} c \cdot (1 - \delta_1) - \delta_1) / (f_{yd} \cdot \sum_{i=1}^4 A_{si}) - \varepsilon_{cu} =}$$

$$= \sqrt{24,34 \cdot ((-308^3 \cdot 82,53) \cdot 10^{-10} + 308^2 \cdot 10^{-10} \frac{604^2}{2} + 308 \cdot 10^{-5} \cdot 604 \times$$

$$\times (1 - 1,051) - 1,051) / (365 \cdot 616) - 308 \cdot 10^{-5} = 302 \cdot 10^{-5};$$

де  $\alpha_1 = \frac{(a \cdot c + b) \cdot d^2}{c^4 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta} = \frac{(37,244 \cdot 10^3 \cdot 604 + 65,21 \cdot 10^5) \cdot 234,4^2}{604^4 \cdot 0,6414 \cdot 0,7672} = 24,34 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^2;$

$$\beta_1 = \frac{b \cdot c^3}{6 \cdot (a \cdot c + b)} = \frac{65,21 \cdot 10^5 \cdot 604^3}{6 \cdot (37,244 \cdot 10^3 \cdot 604 + 65,21 \cdot 10^5)} = 82,53 \cdot 10^5;$$

$$\delta_1 = \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu}) = \ln(1 + 604 \cdot 308 \cdot 10^{-5}) = 1,051;$$

$$d = (h_n - a_{s,h1}) \cdot \cos \theta + (b_n - a_{s,b1}) \cdot \sin \theta = (240 - 30) \cdot \cos 50,1^\circ +$$

$$+ (160 - 30) \cdot \sin 50,1^\circ = 234,4 \text{ мм};$$

$$\text{tg} \theta = \frac{I_{y,red}}{I_{x,red}} \cdot \text{tg} \beta_o = \left( \frac{(h_n^3 \cdot b_n / 12 + n_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot (h_n / 2 - a_{sh,i})^2)}{(h_n \cdot b_n^3 / 12 + n_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot (b_n / 2 - a_{sb,i})^2)} \right) \cdot \text{tg} \beta_o =$$

$$= \left( \left( \frac{240^3 \cdot 160}{12} + \frac{210000}{31780} \cdot 154 \cdot (3 \cdot (120 - 30)^2 + (120 - 75)^2) \right) / \left( \frac{240 \cdot 160^3}{12} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{210000}{31780} \cdot 154 \cdot (3 \cdot (80 - 30)^2 + (80 - 60)^2) \right) \right) \cdot \text{tg} 27^\circ = 1,196; \quad \theta = 50,1^\circ.$$

Тоді несуча здатність косозігнутої балки за виразом (5.64), чи з урахуванням відповідних формул дод. В (табл. В.1), становитиме

$$M_u = \frac{\alpha_1}{(1/r_u)^3 \cdot c \cdot d^2} \left( -\varepsilon_{cu}^4 \frac{\beta_1 \cdot c}{2} + \varepsilon_{cu}^3 \frac{c^3}{6} - \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} - \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (1 - \delta_1) + \delta_1 \right) +$$

$$+ \frac{1}{1/r_u} f_{yd} \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = \frac{24,34}{(2,6 \cdot 10^{-5})^3 \cdot 604 \cdot 234,4^2} \left( -(308 \cdot 10^{-5})^4 \frac{82,53 \cdot 10^5 \cdot 604}{2} + \right.$$

$$+ (308 \cdot 10^{-5})^3 \cdot 604^3 / 6 - (308 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 604^2 / 2 - 308 \cdot 10^{-5} \cdot 604 \cdot (1 - 1,051) +$$

$$+ 1,051) + (365 \cdot 154 \cdot (302 + 226 + 242 + 102) \cdot 10^{-5} / (2,6 \cdot 10^{-5})) = 29,87 \cdot 10^6 \text{ Нмм}$$

при її кривині

$$1/r_u = (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s1}) / d = (308 + 302) \cdot 10^{-5} / 234,4 = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}$$

та деформація арматурних стержнів 2, 3, 4 в граничному стані

$$\varepsilon_{s2} = x_{s2} \cdot (1/r_u) = ((h_n - a_{s,h2}) \cdot \cos \theta + (b_n - a_{s,b2}) \cdot \sin \theta - x_c) \cdot (1/r_u) =$$

$$= ((240 - 75) \cos 50,1^\circ + (160 - 30) \sin 50,1^\circ - 118,5) \cdot 2,6 \cdot 10^{-5} = 226 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_{s3} = ((240 - 30) \cos 50,1^\circ + (160 - 60) \sin 50,1^\circ - 118,5) \cdot 2,6 \cdot 10^{-5} = 242 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_{s4} = ((240 - 30) \cos 50,1^\circ + 30 \cdot \sin 50,1^\circ - 118,5) \cdot 2,6 \cdot 10^{-5} = 102 \cdot 10^{-5}.$$

Форма стиснутої зони дійсно є трикутником, так як виконуються умови

$$x_c = \varepsilon_{cu} / (1/r_u) = 308 / 2,6 = 118,5 \text{ мм} < h_n \cdot \cos \theta = 240 \cdot 0,6414 = 153,9 \text{ мм};$$

$$x_c = 118,5 \text{ мм} < b_n \cdot \sin \theta = 160 \cdot 0,7672 = 122,8 \text{ мм},$$

але напруження в арматурному стержні № 4 не досягають межі текучості ( $\varepsilon_{s4} < \varepsilon_{so}$ ). Тому розрахунок повторимо за осередненими деформаціями стержня № 4  $\varepsilon_{s4} = (173,8 + 102) \cdot 10^{-5} / 2 = 137,9 \cdot 10^{-5}$ .

Тоді відносні деформації найбільш розтягнутого арматурного стержня з рівняння (5.63) будуть рівні

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s1} &= \sqrt{\alpha_1 \cdot (-\varepsilon_{cu}^3 \cdot \beta_1 + \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} + \varepsilon_{cu} c \cdot (1 - \delta_1) - \delta_1) / (f_{yd} \cdot \sum_{i=1}^3 A_{si} + E_s \cdot \varepsilon_{s4} \cdot A_{s4}) - \varepsilon_{cu}} = \\ &= \sqrt{24,34 \cdot ((-308^3 \cdot 82,53) \cdot 10^{-10} + 308^2 \cdot 10^{-10} \cdot 604^2 / 2 + 308 \cdot 10^{-5} \cdot 604 \cdot (1 - 1,051) - 1,051) / (365 \cdot 462 + 2,1 \cdot 137,9 \cdot 154) - 308 \cdot 10^{-5}} = 318 \cdot 10^{-5}, \end{aligned}$$

а несуча здатність косозігнутої балки за виразом (5.64) сягатиме

$$\begin{aligned} M_u &= \frac{\alpha_1}{(1/r_u)^3 \cdot c \cdot d^2} \left( -\varepsilon_{cu}^4 \frac{\beta_1 \cdot c}{2} + \varepsilon_{cu}^3 \frac{c^3}{6} - \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} - \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (1 - \delta_1) + \delta_1 \right) + \frac{1}{1/r_u} f_{yd} \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = \\ &= \frac{24,34}{(2,67 \cdot 10^{-5})^3 \cdot 604 \cdot 234,4^2} \left( -(308 \cdot 10^{-5})^4 \frac{82,53 \cdot 10^5 \cdot 604}{2} + (308 \cdot 10^{-5})^3 \frac{604^3}{6} - \right. \\ &\quad \left. -(308 \cdot 10^{-5})^2 \frac{604^2}{2} - 308 \cdot 10^{-5} \cdot 604 \cdot (1 - 1,051) + 1,051 \right) + \frac{1}{2,67 \cdot 10^{-5}} \times \\ &\quad \times (365 \cdot 154 \cdot (318 + 241 + 257) + 154 \cdot 2,1 \cdot 113^2) \cdot 10^{-5} = 28,91 \cdot 10^6 \text{ Нмм} \end{aligned}$$

при кривині балки в момент вичерпання її несучої здатності

$$1/r_u = (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s1}) / d = (308 + 318) \cdot 10^{-5} / 234,4 = 2,67 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1},$$

висоті стиснутої зони бетону  $x_c = 308 / 2,67 = 115,3 \text{ мм}$  та деформаціях інших арматурних стержнів в граничному стані  $\varepsilon_{s2} = 241 \cdot 10^{-5}$ ;  $\varepsilon_{s3} = 257 \cdot 10^{-5}$ ;  $\varepsilon_{s4} = 113 \cdot 10^{-5}$ .

Так як  $\Delta M = (29,87 - 28,91) / 29,87 = 0,032 > 0,01$ , то в наступному наближенні осереднені деформації стержня № 4 приймемо рівними

$$\varepsilon_{s4} = (137,9 + 113) \cdot 10^{-5} / 2 = 125,5 \cdot 10^{-5}.$$

Після третього наближення отримуємо основні параметри напружено-деформованого стану косозігнутої балки в граничній стадії:  $\varepsilon_{s1} = 316 \cdot 10^{-5}$ ;  $1/r_u = 2,66 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}$ ;  $x_c = 115,8 \text{ мм}$ ;  $\varepsilon_{s2} = 239 \cdot 10^{-5}$ ;  $\varepsilon_{s3} = 255 \cdot 10^{-5}$ ;  $\varepsilon_{s4} = 112 \cdot 10^{-5}$ . При цьому її несуча здатність складає  $M = 28,92 \text{ кНм}$  при розходженні  $|\Delta M| = |-0,0002| < 0,01$ .

**Приклад Г.4.** Розрахувати несучу здатність косостиснутої ( $\beta_o = 30^\circ$ ) залізобетонної колони прямокутного поперечного перерізу з розмірами  $b_n \times h_n = 250 \times 350 \text{ мм}$ , виготовленої з бетону класу  $C20/25$  та армованої симетрично  $4\varnothing16 A500C$  (рис. Г.4). Колона з шарнірним закріпленням на кінцях має розрахункову довжину  $l_o = 6000 \text{ мм}$ . Ексцентриситет прикладання поздовжнього навантаження складає  $e_o = 80 \text{ мм}$ .

**Розв'язок.** Для бетону класу  $C20/25$  та арматури класу  $A500C$  маємо:  $f_{cd} = 14,5 \text{ МПа}$ ;  $E_c = 26,46 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ ;  $f_{yd} = 435 \text{ МПа}$ ;  $E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Початковий модуль пружності бетону (при  $\sigma_c = 0$ ) згідно табл.3.2 складає  $E_{co} = E_c \cdot k_o = 26,46 \cdot 10^3 \cdot 1,187 = 31,408 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , а критичні деформації стиснутого бетону за формулою (3.26) становитимуть

$$\varepsilon_{c1} = f_{cd} / E_{co} + (140 - 0,7 f_{cd}) \cdot 10^{-5} = (14,5 / 31,408 + 140 - 0,7 \cdot 14,5) \cdot 10^{-5} = 176 \cdot 10^{-5}.$$

Основні параметри діаграми деформування бетону на стиск обчислюємо за виразом (3.9)

$$a = E_{co} = 31,408 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad b = f_{cd} / \varepsilon_{c1}^2 = 14,5 / (176 \cdot 10^{-5})^2 = 46,81 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$c = E_{co} / f_{cd} - 2 / \varepsilon_{c1} = 31,408 \cdot 10^3 / 14,5 - 2 / (176 \cdot 10^{-5}) = 1029,7.$$

Граничні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$  визначаємо за загальною формулою (4.28) або за відповідними формулами дод. Б (табл. Б.1), передбачивши стиснуту зону бетону у вигляді трикутника та повне використання міцнісних властивостей арматури,

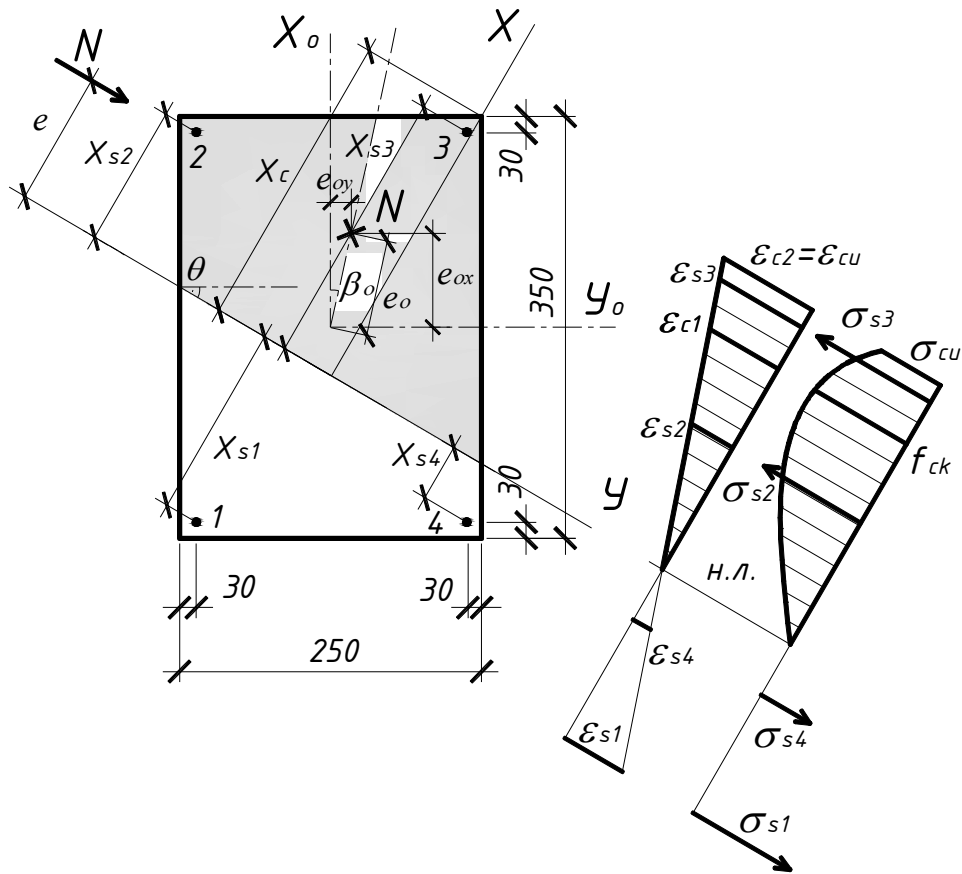


Рисунок Г.4 – Розрахункова схема перерізу косостиснутої залізобетонної колони до прикладу Г.4

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot \left(1 + 2 \cdot 0,398 \cdot \sqrt{\ln k} / \left[1 + \left(\frac{k-2}{6 \cdot \ln(6/k - 0,2)}\right)^2\right]\right) = 176 \cdot 10^{-5} \times$$

$$\times \left(1 + 0,796 \cdot \sqrt{\ln 3,812} / \left[1 + \left(\frac{3,812-2}{6 \cdot \ln(6/3,812 - 0,2)}\right)^2\right]\right) = 336,6 \cdot 10^{-5},$$

де параметр  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{cd} = 31,408 \cdot 176 \cdot 10^{-2} / 14,5 = 3,812$ .

Оскільки гнучкість колони в напрямку площини  $Y$  становить  $\lambda = l_o / d_y = 6000 / 220 = 27,3$ , то необхідно враховувати вплив прогину на її напружено-деформований стан.

Кут нахилу нейтральної лінії та лінії прогинів обчислюємо за (5.148)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1/r_y}{1/r_x} \approx \operatorname{tg} \beta_o \cdot \frac{E_c I_{x,red} - s_x l_{ox}^2 N}{E_c I_{y,red} - s_y l_{oy}^2 N} = \operatorname{tg} \beta_o \cdot \left( E_c \left( \frac{h_n^3 b_n}{12} + n_s \sum_{i=1}^n A_{si} \left( \frac{h_n}{2} - a_{sh,i} \right)^2 \right) - \right.$$

$$\left. - s_x l_{ox}^2 N \right) / \left( E_c \left( \frac{h_n^3 b_n}{12} + n_s \sum_{i=1}^n A_{si} \left( \frac{b_n}{2} - a_{sb,i} \right)^2 \right) - s_y l_{oy}^2 N \right) = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \left( 26,46 \cdot 10^3 \times \right.$$

$$\left. \times \left( \frac{350^3 \cdot 250}{12} + \frac{210000}{26460} \cdot 201 \cdot 4 \cdot (175 - 30)^2 \right) - 0,1 \cdot 6000^2 \cdot 422,9 \cdot 10^3 \right) / \left( 26,46 \cdot 10^3 \times \right.$$

$$\times \left( \frac{350 \cdot 250^3}{12} + \frac{210000}{26460} \cdot 201 \cdot 4 \cdot (125 - 30)^2 - 0,1 \cdot 6000^2 \cdot 4229 \cdot 10^3 \right) = 1,2285 ,$$

де в першому наближенні  $N = f_{cd} \cdot h_n \cdot b_n / 3 = 14,5 \cdot 350 \cdot 250 / 3 = 4229 \cdot 10^3 \text{ Н}$  (при знехтуванні прогином попередньо слід приймати  $N = 0$ ).

Тоді остаточно маємо  $\theta = 50,85^\circ$ .

У першому наближенні прогин гнучких стиснутих елементів приймаємо за формулою (5.144), виходячи з повного використання деформативних властивостей стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  та міцнісних властивостей найбільш розтягнутої арматури

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{so} = f_{yd} / E_s = 435 / 210000 = 207,1 \cdot 10^{-5} ;$$

$$f_u = s \cdot (1/r_u) \cdot l_o^2 = 0,1 \cdot 1,46 \cdot 10^{-5} \cdot 6000^2 = 52,56 \text{ мм} ,$$

$$\text{де; } 1/r_u = \frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s1}}{d} = \frac{(336,6 + 207,1) \cdot 10^{-5}}{372,6} = 1,459 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}$$

$$d = (h_n - a_{s,h1}) \cdot \cos \theta + (b_n - a_{s,b1}) \cdot \sin \theta = (350 - 30) \cdot \cos 50,85^\circ + (250 - 30) \times \sin 50,85^\circ = 372,6 \text{ мм}.$$

Форма стиснутої зони бетону - п'ятикутник, бо виконуються умови

$$x_c = \varepsilon_{cu} / (1/r_u) = 336,6 / 1,459 = 230,7 \text{ мм} > h_n \cdot \cos \theta = 350 \cdot 0,6313 = 221 \text{ мм};$$

$$x_c = 230,7 \text{ мм} > b_n \cdot \sin \theta = 250 \cdot 0,7756 = 193,9 \text{ мм} .$$

Тому зразу ж уточнимо граничні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cu} &= \varepsilon_{c1} \cdot (1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot (k - 1) / (6 - k) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot (x_{si} / x)^2 + \\ &+ \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_h)^2)(1 - m_h^{3/2})(1 - m_h / k) \sqrt{(\ln k)^{(1 - m_h^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_h^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m_h)))^2} + \\ &+ \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_b)^2)(1 - m_b^{3/2})(1 - m_b / k) \sqrt{(\ln k)^{(1 - m_b^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_b^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m_b)))^2} = \\ &= 176 \cdot 10^{-5} \cdot (1 + 5^3 \cdot \frac{2,1}{2} \cdot \frac{3,812 - 1}{6 - 3,812} \cdot 0,0023 \cdot ((\frac{41,2}{230,7})^2 + (\frac{5,4}{230,7})^2) + \\ &+ \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - 0,042)^2)(1 - 0,042^{3/2})(1 - 0,042 / 3,812) \sqrt{(\ln 3,812)^{(1 - 0,042^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot 0,042^2)(3,812 - 2) \ln(6/3,812 - 2(0,1 - 0,042)))^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - 0,159)^2)(1 - 0,159^{3/2})(1 - 0,159/3,812)\sqrt{(\ln 3,812)^{(1-0,159^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot 0,159^2)(3,812 - 2) \ln(6/3,812 - 2(0,1 - 0,159)))^2} =$$

$$= 331,7 \cdot 10^{-5}$$

при наступних геометричних і деформаційних параметрах арматурних стержнів 1, 2, 3, 4

$$\rho_{l2} = \rho_{l4} = A_{s2} / (h_n \cdot b_n) = 201 / (350 \cdot 250) = 0,0023;$$

$$x_{s1} = x_c - d = 230,7 - 372,6 = -141,9 \text{ мм};$$

$$x_{s2} = 230,7 - (30 \cdot \cos 50,85^\circ + (250 - 30) \cdot \sin 50,85^\circ) = 41,2 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s2} = x_{s2} \cdot (1/r_u) = 41,2 \cdot 1,459 \cdot 10^{-5} = 60 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s3} = 230,7 - (30 \cdot \cos 50,85^\circ + 30 \cdot \sin 50,85^\circ) = 188,5 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s3} = 188,5 \cdot 1,459 \cdot 10^{-5} = 275 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s4} = 230,7 - ((350 - 30) \cos 50,85^\circ + 30 \cdot \sin 50,85^\circ) = 5,4 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s4} = 5,4 \cdot 1,459 \cdot 10^{-5} = 7,88 \cdot 10^{-5}$$

та параметрах неоднорідності деформування стиснутого бетону вздовж сторін  $h_n$  і  $b_n$

$$m_h = \frac{\varepsilon_{co,h}}{\varepsilon_{c2}} = \frac{x_c - h_n \cdot \cos \theta}{\varepsilon_{cu}} \cdot \frac{1}{r_u} = \frac{230,7 - 221}{336,6 \cdot 10^{-5}} \cdot 1,459 \cdot 10^{-5} = 0,042;$$

$$m_b = \frac{\varepsilon_{co,b}}{\varepsilon_{c2}} = \frac{x_c - b_n \cdot \sin \theta}{\varepsilon_{cu}} \cdot \frac{1}{r_u} = \frac{230,7 - 193,9}{336,6 \cdot 10^{-5}} \cdot 1,459 \cdot 10^{-5} = 0,159.$$

Уточнимо граничну кривину  $1/r_u$  та граничний прогин  $f_u$  елемента

$$1/r_u = (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s1}) / d = (331,7 + 207,1) \cdot 10^{-5} / 372,6 = 1,446 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1};$$

$$f_u = s \cdot (1/r_u) \cdot l_o^2 = 0,1 \cdot 1,446 \cdot 10^{-5} \cdot 6000^2 = 52,06 \text{ мм}.$$

Форму стиснутої зони бетону залишаємо у вигляді п'ятикутника, так як

$$x_c = 331,7 / 1,446 = 229,4 \text{ мм} > h_n \cdot \cos \theta = 221 \text{ мм},$$

$$x_c = 229,4 \text{ мм} > b_n \cdot \sin \theta = 193,9 \text{ мм}.$$

Тоді несуча здатність косостиснутої колони за виразом (5.137), або з урахуванням відповідних формул дод. В (табл. В.1) при параметрах



$$\varepsilon_h = (1/r_u) \cdot h_n \cdot c \cdot \cos \theta = 1,446 \cdot 10^{-5} \cdot 350 \cdot 1029,7 \cdot 0,6313 = 3,29;$$

$$\varepsilon_b = (1/r_u) \cdot b_n \cdot c \cdot \sin \theta = 1,446 \cdot 10^{-5} \cdot 250 \cdot 1029,7 \cdot 0,7756 = 2,89$$

СТАНОВИТИМЕ

$$\begin{aligned} N = & \alpha_\rho \cdot \left( \frac{b}{2} (-\varepsilon_{cu}^2 \cdot c^2 (\varepsilon_h + \varepsilon_b) + \varepsilon_{cu} c \cdot (\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2) - \frac{\varepsilon_h^3 + \varepsilon_b^3}{3}) + \beta_b \cdot (\varepsilon_{cu}^3 \frac{b \cdot c^3}{6 \cdot \beta_b} - \right. \\ & - \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} + \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (\varepsilon_h + \varepsilon_b - 1) + \delta_c \cdot \ln\left(\frac{(\delta_c - \varepsilon_h)(\delta_c - \varepsilon_b)}{\delta_c}\right) + \varepsilon_h + \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2}{2} \\ & - \varepsilon_h \cdot \ln(\delta_c - \varepsilon_h) - \varepsilon_b \cdot \ln(\delta_c - \varepsilon_b)) \left. \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = 868,9 \cdot 10^{-5} \cdot \left( \frac{46,81 \cdot 10^5}{2} \times \right. \\ & \times (- (331,7 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 1029,7^2 (3,29 + 2,89) + 331,7 \cdot 10^{-5} \cdot 1029,7 (3,29^2 + 2,89^2) - \\ & - \frac{3,29^3 + 2,89^3}{3} \left. \right) + 370,2 \cdot 10^5 \left( (331,7 \cdot 10^{-5})^3 \frac{46,81 \cdot 10^5 \cdot 1029,7^3}{6 \cdot 370,2 \cdot 10^5} - (331,7 \times \right. \\ & \times 10^{-5})^2 \cdot \frac{1029,7^2}{2} + 331,7 \cdot 10^{-5} \cdot 1029,7 \cdot (3,29 + 2,89 - 1) + 4,416 \times \\ & \times \ln\left(\frac{(4,416 - 3,29)(4,416 - 2,89)}{4,416}\right) + 3,29 + 2,89 - \frac{3,29^2 + 2,89^2}{2} - 3,29 \times \\ & \times \ln(4,416 - 3,29) - 2,89 \cdot \ln(4,416 - 2,89) \left. \right) + 2,1 \cdot 201 \cdot (-207,1 + 57,4 + 207,1 + \\ & + 6,2) = 616975 \text{ H}, \end{aligned}$$

де параметри  $\alpha_\rho$ ,  $\beta_b$  та  $\delta_c$  рівні відповідно

$$\alpha_\rho = \frac{1}{(1/r_u)^2 \cdot c^4 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta} = \frac{1}{(1,446 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 1029,7^4 \cdot 0,6313 \cdot 0,7756} = 868,9 \cdot 10^{-5};$$

$$\beta_b = a \cdot c + b = 31,408 \cdot 10^3 \cdot 1029,7 + 46,81 \cdot 10^5 = 370,2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\delta_c = 1 + c \cdot \varepsilon_{cu} = 1 + 1029,7 \cdot 331,7 \cdot 10^{-5} = 4,416.$$

Перевіряємо виконання другого рівняння рівноваги (5.138)

$$\begin{aligned} N \cdot e_u = & 616975 \cdot 148,8 = 91,8 \cdot 10^6 \text{ Нмм} > \frac{\alpha_\rho}{(1/r_u) \cdot c} \left( \frac{b}{2} (-\varepsilon_{cu}^3 \frac{2c^3 (\varepsilon_h + \varepsilon_b)}{3} + \varepsilon_{cu}^2 c^2 \times \right. \\ & \times (\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2) - 2 \cdot \varepsilon_{cu} \cdot c \frac{\varepsilon_h^3 + \varepsilon_b^3}{3} + \frac{\varepsilon_h^4 + \varepsilon_b^4}{6} \left. \right) + \beta_b \cdot \left( \varepsilon_{cu}^4 \frac{b \cdot c^4}{12 \cdot \beta_b} - \varepsilon_{cu}^3 \frac{c^3}{6} + \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} (\varepsilon_h + \varepsilon_b + \right. \\ & + 1) - \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (\varepsilon_h + \varepsilon_b - 1) - \varepsilon_{cu} \cdot c \frac{\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2}{2} - \delta_c \cdot \ln\left(\frac{(\delta_c - \varepsilon_h)(\delta_c - \varepsilon_b)}{\delta_c}\right) - (\varepsilon_h + \varepsilon_b) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\varepsilon_h^2 + \varepsilon_b^2) / 2 + (\varepsilon_h^3 + \varepsilon_b^3) / 6 + \varepsilon_h \cdot \ln(\delta_c - \varepsilon_h) + \varepsilon_b \ln(\delta_c - \varepsilon_b)) + E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot x_{si} = \\
& = \frac{868 \cdot 10^{-5}}{1,446 \cdot 10^{-5} \cdot 1029,7} \cdot \left( \frac{46,81 \cdot 10^5}{2} \cdot (-(331,7 \cdot 10^{-5})^3 \cdot 2 \cdot 1029,7^3 (3,29 + 2,89)) / 3 + \right. \\
& + (331,7 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 1029,7^2 \cdot (3,29^2 + 2,89^2) - 2 \cdot 331,7 \cdot 10^{-5} \cdot 1029,7 \frac{3,29^3 + 2,89^3}{3} + \\
& + (3,29^4 + 2,89^4) / 6) + 370,2 \cdot 10^5 \times ((331,7 \cdot 10^{-5})^4 \cdot \frac{46,81 \cdot 10^5 \cdot 1029,7^4}{12 \cdot 370,2 \cdot 10^5} - \\
& - \frac{(331,7 \cdot 10^{-5})^3 \cdot 1029,7^3}{6} + (331,7 \cdot 10^{-5})^2 \cdot \frac{1029,7^2}{2} (3,29 + 2,89 + 1) - 331,7 \cdot 10^{-5} \times \\
& \times 1029,7 \cdot \left( \frac{3,29^2 + 2,89^2}{2} + 3,29 + 2,89 - 1 \right) - 4,416 \ln \left( \frac{(4,416 - 3,29)(4,416 - 2,89)}{4,416} \right) - \\
& - 3,29 - 2,89 + (3,29^2 + 2,89^2) / 2 + \frac{3,29^3 + 2,89^3}{6} + 3,29 \ln(4,416 - 3,29) + 2,89 \times \\
& \times \ln(4,416 - 2,89)) + 2,1 \cdot 201 \cdot (207,1 \cdot 143,2 + 57,4 \cdot 39,8 + 207,1 \cdot 187,2 + 6,2 \cdot 4,3) = \\
& = 84,05 \cdot 10^6 \text{ Нмм},
\end{aligned}$$

де ексцентриситет поздовжньої сили відносно нейтральної лінії дорівнює

$$\begin{aligned}
e_u = x_c - (h_n / 2 - e_o \cdot \cos \beta_o) \cos \theta - (b_n / 2 - e_o \cdot \sin \beta_o) \sin \theta + f_u = 229,4 - \\
- (175 - 80 \cos 30^\circ) \cos 50,85^\circ - (125 - 80 \sin 30^\circ) \sin 50,85^\circ + 52,06 = 148,8 \text{ мм}.
\end{aligned}$$

Оскільки друге рівняння рівноваги не виконується, а попередньо прийнята та отримана величина несучої здатності косостиснутого елемента суттєво різняться  $|\Delta N| = |(616975 - 422900) / 616975| = 0,315 > 0,01$ , то в наступному наближенні деформації найбільш розтягнутого стержня № 1 збільшимо пропорційно  $\Delta N / 2$  до  $\varepsilon_{s1} = 207,1 \cdot 10^{-5} \cdot 1,16 = 240,3 \cdot 10^{-5}$ . Форма стиснутої зони бетону в цьому випадку – трапеція вздовж сторони  $b_n$ .

В результаті виконаних розрахунків визначені основні параметри напружено-деформованого стану колони в граничній стадії:

$$\text{після 2-го наближення матимемо } \varepsilon_{cu} = 332 \cdot 10^{-5}; \quad \varepsilon_{s1} = 240,3 \cdot 10^{-5};$$

$$1/r_u = 1,54 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}; \quad x_c = 215,7 \text{ мм}; \quad f = 55,4 \text{ мм}; \quad N = 538,5 \text{ кН} \text{ за розходжень}$$

$$|\Delta N| = 0,036 > 0,01; \quad |\Delta M| = 0,002 < 0,01; \quad |\Delta f| = 0,055 > 0,01;$$

після 4-го наближення отримаємо  $\varepsilon_{cu} = 335 \cdot 10^{-5}$ ;  $\varepsilon_{s1} = 248,6 \cdot 10^{-5}$ ;  
 $1/r_u = 1,57 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}$ ;  $x_c = 213,4 \text{ мм}$ ;  $f = 56,5 \text{ мм}$ ;  $N = 526,1 \text{ кН}$  за розходжень  
 $|\Delta N| = 0,0013 < 0,01$ ;  $|\Delta M| = 0,0094 < 0,01$ ;  $|\Delta f| = 0,0015 < 0,01$ .

Отже несуча здатність колони остаточно складає  $N = 526,1 \text{ кН}$ .

**Приклад Г.5.** Підібрати площу перерізу поздовжньої арматури класу  $A500C$  для плоскозигнутої ( $\beta_o = 0$ ) залізобетонної балки прямокутного перерізу  $b_n \times h_n = 250 \times 400 \text{ мм}$  (див. рис. Г.1), виготовленої з бетону класу  $C30/35$  при  $a_{s1} = 40 \text{ мм}$  та здатної сприйняти розрахункове значення згинаючого моменту  $M_{Ed} = 200 \text{ кНм}$ .

**Розв'язок.** Для бетону класу  $C30/35$  та арматури класу  $A500C$  маємо:  
 $f_{cd} = 19,5 \text{ МПа}$ ;  $E_c = 30,27 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ ;  $f_{yd} = 435 \text{ МПа}$ ;  $E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Початковий модуль пружності бетону (при  $\sigma_c = 0$ ) згідно табл.3.2 складає  $E_{co} = E_c \cdot k_o = 30,27 \cdot 10^3 \cdot 1,158 = 35,05 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , а критичні деформації стиснутого бетону за формулою (3.26) становитимуть

$$\varepsilon_{c1} = f_{cd} / E_{co} + (140 - 0,7 f_{cd}) \cdot 10^{-5} = (19,5 / 35,05 + 140 - 0,7 \cdot 19,5) \cdot 10^{-5} = 182 \cdot 10^{-5}.$$

Основні параметри розрахункової діаграми деформування бетону на стиск за виразом (3.9) рівні

$$a = E_{co} = 35,05 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad b = f_{cd} / \varepsilon_{c1}^2 = 19,5 / (182 \cdot 10^{-5})^2 = 58,87 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$c = E_{co} / f_{cd} - 2 / \varepsilon_{c1} = 35,05 \cdot 10^3 / 19,5 - 2 / (182 \cdot 10^{-5}) = 698,5.$$

Граничні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$  визначаємо з допомогою загальної формули (4.35) або за відповідними формулами дод. Б (табл. Б.1)

$$\varepsilon_{cu} = 182 \cdot 10^{-5} \cdot \left( 1 + 0,322 \cdot \sqrt{\ln 3,271} / \left[ 1 + ((3,271 - 2) / 6 \cdot \ln(6 / (3,271 - 0,2)))^2 \right] \right) = 245,1 \cdot 10^{-5},$$

де параметр  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{cd} = 35,05 \cdot 182 \cdot 10^{-2} / 19,5 = 3,271$ .

Рациональне армування балки передбачає повне використання в ній міцнісних та деформативних властивостей як бетону так і арматури. Тому, виходячи зі спільного розв'язку двох загальноприйнятих рівнянь рівноваги

(5.1) та (5.2), коефіцієнт такого армування визначимо за виразом (5.32)

$$\begin{aligned} \rho_l &= -\delta_c \cdot \alpha_c^2 / (2 \cdot f_{yd} \cdot (\beta_c - \alpha_c \cdot \varepsilon_{cu})) - \\ &= -\sqrt{\left(\frac{\delta_c \cdot \alpha_c^2}{2 \cdot f_{yd} \cdot (\beta_c - \alpha_c \cdot \varepsilon_{cu})}\right)^2 + \frac{M_{Ed} \cdot \delta_c}{b_n \cdot (\beta_c - \alpha_c \cdot \varepsilon_{cu})} \cdot \left(\frac{\alpha_c}{f_{yd} \cdot d}\right)^2} = \\ &= -62,24 \cdot (61,6 \cdot 10^{-5})^2 / (2 \cdot 435 \cdot (8750,6 - 61,6 \cdot 245,1) \cdot 10^{-10}) - \\ &= -\sqrt{\left(\frac{62,24 \cdot (61,6 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot 435 \cdot (8750,6 - 61,6 \cdot 245,1) \cdot 10^{-10}}\right)^2 + \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 62,24}{250 \cdot (8750,6 - 61,6 \cdot 245,1) \cdot 10^{-10}}} \times \\ &\times (61,6 \cdot 10^{-5} / (435 \cdot 360))^2 = 0,0428 - 0,0248 = 0,018, \end{aligned}$$

де параметри  $\delta_c$ ,  $\alpha_c$  і  $\beta_c$  за формулами (5.10) та (5.13) рівні відповідно

$$\begin{aligned} \delta_c &= \frac{a + b/c}{c} = \frac{35,05 \cdot 10^3 + 58,87 \cdot 10^5 / 698,5}{698,5} = 62,24 \text{ МПа}; \\ \alpha_c &= -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^2}{2 \cdot (a + b/c)} + \varepsilon_{cu} - \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c} = -\frac{58,87 \cdot 10^5 \cdot (245,1 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot (35,05 \cdot 10^3 + 58,87 \cdot 10^5 / 698,5)} + \\ &+ 245,1 \cdot 10^{-5} - \frac{\ln(1 + 698,5 \cdot 245,1 \cdot 10^{-5})}{698,5} = 61,6 \cdot 10^{-5}. \\ \beta_c &= -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^3}{3 \cdot (a + b/c)} + \frac{\varepsilon_{cu}^2}{2} - \frac{\varepsilon_{cu}}{c} + \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c^2} = \\ &= -\frac{58,87 \cdot 10^5 \cdot (245,1 \cdot 10^{-5})^3}{3 \cdot (35,05 \cdot 10^3 + 58,87 \cdot 10^5 / 698,5)} + \frac{(245,1 \cdot 10^{-5})^2}{2} - \\ &- \frac{245,1 \cdot 10^{-5}}{698,5} + \frac{\ln(1 + 698,5 \cdot 245,1 \cdot 10^{-5})}{698,5^2} = 8750,6 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

Забезпечити необхідну площу перерізу розтягнутої арматури в балці

$$A_{sn} = \rho_l \cdot b_n \cdot d = 0,018 \cdot 250 \cdot 360 = 1617,3 \text{ мм}^2 \quad \text{можна 3-ма стержнями } 2\text{Ø}28 + \text{Ø}25 \text{ класу } A500C \quad (A_{s1} = 1232 + 490,9 = 1722,9 \text{ мм}^2).$$

**Приклад Г.6.** Розрахувати поздовжню арматуру шарнірно закріпленої з обох кінців залізобетонної колони перерізом  $b_n \times h_n = 300 \times 350 \text{ мм}$  (див. рис. Г.2), виготовленої з бетону класу C25/30 та армованої симетрично стержнями класу A400C ( $a_{s1} = a_{s2} = 40 \text{ мм}$ ). Початковий ексцентриситет прикладання стискаючої сили  $N_{Ed} = 1200 \text{ кН}$  в напрямку площини X

( $\beta_o = 0$ ) становить  $e_o = 80 \text{ мм}$ , а її розрахункова довжина рівна  $l_o = 6,5 \text{ м}$ . Колона закріплена від втрати стійкості в напрямку площини  $Y$ .

**Розв'язок.** Для бетону класу  $C25/30$  та арматури класу  $A400C$  маємо:  
 $f_{cd} = 17 \text{ МПа}$ ;  $E_c = 28,5 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ ;  $f_{yk} = 365 \text{ МПа}$ ;  $E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Початковий модуль пружності бетону (при  $\sigma_c = 0$ ) згідно табл.3.2 складає  $E_{co} = E_c \cdot k_o = 28,5 \cdot 10^3 \cdot 1,172 = 33,42 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , а критичні деформації стиснутого бетону за формулою (3.26) становитимуть

$$\varepsilon_{c1} = f_{cd} / E_{co} + (140 - 0,7 f_{cd}) \cdot 10^{-5} = (17 / 33420 + 140 - 0,7 \cdot 17) \cdot 10^{-5} = 17897 \cdot 10^{-5}.$$

Основні параметри діаграми деформування бетону на стиск обчислюємо за виразом (3.9)

$$a = E_{co} = 33,42 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad b = f_{cd} / \varepsilon_{c1}^2 = 17 / (178,97 \cdot 10^{-5})^2 = 53,07 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$c = E_{co} / f_{ck} - 2 / \varepsilon_{c1} = 33,42 \cdot 10^3 / 17 - 2 / (178,97 \cdot 10^{-5}) = 848,4.$$

Граничні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$  визначаємо за загальною формулою (4.20) або за відповідними формулами дод. Б (табл. Б.1)

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot (1 + 0,398 \cdot \sqrt{\ln k} / [1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6 / k - 0,2))^2]) = 17897 \cdot 10^{-5} \times$$

$$\times (1 + 0,398 \cdot \sqrt{\ln 3,518} / [1 + ((3,518 - 2) / 6 \cdot \ln(6 / 3,518 - 0,2))^2]) = 25801 \cdot 10^{-5},$$

де параметр  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{ck} = 33,42 \cdot 178,97 \cdot 10^{-2} / 17 = 3,518$ .

Оскільки гнучкість колони в напрямку площини  $X$  складає  $\lambda = l_o / d = 6,5 / 0,31 = 21$ , то необхідно враховувати вплив прогину на її напружено-деформований стан.

У першому наближенні прогин гнучких стиснутих елементів приймаємо за формулою (5.144), виходячи з повного використання деформативних властивостей стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  та міцнісних властивостей найбільш розтягнутої арматури

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{so} = f_{yk} / E_s = 365 / 210000 = 173,8 \cdot 10^{-5},$$

$$f_u = s \cdot (1/r_u) \cdot l_o^2 = 0,1 \cdot 1,393 \cdot 10^{-5} \cdot 6500^2 = 58,85 \text{ мм},$$

де  $1/r_u = (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s1}) / d = (258,01 + 173,8) \cdot 10^{-5} / 310 = 1,393 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}$ .

Водночас за повного використання всіх арматурних стержнів, коли напруження в них у граничній стадії сягають межі текучості ( $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{so}$ ), деформації найбільш розтягнутих стержнів за виразом (5.110) становитимуть

$$\varepsilon_{s1} = A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1} = 10,16 \cdot 10^{-5} + \sqrt{(10,16 \cdot 10^{-5})^2 + 0} = 20,3 \cdot 10^{-5},$$

де параметри  $A_1$  та  $B_1$  рівні відповідно

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu} \cdot ((1+2 \cdot t_e) \cdot \rho_k - \rho_{k1}) + \alpha_c \cdot \delta_c \cdot \rho_{k1}}{2f_{co} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} = \\ &= -\frac{129 \cdot 258,01 \cdot 10^{-5} \cdot ((1-2 \cdot 0,1166) \cdot 0 - 0,0216) + 76,8 \cdot 10^{-5} \cdot 46,77 \cdot 0,0216}{2 \cdot 129 \cdot (-0,1166 \cdot 0 - 0,0216)} = 10,16 \cdot 10^{-5}; \\ B_1 &= \frac{f_{co} \cdot \varepsilon_{cu}^2 (1+t_e) \cdot \rho_k - \beta_c \cdot \delta_c \cdot \rho_k}{f_{co} \cdot (t_e \cdot \rho_k - \rho_{k1})} = \\ &= \frac{258,01 \cdot 10^{-5} \cdot (1-0,1166) \cdot 0 + 0,11362 \cdot 10^{-5} \cdot 46,76 \cdot 0}{12,9 \cdot (-0,1166 \cdot 0 - 0,0216)} = 0. \end{aligned}$$

При цьому, за прийнятого у першому наближенні коефіцієнта симетричного армування колони у 2,0%, коефіцієнт її армування окремими стержнями 1 і 2 становитиме  $\rho_{l1} = \rho_{l2} = 0,01$ , а інші параметри за формулами (5.41), (5.79), (5.10) та (5.13) рівні відповідно (з урахуванням розміщення арматури: - для розтягнутої, + для стиснутої)

$$f_{co} = N_{Ed} / (b_n \cdot d) = 1200000 / (300 \cdot 310) = 12,9 \text{ МПа};$$

$$\rho_k = \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} = \rho_{l1} \cdot (-1 + \frac{\rho_{l2}}{\rho_{l1}}) = 0,01 \cdot (-1 + 1) = 0;$$

$$\begin{aligned} \rho_{k1} &= \rho_{l1} \cdot \sum_{i=1}^n k_{\rho i} \cdot k_{si} = \rho_{l1} \cdot (-1 \cdot \frac{x_{s1}}{|x_{s1}|} + \frac{\rho_{l2}}{\rho_{l1}} \cdot \frac{x_{s2}}{|x_{s1}|}) = 0,01 \cdot (-\frac{-124,77}{124,77} + \\ &+ 1 \cdot \frac{145,22}{124,77}) = 0,0216; \end{aligned}$$

$$x_{s1} = -\varepsilon_{s1} / (1/r_u) = -173,8 \cdot 10^{-5} / (1,393 \cdot 10^{-5}) = -124,77 \text{ мм};$$

$$x_{s2} = \varepsilon_{cu} / (1/r_u) - a_{s2} = 258,01 \cdot 10^{-5} / (1,393 \cdot 10^{-5}) - 40 = 145,22 \text{ мм};$$

$$t_e = (f_u + e_o - h/2) / d = (58,85 + 80 - 175) / 310 = -0,1166;$$

$$\delta_c = \frac{a + b/c}{c} = \frac{33,42 \cdot 10^3 + 53,07 \cdot 10^5 / 848,4}{848,4} = 46,76 \text{ МПа};$$

$$\alpha_c = -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^2}{2 \cdot (a + b/c)} + \varepsilon_{cu} - \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c} = -\frac{53,07 \cdot 10^5 \cdot (258,01 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot (33,42 \cdot 10^3 + 53,07 \cdot 10^5 / 848,4)} +$$

$$+ 258,01 \cdot 10^{-5} - \frac{\ln(1 + 848,4 \cdot 258,01 \cdot 10^{-5})}{848,4} = 76,8 \cdot 10^{-5};$$

$$\beta_c = -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^3}{3 \cdot (a + b/c)} + \frac{\varepsilon_{cu}^2}{2} - \frac{\varepsilon_{cu}}{c} + \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c^2} =$$

$$= -\frac{53,07 \cdot 10^5 \cdot (258,01 \cdot 10^{-5})^3}{3 \cdot (33,42 \cdot 10^3 + 53,07 \cdot 10^5 / 848,4)} + \frac{(258,01 \cdot 10^{-5})^2}{2} -$$

$$- \frac{258,01 \cdot 10^{-5}}{848,4} + \frac{\ln(1 + 848,4 \cdot 258,01 \cdot 10^{-5})}{848,4^2} = 0,11326 \cdot 10^{-5}.$$

Отримані деформації розтягнутих стержнів показують, що вони явно працюють у пружній стадії ( $\varepsilon_{s1} < \varepsilon_{s0}$ ). Тому зразу ж змінимо величину попередніх деформацій розтягнутої арматури на осереднені значення  $\varepsilon_{s1} = (173,8 + 20,3) \cdot 10^{-5} / 2 = 97,05 \cdot 10^{-5}$  та продовжимо розрахунок з уточнення основних параметрів напружено-деформованого стану колони.

За новими значеннями деформацій арматури  $\varepsilon_{s1}$  матимемо

$$1/r_u = (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s1}) / d = (258,01 + 97,05) \cdot 10^{-5} / 310 = 1,1454 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1};$$

$$f_u = s \cdot (1/r_u) \cdot l_o^2 = 0,1 \cdot 1,1454 \cdot 10^{-5} \cdot 6500^2 = 48,39 \text{ мм};$$

$$t_e = (f_u + e_o - h/2) / d = (48,39 + 80 - 175) / 310 = -0,1503;$$

$$x_{s1} = -\varepsilon_{s1} / (1/r_u) = -97,05 \cdot 10^{-5} / (1,1454 \cdot 10^{-5}) = -84,75 \text{ мм};$$

$$x_{s2} = \varepsilon_{cu} / (1/r_u) - a_{s2} = 258,01 \cdot 10^{-5} / (1,1454 \cdot 10^{-5}) - 40 = 185,25 \text{ мм};$$

$$\rho_\varphi = \rho_{l1} \sum_{i=1}^l k_{\rho i} = \rho_{l2} = 0,01; \quad \rho_{\varphi o} = \rho_{l1} \sum_{i=1}^l k_{\rho i} \cdot k_{si} = \rho_{l2} \cdot \frac{x_{s2}}{|x_{s1}|} = 0,01 \cdot \frac{185,25}{84,75} = 0,0219;$$

$$\rho_{\varphi 1} = \rho_{l1} \sum_{i=m}^n k_{\rho i} \cdot |k_{si}| = -\rho_{l1} = -0,01; \quad \rho_{\varphi 2} = \rho_{l1} \sum_{i=m}^n k_{\rho i} \cdot k_{si} \cdot |k_{si}| = \rho_{l1} = 0,01;$$

$$A_1 = \frac{f_{co} \cdot t_e - f_{yd} \cdot \rho_{\varphi o} + E_s \cdot \rho_{\varphi 1} \cdot \beta_c / \alpha_c}{2 \cdot E_s \cdot \rho_{\varphi 2}} =$$

$$= \frac{12,9 \cdot (-0,1503) - 365 \cdot 0,0219 - 2,1 \cdot 10^5 \cdot 0,01 \cdot 0,11326 / 76,79}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 0,01} = -309,9 \cdot 10^{-5};$$

$$B_1 = \frac{(f_{co} - f_{yd} \cdot \rho_{\varphi}) \cdot \beta_c / \alpha_c - \varepsilon_{cu} \cdot f_{co} \cdot (1 + t_e)}{E_s \cdot \rho_{\varphi 2}} =$$

$$= \frac{(12,9 - 365 \cdot 0,01) \cdot 0,11362 / 76,79 - 258,01 \cdot 10^{-5} \cdot 12,9 \cdot (1 - 0,1503)}{2,1 \cdot 0,01} = -0,697 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_{s1} = A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1} = -309,9 \cdot 10^{-5} + \sqrt{(-309,9 \cdot 10^{-5})^2 + 0,697 \cdot 10^{-5}} = 97,2 \cdot 10^{-5}.$$

При цьому внутрішні зусилля в колоні за (5.76) рівні

$$N = b_n \cdot d \cdot (\alpha_c \cdot \delta_c / (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_{cu}) + f_{yd} \cdot \rho_{\varphi} + E_s \cdot \varepsilon_{s1} \cdot \rho_{\varphi 1}) = 300 \cdot 310 \cdot (76,79 \times$$

$$\times 46,76 / (258,01 + 97,2) + 365 \cdot 0,01 - 2,1 \cdot 97,2 \cdot 0,01) = 1089725 \text{ Н}.$$

Практично за тотожності попередніх та отриманих значень відносних деформацій розтягнутої арматури ( $\Delta \varepsilon_{s1} = 97,05 / 97,2 = 0,998$ ) розходження між попередніми та розрахунковими значеннями прогину складають  $\Delta f_1 = (f_1 - f_2) / f_1 = (58,85 - 48,39) / 58,85 = 0,178 > 0,01$ . Враховуючи це та зважаючи на суттєві розходження між поздовжньою силою та внутрішніми зусиллями ( $N / N_{Ed} = 1089725 / 1200000 = 0,9081$ ), здійснюємо наступне наближення. Коефіцієнт армування колони змінюємо на величину  $N_{Ed} / N \cdot \rho_{l1} = 0,01 / 0,9081 = 0,011$  та повторюємо розрахунок.

В процесі наступних наближень отримуємо:

після 2-го -  $\varepsilon_{s1} = 93,5 \cdot 10^{-5}$ ,  $f_2 = 48,45 \text{ мм}$ ,  $N = 1122,7 \text{ кН}$  при  $\Delta \varepsilon_{s1} = 1,005$ ,  $\Delta f_2 = -0,001$  і  $\Delta N = 0,0644$ ;

після 4-го з  $\rho_{l1} = 0,0117$  -  $\varepsilon_{s1} = 80,5 \cdot 10^{-5}$ ,  $f_4 = 46,12 \text{ мм}$ ,  $N = 1199,8 \text{ кН}$  при  $\Delta \varepsilon_{s1} = 0,999$ ,  $\Delta f_5 = 0,016$  і  $\Delta N = 0,00017$ ;

після 5-го з  $\rho_{l1} = 0,0117$  -  $\varepsilon_{s1} = 80,7 \cdot 10^{-5}$ ,  $f_5 = 46,16 \text{ мм}$ ,  $N = 1199 \text{ кН}$  при  $\Delta \varepsilon_{s1} = 1,000$ ,  $\Delta f_5 = -0,00067$  і  $\Delta N = 0,00083$ .

Таким чином, забезпечити необхідну площу перерізу арматури в даній колоні  $A_s + A_{sc} = (\rho_{l1} + \rho_{l2}) \cdot b_n \cdot d = 0,0234 \cdot 300 \cdot 310 = 2176,2 \text{ мм}^2$  можна стержнями  $4\varnothing 28$  класу A400C ( $A_{\Sigma s} = 2464 \text{ мм}^2$ ).

**Приклад Г.7.** Підібрати площу перерізу поздовжньої арматури класу A500 C косозігнутої ( $\beta_o = 30^\circ$ ) залізобетонної балки прямокутного перерізу



$b_n \times h_n = 200 \times 350 \text{ мм}$  (рис. Г.5), виготовленої з бетону класу C30/35 та здатної сприйняти розрахункове значення згинаючого моменту  $M_{Ed} = 50 \text{ кНм}$ .

**Розв'язок.** Основні характеристики бетону і арматури є наступними:

$$f_{cd} = 19,5 \text{ МПа}; E_c = 30,27 \cdot 10^3 \text{ МПа}; f_{yd} = 435 \text{ МПа}; E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

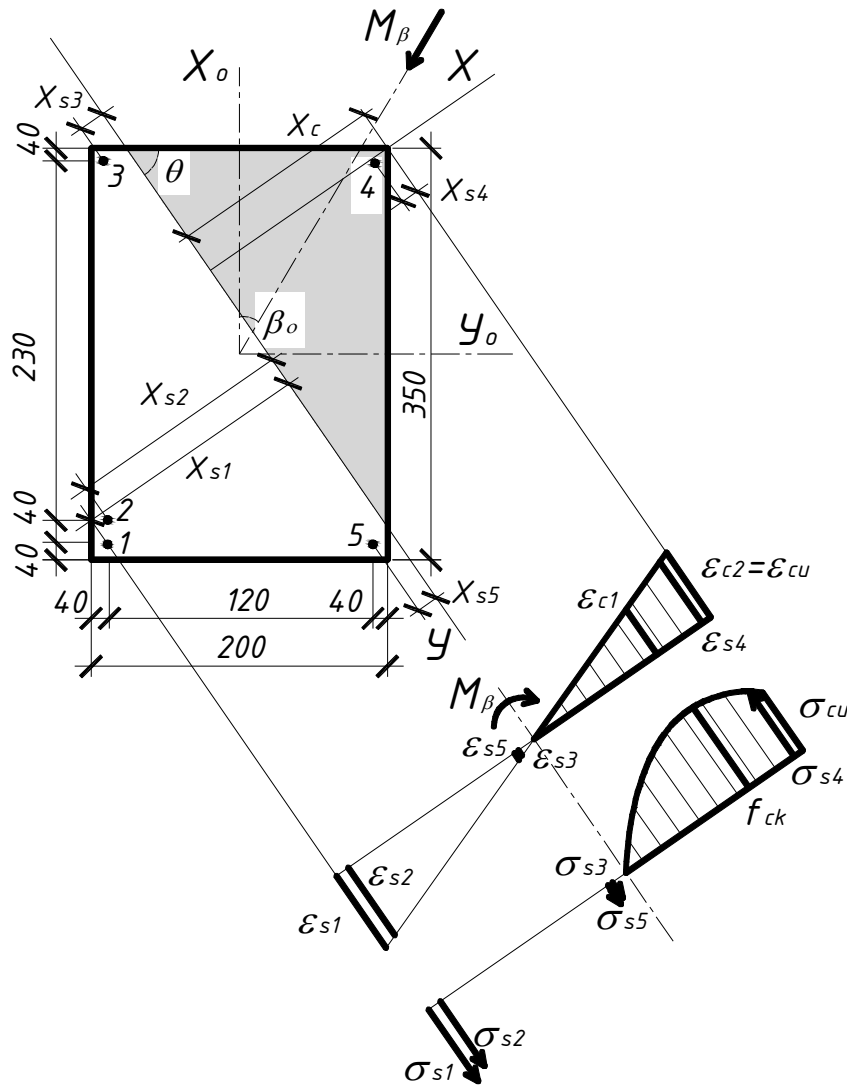


Рисунок Г.5 – Розрахункова схема перерізу косозігнутої залізобетонної балки до прикладу Г.7

Початковий модуль пружності бетону згідно з табл.3.2 складає  $E_{co} = E_c \cdot k_o = 30,27 \cdot 10^3 \cdot 1,158 = 35,05 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , а критичні деформації стиснутого бетону за формулою (3.26) сягатимуть

$$\epsilon_{cl} = f_{cd} / E_{co} + (140 - 0,7 f_{cd}) \cdot 10^{-5} = (19,5 / 35,05 + 140 - 0,7 \cdot 19,5) \cdot 10^{-5} = 182 \cdot 10^{-5}.$$

Основні параметри розрахункової діаграми деформування стиснутого

бетону обчислюємо за виразом (3.9)

$$a = E_{co} = 35,05 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad b = f_{cd} / \varepsilon_{c1}^2 = 19,5 / (182 \cdot 10^{-5})^2 = 58,87 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$c = E_{co} / f_{cd} - 2 / \varepsilon_{c1} = 35,05 \cdot 10^3 / 19,5 - 2 / (182 \cdot 10^{-5}) = 698,5.$$

Граничні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  розраховуємо за загальною формулою (4.39) або за відповідними формулами дод. Б (табл. Б.1). У першому наближенні визначаємо їх при ймовірній трикутній формі стиснутої зони бетону

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot (1 + 0,644 \cdot \sqrt{\ln k} / [1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2]) = 182 \cdot 10^{-5} \times$$

$$\times (1 + 0,644 \cdot \sqrt{\ln 3,271} / [1 + ((3,271 - 2) / 6 \cdot \ln(6/3,271 - 0,2))^2]) = 308,2 \cdot 10^{-5},$$

де параметр  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{cd} = 35,05 \cdot 182 \cdot 10^{-2} / 19,5 = 3,271$ .

Стержні 3, 4 і 5 приймаємо з конструктивних міркувань -  $\varnothing 12 A500 C$  ( $\rho_{l3} = \rho_{l4} = \rho_{l5} = 113 / (200 \cdot 310) = 0,00182$ ), а коефіцієнти армування балки стержнями 1 і 2 у першому наближенні приймемо рівними  $\rho_{l1} = \rho_{l2} = 0,005$  ( $A_{s1} = A_{s2} = 0,005 \cdot 200 \cdot 310 = 310 \text{ мм}^2$ ).

При повному вичерпанні міцнісних властивостей найбільш розтягнутого стержня його відносні деформації у першому наближенні приймемо рівними відносним деформаціям крайніх фібр (волокон) стиснутого бетону  $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cu} = 308,2 \cdot 10^{-5} > \varepsilon_{so} = f_{yd} / E_s = 435 / 210000 = 207,1 \cdot 10^{-5}$ . Тоді кривина балки в момент вичерпання її несучої здатності становитиме

$$1 / r_u = (\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s1}) / d = (308,2 + 308,2) \cdot 10^{-5} / 289 = 2,133 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}$$

при робочій висоті перерізу

$$d = (h_n - a_{s,hl}) \cdot \cos \theta + (b_n - a_{s,bl}) \cdot \sin \theta = (350 - 40) \cdot \cos 61,36^\circ + (200 - 40) \times$$

$$\times \sin 61,36^\circ = 289 \text{ мм}$$

за кута нахилу нейтральної лінії

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{I_{y,red}}{I_{x,red}} \cdot \operatorname{tg} \beta_o = \left( \frac{(h_n^3 \cdot b_n / 12 + n_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot (h_n / 2 - a_{sh,i})^2)}{(h_n \cdot b_n^3 / 12 + n_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot (b_n / 2 - a_{sb,i})^2)} \right) \cdot \operatorname{tg} \beta_o =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{350^3 \cdot 200}{12} + \frac{210000}{30270} \cdot ((113 \cdot 3 + 310) \cdot (175 - 40)^2 + 310 \cdot (175 - 80)^2) \right) / \\
&/ \left( \frac{350 \cdot 200^3}{12} + \frac{210000}{30270} \cdot (113 \cdot 3 + 310 \cdot 2) \cdot (100 - 40)^2 \right) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \\
&= 1,831; \quad \theta = 61,36^\circ.
\end{aligned}$$

Форма стиснутої зони бетону за таких умов і справді є трикутником, оскільки

$$\begin{aligned}
x_c &= \varepsilon_{cu} / (1/r_u) = 308,2 / 2,133 = 144,5 \text{ мм} < h_n \cdot \cos \theta = 350 \cdot 0,4793 = 167,76 \text{ мм}; \\
x_c &= 144,5 \text{ мм} < b_n \cdot \sin \theta = 200 \cdot 0,8776 = 175,53 \text{ мм}.
\end{aligned}$$

Залишаючи граничні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  незмінними, визначаємо основні геометричні та деформаційні параметри арматурних стержнів 1...5:  $x_{s1} = x_c - d = 144,5 - 289 = -144,5 \text{ мм}$ ;

$$x_{s2} = 144,5 - ((350 - 80) \cdot \cos 61,36^\circ + (200 - 40) \cdot \sin 61,36^\circ) = -125,3 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s2} = x_{s2} \cdot (1/r_u) = -125,34 \cdot 2,133 \cdot 10^{-5} = -267,35 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s3} = 144,5 - (40 \cdot \cos 61,36^\circ + (200 - 40) \cdot \sin 61,36^\circ) = -15,1 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s3} = x_{s3} \cdot (1/r_u) = -15,1 \cdot 2,133 \cdot 10^{-5} = -32,2 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s4} = 144,5 - (40 \cdot \cos 61,36^\circ + 40 \cdot \sin 61,36^\circ) = 90,22 \text{ мм};$$

$$x_{s5} = 144,5 - ((350 - 40) \cos 61,36^\circ + 40 \cdot \sin 61,36^\circ) = -38,19 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s4} = 90,22 \cdot 2,133 \cdot 10^{-5} = 192,44 \cdot 10^{-5}; \quad \varepsilon_{s5} = -38,19 \cdot 2,133 \cdot 10^{-5} = -83,6 \cdot 10^{-5}.$$

Водночас перше рівняння рівноваги балки (5.63) буде виконуватися в граничному стані лише тоді, коли відносні деформації найбільш розтягнутого арматурного стержня складатимуть

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{s1} &= \sqrt{\alpha_1 \cdot (-\varepsilon_{cu}^3 \cdot \beta_1 + \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} + \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (1 - \delta_1) - \delta_1) / (E_s \cdot \sum_{i=1}^4 \varepsilon_{si} A_{si}) - \varepsilon_{cu} =} \\
&= \sqrt{25,33 \cdot ((-308,2^3 \cdot 101,1) \cdot 10^{-10} + 308,2^2 \cdot 10^{-10} \frac{698,5^2}{2} + 308,2 \cdot 10^{-5} \times} \\
&\times 698,5 \cdot (1 - 1,1483) - 1,1483) / (435 \cdot (310 + 310) + 2,1 \cdot (32,2 - 192,44 + 83,6) \times} \\
&\times 113) - 308,2 \cdot 10^{-5} = 420 \cdot 10^{-5},
\end{aligned}$$

$$\text{де } \alpha_1 = \frac{(a \cdot c + b) \cdot d^2}{c^4 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta} = \frac{(35,05 \cdot 10^3 \cdot 698,5 + 58,87 \cdot 10^5) \cdot 289^2}{698,5^4 \cdot 0,4793 \cdot 0,8776} = 25,33 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^2;$$

$$\beta_1 = \frac{b \cdot c^3}{6 \cdot (a \cdot c + b)} = \frac{58,87 \cdot 10^5 \cdot 698,5^3}{6 \cdot (35,05 \cdot 10^3 \cdot 698,5 + 58,87 \cdot 10^5)} = 110,1 \cdot 10^5;$$

$$\delta_1 = \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu}) = \ln(1 + 698,5 \cdot 308,2 \cdot 10^{-5}) = 1,1483.$$

Несучу здатність косозігнутої балки обчислюємо за виразом (5.64)

$$M_u = \frac{\alpha_1}{(1/r_u)^3 \cdot c \cdot d^2} \left( -\varepsilon_{cu}^4 \frac{\beta_1 \cdot c}{2} + \varepsilon_{cu}^3 \frac{c^3}{6} - \varepsilon_{cu}^2 \frac{c^2}{2} - \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot (1 - \delta_1) + \delta_1 \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \times$$

$$\times x_{si} = \frac{25,33}{(2,133 \cdot 10^{-5})^3 \cdot 698,5 \cdot 289^2} \left( -(308,2 \cdot 10^{-5})^4 \frac{110,1 \cdot 10^5 \cdot 698,5}{2} + (308,2 \cdot 10^{-5})^3 \times \right.$$

$$\times 698,5^3 / 6 - (308,2 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 698,5^2 / 2 - 308,2 \cdot 10^{-5} \cdot 698,5 \cdot (1 - 1,1483) + 1,1483 \left. \right) +$$

$$+ 435 \cdot 310 \cdot (144,5 + 125,3) + 113 \cdot 2,1 \cdot (32,2 \cdot 15,1 + 192,4 \cdot 90,2 + 83,6 \cdot 39,2) =$$

$$= 62,26 \cdot 10^6 \text{ Нмм},$$

Оскільки збіжність попередніх та розрахованих значень відносних деформацій найбільш розтягнутого арматурного стержня є недостатньою

$$\Delta \varepsilon_{s1} = 308,2 / 420 = 0,734 < 0,99,$$

як недостатньою є і збіжність між зовнішніми та внутрішніми моментами

$$\Delta M = M_{Ed} / M_u = 50 / 62,26 = 0,803 < 0,99,$$

то в наступному наближенні за попередні значення відносних деформацій найбільш розтягнутої арматури приймемо розрахункові  $\varepsilon_{s1} = 420 \cdot 10^{-5}$ , а

коефіцієнти армування балки стержнями 1 і 2 скорегуємо на величину  $\Delta M$

$$\rho_{l1} = \rho_{l2} = 0,005 \cdot 0,803 = 0,004.$$

В процесі наступних наближень отримуємо:

після 3-го з  $\rho_{l1} = \rho_{l2} = 0,00379 - \varepsilon_{s1} = 462 \cdot 10^{-5}$  та  $M = 51,05 \text{ кНм}$  при  $\Delta \varepsilon_{s1} = 1,04$  і  $\Delta M = 0,979$ ;

після 5-го з  $\rho_{l1} = \rho_{l2} = 0,0037 - \varepsilon_{s1} = 470 \cdot 10^{-5}$  та  $M = 50,16 \text{ кНм}$  при  $\Delta \varepsilon_{s1} = 1,011$  і  $\Delta M = 0,997$ ;

після 6-го з  $\rho_{l1} = \rho_{l2} = 0,00368 - \varepsilon_{s1} = 474 \cdot 10^{-5}$  та  $M = 50,02 \text{ кНм}$  при

$$\Delta \varepsilon_{s1} = 0,993 \text{ і } \Delta M = 0,9995.$$

Таким чином, забезпечити розрахункову площу арматури в балці  $A_s + A_{sc} = \sum_{i=1}^5 \rho_{li} \cdot b_n \cdot (h_n - a_{hs1}) = (2 \cdot 0,00368 + 3 \cdot 0,00182) \cdot 200 \cdot 310 = 794,8 \text{ мм}^2$  можна стержнями  $2\text{Ø}18 + 3\text{Ø}12$  класу  $A500C$  ( $A_{\Sigma s} = 848 \text{ мм}^2$ ).

**Приклад Г.8.** Розрахувати поздовжню арматуру косостиснутої ( $\beta_o = 25^\circ$ ) залізобетонної колони прямокутного поперечного перерізу з розмірами  $b_n \times h_n = 300 \times 400 \text{ мм}$ , виготовленої з бетону класу  $C25/30$  та армованої симетрично стержнями класу  $A400C$  (рис. Г.6). Колона з шарнірним закріпленням на кінцях має розрахункову довжину  $l_o = 6300 \text{ мм}$ . Ексцентриситет прикладання поздовжнього навантаження  $N_{Ed} = 1000 \text{ кН}$  складає  $e_o = 90 \text{ мм}$ .

**Розв'язок.** Для бетону класу  $C25/30$  та арматури класу  $A400C$  маємо:  
 $f_{cd} = 17 \text{ МПа}$  ;  $E_c = 28,5 \cdot 10^3 \text{ МПа}$  ;  $f_{yd} = 365 \text{ МПа}$  ;  $E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  .

Початковий модуль пружності бетону згідно табл.3.2 дорівнює  $E_{co} = E_c \cdot k_o = 28,5 \cdot 10^3 \cdot 1,172 = 33,42 \cdot 10^3 \text{ МПа}$  , а величина критичних деформацій стиснутого бетону за формулою (3.26) становить

$$\varepsilon_{c1} = f_{cd} / E_{co} + (140 - 0,7 f_{cd}) \cdot 10^{-5} = (17 / 33,42 + 140 - 0,7 \cdot 17) \cdot 10^{-5} = 179 \cdot 10^{-5} .$$

Основні параметри діаграми деформування бетону на стиск обчислюємо за виразом (3.9)

$$a = E_{co} = 33,42 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad b = f_{cd} / \varepsilon_{c1}^2 = 17 / (179 \cdot 10^{-5})^2 = 53,07 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$c = E_{co} / f_{ck} - 2 / \varepsilon_{c1} = 33,42 \cdot 10^3 / 17 - 2 / (179 \cdot 10^{-5}) = 848,4 .$$

Граничні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$  визначаємо за загальною формулою (4.28) або за відповідними формулами дод. Б (табл. Б.1), передбачивши стиснуту зону бетону у вигляді трикутника та повне використання міцнісних властивостей арматури,

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot (1 + 2 \cdot 0,398 \cdot \sqrt{\ln k} / [1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6 / k - 0,2))^2]) = 179 \cdot 10^{-5} \times$$

$$\times (1 + 0,796 \cdot \sqrt{\ln 3,518} / [1 + ((3,518 - 2) / 6 \cdot \ln(6 / 3,518 - 0,2))^2]) = 337 \cdot 10^{-5} ,$$

де параметр  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{cd} = 33,42 \cdot 179 \cdot 10^{-2} / 17 = 3,518$ .

Оскільки гнучкість колони в напрямку площини  $Y$  становить  $\lambda = l_o / d_y = 6300 / 260 = 24,2$ , то необхідно враховувати вплив прогину на її напружено-деформований стан.

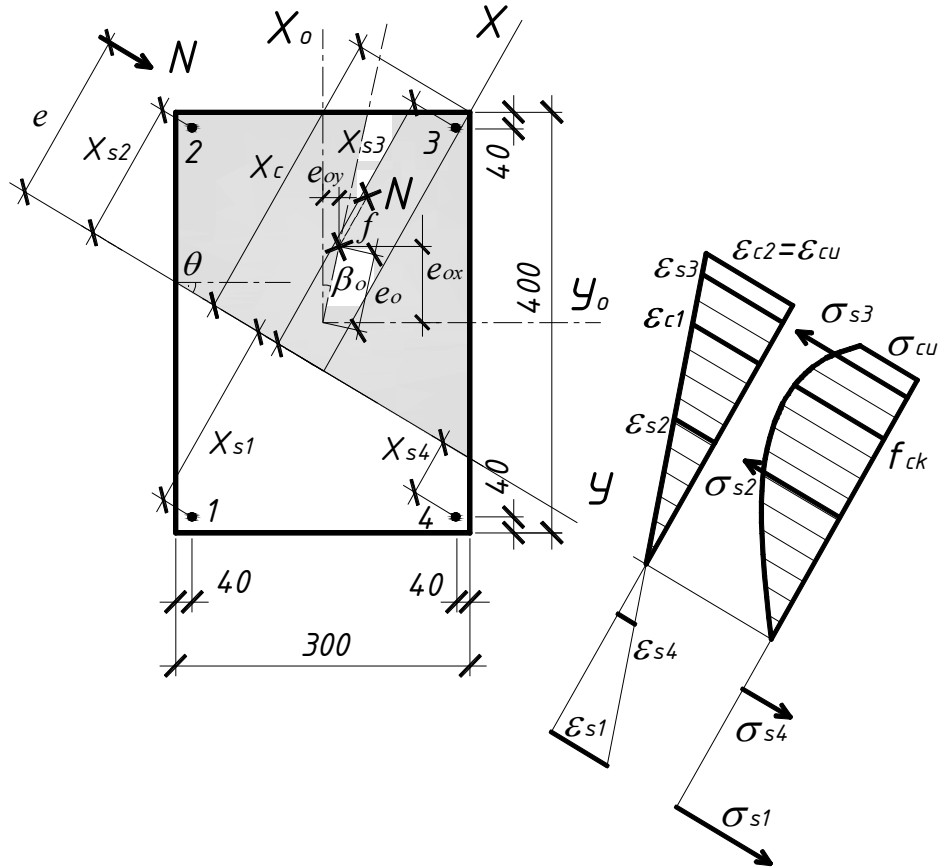


Рисунок Г.6 – Розрахункова схема перерізу колони до прикладу Г.8

Задамося попереднім значенням коефіцієнта поздовжнього армування колони  $\rho_{l\Sigma} = 0,015$  ( $A_{si} = b_n \cdot d_h \cdot \rho_{l\Sigma} / 4 = 300 \cdot 360 \cdot 0,00375 = 405 \text{ мм}^2$ ). Тоді кут нахилу нейтральної лінії та лінії прогинів визначимо за виразом (5.148)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \theta &= \frac{1/r_y}{1/r_x} \approx \operatorname{tg} \beta_o \cdot \frac{E_c I_{x,red} - s_x l_{ox}^2 N_{Ed}}{E_c I_{y,red} - s_y l_{oy}^2 N_{Ed}} = \operatorname{tg} \beta_o \cdot \left( E_c \frac{h_n^3 b_n}{12} + E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \left( \frac{h_n}{2} - a_{sh,i} \right)^2 - \right. \\
 &\left. - s_x l_{ox}^2 N \right) / \left( E_c \frac{h_n b_n^3}{12} + E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \left( \frac{b_n}{2} - a_{sb,i} \right)^2 - s_y l_{oy}^2 N \right) = \operatorname{tg} 25^\circ \cdot (28,5 \cdot 10^3 \times \\
 &\times \frac{400^3 \cdot 300}{12} + 210000 \cdot 405 \cdot 4 \cdot (200 - 40)^2 - 0,1 \cdot 6300^2 \cdot 1000 \cdot 10^3) / (28,5 \cdot 10^3 \times \\
 &\times \frac{400 \cdot 300^3}{12} + 210000 \cdot 405 \cdot 4 \cdot (150 - 40)^2 - 0,1 \cdot 6300^2 \cdot 1000 \cdot 10^3) = 0,91.
 \end{aligned}$$

Тоді  $\theta = 42,3^\circ$ .

У першому наближенні прогин гнучких стиснутих елементів приймаємо за формулою (5.144), виходячи з повного використання деформативних властивостей стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  та міцнісних характеристик найбільш розтягнутих арматурних стержнів

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{so} = f_{yd} / E_s = 365 / 210000 = 173,8 \cdot 10^{-5},$$

$$f_u = s \cdot (1/r_u) \cdot l_o^2 = \frac{1}{10} \cdot 1,158 \cdot 10^{-5} \cdot 6300^2 = 45,96 \text{ мм},$$

$$\text{де } 1/r_u = \frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s1}}{d} = \frac{(337 + 173,8) \cdot 10^{-5}}{441,25} = 1,158 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1};$$

$$d = (h_n - a_{s,h1}) \cdot \cos \theta + (b_n - a_{s,b1}) \cdot \sin \theta = (400 - 40) \cdot \cos 42,3^\circ + (300 - 40) \times \\ \times \sin 42,3^\circ = 441,25 \text{ мм}.$$

За такого розподілу деформацій форма стиснутої зони бетону повинна бути трапеція з основою здовж сторони  $b_n$ , оскільки виконуються умови

$$x_c = \varepsilon_{cu} / (1/r_u) = 337 / 1,158 = 291 \text{ мм} < h_n \cdot \cos \theta = 400 \cdot 0,7396 = 296 \text{ мм};$$

$$x_c = 291 \text{ мм} > b_n \cdot \sin \theta = 300 \cdot 0,673 = 201,9 \text{ мм}.$$

Тому зразу ж уточнимо граничні деформації стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot (1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot (k - 1) / (6 - k) \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot (x_{si} / x)^2 + \\ + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_h)^2)(1 - m_h^{3/2})(1 - m_h / k) \sqrt{(\ln k)^{(1 - m_h^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_h^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m_h)))^2} + \\ + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_b)^2)(1 - m_b^{3/2})(1 - m_b / k) \sqrt{(\ln k)^{(1 - m_b^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_b^2)(k - 2) \ln(6/k - 2(0,1 - m_b)))^2}) = 179 \cdot 10^{-5} \times \\ \times (1 + 5^3 \frac{2,1}{2} \cdot \frac{3,518 - 1}{6 - 3,518} \cdot 0,00375 \cdot (\frac{86,4}{291})^2 + \frac{0,398 \cdot \sqrt{\ln 3,518}}{1 + (\frac{3,518 - 2}{6} \cdot \ln(\frac{6}{3,518} - 0,2))^2} + \\ + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - 0,306)^2)(1 - 0,306^{3/2})(1 - 0,306/3,518) \sqrt{(\ln 3,518)^{(1 - 0,306^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot 0,306^2)(3,518 - 2) \ln(6/3,518 - 2(0,1 - 0,306)))^2}) = \\ = 328 \cdot 10^{-5},$$

при наступних геометричних і деформаційних параметрах арматурних

стержнів 1, 2, 3, 4

$$x_{s1} = x_c - d = 291 - 441,25 = -150,25 \text{ мм};$$

$$x_{s2} = 291 - (40 \cdot \cos 42,3^\circ + (300 - 40) \cdot \sin 42,3^\circ) = 86,4 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s2} = x_{s2} \cdot (1/r_u) = 86,4 \cdot 1,158 \cdot 10^{-5} = 100,1 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s3} = 291 - (40 \cdot \cos 42,3^\circ + 40 \cdot \sin 42,3^\circ) = 234,5 \text{ мм};$$

$$x_{s4} = 291 - ((400 - 40) \cos 42,3^\circ + 40 \cdot \sin 42,3^\circ) = -2,2 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s3} = 234,5 \cdot 1,158 \cdot 10^{-5} = 271,6 \cdot 10^{-5}; \quad \varepsilon_{s4} = -2,2 \cdot 1,158 \cdot 10^{-5} = -2,5 \cdot 10^{-5}$$

та параметрах неоднорідності деформування стиснутого бетону вздовж сторін  $h_n$  і  $b_n$

$$m_h = \frac{\varepsilon_{co,h}}{\varepsilon_{c2}} = \frac{x_c - h_n \cdot \cos \theta}{\varepsilon_{cu}} \cdot \frac{1}{r_u} = \frac{291 - 296}{337 \cdot 10^{-5}} \cdot 1,158 \cdot 10^{-5} < 0;$$

$$m_b = \frac{\varepsilon_{co,b}}{\varepsilon_{c2}} = \frac{x_c - b_n \cdot \sin \theta}{\varepsilon_{cu}} \cdot \frac{1}{r_u} = \frac{291 - 201,9}{337 \cdot 10^{-5}} \cdot 1,158 \cdot 10^{-5} = 0,306.$$

Уточнюємо граничну кривину  $1/r_u$  та граничний прогин  $f_u$  елемента

$$1/r_u = (328 + 173,8) \cdot 10^{-5} / 441,25 = 1,137 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1};$$

$$f_u = s \cdot (1/r_u) \cdot l_o^2 = 0,1 \cdot 1,137 \cdot 10^{-5} \cdot 6300^2 = 45,13 \text{ мм}.$$

Форму стиснутої зони бетону залишаємо у вигляді трапеції, оскільки

$$x_c = 328 / 1,137 = 288,5 \text{ мм} < h_n \cdot \cos \theta = 296 \text{ мм};$$

$$x_c = 288,5 \text{ мм} > b_n \cdot \sin \theta = 201,9 \text{ мм},$$

але уточнюємо геометричні та деформаційні параметри арматурних стержнів

$$x_{s1} = x_c - d = 288,5 - 441,25 = -152,75 \text{ мм};$$

$$x_{s2} = 288,5 - (40 \cdot \cos 42,3^\circ + (300 - 40) \cdot \sin 42,3^\circ) = 83,9 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s2} = x_{s2} \cdot (1/r_u) = 83,9 \cdot 1,137 \cdot 10^{-5} = 95,4 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s3} = 288,5 - (40 \cdot \cos 42,3^\circ + 40 \cdot \sin 42,3^\circ) = 232 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s3} = 232 \cdot 1,137 \cdot 10^{-5} = 263,8 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s4} = 288,5 - ((400 - 40) \cos 42,3^\circ + 40 \cdot \sin 42,3^\circ) = -4,7 \text{ мм};$$



$$\varepsilon_{s4} = -4,7 \cdot 1,137 \cdot 10^{-5} = -5,34 \cdot 10^{-5}.$$

Тоді несуча здатність косостиснутої колони за виразом (5.133) або з урахуванням відповідних формул з дод. В (табл. В.1) при

$$\varepsilon_b = (1/r_u) \cdot b_n \cdot c \cdot \sin \theta = 1,137 \cdot 10^{-5} \cdot 300 \cdot 848,4 \cdot 0,673 = 1,948$$

становитиме

$$\begin{aligned} N_u = & \alpha_p \cdot \left( \frac{b \cdot \varepsilon_b}{2} (-\varepsilon_{cu}^2 c^2 + \varepsilon_{cu} c \cdot \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_b^2}{3}) + \beta_b \cdot (\varepsilon_{cu} c \cdot \varepsilon_b + (\varepsilon_{cu} c + 1) \cdot \ln(1 - \frac{\varepsilon_b}{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}})) + \right. \\ & \left. + \varepsilon_b \cdot (1 - \frac{\varepsilon_b}{2} - \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b)) \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} = 2999,6 \cdot 10^{-5} \cdot \left( \frac{53,07 \cdot 10^5 \cdot 1,948}{2} \times \right. \\ & \times (- (328 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 848,4^2 + 328 \cdot 10^{-5} \cdot 848,4 \cdot 1,948 - \frac{1,948^2}{3}) + 336,6 \cdot 10^5 \cdot ((328 \cdot 10^{-5} \times \\ & \times 848,4 \cdot 1,948 + (328 \cdot 10^{-5} \cdot 848,4 + 1) \cdot \ln((3,783 - 1,948) / 3,783) + 1,948 \cdot (1 - 1,948 / 2 - \\ & \left. - \ln(3,783 - 1,948))) \right) + 2,1 \cdot 405 \cdot (-173,8 + 95,4 + 173,8 - 5,34) = 1086,4 \cdot 10^3 \text{ H}, \end{aligned}$$

де параметри  $\alpha_p$ ,  $\beta_b$  та  $\delta_c$  рівні відповідно

$$\alpha_p = \frac{1}{(1/r_u)^2 \cdot c^4 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta} = \frac{1}{(1,137 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 848,4^4 \cdot 0,7396 \cdot 0,673} = 2999,6 \cdot 10^{-5};$$

$$\beta_b = a \cdot c + b = 33,42 \cdot 10^3 \cdot 848,4 + 53,07 \cdot 10^5 = 336,6 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\delta_c = 1 + c \cdot \varepsilon_{cu} = 1 + 848,4 \cdot 328 \cdot 10^{-5} = 3,783.$$

Перевіримо виконання другого рівняння рівноваги (5.134)

$$\begin{aligned} N_{Ed} \cdot e_u = & 170,7 \cdot 10^6 \text{ Нмм} < \frac{\alpha_p}{1/r_u \cdot c} \cdot \left( \frac{b \cdot \varepsilon_b}{2} \left( -\varepsilon_{cu}^3 \frac{2 \cdot c^3}{3} + \varepsilon_{cu}^2 \cdot c^2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_{cu} \cdot c \cdot \frac{2 \cdot \varepsilon_b^2}{3} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\varepsilon_b^3}{6} \right) + (a \cdot c + b) \cdot \left( \varepsilon_{cu}^2 \varepsilon_b \frac{c^2}{2} - \varepsilon_{cu} c \cdot \varepsilon_b \cdot \left( 1 + \frac{\varepsilon_b}{2} \right) - (\varepsilon_{cu} c + 1) \cdot \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon_b}{1 + c \cdot \varepsilon_{cu}} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \varepsilon_b \left( \frac{\varepsilon_b^2}{6} + \frac{\varepsilon_b}{2} - 1 + \ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu} - \varepsilon_b) \right) \right) \right) + E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \varepsilon_{si} x_{si} = \frac{2999,6 \cdot 10^{-5}}{1,137 \cdot 10^{-5} \cdot 848,4} \times \\ & \times \left( \frac{53,07 \cdot 10^5 \cdot 1,948}{2} \left( - (328 \cdot 10^{-5})^3 \cdot 2 \cdot 848,4^3 / 3 + (328 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 848,4^2 \times \right. \right. \\ & \times 1,948 - 2 \cdot 328 \cdot 10^{-5} \cdot 848,4 \frac{1,948^2}{3} + \frac{1,948^3}{6} + 336,6 \cdot 10^5 \cdot ((328 \cdot 10^{-5})^2 \times \\ & \left. \left. \times 848,4^2 \cdot 1,948 / 2 - 328 \cdot 10^{-5} \cdot 848,4 \cdot 1,948 \cdot \left( 1 + \frac{1,948}{2} \right) - (328 \cdot 10^{-5} \cdot 848,4 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+1) \cdot \ln\left(\frac{3,783-1,948}{3,783}\right) + 1,948 \cdot \left(\frac{1,948^2}{6} + \frac{1,948}{2} - 1 + \ln(3,783-1,984)\right) + 2,1 \times \\ \times 405 \cdot (-173,8 \cdot (-152,75) + 95,4 \cdot 83,9 + 173,8 \cdot 232 - 5,34 \cdot (-4,7)) = 185 \cdot 10^6 \text{ Нмм},$$

де ексцентриситет поздовжньої сили відносно нейтральної лінії дорівнює

$$e_u = x_c - (h_n / 2 - e_o \cdot \cos \beta_o) \cos \theta - (b_n / 2 - e_o \cdot \sin \beta_o) \sin \theta + f_u = 288,5 - \\ - (200 - 90 \cos 25^\circ) \cos 42,3^\circ - (150 - 90 \sin 25^\circ) \sin 42,3^\circ + 45,13 = 170,7 \text{ мм}.$$

Оскільки збіжність між діючим навантаженням та несучою здатністю колони є недостатньою

$$\Delta N = N_{Ed} / N_u = 1000 / 1086,4 = 0,92 < 0,99,$$

як недостатньою є і збіжність між зовнішніми та внутрішніми моментами

$$\Delta M = M_{Ed} / M_u = 170,7 / 185 = 0,922 < 0,99,$$

то в наступному наближенні попередні значення відносних деформацій найбільш розтягнутої арматури збільшимо за параметром  $\Delta N$  -  $\varepsilon_{s1} = 173,8 \cdot 10^{-5} / 0,92 = 188,9 \cdot 10^{-5}$ , а коефіцієнт армування зменшимо за параметром  $\Delta M$  -  $\rho_{li} = 0,00375 \cdot 0,922 = 0,00346$ .

В процесі наступних наближень отримуємо:

після 3-го з  $\rho_{li} = 0,00334$  -  $\varepsilon_{s1} = 192 \cdot 10^{-5}$ ,  $N_u = 1004 \text{ кН}$ ,  $M_u = 165 \text{ кНм}$  та  $f_3 = 46,78 \text{ мм}$  при  $\Delta N = 0,996$ ,  $\Delta M = 0,983$  та  $\Delta f = 1,007$ ;

після 5-го з  $\rho_{li} = 0,00325$  -  $\varepsilon_{s1} = 193 \cdot 10^{-5}$ ,  $N_u = 999,45 \text{ кН}$ ,  $M_u = 162,94 \text{ кНм}$  та  $f_5 = 46,85 \text{ кНм}$  при  $\Delta N = 1,0005$ ,  $\Delta M = 0,9929$  та  $\Delta f = 1,000$ .

Таким чином, забезпечити розрахункову площу перерізу арматури в даній колоні  $A_{\Sigma s} = \sum_{i=1}^4 \rho_{li} b_n (h_n - a_{hs1}) = 4 \cdot 0,00325 \cdot 300 \cdot 360 = 1404 \text{ мм}^2$  можна стержнями  $4\varnothing 22$  класу  $A400C$  ( $A_{\Sigma s} = 1520 \text{ мм}^2$ ).

**Приклад Г.9.** Визначити момент утворення нормальних тріщин в косозігнутій ( $\beta_o = 25^\circ$ ) залізобетонній балці прямокутного перерізу  $b_n \times h_n = 250 \times 400 \text{ мм}$  (рис. Г.7), виготовленої з бетону класу  $C25/30$  та армованої  $1\varnothing 28$  класу  $A400C$  ( $A_{s1} = 615,8 \text{ мм}^2$ ) і  $3\varnothing 12$  класу  $A400C$

$$(A_{s2} = A_{s3} = A_{s4} = 113 \text{ мм}^2).$$

**Розв'язок.** Для бетону класу C25/30 та арматури класу A400C маємо:  
 $f_{ck} = 22 \text{ МПа}$ ;  $f_{cd} = 17 \text{ МПа}$ ;  $E_c = 31,778 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ ;  $f_{ctk} = 1,8 \text{ МПа}$ ;  
 $f_{ctd} = 1,2 \text{ МПа}$ ;  $f_{yk} = 400 \text{ МПа}$ ;  $f_{yd} = 365 \text{ МПа}$ ;  $E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

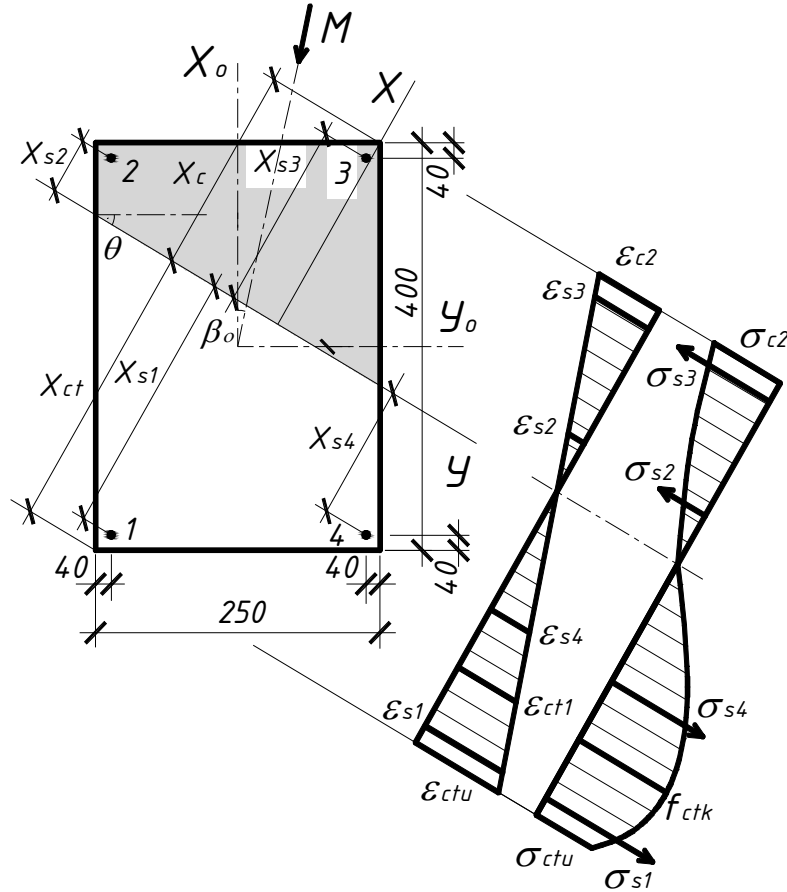


Рисунок Г.7 – Розрахункова схема перерізу балки до прикладу Г.9

Початковий модуль пружності бетону (при  $\sigma_c = 0$ ) згідно табл.3.2 складає  $E_{co} = E_c \cdot k_o = 31,778 \cdot 10^3 \cdot 1,172 = 37,244 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , а критичні деформації стиснутого та розтягнутого бетону за формулами (3.26) та (3.48) відповідно становитимуть

$$\varepsilon_{c1} = f_{ck} / E_{co} + (140 - 0,7 f_{ck}) \cdot 10^{-5} = (22 / 37,244 + 140 - 0,7 \cdot 22) \cdot 10^{-5} = 183,67 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_{ct1} = f_{ctk} / E_{co} + (3 - f_{ctk} / 3) \cdot 10^{-5} = (1,8 / 37,244 + 3 - 1,8 / 3) \cdot 10^{-5} = 7,233 \cdot 10^{-5}.$$

Обчислюємо основні параметри діаграм деформування бетону: на стиск за виразом (3.9) та на розтяг за формулою (3.45) відповідно

$$a = E_{co} = 37,244 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad b = f_{ck} / \varepsilon_{c1}^2 = 22 / (183,67 \cdot 10^{-5})^2 = 65,215 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$c = E_{co} / f_{ck} - 2 / \varepsilon_{c1} = 37,244 \cdot 10^3 / 22 - 2 / (183,67 \cdot 10^{-5}) = 604 ;$$

$$a_t = a = 37,244 \cdot 10^3 \text{ МПа} ; \quad b_t = f_{ctk} / \varepsilon_{ct1}^2 = 1,8 / (7,233 \cdot 10^{-5})^2 = 3441 \cdot 10^5 \text{ МПа} ;$$

$$c_t = E_{co} / f_{ctk} - 2 / \varepsilon_{ct1} = 37,244 \cdot 10^3 / 1,8 - 2 / (7,233 \cdot 10^{-5}) = -6960 .$$

Граничні деформації  $\varepsilon_{ctu}$  визначаємо за допомогою відповідної формули з дод. Б (табл. Б.2), прийнявши розтягнуту зону бетону у вигляді трикутника,

$$\varepsilon_{ctu} = \varepsilon_{ct1} \cdot \left( 1 + \frac{1,04 \cdot \sqrt{(\ln k_t)^{1,4}}}{1 + ((k_t - 2) / 6 \cdot \ln(36 / k_t^2 - 0,2))^2} \right) = 7,233 \cdot 10^{-5} \cdot \left( 1 + \frac{1,04 \sqrt{(\ln 1,496)^{1,4}}}{1 + ((1,496 - 2) / 6 \cdot \ln(36 / 1,496^2 - 0,2))^2} \right) = 11 \cdot 10^{-5} ,$$

де параметр  $k_t = E_{co} \cdot \varepsilon_{ct1} / f_{ctk} = 37,244 \cdot 7,233 \cdot 10^{-2} / 1,8 = 1,496$ .

Попередні значення відносних деформацій крайніх фібр стиснутого бетону приймемо за виразом (6.16)

$$\varepsilon_{c2} = \varepsilon_{c1} \cdot (0,0444 + (0,01 \cdot k^3 - 0,058 \cdot k^2 + 0,204 \cdot k + 0,12) \cdot \rho_l) = 183,67 \cdot 10^{-5} \times \\ \times (0,0444 + (0,01 \cdot 3,109^3 - 0,058 \cdot 3,109^2 + 0,204 \cdot 3,109 + 0,12) \cdot 0,0106) = 9,12 \cdot 10^{-5}$$

з параметром пружно-пластичних властивостей стиснутого бетону

$$k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{ck} = 37,244 \cdot 183,67 \cdot 10^{-2} / 22 = 3,109$$

та коефіцієнтом армування балки поздовжніми стержнями

$$\rho_l = \sum_{i=1}^4 A_{si} / (b_n \cdot d_y) = (615,8 + 3 \cdot 113) / (250 \cdot 360) = 0,0106 .$$

Тоді кривина балки в момент появи тріщин становитиме

$$1 / r_{cr} = (\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{ctu}) / h_d = (9,12 + 11) \cdot 10^{-5} / 446,28 = 0,04508 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}$$

при висоті її перерізу

$$h_d = h_n \cdot \cos \theta + b_n \cdot \sin \theta = 400 \cdot \cos 50,9^\circ + 250 \cdot \sin 50,9^\circ = 446,3 \text{ мм}$$

за кута нахилу нейтральної лінії

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{I_{y,red}}{I_{x,red}} \cdot \operatorname{tg} \beta_o = \left( \frac{(h_n^3 \cdot b_n / 12 + n_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot (h_n / 2 - a_{sh,i})^2)}{(h_n \cdot b_n^3 / 12 + n_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot (b_n / 2 - a_{sb,i})^2)} \right) \cdot \operatorname{tg} \beta_o = \\ = \left( \left( \frac{400^3 \cdot 250}{12} + \frac{210000}{31778} \cdot (113 \cdot 3 + 615,8) \cdot (200 - 40)^2 \right) / \left( \frac{400 \cdot 250^3}{12} + \right. \right.$$

$$+ \frac{210000}{31778} \cdot (113 \cdot 3 + 615,8) \cdot (125 - 40)^2 \cdot \operatorname{tg} 25^\circ = 1,2306; \quad \theta = 50,9^\circ.$$

Форми стиснутої та розтягнутої зон бетону за таких умов – трапеції уздовж сторони  $b_n$ , оскільки виконуються умови

$$x_c = \varepsilon_{c2} / (1/r_{cr}) = 9,12 / 0,04508 = 202,3 \text{ мм} < h_n \cdot \cos \theta = 400 \cdot 0,6307 = 252,3 \text{ мм};$$

$$x_c = 202,3 \text{ мм} > b_n \cdot \sin \theta = 250 \cdot 0,776 = 194 \text{ мм};$$

$$x_{ct} = \varepsilon_{ctu} / (1/r_{cr}) = 11 / 0,04508 = 244 \text{ мм} < h_n \cdot \cos \theta = 400 \cdot 0,6307 = 252,3 \text{ мм};$$

$$x_{ct} = 244 \text{ мм} > b_n \cdot \sin \theta = 250 \cdot 0,776 = 194 \text{ мм}.$$

Тому зразу ж уточнимо граничні деформації розтягнутого бетону за відповідною формулою дод. Б (табл. Б.2)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ctu} &= \varepsilon_{ct1} \cdot \left[ \frac{(0,66 - 0,2(0,3 - m_{th})^2)(1 - m_{th}^{4/3})(1 - m_{th}/k_t)\sqrt{(\ln k_t)^{(1,4 - m_{th}^{4/3})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot m_{th}^2)(k_t - 2) \ln(36/k_t^2 - 2(0,1 - m_{th})))^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{(0,66 - 0,2(0,3 - m_{th})^2)(1 - m_{th}^{4/3})(1 - m_{th}/k_t)\sqrt{(\ln k_t)^{(1,4 - m_{th}^{4/3})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot m_{th}^2)(k_t - 2) \ln(36/k_t^2 - 2(0,1 - m_{th})))^2} \right] + 1) = \\ &= 7,233 \cdot 10^{-5} \cdot (0,81 \cdot \left[ 0,6424 \sqrt{(\ln 1,496)^{1,4}} / (1 + (\frac{1,496 - 2}{6} \ln(\frac{36}{1,496^2} - 0,2))^2) + \right. \\ &+ \left. \frac{(0,66 - 0,2(0,3 - 0,205)^2)(1 - 0,205^{4/3})(1 - \frac{0,205}{1,496})\sqrt{(\ln 1,496)^{(1,4 - 0,205^{4/3})}}}{1 + ((1/6 - 0,1 \cdot 0,205^2)(1,496 - 2) \ln(36/1,496^2 - 2(0,1 - 0,205)))^2} \right] + 1) = \\ &+ 1) = 10,7 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

при параметрах неоднорідності деформування розтягнутого бетону

$$m_{ht} = \frac{\varepsilon_{cto,h}}{\varepsilon_{ct2}} = \frac{x_{ct} - h_n \cdot \cos \theta}{\varepsilon_{ctu}} \cdot \frac{1}{r_{cr}} = \frac{244 - 252,3}{11 \cdot 10^{-5}} \cdot 0,04508 \cdot 10^{-5} < 0;$$

$$m_{bt} = \frac{\varepsilon_{cto,b}}{\varepsilon_{ct2}} = \frac{x_{ct} - b_n \cdot \sin \theta}{\varepsilon_{ctu}} \cdot \frac{1}{r_{cr}} = \frac{244 - 194}{11 \cdot 10^{-5}} \cdot 0,04508 \cdot 10^{-5} = 0,205.$$

Уточнюємо кривину  $1/r_{cr}$  елемента в момент появи тріщин

$$1/r_{cr} = (10,7 + 9,12) \cdot 10^{-5} / 446,28 = 0,0444 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1},$$

висоту розтягнутої і стиснутої зон бетону

$$x_{ct} = 10,7 / 0,0444 = 241 \text{ мм} < h_n \cos \theta = 252,3 \text{ мм}; x_{ct} = 241 \text{ мм} > b_n \sin \theta = 194 \text{ мм};$$

$$x_c = 9,12 / 0,0444 = 205,4 \text{ мм} < h_n \cos \theta = 252,3 \text{ мм}; x_c = 205,4 \text{ мм} > b_n \sin \theta = 194 \text{ мм}$$

та визначаємо геометричні і деформаційні параметри арматурних стержнів

$$x_{s1} = x_c - (h_n - a_{sh,1}) \cdot \cos \theta - (b_n - a_{sb,1}) \cdot \sin \theta = 205,4 - (400 - 40) \cdot 0,6307 - (250 - 40) \cdot 0,776 = -184,61 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s1} = x_{s1} \cdot (1 / r_{cr}) = -184,61 \cdot 0,0444 \cdot 10^{-5} = -8,2 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s2} = 205,4 - 40 \cdot \cos 50,9^\circ - (250 - 40) \cdot \sin 50,9^\circ = 17,2 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s2} = 17,2 \cdot 0,0444 \cdot 10^{-5} = 0,76 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s3} = 205,4 - 40 \cdot \cos 50,9^\circ - 40 \cdot \sin 50,9^\circ = 149,1 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s3} = 149,1 \cdot 0,0444 \cdot 10^{-5} = 6,62 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s4} = 205,4 - ((400 - 40) \cos 50,9^\circ + 40 \cdot \sin 50,9^\circ) = -52,7 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s4} = -52,7 \cdot 0,0444 \cdot 10^{-5} = -2,34 \cdot 10^{-5}.$$

Тоді розтягуючі зусилля (–) в найбільш напруженому перерізі балки з урахуванням відповідних формул дод. В (табл. В.2) при

$$\varepsilon_{bt} = (1 / r_{cr}) \cdot b_n \cdot c_t \cdot \sin \theta = 0,0444 \cdot 10^{-5} \cdot 250 \cdot (-6960) \cdot 0,776 = -0,6$$

становитимуть

$$N_{cts,cr} = \alpha_{\rho t} \cdot \left( \frac{b_t \cdot \varepsilon_{bt}}{2} (-\varepsilon_{ctu}^2 \cdot c_t^2 + \varepsilon_{ctu} \cdot c_t \cdot \varepsilon_{bt} - \frac{\varepsilon_{bt}^2}{3}) + \beta_{bt} (\varepsilon_{ctu} \cdot c_t \cdot \varepsilon_{bt} + (\varepsilon_{ctu} \cdot c_t + 1) \times \right.$$

$$\times \ln(1 - \frac{\varepsilon_{bt}}{\delta_{ct}}) + \varepsilon_{bt} (1 - \frac{\varepsilon_{bt}}{2} - \ln(\delta_{ct} - \varepsilon_{bt}))) - E_s \cdot (A_{s1} \cdot \varepsilon_{s1} + A_{s4} \cdot \varepsilon_{s4}) = 441,6 \cdot 10^{-5} \times$$

$$\times (3441 \cdot 10^5 \cdot (-0,6) / 2 \cdot (-10,7 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (-6960)^2 + 10,7 \cdot 10^{-5} \cdot (-6960) \cdot (-0,6) -$$

$$- (-0,6)^2 / 3) + 848,8 \cdot 10^5 \cdot (10,7 \cdot 10^{-5} \cdot (-6960) \cdot (-0,6) + (10,7 \times 10^{-5} \cdot (-6960) + 1) \times$$

$$\times \ln(1 - \frac{-0,6}{0,255}) - 0,6 \cdot (1 - \frac{-0,6}{2} - \ln(0,255 + 0,6))) - 2,1 \cdot 10^5 \cdot (615,8 \cdot (-8,2 \cdot 10^{-5}) +$$

$$+ 113 \cdot (-2,34 \cdot 10^{-5})) = 70,775 \cdot 10^3 \text{ Н},$$

де параметри  $\alpha_{\rho t}$ ,  $\beta_{bt}$  та  $\delta_{ct}$  рівні відповідно

$$\alpha_{\rho t} = \frac{1}{(1 / r_{cr})^2 \cdot c_t^4 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta} = \frac{1}{(0,0444 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (-6960)^4 \cdot 0,6307 \cdot 0,776} = 441,6 \cdot 10^{-5};$$

$$\beta_{bt} = a_t \cdot c_t + b_t = 37,244 \cdot 10^3 \cdot (-6960) + 3441 \cdot 10^5 = 848,8 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\delta_{ct} = 1 + c_t \cdot \varepsilon_{ctu} = 1 + (-6960) \cdot 10,7 \cdot 10^{-5} = 0,255 .$$

Аналогічно стискаючі зусилля (+) в зазначеному перерізі балки теж з урахуванням відповідних формул дод. В (табл. В.1), при

$$\varepsilon_b = (1/r_{cr}) \cdot b_n \cdot c \cdot \sin \theta = 0,0444 \cdot 10^{-5} \cdot 250 \cdot 604 \cdot 0,776 = 0,052 ,$$

складатимуть

$$\begin{aligned} N_{cs,cr} = & \alpha_\rho \cdot \left( \frac{b \cdot \varepsilon_b}{2} (-\varepsilon_{c2}^2 \cdot c^2 + \varepsilon_{c2} \cdot c \cdot \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_b^2}{3}) + \beta_b \cdot (\varepsilon_{c2} \cdot c \cdot \varepsilon_b + (\varepsilon_{c2} \cdot c + 1) \cdot \ln(1 - \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon_b}{\delta_c}) + \varepsilon_b (1 - \frac{\varepsilon_b}{2} - \ln(\delta_c - \varepsilon_b)) \right) + E_s \cdot (A_{s2} \cdot \varepsilon_{s2} + A_{s3} \cdot \varepsilon_{s3}) = 77,87 \cdot (65,215 \cdot 10^{-5} \times \\ & \times 0,052 / 2 \cdot (-9,12 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 604^2 + 9,12 \cdot 10^{-5} \cdot 604 \cdot 0,052 - \frac{0,052^2}{3}) + 290,16 \cdot 10^{-5} \times \\ & \times (9,12 \cdot 10^{-5} \cdot 604 \cdot 0,052 + (9,12 \cdot 10^{-5} \cdot 604 + 1) \cdot \ln(1 - \frac{0,052}{1,055}) + 0,052 \cdot (1 - \frac{0,052}{2} - \\ & - \ln(1,055 - 0,052))) + 2,1 \cdot 10^5 \cdot (113 \cdot 0,76 + 113 \cdot 6,62) = 48,737 \cdot 10^3 \text{ H}; \end{aligned}$$

де параметри  $\alpha_\rho$ ,  $\beta_b$  та  $\delta_c$  рівні відповідно

$$\alpha_\rho = \frac{1}{(1/r_{cr})^2 \cdot c^4 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta} = \frac{1}{(0,0444 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 604^4 \cdot 0,6307 \cdot 0,776} = 77,87 ;$$

$$\beta_b = a \cdot c + b = 37,244 \cdot 10^3 \cdot 604 + 65,215 \cdot 10^5 = 290,16 \cdot 10^5 \text{ МПа} ;$$

$$\delta_c = 1 + c \cdot \varepsilon_{c2} = 1 + 604 \cdot 9,12 \cdot 10^{-5} = 1,055 .$$

Момент, що характеризує появу тріщин в косозігнутій балці, становить

$$\begin{aligned} M_{cr} = & \alpha_{\rho t} \left( \frac{b_t \varepsilon_{bt}}{2} (-\varepsilon_{ct}^3 \frac{2 \cdot c_t^3}{3} + \varepsilon_{ct}^2 \cdot c_t^2 \cdot \varepsilon_{bt} - \varepsilon_{ct} \cdot c_t \frac{2 \cdot \varepsilon_{bt}^2}{3} + \frac{\varepsilon_{bt}^3}{6}) + \beta_{bt} \times \right. \\ & \times (\varepsilon_{ct}^2 \cdot \varepsilon_{bt} \cdot \frac{c_t^2}{2} - \varepsilon_{ct} \cdot c_t \times \varepsilon_{bt} \cdot (1 + \frac{\varepsilon_{bt}}{2}) - (\varepsilon_{ct} \cdot c_t + 1) \cdot \ln(1 - \frac{\varepsilon_{bt}}{1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct}}) + \\ & \left. + \varepsilon_{bt} \cdot (\frac{\varepsilon_{bt}^2}{6} + \frac{\varepsilon_{bt}}{2} - 1 + \ln(1 + c_t \cdot \varepsilon_{ct} - \varepsilon_{bt}))) \right) + \alpha_\rho \left( \frac{b \cdot \varepsilon_b}{2} (-\varepsilon_c^3 \frac{2 \cdot c^3}{3} + \varepsilon_c^2 \times \right. \\ & \times c^2 \cdot \varepsilon_b - \varepsilon_c \cdot c \cdot \frac{2 \cdot \varepsilon_b^2}{3} + \frac{\varepsilon_b^3}{6}) + \beta_b \cdot (\varepsilon_c^2 \cdot \varepsilon_b \frac{c^2}{2} - \varepsilon_c \cdot c \cdot \varepsilon_b \cdot (1 + \frac{\varepsilon_b}{2}) - (\varepsilon_c \times \\ & \times c + 1) \cdot \ln(1 - \frac{\varepsilon_b}{\delta_c}) + \varepsilon_b \cdot (\frac{\varepsilon_b^2}{6} + \frac{\varepsilon_b}{2} - 1 + \ln(\delta_c - \varepsilon_b))) \right) + E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \varepsilon_{si} x_{si} = \\ & = 441,6 \cdot 10^{-5} \times (3441 \cdot 10^5 \cdot (-0,6) / 2 \cdot (-10,7 \cdot 10^{-5})^3 \cdot (-6960)^3 \cdot 2 / 3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (10,7 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (-6960)^2 \cdot (-0,6) - 10,7 \cdot 10^{-5} \cdot (-6960) \cdot \frac{2 \cdot (-0,6)^2}{3} + \\
& + \frac{(-0,6)^3}{6} + 848,8 \cdot 10^5 \cdot ((10,7 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (-6960)^2 \cdot (-0,6) / 2 - 10,7 \cdot 10^{-5} \times \\
& \times (-6960) \cdot (-0,6) \cdot (1 - \frac{0,6}{2}) - (10,7 \cdot 10^{-5} \cdot (-6960) + 1) \cdot \ln(1 - \frac{-0,6}{0,255}) - \\
& - 0,6 \cdot (\frac{(-0,6)^2}{6} - \frac{0,6}{2} - 1 + \ln(0,255 + 0,6))) + 77,87 \cdot (65,215 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,052}{2} \times \\
& \times (-9,12 \cdot 10^{-5})^3 \frac{2 \cdot 604^3}{3} + (9,12 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 604^2 \cdot 0,052 - 9,12 \cdot 10^{-5} \cdot 604 \times \\
& \times \frac{2 \cdot 0,052^2}{3} + \frac{0,052^3}{6}) + 290,16 \cdot 10^5 ((9,12 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 604^2 \cdot \frac{0,052}{2} - 9,12 \cdot 10^{-5} \times \\
& \times 604 \cdot 0,052 \times (1 + \frac{0,052}{2}) - (9,12 \cdot 10^{-5} \cdot 604 + 1) \ln(1 - \frac{0,052}{1,055}) + 0,052 (\frac{0,052^2}{6} + \\
& + \frac{0,052}{2} - 1 + \ln(1,055 - 0,052))) + 2,1 \cdot (615,8 \cdot (-8,2) \cdot (-184,61) + 113 \cdot (0,76 \times \\
& \times 17,2 + 6,62 \cdot 149,1 - 2,34 \cdot (-52,7))) = 13,554 \cdot 10^6 \text{ Нмм}.
\end{aligned}$$

Оскільки розбіжність між розтягуючими та стискуючими зусиллями в балці складає 45%

$$\Delta N_{cr} = N_{cts,cr} / N_{cs,cr} = 70775 / 48737 = 1,452 > 1,01,$$

то в наступному наближенні попередні значення відносних деформацій крайових фібр стиснутого бетону, зважаючи на їх прямий зв'язок з кривиною та відповідними внутрішніми зусиллями в елементі, збільшимо на 15% -  $(2 + \Delta N_{cr}) / 3$  тобто до  $\varepsilon_{c2} = 9,12 \cdot 10^{-5} \cdot (2 + 1,452) / 3 = 10,49 \cdot 10^{-5}$ .

В процесі наступних наближень отримуємо:

після 3-го з  $\varepsilon_{s2} = 10,44 \cdot 10^{-5}$  -  $N_{cts,cr} = 64,42 \text{ кН}$ ,  $N_{cs,cr} = 63,13 \text{ кН}$  та  $M_{cr} = 14,24 \text{ кНм}$  при  $\Delta N_{cr} = 1,021$  та  $\Delta M_{cr} = M_{cr,2} / M_{cr,3} = 1,002$ ;

після 4-го з  $\varepsilon_{s2} = 10,51 \cdot 10^{-5}$  -  $N_{cts,cr} = 63,98 \text{ кН}$ ,  $N_{cs,cr} = 64,03 \text{ кН}$  та  $M_{cr} = 14,29 \text{ кНм}$  при  $\Delta N_{cr} = 0,999$  та  $\Delta M_{cr} = M_{cr,3} / M_{cr,4} = 0,996$ .

Таким чином, нормальні тріщини в даній косостиснутій балці появляться за дії згинаючого моменту  $M_{cr} = 14,24 \text{ кНм}$ .



**Приклад Г.10.** Розрахувати ширину розкриття тріщин в залізобетонній балці С1 [430] прямокутного перерізу  $b_n \times h_n = 150 \times 235 \text{ мм}$  (рис. Г.8) від згинаючого моменту  $M_{Ed} = 24,7 \text{ кНм}$ . Балка, довжиною  $l_o = 3 \text{ м}$ , виготовлена з важкого бетону з характеристиками  $f_{cu} = 74 \text{ МПа}$  ( $f_{ck} \approx 60 \text{ МПа}$ ),  $f_r = 3,42 \text{ МПа}$  ( $f_{ctk} \approx 2,4 \text{ МПа}$ ),  $E_c = 28,606 \cdot 10^3 \text{ МПа}$  та армована при захисному шарі бетону  $a_{s1} = a_{s2} = 20 \text{ мм}$  в розтягнутій зоні  $2\text{Ø}16$  ( $A_{s1} = 402,12 \text{ мм}^2$ ), а в стиснутій зоні –  $2\text{Ø}8$  ( $A_{s1} = 100,5 \text{ мм}^2$ ) з наступними характеристиками  $f_{yk} = 528 \text{ МПа}$ ;  $E_s = 2,0 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  ( $\alpha_s = 2,0/2 = 1,0$ ). Результати експериментальних досліджень балки наведені в табл. Г.1.

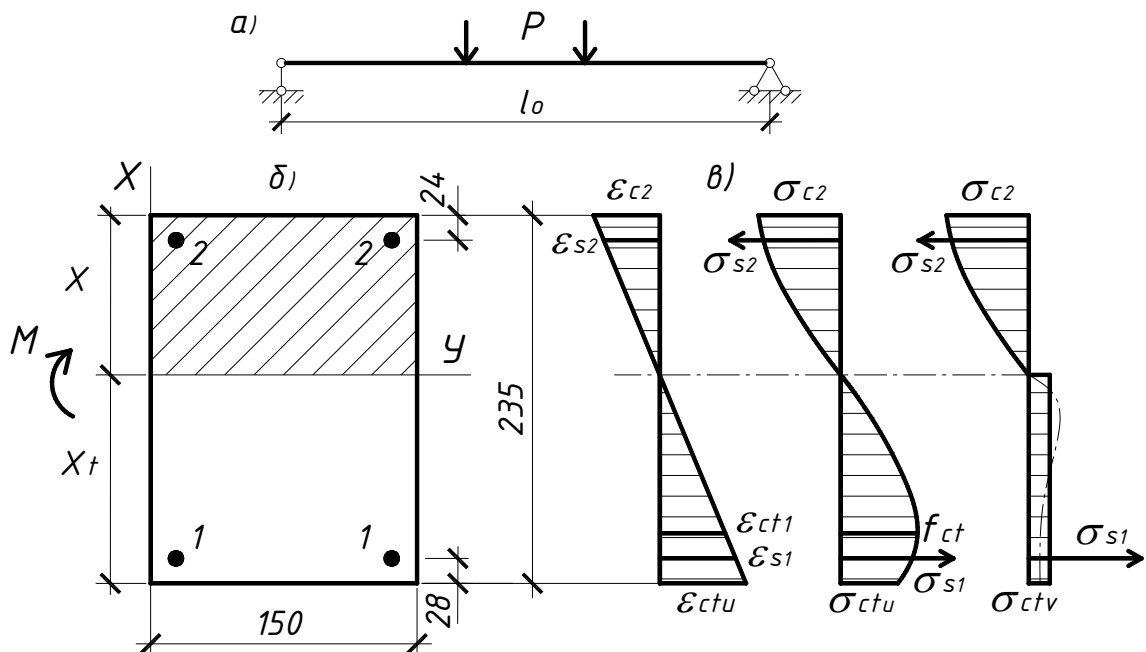


Рисунок Г.8 – До прикладу Г.10: розрахункова схема (а), переріз (б) та напружено-деформований стан (в) балки

**Розв'язок.** 1. Початковий модуль пружності бетону (при  $\sigma_c = 0$ ) згідно табл.3.2 рівний  $E_{co} = E_c \cdot k_o = 28,606 \cdot 10^3 \cdot 1,2 = 34,327 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , а критичні деформації стиснутого бетону за формулою (3.26) складають

$$\varepsilon_{c1} = f_{ck} / E_{co} + (140 - 0,7 f_{ck}) \cdot 10^{-5} = (60 / 34,327 + 140 - 0,7 \cdot 60) \cdot 10^{-5} = 272,8 \cdot 10^{-5}.$$

Основні параметри діаграми деформування бетону на стиск обчислюємо за виразом (3.9)

$$a = E_{co} = 34,327 \cdot 10^3 \text{ МПа} ; b = f_{ck} / \varepsilon_{c1}^2 = 60 / (272,8 \cdot 10^{-5})^2 = 80,63 \cdot 10^5 \text{ МПа} ;$$

$$c = \frac{E_{co}}{f_{ck}} - \frac{2}{\varepsilon_{c1}} = \frac{34,327 \cdot 10^3}{60} - \frac{2}{272,8 \cdot 10^{-5}} = -161,05 .$$

Граничні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$  визначаємо за загальною формулою (4.21) або за відповідними формулами дод. Б (табл. Б.1)

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot (1 + 0,322 \cdot \sqrt{\ln k} / [1 + ((k-2)/6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2]) = 272,8 \cdot 10^{-5} \times$$

$$\times (1 + 0,322 \cdot \sqrt{\ln 1,561} / [1 + ((1,561-2)/6 \cdot \ln(6/1,561 - 0,2))^2]) = 330,87 \cdot 10^{-5} ,$$

де параметр  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{ck} = 34,327 \cdot 272,8 \cdot 10^{-2} / 60 = 1,561$ .

При раціональному армуванні згинальних елементів напруження в розтягнутій арматурі в граничній стадії зазвичай досягають межі текучості

$$(\varepsilon_s > \varepsilon_{so} = \frac{528}{2,0 \cdot 10^5} = 264 \cdot 10^{-5}), \text{ а тому її деформації за виразом (5.26) рівні}$$

$$\varepsilon_{s1} = \frac{\delta_c \cdot \alpha_c}{E_s \cdot \varepsilon_{so} \cdot \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i}} - \varepsilon_{cu} = \frac{97,73 \cdot 138,68 \cdot 10^{-5}}{528 \cdot 0,0097} - 330,87 \cdot 10^{-5} = 2311,59 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{при } \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i} = \frac{A_{s1}}{b_n \cdot d} (1 - \frac{A_{s2}}{A_{s1}}) = \frac{402,12}{150 \cdot 207} (1 - \frac{100,5}{402,12}) = 0,0097 \text{ та параметрах } \delta_c \text{ і}$$

$\alpha_c$ , рівних за формулою (5.10) відповідно

$$\delta_c = \frac{a + b/c}{c} = \frac{34,327 \cdot 10^3 + 80,63 \cdot 10^5 / (-161,05)}{-161,05} = 97,73 \text{ МПа} ;$$

$$\alpha_c = -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^2}{2 \cdot (a + b/c)} + \varepsilon_{cu} - \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c} = -\frac{80,63 \cdot 10^5 \cdot (330,87 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot (34,327 \cdot 10^3 + 80,63 \cdot 10^5 / (-161,05))} +$$

$$+ 330,87 \cdot 10^{-5} - \ln(1 - 161,05 \cdot 330,87 \cdot 10^{-5}) / (-161,05) = 138,68 \cdot 10^{-5} .$$

Тоді кривина даної балки в стадії граничної рівноваги становитиме

$$1/r_u = \frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s1}}{d} = \frac{(330,87 + 2311,59) \cdot 10^{-5}}{207} = \frac{2642,46 \cdot 10^{-5}}{207} = 12,77 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1} ,$$

а її несуча здатність за формулою (5.27) остаточно складатиме

$$M_u = \frac{b_n}{(1/r_u)^2} \cdot \delta_c \cdot \beta_c + f_{yk} \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot x_{si} = \frac{150 \cdot 10^{10}}{12,77^2} \cdot 97,73 \cdot 28583 \cdot 10^{-10} +$$

$$+ 528 \cdot (402,12 \cdot 181,08 + 100,5 \cdot 1,92) = 41,12 \cdot 10^6 \text{ Нмм}$$

за параметра  $\beta_c$

$$\begin{aligned}\beta_c &= -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^3}{3 \cdot (a + b/c)} + \frac{\varepsilon_{cu}^2}{2} - \frac{\varepsilon_{cu}}{c} + \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c^2} = \\ &= -\frac{80,63 \cdot 10^5 \cdot (330,87 \cdot 10^{-5})^3}{3 \cdot (34,327 \cdot 10^3 + 80,63 \cdot 10^5 / (-161,05))} + \frac{(330,87 \cdot 10^{-5})^2}{2} - \\ &- \frac{330,87 \cdot 10^{-5}}{-161,05} + \frac{\ln(1 - 161,05 \cdot 330,87 \cdot 10^{-5})}{(-161,05)^2} = 0,28583 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

при основних геометричних та деформаційних параметрах стиснутого бетону і арматурних стержнів

$$x_{cu} = \varepsilon_{cu} / (1/r_u) = 330,87 \cdot 10^{-5} / (12,77 \cdot 10^{-5}) = 25,92 \text{ мм};$$

$$x_{s1} = h_n - a_{sh,1} - x_{cu} = 235 - 28 - 25,92 = 181,08 \text{ мм};$$

$$x_{s2} = x_{cu} - a_{sh,2} = 25,92 - 24 = 1,92 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s2} = x_{s2} \cdot 1/r_u = 1,92 \cdot 12,77 \cdot 10^{-5} = 24,52 \cdot 10^{-5}.$$

2. Критичні деформації розтягнутого бетону за формулою (3.48) рівні

$$\varepsilon_{ct1} = f_{ctk} / E_{co} + (3 - f_{ctk} / 3) \cdot 10^{-5} = (2,4 / 0,34327 + 3 - 2,4 / 3) \cdot 10^{-5} = 9,192 \cdot 10^{-5}$$

Основні параметри діаграми деформування бетону на розтяг обчислюємо за формулою (3.45)

$$a_t = a = 34,327 \cdot 10^3 \text{ МПа} ; \quad b_t = f_{ctk} / \varepsilon_{ct1}^2 = 2,4 / (9,192 \cdot 10^{-5})^2 = 2840,8 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$c_t = E_{co} / f_{ctk} - 2 / \varepsilon_{ct1} = 34,327 \cdot 10^3 / 2,4 - 2 / (9,192 \cdot 10^{-5}) = -7456.$$

Граничні деформації  $\varepsilon_{ctu}$  визначаємо за допомогою відповідної формули з дод. Б (табл. Б.2)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ctu} &= \varepsilon_{ct1} \cdot \left(1 + \frac{0,52 \cdot \sqrt{(\ln k_t)^{1,4}}}{1 + ((k_t - 2) / 6 \cdot \ln(36 / k_t^2 - 0,2))^2}\right) = 9,192 \cdot 10^{-5} \cdot \left(1 + \right. \\ &\left. + \frac{0,52 \sqrt{(\ln 1,315)^{1,4}}}{1 + ((1,315 - 2) / 6 \cdot \ln(36 / 1,315^2 - 0,2))^2}\right) = 10,91 \cdot 10^{-5},\end{aligned}$$

де параметр  $k_t = E_{co} \cdot \varepsilon_{ct1} / f_{ctk} = 34,327 \cdot 9,192 \cdot 10^{-2} / 2,4 = 1,315$ .

Попередні значення відносних деформацій крайніх фібр стиснутого бетону в момент появи нормальних тріщин приймемо за виразом (6.16)

$$\varepsilon_{c2} = \varepsilon_{c1} \cdot (0,0444 + (0,01 \cdot k^3 - 0,058 \cdot k^2 + 0,204 \cdot k + 0,12) \cdot \rho_l) = 272,8 \cdot 10^{-5} \times \\ \times (0,0444 + (0,01 \cdot 1,561^3 - 0,058 \cdot 1,561^2 + 0,204 \cdot 1,561 + 0,12) \cdot 0,0162) = 13,59 \cdot 10^{-5}$$

за коефіцієнту армування балки поздовжніми стержнями

$$\rho_l = \sum_{i=1}^4 A_{si} / (b_n \cdot d_y) = (402,12 + 100,5) / (150 \cdot 207) = 0,0162 .$$

Тоді кривина балки в момент появи тріщин становитиме

$$1/r_{cr} = (\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{ctu}) / h_n = (13,59 + 10,91) \cdot 10^{-5} / 235 = 0,10428 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1} ,$$

а геометричні та деформаційні параметри арматурних стержнів будуть рівні

$$x_{s1} = x_c - (h_n - a_{sh,1}) = 130,3 - (235 - 28) = -76,7 \text{ мм},$$

$$\varepsilon_{s1} = x_{s1} \cdot (1/r_{cr}) = -76,7 \cdot 0,10428 \cdot 10^{-5} = -7,99 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s2} = x_c - a_{sh,2} = 130,3 - 24 = 106,3 \text{ мм}; \quad \varepsilon_{s2} = 106,3 \cdot 0,10428 \cdot 10^{-5} = 11,09 \cdot 10^{-5}$$

за висоти стиснутої зони бетону в момент появи тріщин

$$x_c = 13,59 / 0,10428 = 130,3 \text{ мм} .$$

Розтягуючі зусилля (-) в найбільш напруженому перерізі балки з урахуванням відповідних формул дод. В (табл. В.2) складатимуть

$$N_{cts,cr} = N_{ct,cr} + N_{st,cr} = b_n \cdot \alpha_{\rho t} \cdot \beta_{bt} \cdot (-\varepsilon_{ctu}^2 \frac{b_t \cdot c_t^2}{2 \cdot \beta_{bt}} + \varepsilon_{ctu} \cdot c_t - \ln \delta_{ct}) - E_s \cdot \varepsilon_{s1} \cdot A_{s1} = 150 \times \\ \times (-0,2313) \cdot 281,28 \cdot (-10,91 \cdot 10^{-5})^2 \frac{2840,8 \cdot 10^5 \cdot (-7456)^2}{2 \cdot 281,28 \cdot 10^5} + 10,91 \cdot 10^{-5} \cdot (-7456) - \\ - \ln 0,1862 + 2,0 \cdot 7,99 \cdot 402,12 = 24179 + 6430 = 30609 \text{ Н},$$

де параметри  $\alpha_{\rho t}$ ,  $\beta_{bt}$  та  $\delta_{ct}$  рівні відповідно

$$\alpha_{\rho t} = 1 / ((1/r_{cr}) \cdot c_t^3) = 1 / (0,10428 \cdot 10^{-5} \cdot (-7456)^3) = -0,2313 \cdot 10^{-5};$$

$$\beta_{bt} = a_t \cdot c_t + b_t = 34,327 \cdot 10^3 \cdot (-7456) + 2840,8 \cdot 10^5 = 281,28 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\delta_{ct} = 1 + c_t \cdot \varepsilon_{ctu} = 1 + (-7456) \cdot 10,91 \cdot 10^{-5} = 0,1862 .$$

Аналогічно стискаючі зусилля (+) в зазначеному перерізі балки теж з урахуванням відповідних формул дод. В (табл. В.1) становитимуть

$$N_{cs,cr} = N_{c,cr} + N_{sc,cr} = b_n \cdot \alpha_{\rho} \cdot \beta_b \cdot (-\varepsilon_{c2}^2 \frac{b \cdot c^2}{2 \cdot \beta_b} + \varepsilon_{c2} \cdot c - \ln \delta_c) + E_s \cdot \varepsilon_{s2} \cdot A_{s2} = 150 \times$$

$$\times (-22957) \cdot 25,35 \cdot (-13,59 \cdot 10^{-5})^2 \frac{80,63 \cdot 10^5 \cdot (-161,05)^2}{2 \cdot 25,35 \cdot 10^5} - 13,59 \cdot 10^{-5} \cdot 161,05 - \ln 0,9781) + 2,0 \cdot 11,09 \cdot 100,5 = 45297 + 2229 = 47526 \text{ Н},$$

де параметри  $\alpha_\rho$ ,  $\beta_b$  та  $\delta_c$  рівні відповідно

$$\alpha_\rho = 1/((1/r_{cr}) \cdot c^3) = 1/(0,10428 \cdot 10^{-5} \cdot (-161,05)^3) = -22957 \cdot 10^{-5};$$

$$\beta_b = a \cdot c + b = 34,327 \cdot 10^3 \cdot (-161,05) + 80,63 \cdot 10^5 = 25,35 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\delta_c = 1 + c \cdot \varepsilon_{c2} = 1 - 161,05 \cdot 13,59 \cdot 10^{-5} = 0,9781.$$

Момент, що характеризує появу тріщин в балці, становить

$$M_{cr} = \frac{b_n}{1/r_{cr}} \left( \frac{\alpha_{\rho t} \cdot \beta_{bt}}{c_t} \cdot (-\varepsilon_{ctu}^3 \frac{b_t \cdot c_t^3}{3 \cdot \beta_{bt}} + \varepsilon_{ctu}^2 \frac{c_t^2}{2} - \varepsilon_{ctu} \cdot c_t + \ln \delta_{ct}) + \frac{\alpha_\rho \cdot \beta_b}{c} \cdot (-\varepsilon_{c2}^3 \frac{b \cdot c^3}{3 \cdot \beta_b} + \varepsilon_{c2}^2 \frac{c^2}{2} - \varepsilon_{c2} \cdot c + \ln \delta_c) \right) + E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot x_{si} = \frac{150}{0,10428 \cdot 10^{-5}} \left( \frac{-0,2313 \cdot 281,28}{(-7456)} \times \right. \\ \times (-10,91 \cdot 10^{-5})^3 \frac{2840,8 \cdot (-7456)^3}{3 \cdot 281,28} + (10,91 \cdot 10^{-5})^2 \frac{(-7456)^2}{2} - 10,91 \cdot 10^{-5} \cdot (-7456) + \\ \left. + \ln 0,1862 \right) + \frac{22957 \cdot 25,35}{161,05} \cdot (-13,59 \cdot 10^{-5})^3 \frac{80,63 \cdot (-161,05)^3}{3 \cdot 25,35} + (13,59 \cdot 10^{-5})^2 \times \\ \times \frac{(-161,05)^2}{2} + 13,59 \cdot 10^{-5} \cdot 161,05 + \ln 0,9781) + 2,0 \cdot (402,12 \cdot (-7,99) \cdot (-76,7) + 100,5 \times \\ \times 11,09 \cdot 106,3) = 6,267 \cdot 10^6 \text{ Нмм}.$$

Зважаючи, що розбіжність між розтягуючими та стискуючими зусиллями в балці є доволі суттєвою

$$\Delta N = N_{cts,cr} / N_{cs,cr} = 30609 / 47526 = 0,644 < 0,99,$$

в наступному наближенні попередні значення відносних деформацій крайових фібр стиснутого бетону скорегуємо на величину  $(2 + \Delta N)/3$  до значення  $\varepsilon_{c2} = 13,59 \cdot 10^{-5} \cdot (2 + 0,644)/3 = 11,98 \cdot 10^{-5}$ .

В процесі наступних наближень отримуємо:

$$\text{після 3-го з } \varepsilon_{c2} = 10,9 \cdot 10^{-5} \quad - \quad N_{cts,cr} = N_{ct,cr} + N_{st,cr} = 27,17 + 6,69 = 33,86 \text{ кН},$$

$$N_{cs,cr} = N_{c,cr} + N_{sc,cr} = 32,75 + 1,74 = 34,49 \text{ кН} \quad \text{і} \quad M_{cr} = 5,35 \text{ кНм} \quad \text{при} \quad \varepsilon_{s1} = 8,32 \cdot 10^{-5},$$

$$\Delta N_{cr} = 0,981 \quad \text{та} \quad \Delta M_{cr} = M_{cr,2} / M_{cr,3} = 1,06;$$

після 4-го з  $\varepsilon_{c2} = 10,8 \cdot 10^{-5}$  –  $N_{cts,cr} = N_{ct,cr} + N_{st,cr} = 27,29 + 6,7 = 33,99 \text{ кН}$ ,  
 $N_{cs,cr} = N_{c,cr} + N_{sc,cr} = 32,3 + 1,72 = 34,02 \text{ кН}$  і  $M_{cr} = 5,32 \text{ кНм}$  при  $\varepsilon_{s1} = 8,33 \cdot 10^{-5}$ ,  
 $\Delta N = 0,999$  та  $\Delta M_{cr} = M_{cr,3} / M_{cr,4} = 1,005$ .

Отже, нормальні тріщини в даній балці появляться за дії згинаючого моменту  $M_{cr} = 5,32 \text{ кНм}$ .

3. Розрахункове значення осередненої кривини балки в найбільш напруженому перерізі за дії моменту  $M_{Ed} = 92 \text{ кНм}$  визначаємо за виразом (6.3) відповідно до діаграми її стану (6.2) з урахуванням (2.14)

$$\frac{1}{r^*} = \frac{\psi_\rho}{r} = \frac{\psi_\rho / r_u}{2M_u} \left[ \left(1 - \frac{M_{Ed}}{M_u}\right) \frac{D_o}{r_u} + 2M_{Ed} - \sqrt{\left(\left(1 - \frac{M_{Ed}}{M_u}\right) \frac{D_o}{r_u} + 2M_{Ed}\right)^2 - 4M_{Ed} \cdot M_u} \right] =$$

$$= 1,311 \cdot \frac{12,77 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 41,12 \cdot 10^6} \left[ \left(1 - \frac{24,7}{41,12}\right) \cdot 6,389 \cdot 10^{12} \cdot 12,77 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 24,7 \cdot 10^6 - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\left(\left(1 - \frac{24,7}{41,12}\right) \cdot 6,389 \cdot 10^{12} \cdot 12,77 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 24,7 \cdot 10^6\right)^2 - 4 \cdot 24,7 \cdot 10^6 \times 41,12 \cdot 10^6} \right] = 1,11 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1},$$

з корегуючим параметром розрахункової кривини

$$\psi_\rho = 1 + \frac{\rho_{lt}}{\alpha_s} \cdot \frac{M_{Ed}}{M_u} \cdot \left(1 - \frac{M_{Ed}}{M_u}\right) = 1 + \frac{1,295}{1} \cdot \frac{24,7}{41,12} \cdot \left(1 - \frac{24,7}{41,12}\right) = 1,311$$

при початковій жорсткості перерізу балки

$$D_o = E_{co} \cdot h_n^3 \cdot b_n / 12 + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot (h_n / 2 - a_{sh,i})^2 = 34327 \cdot 235^3 \cdot 150 / 12 +$$

$$2,0 \cdot 10^5 (402,12 \cdot (235/2 - 28)^2 + 100,5 \cdot (235/2 - 24)^2) = 6,389 \cdot 10^{12} \text{ Нмм}^2.$$

Попередні значення відносних деформацій крайових фібр стиснутого бетону прийmemo пропорційно до стадії граничної рівноваги за виразом

$$\varepsilon_{c2} = \varepsilon_{cu} \cdot M_u / M_{Ed} \cdot (1/r^*) / (1/r_u) = 330,87 \cdot 10^{-5} \cdot 41,12 / 24,7 \cdot 1,11 / 12,77 =$$

$$= 47,88 \cdot 10^{-5}.$$

Тоді висота стиснутої та розтягнутої зон бетону в найбільш напруженому перерізі балки і видовження її найбільш розтягнутої грані складатимуть відповідно

$$x_c = \varepsilon_{c2} / (1/r^*) = 47,88 / 1,11 = 43,13 \text{ мм}; \quad x_{ct} = h_n - x_c = 235 - 43,13 = 191,87 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_t = x_{ct} \cdot (1/r^*) = 191,87 \cdot 1,11 \cdot 10^{-5} = 213 \cdot 10^{-5},$$

а геометричні та деформаційні параметри арматурних стержнів будуть рівні

$$x_{s1} = x_c - (h_n - a_{sh,1}) = 43,13 - (235 - 28) = -163,87 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s1} = x_{s1} \cdot (1/r^*) = -163,87 \cdot 1,11 \cdot 10^{-5} = -181,88 \cdot 10^{-5};$$

$$x_{s2} = x_c - a_{sh,2} = 43,13 - 24 = 19,13 \text{ мм}; \quad \varepsilon_{s2} = 19,13 \cdot 1,11 \cdot 10^{-5} = 21,23 \cdot 10^{-5}.$$

Розтягуючі зусилля (-) в найбільш напруженому перерізі балки з урахуванням формули (6.26) складатимуть

$$N_{ctc} = N_{ct} + N_{st} = b_n \cdot x_{ct} \cdot f_{ctk} \cdot (\varepsilon_{ct1} / \varepsilon_t)^{1/\rho_{lt}} - E_s \cdot \varepsilon_{s1} \cdot A_{s1} = 150 \cdot 191,87 \cdot 2,4 \times \\ \times (9,192 / 213)^{1/1,295} + 2,0 \cdot 181,88 \cdot 402,12 = 6101 + 146278 = 152379 \text{ Н}$$

при коефіцієнті армування розтягнутими стержнями

$$\rho_{lt} = A_{s1} / (b_n \cdot d) \cdot 100\% = 402,12 / (150 \cdot 207) \cdot 100\% = 1,295\%.$$

Аналогічно стискаючі зусилля (+) в зазначеному перерізі балки при врахуванні відповідних формул дод. В (табл. В.1) становитимуть

$$N_{cs} = N_c + N_{sc} = b_n \cdot \alpha_\rho \cdot \beta_b \cdot (-\varepsilon_{c2}^2 \frac{b \cdot c^2}{2 \cdot \beta_b} + \varepsilon_{c2} \cdot c - \ln \delta_c) + E_s \cdot \varepsilon_{s2} \cdot A_{s2} = 150 \times \\ \times (-2157) \cdot 25,35 \cdot (-47,88 \cdot 10^{-5})^2 \frac{80,63 \cdot 10^5 \cdot (-161,05)^2}{2 \cdot 25,35 \cdot 10^5} - 47,88 \cdot 10^{-5} \cdot 161,05 - \\ - \ln 0,9229) + 2,0 \cdot 21,23 \cdot 100,5 = 51837 + 4269 = 56106 \text{ Н},$$

де параметри  $\alpha_\rho$ ,  $\beta_b$  та  $\delta_c$  рівні відповідно

$$\alpha_\rho = 1 / [(1/r^*) \cdot c^3] = 1 / [1,11 \cdot 10^{-5} \cdot (-161,05)^3] = -2157 \cdot 10^{-5};$$

$$\beta_b = 25,35 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \delta_c = 1 + c \cdot \varepsilon_{c2} = 1 - 161,05 \cdot 47,88 \cdot 10^{-5} = 0,9229.$$

Момент, що виникає від внутрішніх зусиль в балці, складатиме

$$M = \frac{b_n \cdot \alpha_\rho \cdot \beta_b}{(1/r^*) \cdot c} \cdot (-\varepsilon_{c2}^3 \frac{b \cdot c^3}{3 \cdot \beta_b} + \varepsilon_{c2}^2 \frac{c^2}{2} - \varepsilon_{c2} \cdot c + \ln \delta_c) + b_n \cdot \frac{x_{ct}^2}{2} \cdot f_{ctk} \cdot (\varepsilon_{ct1} / \varepsilon_t)^{1/\rho_{lt}} + \\ + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot x_{si} = \frac{150 \cdot (-2157) \cdot 25,35}{1,11 \cdot 10^{-5} \cdot (-161,05)} \cdot (-47,88 \cdot 10^{-5})^3 \frac{80,63 \cdot (-161,05)^3}{3 \cdot 25,35} + \\ + (47,88 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (-161,05)^2 / 2 + 47,88 \cdot 10^{-5} \cdot 161,05 + \ln 0,9229) + 150 \cdot 191,87^2 \times$$

$$\times 2,4 \cdot \times (9,192 / 213)^{1/1,295} / 2 + 2,0 \cdot (402,12 \cdot (-181,88) \cdot (-163,87) + 100,5 \cdot 21,23 \times \\ \times 19,13) = 26,12 \cdot 10^6 \text{ Нмм} .$$

Зважаючи, що розбіжність між розтягуючими та стискуючими зусиллями в балці є доволі суттєвою

$$\Delta N = N_{cts} / N_{cs} = 152379 / 56106 = 2,716 > 1,01 ,$$

а збіжність між зовнішніми та внутрішніми згинаючими моментами є недостатньою  $\Delta M = M_{Ed} / M = 24,7 / 26,12 = 0,946 < 0,99$ , то в наступному наближенні попередні значення розрахункової осередненої кривини балки скорегуємо через  $\Delta M$  до значення  $1/r^* = 1,11 \cdot 10^{-6} \cdot 0,946 = 1,05 \cdot 10^{-6}$ , а значення відносних деформацій крайових фібр стиснутого бетону за допомогою  $\sqrt{\Delta N}$  до значення  $\varepsilon_{c2} = 47,88 \cdot 10^{-5} \sqrt{2,716} = 78,9 \cdot 10^{-5}$ . В процесі наступних наближень отримуємо:

після 2-го –  $\varepsilon_{s1} = -13835 \cdot 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_{c2} = 789 \cdot 10^{-5}$  ( $x_c = 75,18 \text{ мм}$ ),  $N_{cts} = 117,37 \text{ кН}$ ,  $N_{cs} = 156,95 \text{ кН}$  та  $M = 22,99 \text{ кНм}$  при  $\Delta N = 0,748$  та  $\Delta M = 1,074$ ;

після 4-го –  $\varepsilon_{s1} = -16155 \cdot 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_{c2} = 7657 \cdot 10^{-5}$  ( $x_c = 66,56 \text{ мм}$ ),  $N_{cts} = 135,69 \text{ кН}$ ,  $N_{cs} = 135,61 \text{ кН}$  і  $M = 24,7 \text{ кНм}$  при  $\Delta N = 1,001$  та  $\Delta M = 1,00$ .

Базову відстань між суміжними тріщинами обчислюємо за формулою (6.34), знехтувавши зміною зусиль в розтягнутій арматурі на ділянці між зазначеними тріщинами ( $\Delta \sigma_{s1} = 0$ )

$$s_r = s_{ro} = \frac{\emptyset}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \frac{N_{ct,cr}}{A_{s1} \cdot f_{ctk}} = \frac{16}{2 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{27290}{402,12 \cdot 2,4} = 113,1 \text{ мм}.$$

Оскільки середні деформації арматури в осередненому перерізі блоку між тріщинами за діаграмою стану елемента рівні  $\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s1} = 161,55 \cdot 10^{-5}$ , а середні деформації розтягнутого бетону на ділянці між тріщинами за формулою (6.41) складають

$$\varepsilon_{ctm} = 0,5 \cdot \varepsilon_{ctu} \cdot (d - x_c) / (h_n - x_c) = 0,5 \cdot 10,91 \cdot 10^{-5} \cdot (207 - 66,56) / \\ / (235 - 66,56) = 4,55 \cdot 10^{-5} ,$$

то ширина розкриття тріщин залізобетонної балки на рівні центру ваги



розтягнутої арматури за формулою (6.43) сягатиме

$$w_k = s_r \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{ctm}) = 113,1 \cdot (161,55 - 4,55) \cdot 10^{-5} = 0,178 \text{ мм} .$$

Збіжність результатів розрахунків з результатами експериментальних досліджень наведена в табл. Г.1.

Таблиця Г.1 – До оцінки методів розрахунку тріщиностійкості згинальних елементів за результатами експериментальних досліджень балки С1 [430]

Параметри Значення	Несуча здатність $M_u$ , кНм	Момент утворення тріщин $M_{cr}$ , кНм	Параметри утворення тріщин при $M_{Ed}$	
			відстань $s_r$ , мм	ширина розкриття $w_k$ , мм
Експериментальні	41,98	5,46	103	0,211
Теоретичні за автором	41,12	5,32	113	0,178
Збіжність $x_{th} / x_{exp}$	0,98	0,974	1,097	0,844
Теоретичні за [382]	40,8	5,23	125	0,166
Збіжність $x_{th} / x_{exp}$	0,97	0,958	1,214	0,787

**Приклад Г.11.** Визначити прогин залізобетонної балки А211 [482] прямокутного перерізу  $b_n \times h_n = 250 \times 400 \text{ мм}$  (рис. Г.9) від згинаючого моменту  $M_{Ed} = 180 \text{ кНм}$ . Балка, довжиною  $l_o = 3,4 \text{ м}$ , виготовлена з важкого бетону з характеристиками  $f_c' = 42,8 \text{ МПа}$  ( $f_{ck} \approx 35 \text{ МПа}$ ,  $f_{ctk} \approx 2,2 \text{ МПа}$ ,  $E_c \approx 34 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ ), та армована в розтягнутій зоні  $4\text{Ø}25$  ( $A_{s1} = 1963 \text{ мм}^2$ ,  $a_{s1} = 38 \text{ мм}$ ), а в стиснутій зоні –  $2\text{Ø}13$  ( $A_{s2} = 265 \text{ мм}^2$ ,  $a_{s2} = 32 \text{ мм}$ ) з характеристиками  $f_{yk} = 460 \text{ МПа}$ ;  $E_s = 2,0 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  ( $\alpha_s = 2,0 / 2 = 1,0$ ). Результати експериментальних досліджень балки наведені в табл. Г.3.

**Розв'язок.** Початковий модуль пружності бетону (при  $\sigma_c = 0$ ) згідно табл. 3.2 складатиме  $E_{co} = E_c \cdot k_o = 34 \cdot 10^3 \cdot 1,125 = 38,25 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ , а критичні деформації стиснутого бетону за формулою (3.26) становитимуть

$$\varepsilon_{c1} = f_{ck} / E_{co} + (140 - 0,7 f_{ck}) \cdot 10^{-5} = (35 / 3825 + 140 - 0,7 \cdot 35) \cdot 10^{-5} = 207 \cdot 10^{-5} .$$

Основні параметри нормативної діаграми деформування бетону на стиск обчислюємо за виразом (3.9)

$$a = E_{co} = 38,25 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad b = f_{ck} / \varepsilon_{c1}^2 = 35 / (207 \cdot 10^{-5})^2 = 81,68 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$c = E_{co} / f_{ck} - 2 / \varepsilon_{c1} = 38,25 \cdot 10^3 / 35 - 2 / (207 \cdot 10^{-5}) = 126,7.$$

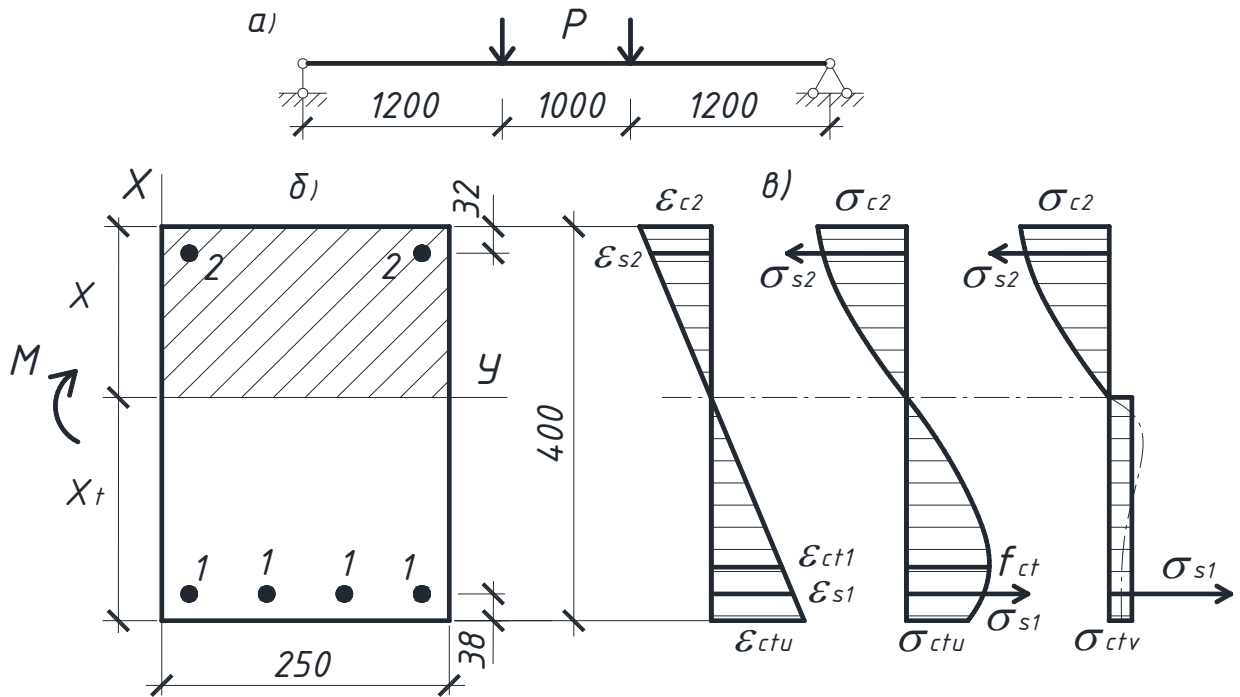


Рисунок Г.9 – До прикладу Г.11: розрахункова схема (а), переріз (б) та напружено-деформований стан (в) балки

1. Граничні деформації бетону на стиск  $\varepsilon_{cu}$  визначаємо за загальною формулою (4.21) або за відповідними формулами дод. Б (табл. Б.1)

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1} \cdot (1 + 0,322 \cdot \sqrt{\ln k} / [1 + ((k - 2) / 6 \cdot \ln(6 / k - 0,2))^2]) = 207 \cdot 10^{-5} \times$$

$$\times (1 + 0,322 \cdot \sqrt{\ln 2,262} / [1 + ((2,262 - 2) / 6 \cdot \ln(6 / 2,262 - 0,2))^2]) = 267,1 \cdot 10^{-5},$$

де параметр  $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{ck} = 38,25 \cdot 207 \cdot 10^{-2} / 35 = 2,262$ .

При раціональному армуванні згинальних елементів напруження в розтягнутій арматурі в граничній стадії зазвичай досягають межі текучості ( $\varepsilon_s > \varepsilon_{s0} = \frac{460}{2,0 \cdot 10^5} = 230 \cdot 10^{-5}$ ), а тому її деформації за виразом (5.26) рівні

$$\varepsilon_{s1} = \frac{\delta_c \cdot \alpha_c}{E_s \cdot \varepsilon_{s0} \cdot \rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i}} - \varepsilon_{cu} = \frac{810,8 \cdot 8,674 \cdot 10^{-5}}{460 \cdot 0,0188} - 267,1 \cdot 10^{-5} = 547,8 \cdot 10^{-5}$$

при  $\rho_{l1} \sum_{i=1}^n k_{\rho i} = \frac{A_{s1}}{b_n \cdot d} (1 - \frac{A_{s2}}{A_{s1}}) = \frac{1963}{250 \cdot 362} (1 - \frac{265}{1963}) = 0,0188$  та параметрах  $\delta_c$  і

$\alpha_c$ , рівних за формулою (5.10) відповідно

$$\delta_c = \frac{a + b/c}{c} = \frac{38,25 \cdot 10^3 + 81,68 \cdot 10^5 / 126,7}{126,7} = 810,8 \text{ МПа};$$

$$\alpha_c = -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^2}{2 \cdot (a + b/c)} + \varepsilon_{cu} - \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c} = -\frac{81,68 \cdot 10^5 \cdot (267,1 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot (38,25 \cdot 10^3 + 81,68 \cdot 10^5 / 126,7)} + 267,1 \cdot 10^{-5} - \ln(1 + 126,7 \cdot 267,1 \cdot 10^{-5}) / 126,7 = 8,674 \cdot 10^{-5}.$$

Тоді кривина даної балки в стадії граничної рівноваги становитиме

$$1/r_u = \frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s1}}{d} = \frac{(267,1 + 547,8) \cdot 10^{-5}}{362} = \frac{814,9 \cdot 10^{-5}}{362} = 2,251 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1},$$

а її несуча здатність за формулою (5.27) остаточно складатиме

$$M_u = \frac{b_n}{(1/r_u)^2} \cdot \delta_c \cdot \beta_c + f_{yk} \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot x_{si} = \frac{250 \cdot 10^{10}}{2,251^2} \cdot 810,8 \cdot 1386 \cdot 10^{-10} + 460 \cdot (1963 \cdot 243,3 + 265 \cdot 86,7) = 285,75 \cdot 10^6 \text{ Нмм}$$

за параметра  $\beta_c$

$$\begin{aligned} \beta_c &= -\frac{b \cdot \varepsilon_{cu}^3}{3 \cdot (a + b/c)} + \frac{\varepsilon_{cu}^2}{2} - \frac{\varepsilon_{cu}}{c} + \frac{\ln(1 + c \cdot \varepsilon_{cu})}{c^2} = \\ &= -\frac{81,68 \cdot 10^5 \cdot (267,1 \cdot 10^{-5})^3}{3 \cdot (38,25 \cdot 10^3 + 81,68 \cdot 10^5 / 126,7)} + \frac{(267,1 \cdot 10^{-5})^2}{2} - \\ &- \frac{267,1 \cdot 10^{-5}}{126,7} + \frac{\ln(1 + 126,7 \cdot 267,1 \cdot 10^{-5})}{126,7^2} = 0,01386 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

при основних геометричних та деформаційних параметрах стиснутого бетону і арматурних стержнів

$$x_{cu} = \varepsilon_{cu} / (1/r_u) = 267,1 \cdot 10^{-5} / (2,251 \cdot 10^{-5}) = 118,7 \text{ мм};$$

$$x_{s1} = h_n - a_{s1} - x_{cu} = 400 - 38 - 118,7 = 243,3 \text{ мм};$$

$$x_{s2} = x_{cu} - a_{s2} = 118,7 - 32 = 86,7 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_{s2} = x_{s2} \cdot 1/r_u = 86,7 \cdot 2,251 \cdot 10^{-5} = 195,2 \cdot 10^{-5}.$$

2. Початкову жорсткість перерізу балки в напрямку осі  $X$  визначаємо за

формулою

$$D_{o,x} = \frac{E_{co} \cdot h_n^3 \cdot b_n}{12} + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \left(\frac{h_n}{2} - a_{sh,i}\right)^2 = 38250 \cdot 400^3 \cdot 250 / 12 + 2,0 \cdot 10^5 \times \\ \times (1963 \cdot (200 - 38)^2 + 265 \cdot (200 - 32)^2) = 62,8 \cdot 10^{12} \text{ Нмм}^2.$$

Розрахункове значення осередненої кривини балки від заданого згинаючий момент в найбільш напруженому перерізі балки буде становити

$$\frac{1}{r^*} = \frac{\psi_\rho}{r} = \frac{\psi_\rho / r_u}{2M_u} \left[ \left(1 - \frac{M_{Ed}}{M_u}\right) \frac{D_{o,\theta}}{r_u} + 2M_{Ed} - \sqrt{\left(\left(1 - \frac{M_{Ed}}{M_u}\right) \frac{D_{o,\theta}}{r_u} + 2M_{Ed}\right)^2 - 4M_{Ed} \cdot M_u} \right] = \\ = 1,506 \cdot \frac{2,251 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 285,75 \cdot 10^6} \left[ \left(1 - \frac{180}{285,75}\right) \cdot 62,8 \cdot 10^{12} \cdot 2,251 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 180 \cdot 10^6 - \right. \\ \left. - \sqrt{\left(\left(1 - \frac{180}{285,75}\right) \cdot 62,8 \cdot 10^{12} \cdot 2,251 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 180 \cdot 10^6\right)^2 - 4 \cdot 180 \cdot 10^6 \cdot 285,75 \cdot 10^6} \right] = \\ = 0,7435 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1},$$

з корегуючим параметром розрахункової кривини

$$\psi_\rho = 1 + \frac{\rho_{lt}}{\alpha_s} \cdot \frac{M_{Ed}}{M_u} \cdot \left(1 - \frac{M_{Ed}}{M_u}\right) = 1 + \frac{2,169}{1,0} \cdot \frac{180}{285,75} \cdot \left(1 - \frac{180}{285,75}\right) = 1,506.$$

Прийнявши в першому наближенні  $x_c \approx x_{cu}$ , величину відносних деформацій крайових фібр стиснутого бетону визначимо за виразом

$$\varepsilon_{c2} = x_{cu} \cdot (1/r^*) = 118,7 \cdot 0,7435 \cdot 10^{-5} = 88,27 \cdot 10^{-5}.$$

Висота розтягнутої зони бетону в найбільш напруженому перерізі балки та видовження її найбільш розтягнутої грані складатимуть відповідно

$$x_{ct} = h_n - x_c = 400 - 118,7 = 281,3 \text{ мм};$$

$$\varepsilon_t = x_{ct} \cdot (1/r^*) = 281,3 \cdot 0,7435 \cdot 10^{-5} = 209,1 \cdot 10^{-5},$$

а деформаційні параметри арматурних стержнів будуть рівні

$$\varepsilon_{s1} = -x_{s1} \cdot (1/r^*) = -243,3 \cdot 0,7435 \cdot 10^{-5} = -180,9 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_{s2} = x_{s2} \cdot (1/r^*) = 86,7 \cdot 0,7435 \cdot 10^{-5} = 64,48 \cdot 10^{-5};$$

Розтягуючі зусилля (-) в найбільш напруженому перерізі балки з урахуванням формули (6.26) складатимуть

$$N_{ct} = N_{ct} + N_{st} = b_n \cdot x_{ct} \cdot f_{ctk} \cdot (\varepsilon_{ct1} / \varepsilon_t)^{1/\rho_{lt}} - E_s \cdot \varepsilon_{s1} \cdot A_{s1} = 250 \cdot 281,3 \times \\ \times 2,2 \cdot (8,018 / 209,1)^{1/2,169} + 2,0 \cdot 180,9 \cdot 1963 = 744476 \text{ Н},$$

за критичних деформацій розтягнутого бетону

$$\varepsilon_{ct1} = f_{ctk} / E_{co} + (3 - f_{ctk} / 3) \cdot 10^{-5} = (2,2 / 0,3825 + 3 - 2,2 / 3) \cdot 10^{-5} = 8,018 \cdot 10^{-5}$$

та відсотка армування розтягнутими стержнями

$$\rho_{lt} = \rho_t = \sum_{i=1}^3 A_{si} / (b_n \cdot d) \cdot 100\% = 1963 / (250 \cdot 362) \cdot 100\% = 2,169\%.$$

Аналогічно стискаючі зусилля (+) в зазначеному перерізі балки при врахуванні відповідних формул з дод. В (табл. В.1) становитимуть

$$\begin{aligned} N_{cs} &= N_c + N_{sc} = b_n \cdot \alpha_\rho \cdot \beta_b \cdot (-\varepsilon_{c2}^2 \frac{b \cdot c^2}{2 \cdot \beta_b} + \varepsilon_{c2} \cdot c - \ln \delta_c) + E_s \cdot \varepsilon_{s2} \cdot A_{s2} = \\ &= 250 \cdot 0,0661 \cdot 130,14 \cdot 10^5 \cdot (-(88,27 \cdot 10^{-5})^2 \frac{81,68 \cdot 10^5 \cdot 126,7^2}{2 \cdot 130,14 \cdot 10^5} + 88,27 \times \\ &\times 10^{-5} \cdot 126,7 - \ln 1,112) + 2,0 \cdot 64,48 \cdot 265 = 442650 \text{ H}, \end{aligned}$$

де параметри  $\alpha_\rho$ ,  $\beta_b$  та  $\delta_c$  рівні відповідно

$$\alpha_\rho = \frac{1}{1/r^* \cdot c^3} = \frac{1}{0,7435 \cdot 10^{-5} \cdot 126,7^3} = 0,0661;$$

$$\beta_b = a \cdot c + b = 38,25 \cdot 10^3 \cdot 126,7 + 81,68 \cdot 10^5 = 130,14 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\delta_c = 1 + c \cdot \varepsilon_{c2} = 1 + 126,7 \cdot 88,27 \cdot 10^{-5} = 1,112.$$

Момент, що виникає від внутрішніх зусиль в балці, складатиме

$$\begin{aligned} M &= \frac{b_n \cdot \alpha_\rho \cdot \beta_b}{(1/r^*) \cdot c} \cdot (-\varepsilon_{c2}^3 \frac{b \cdot c^3}{3 \cdot \beta_b} + \varepsilon_{c2}^2 \frac{c^2}{2} - \varepsilon_{c2} \cdot c + \ln \delta_c) + b_n \cdot \frac{x_{ct}^2}{2} \cdot f_{ctk} \cdot (\varepsilon_{ct1} / \varepsilon_t)^{1/\rho_{lt}} + \\ &+ E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot x_{si} = \frac{250 \cdot 0,0661 \cdot 130,14 \cdot 10^5}{0,7435 \cdot 10^{-5} \cdot 126,7} \cdot (-(88,27 \cdot 10^{-5})^3 \frac{81,68 \cdot 126,7^3}{3 \cdot 130,14} + \\ &+ (88,27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 126,7^2 / 2 - 88,27 \cdot 10^{-5} \cdot 126,7 + \ln 1,112) + 250 \cdot 281,3^2 \cdot 2,2 \times \\ &\times (8,018 / 209,1)^{1/2,169} / 2 + 2,0 \cdot (1963 \cdot (-180,9) \cdot (-243,3) + 265 \cdot 64,48 \cdot 86,7) = \\ &= 212 \cdot 10^6 \text{ Нмм}. \end{aligned}$$

Зважаючи, що розбіжність між розтягуючими та стискаючими зусиллями в балці є доволі суттєвою

$$\Delta N = N_{cts} / N_{cs} = 744476 / 442650 = 1,682 > 0,99,$$

а збіжність між зовнішніми та внутрішніми згинаючими моментами є недостатньою  $\Delta M = M_{Ed} / M = 180 / 212 = 0,849 < 0,99$ , то в наступних

наближеннях попередні значення розрахункової осередненої кривини балки корегуватимемо за виразом  $1/r_i^* = 1/r_{i-1}^* \cdot \Delta M$ , а відносні деформації крайових фібр стиснутого бетону за формулою  $\varepsilon_{c2,i} = \varepsilon_{c2,i-1} \cdot \sqrt{\Delta N}$ .

В процесі наступних наближень отримуємо:

після 3-го –  $1/r^* = 0,6296 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}$ ,  $\varepsilon_{s1} = -139,8 \cdot 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_{c2} = 67,98 \cdot 10^{-5}$ ,  
 $N_{cts} = 584,44 \text{ кН}$ ,  $N_{cs} = 517,02 \text{ кН}$  ( $\Delta N = 1,130$ ) і  $M = 174,05 \text{ кНм}$  ( $\Delta M = 1,034$ );

після 5-го –  $1/r^* = 0,6558 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^{-1}$ ,  $\varepsilon_{s1} = -140,8 \cdot 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_{c2} = 75,6 \cdot 10^{-5}$ ,  
 $N_{cts} = 587,28 \text{ кН}$ ,  $N_{cs} = 583,68 \text{ кН}$  ( $\Delta N = 1,006$ ) і  $M = 179,47 \text{ кНм}$  ( $\Delta M = 1,003$ ).

Тоді максимальний прогин балки за формулою (6.64)

$$f_{\max} = s \cdot l^2 \cdot (1/r^*) = 5/48 \cdot 3400^2 \cdot 0,6558 \cdot 10^{-5} = 7,897 \text{ мм.}$$

3. Для більш точного розрахунку прогинів розділимо балку на 10-ть рівних ділянок (рис. Г.10).

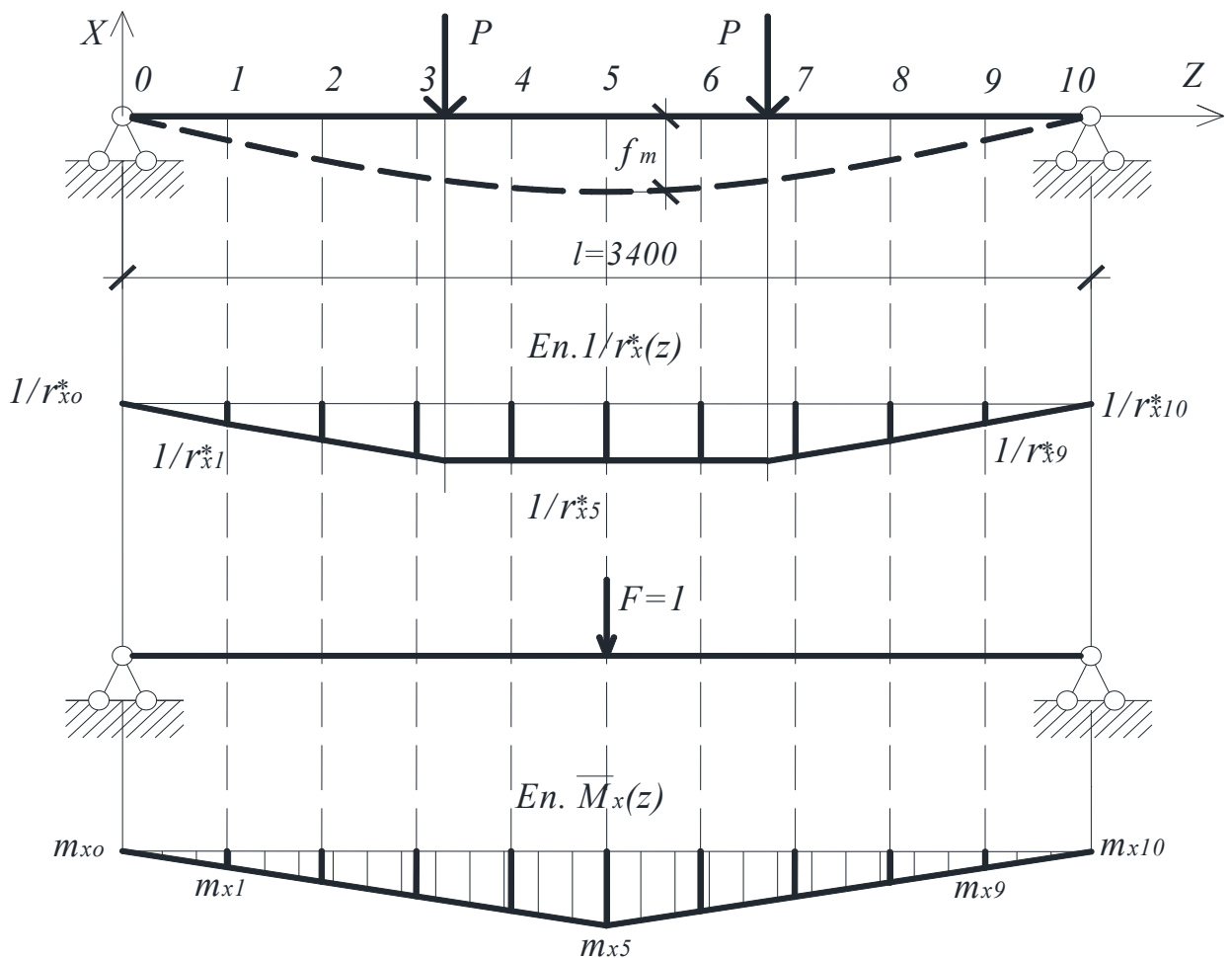


Рисунок Г.10 – До розрахунку прогинів залізобетонної балки

На їх межах послідовно визначимо величину згинаючих моментів від діючих навантажень  $M_i$ , розрахункові значення осередненої кривини  $1/r_i^*$  та величину згинаючих моментів  $m_{x,i}$  від одиничного навантаження. Результати виконаних розрахунків та їх оцінки внесемо до табл. Г.2 і Г.3.

Таблиця Г.2 – До розрахунку прогинів залізобетонної балки

Межі ділянок	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відстань $x_i/l_o$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Момент $M_i, \text{кНм}$	0	51	102	153	180	180	180	153	102	51	0
Кривина $10^6 / r_i^*, \text{мм}^{-1}$	0	1,475	3,468	5,479	6,558	6,558	6,558	5,479	3,468	1,475	0
Момент $m_{x,i}, \text{мм}$	0	170	340	510	680	850	680	510	340	170	0

Прогин балки за формулою Сімпсона остаточно складе

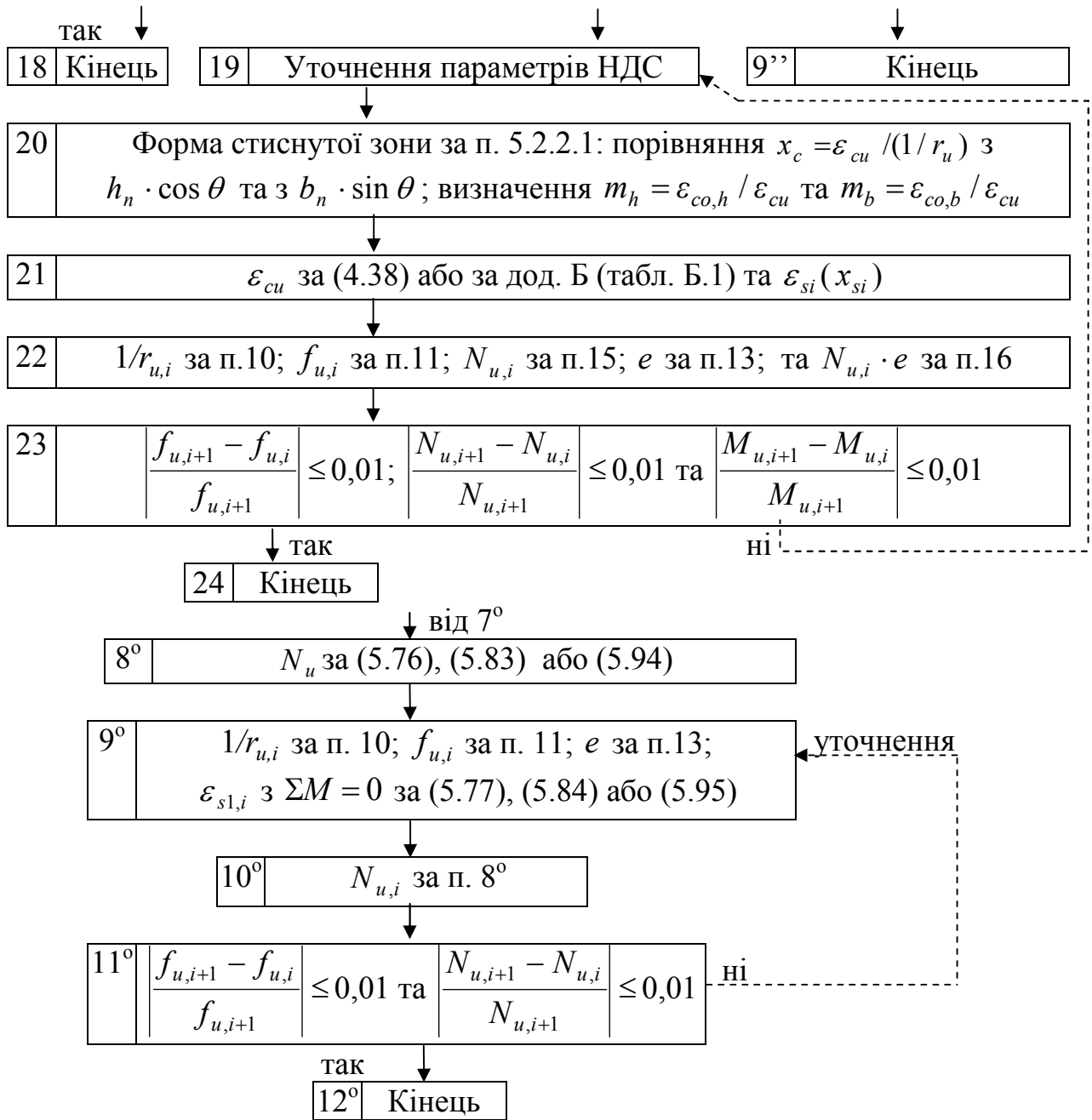
$$f = \frac{l}{3n} \left[ m_{x0} \frac{1}{r_{x0}^*} + m_{xn} \frac{1}{r_{xn}^*} + 4 \cdot \left( m_{x1} \frac{1}{r_{x1}^*} + m_{x3} \frac{1}{r_{x3}^*} + \dots + m_{x,n-1} \frac{1}{r_{x,n-1}^*} \right) + 2 \cdot \left( m_{x2} \frac{1}{r_{x2}^*} + m_{x4} \frac{1}{r_{x4}^*} + \dots + m_{x,n-2} \frac{1}{r_{x,n-2}^*} \right) \right] = \frac{3400}{3 \cdot 10} (0 + 0 + 4 \cdot (1,475 \times 170 + 5,479 \cdot 510 + 6,558 \cdot 850 + 5,479 \cdot 510 + 1,475 \cdot 170) + 2 \cdot (3,468 \cdot 340 + 6,558 \cdot 680 + 6,558 \cdot 680 + 3,468 \cdot 340)) \cdot 10^{-6} = 7,84 \text{ мм.}$$

Таблиця Г.3 – До оцінки методів розрахунку прогинів згинальних елементів за результатами експериментальних досліджень балки А211 [482]

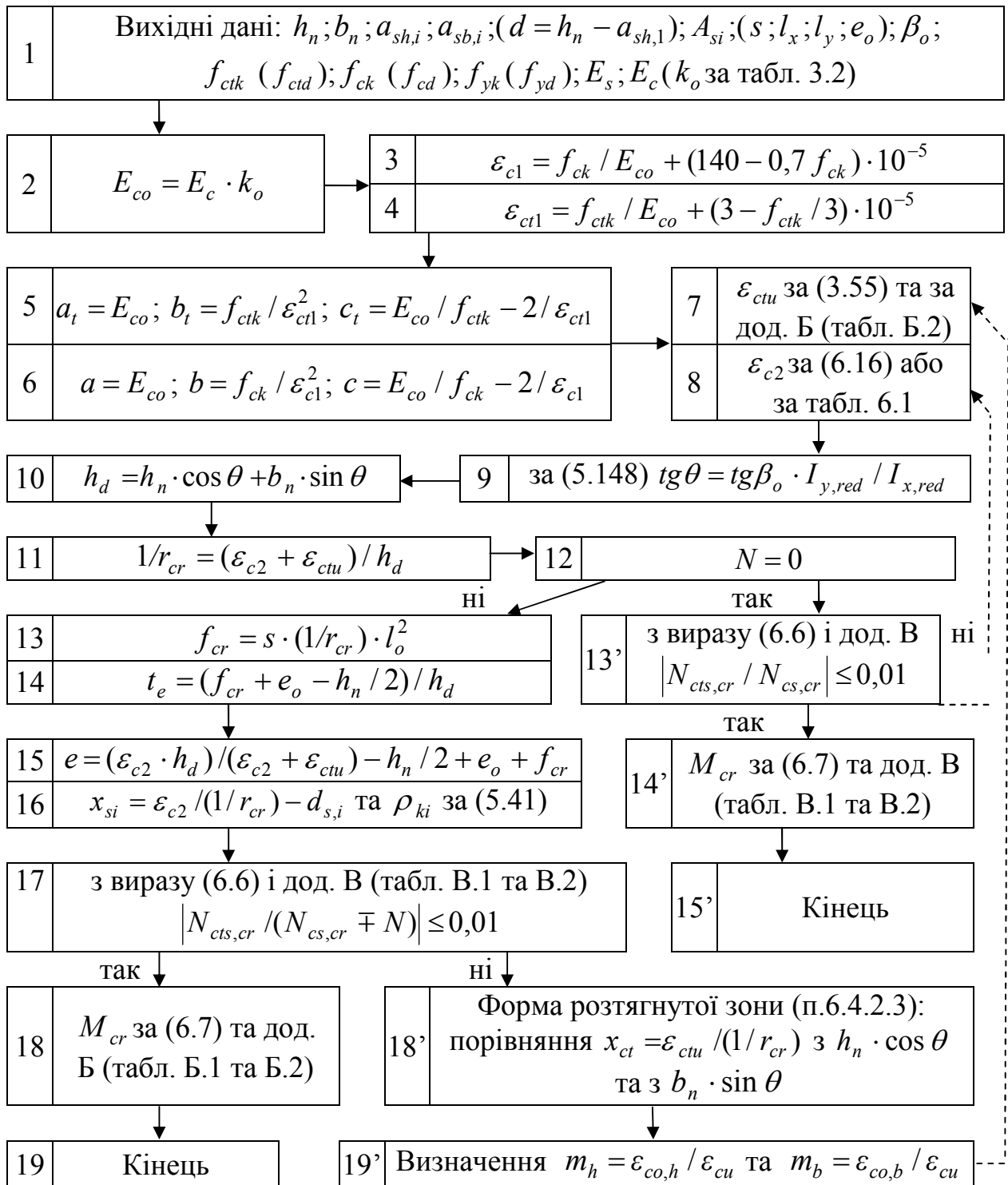
Значення \ Параметри	Несуча здатність $M_u, \text{кНм}$	Момент утворення тріщин $M_{cr}, \text{кНм}$	Прогини $f, \text{мм}$ (при $M_{Ed} = 180 \text{ кНм}$ )
Експериментальні	276,8	28,0	8,3
Теоретичні за автором	285,7	27,65	7,84
Збіжність $x_{th} / x_{exp}$	1,032	0,988	0,945
Теоретичні за [382]	286,42	29,37	7,726
Збіжність $x_{th} / x_{exp}$	1,035	1,049	0,931



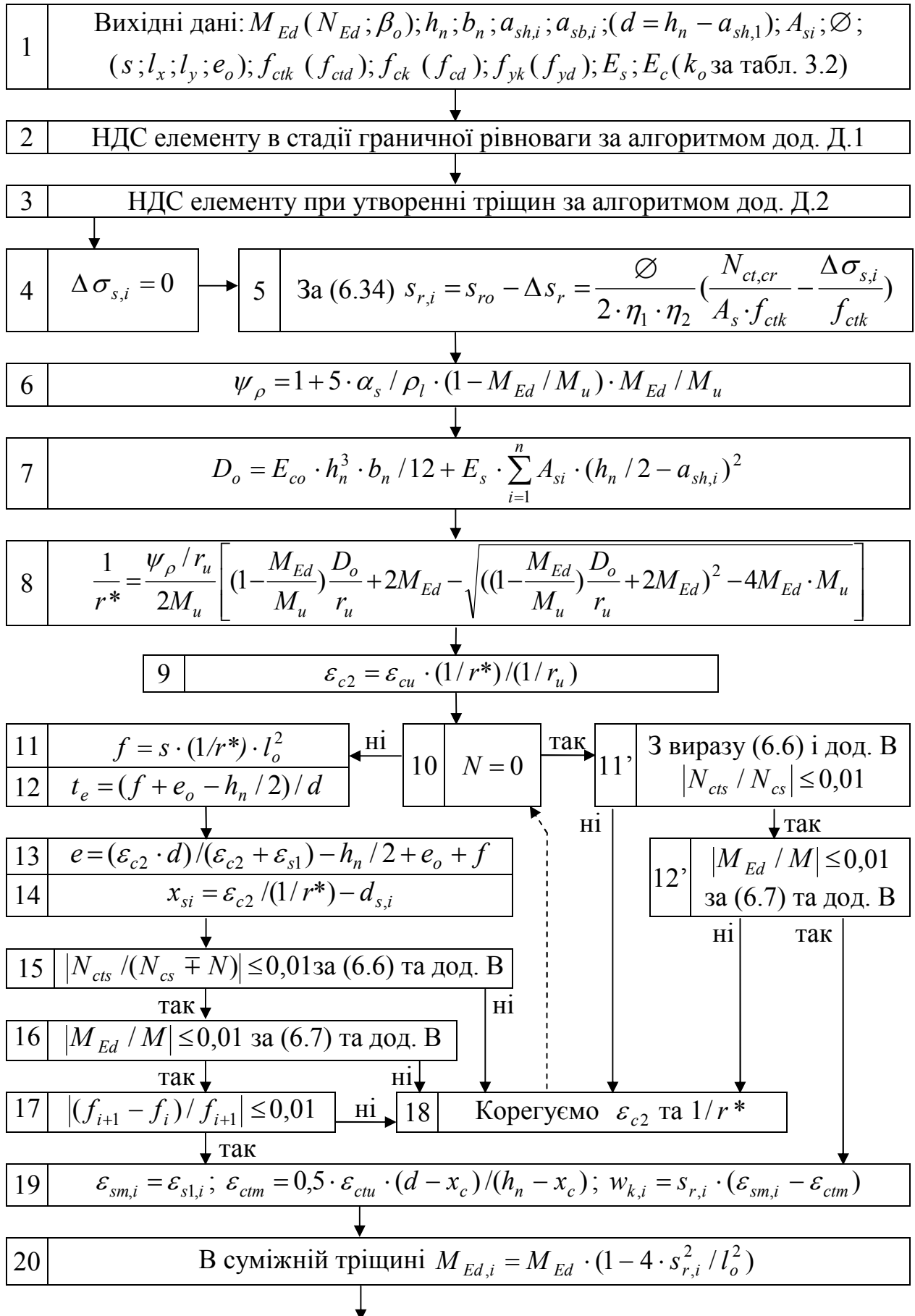


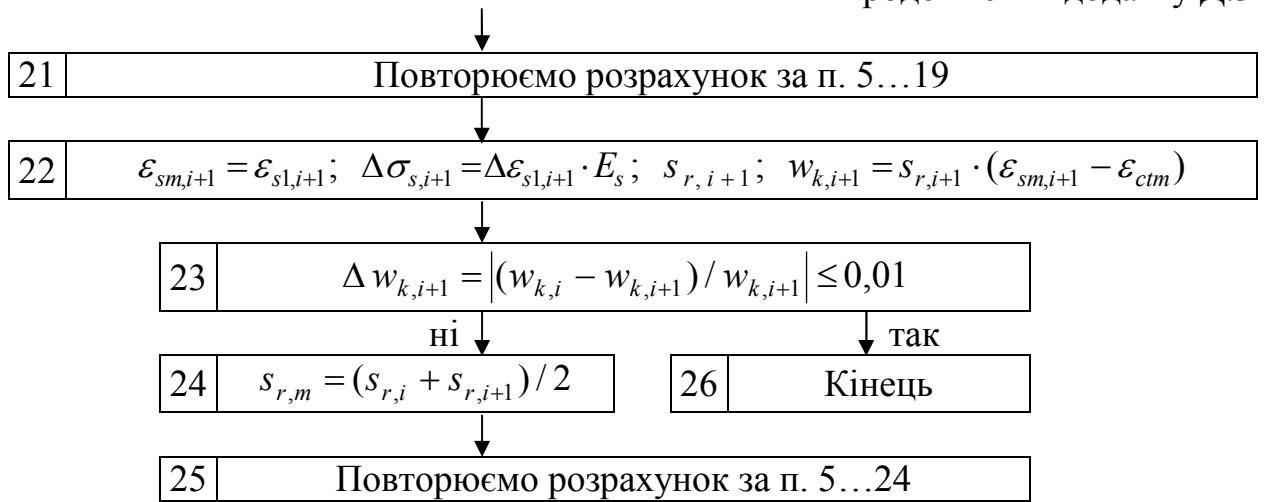


Додаток Д.2 – Алгоритм розрахунку утворення нормальних тріщин в залізобетонних елементах

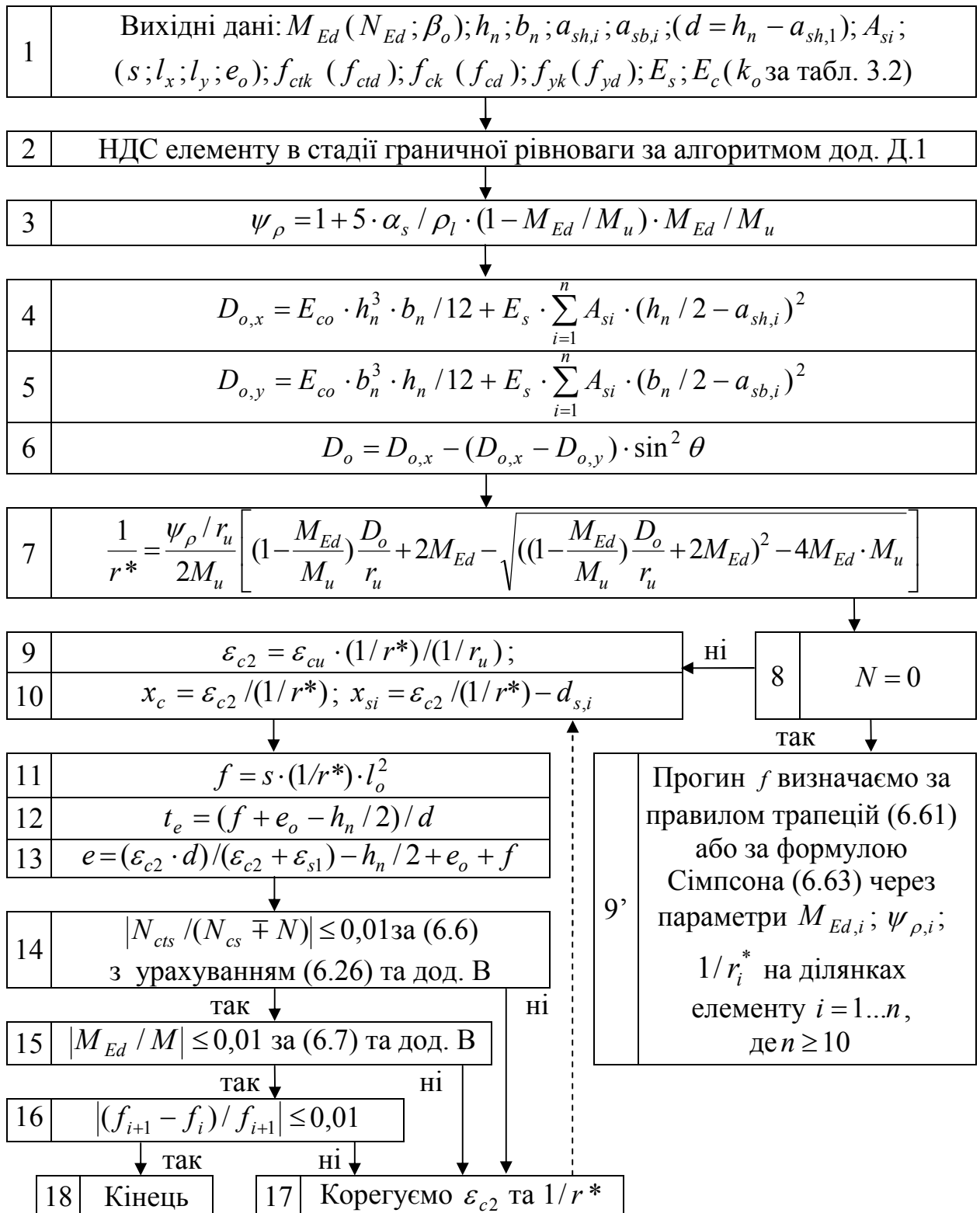


Додаток Д.3 – Алгоритм розрахунку ширини розкриття нормальних тріщин в залізобетонних елементах

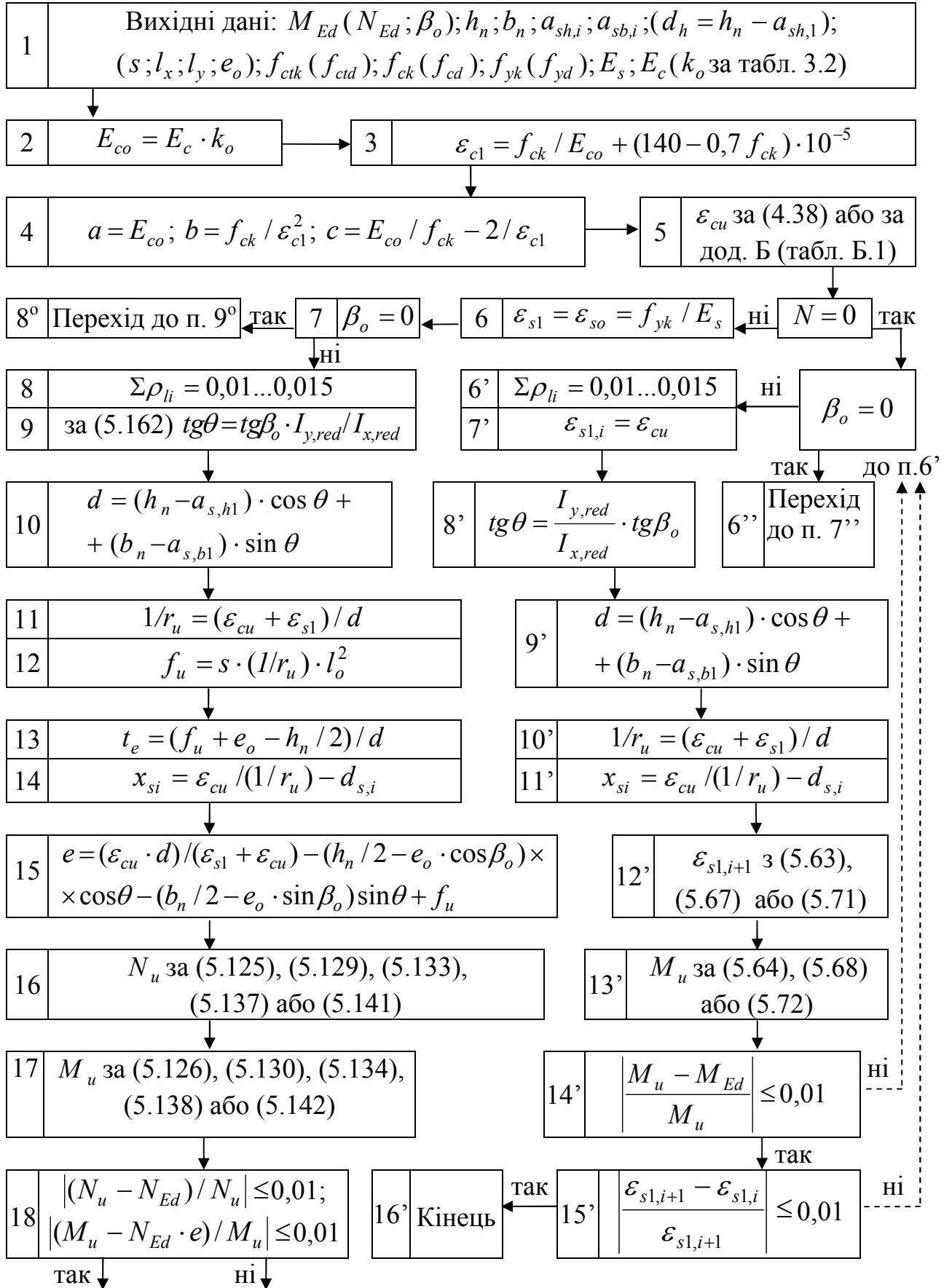


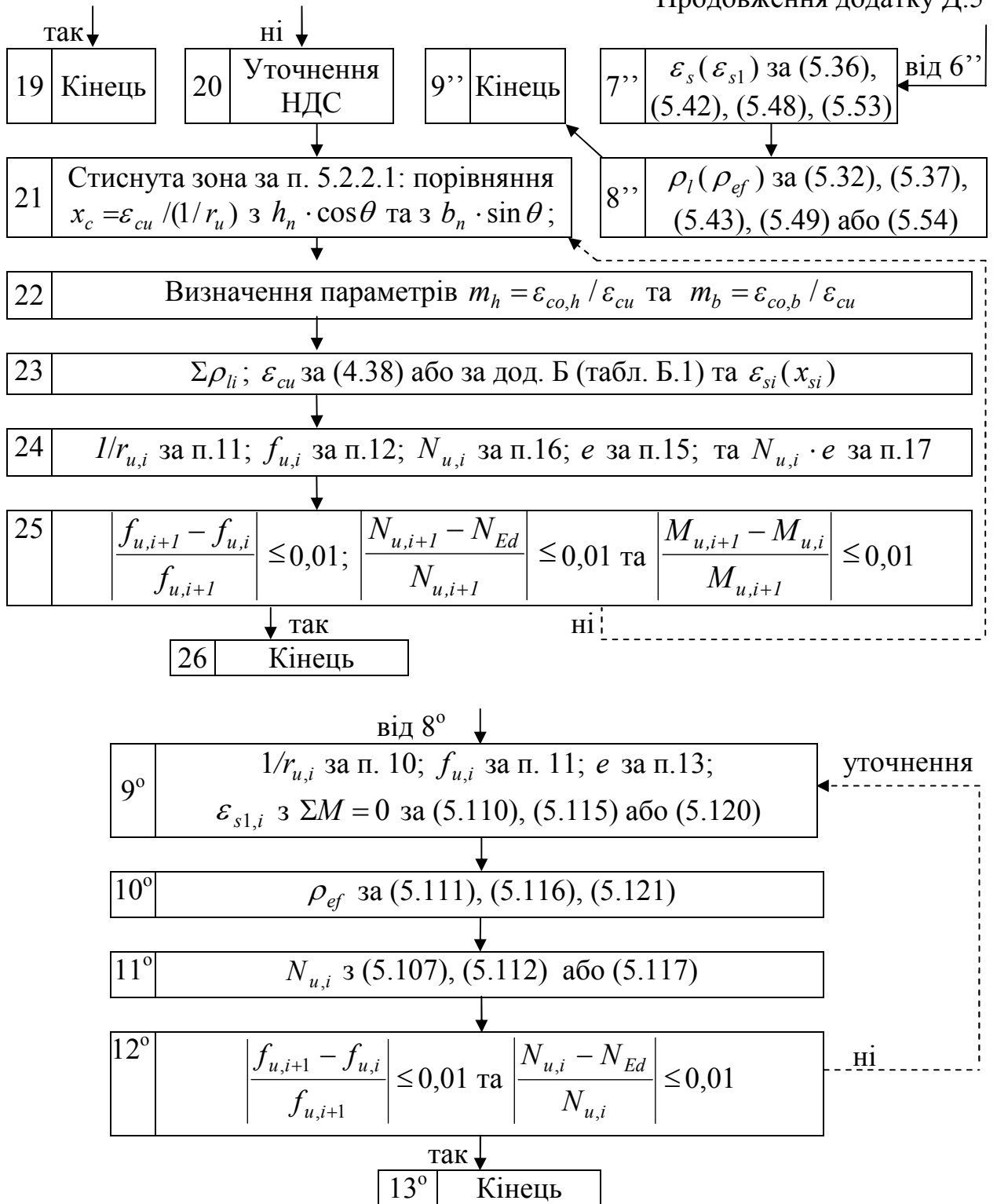


Додаток Д.4 – Алгоритм розрахунку прогинів залізобетонних елементів  
конструкцій



Додаток Д.5 – Алгоритм розрахунку площі поперечного перерізу  
 поздовжньої арматури в залізобетонних елементах





## Додаток Е – Впровадження результатів досліджень



МІНІСТЕРСТВО РЕГІОНАЛЬНОГО РОЗВИТКУ, БУДІВНИЦТВА ТА  
ЖИТЛОВО-КОМУНАЛЬНОГО ГОСПОДАРСТВА УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНЕ ПІДПРИЄМСТВО  
“ДЕРЖАВНИЙ НАУКОВО-ДОСЛІДНИЙ ІНСТИТУТ  
БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ”  
(ДП НДІБК)



Юридична адреса: вул. Івана Клименка, 5/2, м. Київ-37, 03680,  
поштова адреса: вул. Преображенська, 5/2, м. Київ-37, 03037; тел. (044) 249-72-34, факс (044) 248-89-09  
www.niisk.com; e-mail: niisk-office@ndibk.gov.ua; adm-inst@ndibk.kiev.ua Код ЄДРПОУ 02495431

15.02.2017 № 219-271 На №001-10 від 04.01.2017 року



Затверджено  
Першим заступником директора  
Інституту

Ю.І. Немчинов

«10» лютого 2017 р.

### ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ

Результати дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук, здобувача кафедри основ архітектурного проектування, конструювання та графіки Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне) кандидата технічних наук, доцента Ромашка Василя Миколайовича у вигляді рекомендацій «Розрахунок залізобетонних елементів і конструкцій за деформаційно-силовою моделлю», прийняті для використання при розробці національного нормативного документу України ДСТУ Б В.2.6-156: «Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування» в частині вимог до розрахунку косо стиснутих залізобетонних конструкцій будинків і споруд.

Зав. відділом надійності  
будівельних конструкцій ДП «НДІБК»,  
Голова ПК 1, ТК 303  
доктор тех. наук, професор.

А.М. Бамбура



МІНІСТЕРСТВО РЕГІОНАЛЬНОГО РОЗВИТКУ  
БУДІВНИЦТВА ТА «РИНОК» КОМУНАЛЬНОГО ГОСПОДАРСТВА УКРАЇНИ

РІВНЕНСЬКА ФІЛІЯ  
ДЕРЖАВНОГО ПІДПРИЄМСТВА  
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ НАУКОВО-ДОСЛІДНИЙ  
ІНСТИТУТ ПРОЕКТУВАННЯ МІСТ  
**ДІПРОМІСТО**  
ІМЕНІ Ю.М.БІЛОКОНЯ  
dipromisto.gov.ua

вул.16 Липня, 38  
м. Рівне  
33028  
Україна

тел. факс.(0362) 62-08-63  
факс.(0362) 63-30-91  
e-mail: dipromisto-rivne@ukr.net



Код ЄДРПОУ 02498085  
Рахунок 26002301564289 в Філія - Рівненське  
обласне управління АТ «Ощадбанк», МФО 333368

30.06. 2016р № 321  
від \_\_\_\_\_ № \_\_\_\_\_  
на № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

Довідка про впровадження

Результати дисертаційної роботи здобувача завідувача кафедри основ архітектурного проектування, конструювання та графіки (до 2013 р. доцента кафедри міського будівництва та господарства Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне) Ромашка Василя Миколайовича були використані при розрахунку основних несучих конструкцій залізобетонних каркасів житлового кварталу з об'єктами соціального життєвого обслуговування по вулиці Гагаріна в м. Рівному об'єкт 5414-2006.

В.о. директора



Р.І. Семенченко

МІНІСТЕРСТВО РЕГІОНАЛЬНОГО РОЗВИТКУ  
БУДІВНИЦТВА ТА ЖИТЛОВО-КОМУНАЛЬНОГО ГОСПОДАРСТВА УКРАЇНИ

**ВОЛИНСЬКА ФІЛІЯ**  
ДЕРЖАВНОГО ПІДПРИЄМСТВА  
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ НАУКОВО-ДОСЛІДНИЙ  
ІНСТИТУТ ПРОЕКТУВАННЯ МІСТ  
**ДІПРОМІСТО**  
ІМЕНІ Ю.М.БІЛОКОНЯ

dipromisto.gov.ua

вул. Кременецька, 38  
м. Луцьк  
43000  
Україна

тел.: (0332) 24-57-71  
факс: (0332) 24-14-52  
e-mail: dipromistolutsk@gmail.com



Код ЄДРПОУ 02497766  
Рахунок 26009055502882 в Волинське ГРУ  
ПАТ КБ «ПРИВАТБАНК», МФО 303440

від 5.11.2016 № 261/5

**ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ**

Результати дисертаційної роботи здобувача завідувача кафедри основ архітектурного проектування, конструювання та графіки (до 2013 р. доцента кафедри міського будівництва та господарства) Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне) Ромашка Василя Миколайовича були використані при розрахунку основних несучих конструкцій залізобетонних каркасів наступних об'єктів:

№31-11 «Агропромисловий комплекс по зберіганню та переробці сільськогосподарської продукції в смт. Велика Димерка Броварського району Київської області. Овочесховище» (2011 р.);

№99-14 Проект «Супермаркет на вул. Калиновій, 39 в с. Рованці Боратинської сільської ради Луцького району Волинської області» (2014 р.).

Директор



Я.В. Довгополов

**Товариство з обмеженою відповідальністю „Галицька основа”**

---

Україна, 79017, місто Львів, вулиця Водогінна, 2, оф.229 СДРІОУ 33419843,  
р/р 26005708994713 в АТ Райффайзен Банк «Аваль», МФО 380805  
свідоцтво платника ПДВ№18081290, індивідуальний податковий номер - 334198413069  
Телефон (032) 294-92-92; e-mail: [Olga@galosnova.com.ua](mailto:Olga@galosnova.com.ua)

---

вих. № 47/09 від «27» вересня 2016р.

**ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ**

Результати дисертаційної роботи здобувача завідувача кафедри основ архітектурного проектування, конструювання та графіки (до 2013 р. доцента кафедри міського будівництва та господарства) Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне) Романька Василя Миколайовича були використані при розрахунку основних несучих конструкцій залізобетонних каркасів наступних об'єктів:

- Робочий проект “34-квартирний 11-поверховий житловий будинок на Студентська набережна, в. Ужгород”(2010р.).
- Робочий проект “Реконструкція з розширенням існуючих будівель на вул. Промисловій, 52б за рахунок добудови під автосалон та СТО з даховою котельнею та технічними приміщеннями з КТІП” (2012р.).

**Директор  
ТзОВ «Галицька основа»**

 **Грицяк Р.В.**







Приватне акціонерне товариство "Рівнеінвестпроект"  
Україна

м.Рівне . вул. Буковинська , 7; 33027

тел.(0362) 642-542

e-mail : rivneinvestproekt@gmail.com

*« dt » вересня 2016р. №13*



**ЗАТВЕРДЖУЮ:**

**Голова правління**

**ПрАТ «Рівнеінвестпроект»**

**Головний архітектор проектів**

**М.С.Чабак**

### ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ

Результати дисертаційної роботи завідувача кафедри основ архітектурного проектування, конструювання та графіки (до 2013 р. доцента кафедри міського будівництва та господарства) Національного університету водного господарства та природокористування (м.Рівне) Ромашка Василя Миколайовича були використані при розрахунку основних несучих конструкцій залізобетонних каркасів об'єктів:

№06.1553.07 «Робочий проект підземних переходів з торговим центром в місті Рівне площа Театральна» (2009р.);

№42.1776.10 «Робочий проект 2-черги реконструкції готелю «Україна-торгово-офісний комплекс на вулиці Соборній,112В в місті Рівне» (2011р.);

№71.1998. 12 «Робочий проект будівництва багатоквартирного житлового будинку на вулиці Соборній ,5 в місті Рівне» (2015р.);

№15.1562.07 «Реконструкція з перепрофілюванням незавершеного будівництва будинку культури в м.Острогор під навчальний корпус Національного Університету «Острозька Академія» (в стадії будівництва).

Головний інженер



*[Signature]*  
**Б.Ю.Чернецький**



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ  
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, тел./факс: (048)723-69-04, тел.(048)723-43-53,  
E-mail: [list@ogasa.org.ua](mailto:list@ogasa.org.ua), веб-сайт: [www.ogasa.org.ua](http://www.ogasa.org.ua), код ЄДРПОУ 02071033

19.12.2016 № 08-07-1807

Г

Г

На № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

### Довідка

#### про впровадження результатів наукових досліджень

Результати досліджень за дисертаційною роботою здобувача Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне) **Ромашка Василя Миколайовича** у вигляді монографії «Деформаційно-силова модель опору бетону та залізобетону» і рекомендацій «Розрахунок залізобетонних елементів і конструкцій за деформаційно-силовою моделлю» впроваджені у навчальний процес Одеської державної академії будівництва та архітектури при проведенні лекційних та практичних занять для магістрів з дисципліни «Основи деформаційно-силової моделі опору залізобетонних конструкцій», а також для проведення лекційних та практичних занять для аспірантів за спеціальністю 05.23.01 «Будівельні конструкції, будівлі та споруди» з дисципліни «Деформаційна силова модель залізобетону».

Проректор з науково-  
педагогічної роботи



Крутій Ю.С.





**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА**  
**ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ**

вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, тел. (0362)63-30-98, факс (0362) 63-32-09, mail@nuwm.edu.ua

Від 18.01.2014 № 001-65

На № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_

**ДОВІДКА**

про використання в навчальному процесі Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне) результатів досліджень і розробок, одержаних при виконанні дисертаційної роботи Ромашка Василя Миколайовича на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Використані у навчальному процесі науково-методичні розробки та результати наукових досліджень здобувача, завідувача кафедри основ архітектурного проектування, конструювання та графіки Ромашка В. М. у вигляді авторської монографії «Деформаційно-силова модель опору бетону та залізобетону» та рекомендацій «Розрахунок залізобетонних елементів і конструкцій за деформаційно-силовою моделлю» забезпечують набуття студентами теоретичних знань та сприяють отриманню практичних навичок в проектуванні залізобетонних конструкцій і використовувались при викладанні дисципліни «Будівельні конструкції» за напрямом підготовки 060101 «Будівництво»:

Тема 10. Конструювання та розрахунок несучої здатності згинальних залізобетонних елементів.

Тема 11. Конструювання та розрахунок стиснутих і розтягнутих залізобетонних елементів.

Тема 13. Розрахунок залізобетонних елементів за граничними станами другої групи.

Проректор з наукової роботи  
та міжнародних зв'язків НУВГП



Н.Б. Савіна

Борисюк О.П. (0505694170)

## Додаток Ж – Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Ромашко В.М. Деформаційно-силова модель опору бетону і залізобетону: монографія / В.М. Ромашко. – Рівне: О. Зень, 2016. – 424 с.
2. Ромашко В.М. Розрахунок залізобетонних елементів і конструкцій за деформаційно-силовою моделлю: рекомендації / В.М. Ромашко. – Рівне: НУВГП, 2016. – 126 с.  
*у наукових періодичних виданнях іноземних держав та у наукових виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз:*
3. Romashko, V. The construction peculiarities of the deformation and power model of concrete and reinforced concrete resistance / V. Romashko, O. Romashko // MATEC Web of Conf. 116, 02028, 1-8 (2017). *(Автору належить модель опору та методика розрахунку)*. (SCOPUS – <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57195062542>).
4. Ромашко В. Н. Критерии исчерпания несущей способности железобетонных элементов и конструкций / В. Н. Ромашко // Budownictwo o zoptymalizowanym potencjale energetycznym: Construction of Optimized Energy Potential. – Częstochowa: Politechniki Częstochowskiej, 2015. – №2(16). – s. 75-83. (Index Copernicus – <https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=29000>).
5. Бабич Є. М. Особливості розрахунку косозавантажених елементів з використанням діаграм їх стану «момент-кривина» / Є. М. Бабич, В. М. Ромашко // Зб. наук. праць УкрДУЗТ. – Харків: УкрДУЗТ, 2017. – Вип. 171. – С. 62-69. *(Автору належить методика розрахунку)*. (Index Copernicus – <https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=16665>).
6. Ромашко В. М. Деформування бетону та критерії вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПНТУ, 2014. – Вип. 3 (42), т. 2. – С. 108-114. (Index Copernicus – <https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=32345>);

ResearchBib – <http://journalseeker.researchbib.com/view/issn/2409-9074>).

7. Ромашко В. М. Основи розрахунку залізобетонних елементів та конструкцій за деформаційно-силовою моделлю їх опору / В. М. Ромашко // Зб. наук. праць УкрДУЗТ. – Харків: УкрДУЗТ, 2017. – Вип. 168. – С. 103-110. (Index Copernicus – <https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=16665>).
8. Ромашко В. Н. Обобщенная модель деформирования железобетонных элементов и конструкций / В. Н. Ромашко // International Scientific Journal (Міжнародний науковий журнал), 2016. – № 3. – С. 84-86. (ResearchBib – <http://paper.researchbib.com/view/paper/72203>).
9. Ромашко В. Н. Расчет прогибов сложнодеформирующихся железобетонных элементов и конструкций / В. Н. Ромашко // Міжнародний науковий журнал (International Scientific Journal), 2016. – №10(20), 1 т. – С. 126-129. (ResearchBib – <http://paper.researchbib.com/view/paper/99083>).

*у наукових фахових виданнях України:*

10. Бабич Є. М. Методологія розрахунку залізобетонних елементів за деформаційно-силовою моделлю / Є. М. Бабич, В. М. Ромашко // Наука та будівництво. – 2017. – № 3(13). – С. 16-21. *(Автору належить загальна методологія та методика розрахунку).*
11. Ромашко В. М. Визначальні особливості деформування бетону в залізобетонних елементах та конструкціях / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП. – 2014. – Вип. 29. – С. 334-340.
12. Ромашко В. М. Гранична деформативність бетону в залізобетонних елементах за осьового стиску / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП. – 2008. – Вип. 16 (2). – С. 325-331.
13. Ромашко В. М. Гранична деформативність бетону в позацентрово



- розтягнутих бетонних елементах / В. М. Ромашко, О. В. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип. 2(46), ч.1. – С. 200-205. *(Автору належить модель деформування)*.
14. Ромашко В. М. Гранична рівновага та граничні стани в деформуванні бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2014. – Вип. 28. – С. 284-289.
15. Ромашко В. М. Деякі особливості визначення моменту утворення нормальних тріщин в бетонних елементах / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2011. – Вип. 21. – С. 317-322.
16. Ромашко В. М. Деякі особливості діаграми деформування бетону / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2006. – Вип. 14. – С. 294-301.
17. Ромашко В. М. До визначення граничних деформацій бетону / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2006. – Вип. 65. – С. 193-198.
18. Ромашко В. М. Жорсткість залізобетонних елементів і конструкцій за умов неоднорідного деформування / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2010. – Вип. 20. – С. 286-291.
19. Ромашко В. М. Жорсткість та гранична деформативність бетону в позацентрово стиснутих бетонних елементах / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2008. – Вип. 70. – С. 229-236.
20. Ромашко В. М. Методика експериментальних досліджень роботи косостиснутих залізобетонних елементів за змінних рівнів навантажень / В. М. Ромашко, С. С. Гомон // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне, 2005. – Вип. 12. – С. 280-288.

*(Автору належить методика випробувань).*

21. Ромашко В. М. Напружено-деформований стан косостиснутих залізобетонних елементів за змінних рівнів тривалого навантаження / В.М. Ромашко, С. С. Гомон // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне, 2000. – Вип. 5. – С. 258-262.  
*(Автору належить методика досліджень).*
22. Ромашко В. М. Основи деформаційно-силової моделі залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2015. – Вип. 30. – С. 247-254.
23. Ромашко В. М. Основи загальної моделі деформування бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В.М. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип. 3(47), ч.2. – С. 118-123.
24. Ромашко В. М. Основи загальної теорії деформування бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2012. – Вип. 24. – С. 229-234.
25. Ромашко В. М. Основи та особливості деформування залізобетонних елементів за відцентрового стиску / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2012.– Вип. 23. – С. 403-409.
26. Ромашко В. М. Основи теорії тріщиностійкості залізобетонних елементів та конструкцій / В. М. Ромашко // Теорія і практика будівництва: Вісник НУ «Львівська політехніка». – Львів, 2013. – № 755. – С. 357-363.
27. Ромашко В. М. Особливості деформування відцентрово стиснутих бетонних елементів / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2011.– Вип. 22. – С. 473-478.
28. Ромашко В. М. Особливості деформування залізобетонних елементів з

- тріщинами / В. М. Ромашко // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПНТУ, 2009. – Вип. 3(25), т. 3. – С. 153-156.
29. Ромашко В. М. Оцінка роботи розтягнутого бетону в блоці між тріщинами / В. М. Ромашко // Вісник ОДАБА: зб. наук. праць. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. – Вип. №33. – С. 135-139.
30. Ромашко В. М. Повна діаграма деформування бетону в бетонних та залізобетонних елементах / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2007. – Вип. 67. – С. 299-309.
31. Ромашко В. М. Повна діаграма деформування розтягнутого бетону в бетонних та залізобетонних елементах / В.М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип. 18. – С. 296-303.
32. Ромашко В. М. Режими роботи та завантаження стиснутих залізобетонних елементів в реальних умовах / В. М. Ромашко, С. С. Гомон // Вісник УДУВГП: зб. наук. праць. Ч. 3. – Рівне: УДУВГП, 2002. – Вип. 5(18). – С. 47-53. *(Автору належить постановка задач та наукове обґрунтування).*
33. Ромашко В. М. Розрахункова модель утворення тріщин в залізобетонних елементах та конструкціях / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: ДП НДІБК, 2013. – Вип. 78 (ч. 2). – С. 161-168.
34. Ромашко В. М. Тріщиноутворення в залізобетонних елементах та конструкціях за загальною моделлю їх деформування / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2013. – Вип. 25. – С. 418-424.
35. Ромашко В. М. Узагальнена діаграма стану бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Вісник ОДАБА: зб. наук. праць. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2015. – Вип. №57. – С. 387-393.
36. Ромашко В. М. Узагальнений критерій вичерпання несучої здатності залізобетонних та сталезалізобетонних елементів і конструкцій / В. М.

- Ромашко // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПНТУ, 2012. – Вип. 3(33). – С. 202-206.
37. Ромашко В. М. Щодо визначення модуля деформацій бетону / В. М. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2007. – Вип. 4(40), ч. 2. – С. 292-297.
38. Ромашко В. М. Щодо визначення моменту утворення нормальних тріщин в згинальних залізобетонних елементах / В. М. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: ДП НДІБК, 2011. – Вип. 74 (ч. 1). – С. 365-372.
39. Ромашко В. М. Щодо екстремального критерію міцності бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Вісник ОДАБА: зб. наук. праць. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2012. – Вип. 46. – С. 305-310.
40. Ромашко В. М. Щодо параметричних точок діаграми деформування бетону / В. М. Ромашко // Вісник НУВГП: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2006. – Вип. 4(36), ч. 1. – С. 207-212.
- у виданнях, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:*
41. Ромашко В. М. До розрахунку поздовжньозігнутих залізобетонних елементів / В. М. Ромашко, А. В. Подворний // Вісник УДАВГ: зб. наук. праць. – Рівне: УДАВГ, 1998. – Вип. 1, ч. 2. – С. 171-174. *(Автору належить методика розрахунку).*
42. Ромашко В. Н. Жесткость и кривизна железобетонных элементов и конструкций в обобщенной модели их деформирования / В. Н. Ромашко // *Methods of effective science-based satisfaction of the increasing social needs in the field of engineering, construction and architecture: Peer-reviewed materials digest (collective monograph) published following the results of the CXXIII International Research and Practice Conference and I stage of the Championship in Technical sciences, Architecture and Construction (London, May 12 – May 17, 2016).* – London: IASHE, 2016. – P. 57-59.

43. Ромашко В. Н. Прогибы железобетонных элементов и конструкций по обобщенной модели их деформирования / В. Н. Ромашко // Solving problems of optimal combination of standards of quality, innovative technical solutions and comfort of operation when developing and producing devices and construction objects: Peer-reviewed materials digest (collective monograph) published following the results of the CXXX International Research and Practice Conference and II stage of the Championship in Technical sciences, Architecture and Construction (London, September 13 – September 19, 2016). – London: IASHE, 2016. – P. 41-45.
44. Romashko V. N. The reinforced concrete elements and structures stiffness during their deformation / V. N. Romashko // European Conference on Innovations in Technical and Natural Sciences. Proceedings of the 11th International scientific conference (June 02, 2016). – Vienna: East West, 2016. – P. 64-69.

*у інших виданнях:*

45. Гомон С. С. Розрахунок стиснутих залізобетонних елементів за малоциклових навантажень з використанням деформаційної моделі / С. С. Гомон, В. М. Ромашко, Д. В. Кочкар'юв, С. С. Гомон // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне, 2006. – Вип. 14. – С. 151-158. *(Автору належить постановка задач та методика розрахунку).*
46. Ромашко В. М. Величина критичних деформацій розтягнутого бетону / В. М. Ромашко, О. В. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2009. – Вип. 18. – С. 304-309. *(Автору належить наукове обґрунтування).*
47. Ромашко В. М. Деформування бетону та арматури косостиснутих елементів при дії малоциклових навантажень / В. М. Ромашко, С. С. Гомон // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.:НДІБК, 2006. – Вип. 65. – С. 187-192. *(Автору належить постановка задач та методика*

*досліджень).*

48. Ромашко В. М. До моделей нелінійного деформування бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій / В. М. Ромашко // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: зб. наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2016. – Вип. 33. – С. 200-205.
49. Ромашко В. М. Жорсткість та модуль деформацій бетону в деформаційній моделі / В. М. Ромашко // Бетон и железобетон в Украине. – 2007. – № 6. – С. 2-6.
50. Ромашко В. М. Модуль деформацій бетону за дії тривалих та малоциклових навантажень / В. М. Ромашко, О. В. Ромашко // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2008. – Вип. 70. – С. 143-150. *(Автору належить наукове обґрунтування та модель деформування).*

## **Додаток II – Відомості про апробацію результатів дисертації**

1. П'ята науково-технічна конференція «Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди» (5 – 8 вересня 2006 р., м. Рівне), очна доповідь «Деякі особливості діаграми деформування бетону».
2. Сьома міжнародна науково-технічна конференція «Сталезалізобетонні конструкції: дослідження, проектування, будівництво, експлуатація» (9 – 11 жовтня 2006 р., м. Кривий Ріг), очна доповідь «До визначення граничних деформацій бетону».
3. П'ята Всеукраїнська науково-технічна конференція «Науково-технічні проблеми сучасного залізобетону» (2 – 5 жовтня 2007 р., м. Полтава), очна доповідь «Повна діаграма деформування бетону в бетонних та залізобетонних елементах».
4. Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми водного господарства і природокористування» (21 – 22 листопада 2007 р., м. Рівне), очна доповідь «Щодо визначення модуля деформацій бетону».
5. Шоста науково-технічна конференція «Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди» (8 – 11 січня 2008 р., м. Рівне), очна доповідь «Гранична деформативність бетону в залізобетонних елементах за осьового стиску».
6. Міжнародний багатогалузевий науково-технічний форум «Инженерная стратегия-инновация»: конференція «Инженерные решения и инновации в строительстве и архитектуре» (22 травня 2009 р., м. Одеса), очна доповідь «Оцінка роботи розтягнутого бетону в блоці між тріщинами».
7. Міжнародна науково-технічна конференція «Динаміка та міцність машин, будівель і споруд» (16 – 19 червня 2009 р., м. Полтава), очна доповідь «Особливості деформування залізобетонних елементів з тріщинами».
8. Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми водного господарства і природокористування» 21 – 23 жовтня 2009 р., м. Рівне), очна доповідь «Основи загальної моделі деформування бетонних та

- залізобетонних елементів і конструкцій».
9. Шоста Всеукраїнська науково-технічна конференція «Науково-технічні проблеми сучасного залізобетону» (24 – 27 травня 2011 р., м. Одеса), очна доповідь «Щодо визначення моменту утворення нормальних тріщин в згинальних залізобетонних елементах».
  10. Міжнародна конференція «Структурообразование, прочность и механика разрушения композитных строительных материалов и конструкций» (20 – 21 вересня 2012 р., м. Одеса), очна доповідь «Щодо екстремального критерію міцності бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій».
  11. Десята ювілейна міжнародна науково-технічна конференція «Стале-залізобетонні конструкції: дослідження, проектування, будівництво, експлуатація» (8 – 12 жовтня 2012 р., м. Полтава), очна доповідь «Узагальнений критерій вичерпання несучої здатності залізобетонних та сталезалізобетонних елементів і конструкцій».
  12. XIV міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми будівництва та інженерії докiлля «Львiв – Кошице – Жешув (3 – 5 вересня 2013 р., м. Львiв), очна доповідь «Основи теорії тріщиностійкості залізобетонних елементів та конструкцій».
  13. Восьма науково-технічних конференціях «Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди» (13 – 16 жовтня 2014 р., м. Рівне), очна доповідь «Визначальні особливості деформування бетону в залізобетонних елементах та конструкціях».
  14. Одинадцята міжнародна науково-технічна конференція «Стале-залізобетонні конструкції: дослідження, проектування, будівництво, експлуатація» (27 – 31 жовтня 2014 р., м. Полтава), очна доповідь «Деформування бетону та критерії вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів і конструкцій».
  15. Міжнародна конференція «Структурообразование, прочность и механика разрушения композитных строительных материалов и конструкций» (16 –



- 17 квітня 2015 р., м. Одеса), очна доповідь «Узагальнена діаграма стану бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій».
16. CXXIII International Research and Practice Conference and I stage of the Championship in Technical sciences, Architecture and Construction (12 – 17 May 2016, London, UK), доповідь «Жесткость и кривизна железобетонных элементов и конструкций в обобщенной модели их деформирования» в заочно–інтерактивній формі (<http://gisap.eu/ru/node/104991>).
17. European Conference on Innovations in Technical and Natural Sciences. The 11<sup>th</sup> International Scientific Conference (02 June 2016, Vienna, Austria), доповідь «The reinforced concrete elements and structures stiffness during their deformation» в заочно–інтерактивній формі (<http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/157878/1/%D0%9A%D0%BE%D0%B7%D0%BB%D0%BE%D0%B2-%D0%92%D0%B5%D0%BD%D0%B0-2016-%D0%98%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%B8-11.pdf>).
18. CXXX International Research and Practice Conference and II stage of the Championship in Technical sciences, Architecture and Construction (13 – 19 September 2016, London, UK), доповідь «Прогибы железобетонных элементов и конструкций по обобщенной модели их деформирования» в заочно–інтерактивній формі (<http://gisap.eu/ru/node/116484>).
19. 6-а міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми надійності та довговічності інженерних споруд та будівель на залізничному транспорті» (19 – 21 квітня 2017, м. Харків), очна доповідь «Основи розрахунку залізобетонних елементів та конструкцій за деформаційно-силовою моделлю їх опору».
20. Міжнародна науково-технічна конференція «Науково-технічні проблеми сучасного залізобетону» (18 – 20 жовтня 2017 р., м. Полтава), очна доповідь «Методологія розрахунку залізобетонних елементів за деформаційно-силовою моделлю».