УДК 621.311.75

П.Д. Лежнюк, Н.В. Собчук, О.І. Казьмірук
Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

ВТОРИННІ КРИТЕРІЇ ТА ІНДИКАТОРИ ПОДІБНОСТІ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ ЕЕС

Розглянуто способи визначення вторинних критеріїв та індикаторів подібності для встановлення параметричної подібності в досліджуваному процесі. Показано, що за допомогою вторинних критеріїв та індикаторів подібності можна розв'язувати оптимізаційні задачі, зокрема проектування ліній електропередачі, оптимального керування режимами електричних мереж тощо.

The ways of secondary criteria and similarity indicators determination for a parametrical similarity creation are considered in here. It is shown that with help of secondary criteria of similarity can be solved such optimization problems as transmitting lines projection, optimal management of power systems conditions, etc.

Вступ. У прикладних задачах теорії подібності використовуються так звані вторинні критерії подібності [1]. Вторинні критерії подібності – це відношення критеріїв подібності. Останні ж за визначенням [1] є безрозмірними комбінаціями параметрів, які чисельно однакові для всіх подібних процесів. За допомогою вторинних критеріїв подібності встановлюється параметрична подібність процесів, що досліджуються. Надто важливими вторинні критерії подібності є тоді, коли вони характеризують параметричну подібність оптимальних варіантів. Таким, наприклад, є критерій Кельвіна, який відображає оптимальне співвідношення складових витрат на спорудження ліній електропередачі [2]. Вторинні критерії встановлюють стійкі співвідношення між окремими складовими цільової функції, які за певних умов можна трактувати як закони оптимального керування процесами в системі.

У статті розглянуто способи визначення вторинних критеріїв і приклади використання їх в задачах оптимального керування.

Визначення вторинних критеріїв та індикаторів подібності. Сформулюємо задачу оптимального керування так:

мінімізувати

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \tag{1}$$

за умов

$$g_k(x) = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \le G_k, \quad k = \overline{1,h}, \quad x_j > 0, \tag{2}$$

де f(x) – деякий узагальнений техніко-економічний показник процесу, який оптимізується; g(x) – обмеження, які встановлюють сферу дослідження процесу; a_i , α_{ji} G_k – сталі коефіцієнти, які визначаються властивостями системи; x_j – змінні параметри системи, значення яких оптимізуються; m_1 – кількість членів цільової функції; m – сумарна кількість членів цільової функції і обмежень; n – кількість змінних; h – кількість обмежень.

У виразах (1) і (2) для зручності подальшого аналізу прийнята суцільна індексація складових цільової функції і обмежень.

Для задачі (1)–(2) можливі два види критеріїв подібності залежно від обраної бази. Згідно з способом інтегральних аналогів критерії подібності визначаються діленням всіх членів рівняння на один з них [1]. Якщо вибрати за базовий, наприклад, l-й член, то отримаємо критерії подібності вигляду

$$\pi_i = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}}{a_l \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{jl}}}. \tag{3}$$

Якщо за базу прийняти f(x), то критерії подібності матимуть вигляд

$$\pi_i = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}}{f(x)}. \tag{4}$$

В останньому випадку критерії подібності, які належать до цільової функції, мають зміст вагових коефіцієнтів і характеризують вклад кожного члена в значення критерію оптимальності. Критерії подібності, які належать до обмежень, по суті є коефіцієнтами чутливості. В [3] показано, що $\lambda_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i$ це – нормовані множники Лагранжа k-го обмеження.

Очевидно, що переважно в задачах оптимального керування використовується друга форма критеріїв подібності, оскільки вони в цьому разі є інформативнішими [4]. Особливо, коли критерії подібності визначені для екстремального значення критерію оптимальності згідно з задачею (1)–(2).

Оптимальні значення критеріїв подібності для задачі (1)–(2) визначаються з умов ортогональ-ності і нормування [3]:

$$\mathbf{б}\mathbf{p} = \mathbf{b}, \tag{5}$$

де $\mathbf{б} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ \alpha_{13}\dots\ \alpha_{1m} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\dots\alpha_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\dots\alpha_{nm} \\ 1\quad 1\quad 0\ \dots\ 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \dots \\ \pi_m \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{vmatrix}.$

Якщо система рівнянь (5) визначена, то критерії подібності можна знайти за правилом Крамера:

$$\pi_i = |\mathbf{б}|^{-1} \sum_{s=1}^{n+1} \mathbf{б}_{si} \mathbf{b}_s, \quad i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

де $|\alpha|$ – визначник системи рівнянь (5); α_{si} – алгебраїчні доповнення.

З врахуванням значень складових вектора **b**, останній вираз перепишемо так:

$$\pi_i = |\mathbf{б}|^{-1} \mathbf{б}_{n+1,i}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Скористаємося тепер виразом (7) і запишемо вторинний критерій подібності як відношення p-го й q-го критеріїв подібності:

$$\pi_{pq} = \pi_p / \pi_q = \mathbf{б}_{n+1,p}\ \mathbf{б}_{n+1,q}^{-1}. \tag{8}$$

З (7) та (8) видно, що за умови m=n+1 як критерії подібності, так і вторинні критерії подібності визначаються тільки показниками степеня параметрів x_j.

Окремий випадок, коли деякий параметр x_j входить тільки в два члени рівняння – p-й і q-й. У цьому випадку для параметра x_j умову ортогональності запишемо у вигляді

$$\alpha_{jp}\pi_p + \alpha_{jq}\pi_q = 0 .$$

З останнього рівняння виходить, що вторинний критерій подібності

$$\pi_{pq} = \pi_p / \pi_q = -\alpha_{jq}\, \alpha_{jp}^{-1} . \qquad (9)$$

Зауважимо, що виразом (9) на відміну від (8) можна скористатися і тоді, коли система рівнянь (5) є невизначеною (в критеріальному програмуванні це відповідає задачі з мірою складності $s = m - n - 1 > 0$ [3]). Це значить, що вторинні критерії можуть бути визначені під час дослідження як канонічних, так і неканонічних моделей.

В задачах оптимального керування станами динамічних систем замість критеріїв подібності можна використовувати індикатори подібності, які визначаються масштабами величин, що входять в (1)–(2). Застосування останніх забезпечує певні переваги. Зокрема система оптимального керування виходить раціональнішою через те, що критерії подібності визначаються не стосовно параметрів x_j , а відносно параметрів керування u_j, якими оптимізуються стани системи і які функціонально зв'язані з x_j [5]. Зазначене стосується систем оптимального керування з еталонною моделлю. У цьому разі необхідно встановлювати подібність між системою-оригіналом і її моделлю в системі керування, а також числові співвідношення між параметрами керування u_{jop} і $u_{jм}$.

В [5] показано, що для системи керування з еталонною моделлю індикатори подібності кожного члена задачі (1)–(2) визначаються як

$$\mu_i = \frac{\mu_{a_i} \prod_{j=1}^{n} \mu_{x_j}^{\alpha_{ji}}}{\mu_f} = 1 , \qquad (10)$$

де μ_{a_i} , μ_{x_j} , μ_f – масштабні коефіцієнти відповідних величин.

Критерії подібності визначаються за формулою (6), але, оскільки вони в цьому випадку обчислюються у диференційній системі відносних одиниць, то вектор **b** на відміну від (5) дорівнюватиме [3]:

$$\mathbf{b} = \left| b_1; b_2; \ldots b_n; 1 \right| ,$$

де $b_j = \dfrac{\partial f / \partial x_j}{f_o / x_{jo}}, \quad j = \overline{1, n}$.

Отже, простого виразу для визначення вторинних критеріїв подібності, аналогічного (9), не виходить.

Як відомо [1], щодо встановлення подібності процесів критерії подібності та індикатори подібності є рівнозначними. Проте, як видно з (10), відношення критеріїв подібності окремих членів математичної моделі процесу і відповідних індикаторів подібності не еквівалентне. Можна припустити, що, якщо параметрична подібність проявляється через відношення критеріїв подібності, то вона може бути встановлена також через відношення індикаторів подібності.

За умови, що цільова функція відносно параметрів керування апроксимована поліномом вигляду (1), індикатори подібності для u_j запишемо [5]

$$\mu_{u_j} = \prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{\frac{\boldsymbol{\alpha}_{ji}}{|\boldsymbol{\alpha}|}}, \quad j = \overline{1, n} , \qquad (11)$$

де $\boldsymbol{\alpha}_{ji}$ – алгебраїчні доповнення елементів α_{ji}, які взяті зі зворотним знаком.

Якщо параметрична подібність існує між параметрами керування p-м і q-м, то для них мають бути однаковими індикатори подібності. З врахуванням (11) ця умова запишеться

$$\mu_{pq} = \frac{\mu_{u\,p}}{\mu_{u\,q}} = \frac{\prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{б_{pi}|б|^{-1}}}{\prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{б_{qi}|б|^{-1}}} = 1,$$

яка після спрощення набуде вигляду

$$\mu_{pq} = \prod_{i=1}^{m} \mu_{a_i}^{(б_{pi} - б_{qi})|б|^{-1}} = 1.$$

З останнього виразу слідує, що коли в досліджуваному процесі наявна параметрична подібність, то для того, щоб вона зберігалася і в моделі цього процесу, необхідно, щоб виконувалася умова

$$б_{pi} = б_{qi}. \qquad (12)$$

Тобто, повинні бути однаковими відповідні алгебраїчні доповнення однойменних параметрів в процесі-оригіналі і в його моделі.

Використання вторинних критеріїв подібності в проектуванні ліній електропередачі. У проектній практиці виникає необхідність економічно обґрунтованого вибору перетину проводів F і напруги U лінії електропередачі (ЛЕП). Наведені затрати на спорудження ЛЕП визначаються так [6]:

$$З = \left[(k_1 + k_2 U - k_3 F) L + k_4 \left(\frac{P}{L} \right)^2 \frac{1}{F} \right] + \left[k_5 + k_6 P + k_7 PU + k_8 UL + k_9 \frac{PL}{U} \right], \qquad (13)$$

де $k_1 ... k_9$ – постійні вартісні коефіцієнти; U – напруга електропередачі; F – площа поперечного перерізу струмоведучих частин; P – потужність, яка передається ЛЕП; L – довжина ЛЕП.

Напруга U і площа поперечного перерізу проводів F електропередачі є змінними, які оптимізуються. Розглянувши тільки змінну складову затрат і ввівши такі позначення

$$a_1 = k_2 L + k_7 P + k_8 L, \quad a_2 = k_9 PL, \quad a_3 = k_4 P^2 L, \quad a_4 = k_3 L,$$

перепишемо (13)

$$З = a_1 U + a_2 U^{-1} + a_3 U^{-2} F^{-1} + a_4 F. \qquad (14)$$

В (14) перша і друга складові затрат визначаються вибраною напругою, третя складова – затрати на покриття втрат електроенергії в лінії, четверта складова – капіталовкладення, пропорційні площі поперечного перерізу проводів.

Скористаємося співвідношенням (9) і визначимо деякі умови, за яких ЛЕП буде оптимальною. Розглянемо останні дві складові (14). Відношення критеріїв подібності π_3 і π_4 відповідно до (9) визначиться:

$$\pi_{34} = \pi_3 / \pi_4 = -\alpha_{24}\ \alpha_{23} = -1 \cdot -1 = 1.$$

Як бачимо, для того щоб ЛЕП була оптимальною, необхідно, щоб затрати на покриття втрат електроенергії в ЛЕП і капіталовкладення в проводи ЛЕП були рівними. Зауважимо, що таке співвідношення повинно витримуватися незалежно від вартості кВт-год втрат електроенергії і вартості 1 км проводу. Як цього досягти в проектній практиці та в процесі експлуатації – предмет окремого дослідження.

В [7] задача (14) визначення оптимальних напруги і перерізу проводів ЛЕП розв’язана критеріальним методом і отримано числовий розв’язок. За певних значень вартісних коефіцієнтів, які діяли на той час, отримані такі оптимальні значення критеріїв подібності:

$$\mathbf{p} = \left|0{,}5; \quad 0{,}27; \quad 0{,}115; \quad 0{,}115\right|.$$

Тобто, отримані в [7] результати підтверджують висновки, зроблені щодо оптимальності ЛЕП на підставі вторинних критеріїв подібності вигляду (8) та (9).

Вторинні критерії в оптимальному керуванні режимом лінії електропередачі надвисокої напруги. Для ЛЕП 330 – 750 кВ втрати активної потужності в них залежать від перетоків активної і реактивної потужностей, а також від втрат, зумовлених коронним розрядом (втрати на корону). Тобто, втрати в лінії визначаються як [8]

$$\Delta P = \Delta P_k + \Delta P_P + \Delta P_Q, \tag{15}$$

де $\Delta P_k = k_k L U^{\alpha_{11}}$ – втрати на корону; $\Delta P_P = r_o L P^2 U^{-2}$ – втрати від перетоків активної потужності P; $\Delta P_Q = r_o L Q^2 U^{-2}$ – втрати від перетоків реактивної потужності Q; k_k – коефіцієнт, що характеризує рівень втрат на корону в 1 км лінії для цієї конструкції фази і даній погоді; α_{11} – показник, що характеризує залежність втрат на корону від напруги U за певних погодних умов; r_o – питомий активний опір лінії.

В загальному вигляді (15) як функція втрат від напруги запишеться:

$$\Delta P = a_1 U^{\alpha_{11}} + a_2 U^{\alpha_{12}}, \tag{16}$$

де $a_1 = k_k L$; $a_2 = r_o L P^2 + r_o L Q^2$; $\alpha_{11} = 3 \div 8$; $\alpha_{12} = -2$.

Встановимо, якими мають бути оптимальні співвідношення в ЛЕП між втратами на корону (перша складова (16)) і навантажувальними втратами (друга складова (16)). Згідно з (9)

$$\pi_{12} = \pi_1 / \pi_2 = -\alpha_{12} \cdot \alpha_{11}^{-1} = 2/\alpha_{11}. \tag{17}$$

З аналізу залежності (17) видно, що оптимальне відношення між втратами на корону і навантажувальними залежить від погодних умов. За хорошої погоди (α_{11} = 3) втрати на корону і навантажувальні втрати в ЛЕП мають бути рівними (π_{12} = 0,66). З погіршенням погодних умов частка втрат на корону в сумарних втратах має зменшуватися, а навантажувальних – зростати. За граничних умов (туман, ожеледиця, α_{11} = 8) π_{12} = 0,25. Тобто, оптимальним буде такий режим ЛЕП, коли втрати на корону будуть в чотири рази менші за навантажувальні втрати. Залежність між оптимальним відношенням втрат на корону і навантажувальними втратами залежно від коефіцієнта α_{11} або, що те саме, від погодних умов, в яких експлуатується ЛЕП можна використовувати для оптимального керування рівнями напруги ЛЕП, а також, якщо це допустимо, перетоками потужності в ній.

Оптимальне керування нормальними режимами електричних мереж. У [9] показано, що керування режимами електричних мереж (ЕМ) може здійснюватися за двоконтурною схемою з еталонною моделлю в контурі адаптації. Керування здійснюється з метою зменшення втрат електроенергії за законом

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}'(t) \tag{18}$$

$$\mathbf{u}(t) \in \mathbf{U}_3$$

де $\mathbf{u}$(t) – вектор керування (коефіцієнти трансформації трансформаторів і навантаження джерел реактивної потужності); $\mathbf{y}'$(t) – вектор визначальних параметрів стану ЕМ, які телевимірюються; $\boldsymbol{\pi}$ – матриця критеріїв подібності; $\mathbf{U}_3$ – область нечутливості (оптимальності), верхня $U_{вз}$ та нижня $U_{нз}$, границі якої та уставка $U_{уст}$ визначаються і задаються на певний термін за результатами розрахунків та аналізу характерних станів ЕМ.

Ефективність функціонування системи автоматичного керування (САК) режимами ЕМ залежить від повноти інформації і від точності моделі процесу регулювання потоками потужності і напругою в ЕМ. Адекватність моделі відповідно до інформаційного забезпечення, яке склалося на цей момент, та умовами експлуатації може досягатися за допомогою співвідношення (12).

Як приклад, розглянемо задачу оптимального керування потоками потужності та напругою в електричній системі. Під час експлуатації закон регулювання (18) необхідно корегувати відповідно до оптимальних залежностей типу (17). Відповідно до цих залежностей, які адаптують САК до реальних умов експлуатації, необхідно навести також еталонну модель процесу. Для цього масштабні коефіцієнти параметрів моделі необхідно поміняти так, щоб виконувалася умова (12), в яку підставлені показники степеня, що відповідають цим умовам експлуатації.

Висновки. 1. За наявності параметричної подібності в досліджуваному процесі вона може бути встановлена у вигляді відношення відповідних критеріїв подібності – вторинних критеріїв подібності. Значення вторинних критеріїв подібності може бути визначене з аналізу матриці розмірностей.

2. Індикатори подібності в загальному випадку не дозволяють виявити параметричну подібність у досліджуваному процесі. Вони дозволяють встановити і досягти адекватності процесів в оригіналі та в його моделі. Для того також достатньо інформації, яка міститься в матриці розмірностей параметрів, що характеризують процес.

3. За допомогою вторинних критеріїв та індикаторів подібності можна успішно розв’язуватися певні технічні задачі. Це насамперед оптимізаційні задачі, в яких можливо і доцільно використовувати стійкі співвідношення між оптимальними значеннями параметрів. До таких задач в електроенергетиці належать задачі проектування ліній електропередачі, оптимізація режимів роботи ліній надвисоких напруг, оптимального керування нормальними режимами електричних мереж тощо.

1. Веников В.А. Теория подобия и моделирования. – М.: Высш. шк., 1976. – 479 с. 2. Электрические системы. Кибернетика электрических систем / Под ред. В.А. Веникова. – М.: Высш. шк., 1974. – 328 с. 3. Лежнюк П.Д., Бевз С.В. Методи оптимізації в електроенергетиці. Критеріальний метод. – Вінниця: ВДТУ, 1999. – 177 с. 4. Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д. Применение теории подобия в задачах управления нормальными режимами электроэнергетических систем // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1990. – № 5. – С. 3–11. 5. Лежнюк П.Д., Собчук Н.В. Індикатори подібності в оптимальному керуванні динамічними системами // Вісн. Кременчуцьк. держ. політехн. ун-ту. – 2002. – № 1. – С. 367–369. 6. Илларионов Г.А. К определению оптимального уровня потерь электроэнергии в электрических сетях. – В кн.: Проектирование и эксплуатация энергетических систем и электрических сетей. Тр. ин-та Энергосетьпроект. – 1978. – Вып. 11. – С. 3–19. 7. Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д., Овчинников В.В. Решение оптимизационных задач в электроэнергетике критериальным методом. – М., 1979. – 41 с. – Деп. в Інформэнерго 29.03.1979, № Д/585. 8. Александров Г.Н. Установки сверхвысокого напряжения и охрана окружающей среды. – Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 360 с. 9. Лежнюк П.Д., Кулик В.В. Оптимальне керування потоками потужності і напругою в неоднорідних мережах: Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 188 с.