УДК 534.111

Б.І. Сокіл, Х.І. Ліщинська*
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра теоретичної механіки,
* кафедра опору матеріалів

ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНОГО МЕТОДУ ТА Ateb-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕОДНОРІДНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМ, ЩО ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ ПОЗДОВЖНІМ РУХОМ

Розв'язується задача про аналітичне дослідження коливних процесів рухомих нелінійно пружних одновимірних систем для випадку неоднорідних крайових умов автономного та неавтономного типів. В основу досліджень покладено: а) ідею використання Ateb-функцій для описання коливних процесів; б) узагальнення асимптотичного методу Крилова–Боголюбова–Митропольського на один клас диференціальних рівнянь з частинними похідними. Це дає змогу визначити вплив кінематичних і фізико-механічних характеристик систем на їх амплітудно-частотну характеристику.

The problem about analytical research of oscillatory processes of mobile nonlinearly elastic one-dimensional systems is solved in case of inhomogeneous boundary conditions of autonomous and non-autonomous types. In a basis of researches it is necessary: a) idea of use of Ateb-functions for exposition of oscillatory processes; б) generalization of an asymptotic method of Krylov–Bogolyubov–Mitropolsky on one class of the differential equations with partial derivatives. It has enabled to define agency of the kinematic and physicomechanical characteristics of systems on their amplitude-frequency characteristic.

Постановка проблеми. Прикладні задачі коливань одно- чи багатовимірних середовищ, які характеризуються поздовжньою швидкістю руху, займають важливе місце у дослідженні динаміки систем із гнучким приводом (пасові чи ремінні передачі, лентопротяжні механізми і т. д.). Надмірне коливання останніх приводить, в багатьох випадках, до порушення нормального функціонування системи загалом. Разом з тим, відсутність загальних підходів до розв'язання таких задач викликана труднощами побудови і дослідження розв'язків диференціальних рівнянь, які є математичними моделями процесу.

Аналіз відомих досліджень і публікацій. Динамічні процеси вказаного типу середовищ за однорідних крайових умов розглядались в [1], де отримано вплив нелінійних сил і швидкості руху середовища на АЧХ процесу. Проте, таке важливе питання як вплив крайових умов на динаміку процесу у вказаній роботі не розглядалось. Тому предметом розгляду цієї статті є вплив як фізико-механічних і кінематичних параметрів, так і крайових умов на динаміку процесу.

Постановка задачі. У роботі для сильно нелінійної моделі середовища, використовуючи спеціальні Ateb-функції [2, 3], асимптотичний метод Крилова–Боголюбова–Митропольського (КБМ) та принцип одночастотності коливань [4], для деяких класів таких систем за умов: а) малих швидкостей руху середовища; б) незначного відхилення пружних характеристик матеріалу тіла від степеневого закону пружності; в) малих порівняно із пружною відновлювальною силою сил тертя, дисипативних сил, зовнішніх періодичних збурень будуть отримані співвідношення, які визначають вплив різного роду збурень на закони зміни амплітуди і частоти процесу.

Зважаючи на прийняті припущення, математичною моделлю динамічних процесів у наведених вище одновимірних рухомих середовищах є диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2V\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varepsilon f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\theta\right), \tag{1}$$

в якому $\alpha^2=\frac{(\nu+1)k}{b}$, k – сталий коефіцієнт (для поздовжніх коливань стрічки, ленти $b=\rho F_0$, ρ – густина, F_0 – площа поперечного перерізу); V – швидкість руху середовища; ε – малий параметр, який вказує на малу величину сили тертя, дисипативних, в'язко-пружних сил, аналітичною апроксимацією яких є функція $f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\theta\right)$; $\theta=\mu t$, μ – частота зовнішнього збурення; ν – стала, причому $\nu+1=\frac{2n+1}{2m+1}$, ($n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots$).

Отже, для диференціального рівняння (1) розглядатимемо неоднорідні крайові умови, а саме

$$u(x,t)\big|_{x=0}=\varepsilon g_0(u,u_x,u_t,\theta)\big|_{x=0},\quad u(x,t)\big|_{x=l}=\varepsilon g_l(u,u_x,u_t,\theta)\big|_{x=l}; \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=\varepsilon g_0(u,u_x,u_t,\theta)\big|_{x=0},\quad u_x(x,t)\big|_{x=l}=\varepsilon g_l(u,u_x,u_t,\theta)\big|_{x=l}, \tag{3}$$

де $g_0(u,u_x,u_t,\theta)$, $g_l(u,u_x,u_t,\theta)$ – відомі аналітичні 2π-періодичні за θ функцією.

Примітка. Крайова задача (1)–(2) або (1)–(3) описує не тільки поздовжні коливання одновимірних середовищ, але і поперечні та крутильні.

Основний матеріал. Одночастотні розв'язки незбуреного рівняння, яке відповідає (1), тобто рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\alpha^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{4}$$

за однорідних крайових умов виражаються через періодичні Ateb-функції у вигляді [5, 6]

$$u_k(x,t)=a\,sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\Pi_x\frac{k}{l}x\right)ca\left(\nu+1,1,\omega_k(a)t\right), \tag{5}$$

$$u_k(x,t)=a\,sa\left(1,\frac{1}{\nu+1},\Pi_x\frac{2k+1}{2l}x\right)ca\left(\nu+1,1,\omega_k(a)t\right), \tag{6}$$

де a – стала, $\Pi_x=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}$ – півперіод Ateb-функцій, які описують форму коливань тіла, $\omega_k(a)=\alpha a^{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{s\Pi_x}{l}\right)^{\frac{\nu+2}{2}}$ – власна частота коливань незбуреного аналогу середовища (s для розглядуваних крайових умов набуває відповідно значення k, $\frac{2k+1}{2}$).

Щоб визначити вплив крайових умов і малого збурення перейдемо до побудови розв'язку рівняння (1) за крайових умов (2) чи (3). У випадку малої швидкості руху V для вказаного рівняння використовуємо узагальнення асимптотичного методу КБМ на розглядуваний клас крайових задач. Відповідно до нього розв'язок рівняння (1) за крайових умов (2) чи (3) шукатимемо у вигляді модифікованого [6] асимптотичного ряду

$$u(x,t)=aX_k(x)T_k(\psi_k)+\varepsilon U_1(a,x,T_k,\theta)+\varepsilon^2 U_1(a,x,T_k,\theta)+\ldots;\quad \psi=\omega(a)t. \tag{7}$$

Представлення розв’язку збурених крайових задач для розглядуваного диференціального рівняння у традиційному (для квазілінійних систем) вигляді [4] приводить до значних математичних труднощів знаходжень “поправок” до розв’язків незбурених задач. На відміну від незбуреного випадку, параметри a, ψ_k, для розглядуваного випадку будуть вже функціями часу і визначаються диференціальними рівняннями

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots,$$
$$\dot{\psi}_k = \omega_k(a) + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots, \tag{8}$$

для нерезонансного випадку ($n\omega(a) \neq m\frac{\Pi_T}{\pi}\mu,\ n,\ m = 0, 1, 2, \dots,\ \Pi_T = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)}$),

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a,\gamma) + \varepsilon^2 A_2(a,\gamma) + \dots,\ \gamma = \psi - \theta,$$
$$\dot{\gamma}_k = \omega_k(a) - \frac{\Pi_T}{\pi}\mu + \varepsilon B_1(a,\gamma) + \varepsilon^2 B_2(a,\gamma) + \dots, \tag{9}$$

для випадку головного резонансу ($\omega(a) \approx \frac{\Pi_T}{\pi}\mu$).

Праві частини рівнянь визначаються так, щоб співвідношення (7) задовольняло вихідне рівняння (1) з відповідним степенем точності, якщо в нього на місце a, ψ_k підставити функції часу, визначені (8) чи (9).

Із крайових умов (2) чи (3) випливає, що для першого наближення в асимптотичному ряді (7) функція $U_1(a,x,T_k,\theta)$ повинна задовольняти одній із крайових умов

$$U_1(a,x,T_k,\theta)\big|_{x=0} = \varepsilon\overline{g_0}(a,\psi,\theta)\big|_{x=0},\quad U_1(a,x,T_k,\theta)\big|_{x=l} = \varepsilon\overline{g_l}(a,\psi,\theta)\big|_{x=l} \tag{10}$$

$$U_1(a,x,T_k,\theta)\big|_{x=0} = \varepsilon\overline{g_0}(a,\psi,\theta)\big|_{x=0},\quad \left.\frac{\partial U_1(a,x,T_k,\theta)}{\partial x}\right|_{x=l} = \varepsilon\overline{g_0}(a,\psi,\theta)\big|_{x=l}, \tag{11}$$

де $\overline{g_0}(a,\psi,\theta)$ відповідає значенню функції $g_0(u,u_x,u_t,\theta)$ за головної величини $u(x,\ t)$ і її похідних (див. (7)).

Підставляючи (7) в (1), з врахуванням (8) чи (9) після прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε, отримуємо диференціальні рівняння для знаходження невідомої функції $U_1(a,x,T_k,\theta)$

$$\begin{aligned} L_0(U_1) = {} & \frac{4\omega_k^2(a)}{(\nu+2)^2}\frac{\partial}{\partial T_k}\left[\left(1-T_k^{\nu+2}\right)\frac{\partial U_1}{\partial T_k}\right] + \frac{2\omega_k^2(a)}{\nu+2}T_k^{\nu+1}\frac{\partial U_1}{\partial T_k} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial\theta^2}\mu^2 - \\ & -\alpha^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(aT_kX_k'(x)\right)^{\nu}\frac{\partial U_1}{\partial x}\right] = F_1(a,x,T_k,\theta) - X_k(x)\Big\{A_1(a)\times \\ & \times\frac{2}{\nu+2}\left(1-T_k^{\nu+2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2\omega_k(a) + a\frac{d\omega_k(a)}{da}\right) + \frac{4a}{\nu+2}\omega_k(a)T_k^{\nu+1}B_1(a)\Big\}, \end{aligned} \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned} F_1(a,x,T_k,\theta) = {} & f\left(aX_k(x)T_k, aX_k'(x)T_k, a\omega_kX_k(x)\frac{dT_k}{d\psi_k}, a\omega_kX_k'(x)\frac{dT_k}{d\psi_k}, \theta\right) + \\ & + aT_kV^2\left(\frac{s\Pi_x}{l}\right)^{\frac{3\nu+2}{\nu+1}}\frac{2}{\nu+2}X_k(x)\left(X_k'(x)\right)^{-\frac{\nu}{\nu+1}} - 2aV\frac{dT_k}{d\psi_k}\omega_k(a)X_k'(x), \end{aligned}$$

Щоб розв’язати крайові задачі для функції $U_1(a,x,T_k,\theta)$, тобто (12), (10) чи (12), (11), подамо її у вигляді

$$U_1(a,x,T_k,\theta)=V_1(a,x,T_k,\theta)+W_1(a,x,T_k,\theta),$$

де $V_1(a,x,T_k,\theta)$ і $W_1(a,x,T_k,\theta)$ – задовольняють умови:

$$V_1(a,x,T_k,\theta)\big|_{x=0}=V_1(a,x,T_k,\theta)\big|_{x=l}=0,$$

$$W_1(a,x,T_k,\theta)\big|_{x=0}=\overline{g_0}(a,\psi,\theta)\big|_{x=0},\ \ W_1(a,x,T_k,\theta)\big|_{x=l}=\overline{g_l}(a,\psi,\theta)\big|_{x=l}$$

або

$$V_1(a,x,T_k,\theta)\big|_{x=0}=\frac{\partial V_1(a,x,T_k,\theta)}{\partial x}0\bigg|_{x=l}=0,$$

$$W_1(a,x,T_k,\theta)\big|_{x=0}=\overline{g_0}(a,\psi,\theta)\big|_{x=0},\ \ \frac{\partial W_1(a,x,T_k,\theta)}{\partial x}\bigg|_{x=l}=\overline{g_l}(a,\psi,\theta)\big|_{x=l}.$$

Нехай $W_1(a,x,T_k,\theta)$ є розв’язком рівняння

$$\frac{\partial^2 W_1(a,x,T_k,\theta)}{\partial x^2}=0.$$

Тоді $W_1(a,x,T_k,\theta)$ набуває вигляду

$$W_1(a,x,T_k,\theta)=\overline{g_0}(a,\psi,\theta)+\frac{\overline{g_l}(a,\psi,\theta)-\overline{g_0}(a,\psi,\theta)}{l}x$$

або

$$W_1(a,x,T_k,\theta)=\overline{g_0}(a,\psi,\theta)+\overline{g_l}(a,\psi,\theta)x.$$

З врахуванням наведеного, отримаємо

$$L(V_1)=\tilde{F}_1(a,x,T_k,\theta)-X_k(x)\Big\{A_1(a)\times$$

$$\times\frac{2}{\nu+2}\left(1-T_k^{\nu+2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2\omega_k+a\frac{d\omega_k}{da}\right)+\frac{4a}{\nu+2}\omega_k T_k^{\nu+1}B_1(a)\Big\}, \tag{13}$$

де $\tilde{F}_1(a,x,T_k,\theta)=F_1(a,x,T_k,\theta)-L(W_1)$.

Аналогічно як і у [1] для рівняння (13), отримуємо для першого наближення нерезонансного випадку функції, які визначають закони зміни АЧХ процесу у вигляді

$$A_1(a)=\frac{1}{4\Pi_T\omega_k(a)\pi}\cdot\int_0^{2\Pi_T}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\tilde{F}_{1k}(a,x,T_k(\psi_k),\theta)X_k(x)sa(1,\nu+1,\psi_k)d\psi_k d\theta dx,$$

$$B_1(a)=\frac{\nu+2}{8\Pi_T a\omega_k(a)\pi}\cdot\int_0^{2\Pi_T}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}\tilde{F}_{1k}(a,x,T_k(\psi_k),\theta)X_k(x)ca(\nu+1,1,\psi_k)d\psi_k d\theta dx+V^2\cdot R, \tag{14}$$

де $R=\dfrac{4\sqrt{\pi}}{\alpha l a^{\frac{\nu}{2}}}\left(\dfrac{s\Pi_x}{l}\right)^{\frac{\nu}{2}}\dfrac{3\nu+4}{\nu+2}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{\nu+2}\right)}$.

Резонансний випадок. Розглянемо лише випадок головного резонансу $\omega_k(a) \approx \mu$. Тоді при проходженні системи через резонанс можемо записати $\omega_k(a) = \mu + \varepsilon\delta(a)$. Якщо a_0 – корінь рівняння $\omega_k(a) = \mu$, то з точністю до величин вищого порядку малості

$$\varepsilon\delta(a) = \left.\frac{d\omega}{da}\right|_{a=a_0} (a - a_0).$$

Тобто систему диференціальних рівнянь першого наближення при проходженні системи через головний резонанс можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\varepsilon}{2\Pi_T \omega_k(a) P} \int_0^l \int_0^{2\pi} X_k(x) f_1(a, x, T_k(\gamma+\theta), \theta)\, sa(1, \nu+1, \gamma+\theta)\, dx d\theta \\ \dot{\gamma} &= \varepsilon\delta(a) - V^2 \cdot R + \frac{\varepsilon(\nu+2)}{4\Pi_T a\omega_k(a) P} \int_0^l \int_0^{2\pi} X_k(x)\, f_1(a, x, T_k(\gamma+\theta), \theta)\, ca(\nu+1, 1, \gamma+\theta)\, dx d\theta \end{aligned} \tag{15}$$

Отримані рівняння дають змогу визначити усталені одночастотні режими коливань

$$\begin{aligned} &\int_0^l \int_0^{2\pi} X_k(x) f_1(a, x, T_k(\gamma+\theta), \theta)\, sa(1, \nu+1, \gamma+\theta)\, dx d\theta = 0 \\ &\frac{\varepsilon(\nu+2)}{4\Pi_T a\omega_k(a) P} \int_0^l \int_0^{2\pi} X_k(x)\, f_1(a, x, T_k(\gamma+\theta), \theta)\, ca(\nu+1, 1, \gamma+\theta)\, dx d\theta = \frac{d\omega(a^*)}{da}(a_0 - a) + V^2 R \end{aligned} \tag{16}$$

Висновки. Отже, розроблена методика дає змогу отримати співвідношення, які визначають вплив на коливний процес сильнонелінійних систем з розподіленими параметрами як неавтономного збурення, так і збурення крайових умов та швидкості поздовжнього руху. Показано, що поздовжня швидкість руху середовища призводить до спадання частоти власних коливань середовища. Останнє особливо актуальне при дослідженні резонансних явищ. Достовірність отриманих розрахункових формул підтверджується отриманням у граничному випадку при $V = 0$, $\nu = 0$ відомих у літературі результатів.

1. Сокіл Б. І., Ліщинська Х. І. Асимптотичний метод і періодичні Ateb*-функції у дослідженні коливних процесів рухомих нелінійно пружних одновимірних систем // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка» «Динаміка, міцність та проектування машин і приладів». – 2006. – № 556. – С. 57–64. 2. Сеник П. М. Про* Ateb*-функції // Доп. АН УРСР. – 1968. – №1. – С. 23–26. 3. Сеник П. М. Обернення неповної* Beta*-функції // Укр. мат. журн. – 1969. – 21, № 3. – С. 325–333. 4. Митропольский Ю. А, Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: ВШ, 1976. – 592 с. 5. Сокил Б. И. Об асимптотических разложениях краевой задачи для одного нелинейного уравнения с частными производными // Укр. мат. журн. – 1982. – 34, №6. – С. 803–805. 6. Сокіл Б. І. Про застосування* Ateb*-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доп. НАН України. – 1997. – №1. – С. 55–58.*