МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 004.02; 004.032.

Б. А. Мандзій, Я. М. Матвійчук
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційних систем і технологій

ТЕСТОВА НАДІЙНІСНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕХНІЧНОЇ ВІДНОВЛЮВАНОЇ СИСТЕМИ ТА ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ ЇЇ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

Розроблено математичну модель відновлюваної технічної системи, що може бути тестовою моделлю при відлагодженні програм автоматизованої побудови надійнісних моделей відповідних технічних систем. Здійснено порівняльне дослідження розв’язування системи рівнянь типу Колмогорова–Чепмена методами числового інтегрування та з використанням аналітичного розв’язку, що показало відсутність переваг у точності та певні переваги у часі розв’язування за другим підходом.

Ключові слова: надійнісна математична модель, рівняння Колмогорова–Чепмена, матрична експонента.

B. Mandziy, Y. Matviychuk
National University “Lviv Polytechnik”,
Department of Information Systems and Technologies

TEST RELIABLE MATHEMATICAL MODEL OF A TECHNICAL RENEWABLE SYSTEM AND COMPARING THE METHODS OF ITS SOLUTIONS

The mathematical model of a non-rezerved renewable technical system developed in this paper can serve as a test model for debugging programs for the automated construction of reliable models of corresponding technical systems.

To calculate the reliability indicators, the reliability data of the elements of the technical system are used as input data. On the basis of these data, a mathematical model of the reliability of the technical system in the form of Kolmogorov-Chapman differential equations is developed, which describe in time the transition process of the technical system from one state to another.

A comparative study of the solution of a Kolmogorov-Chapman’s system using numerical integration methods and using an analytical solution showed no advantages in accuracy and certain advantages in time of the decision on the second approach.

All calculations is made in the system MATLAB.

Key words: reliable mathematical model, Kolmogorov–Chapman equations, matrix exponential.

Вступ

Поширеним типом радіоелектронних систем є нерезервовані системи, елементи яких можна відновлювати (ремонтувати) обмежену кількість разів. Особливість функціонування таких систем полягає у тому, що вони нормально функціонують за умови одночасної працездатності усіх їхніх елементів. Якщо будь-який елемент виходить з ладу – система переходить у стан простою на час, необхідний для відновлення (ремонту) елемента, що відмовив. Після завершення ремонту система продовжує функціонувати до моменту наступного стану простою. Коли допустиму кількість відновлень будь-якого елемента вичерпано, система переходить до граничного стану повної (кінцевої) відмови і перестає функціонувати. Основними показниками надійності відновлюваних систем є [1,2] :

$K_{г}(t)$ – функція готовності – імовірність того, що система працездатна в момент t ;

$K_{п}(t)$ – функція простою – імовірність того, що система непрацездатна в момент t і відновлюється;

MidAct – середній наробіток (напрацювання) між відмовами;

MidPas – середній час відновлення (простою).

Для розрахунку названих показників надійності як вихідні дані використовують показники надійності елементів технічної системи, а саме: λ_i – інтенсивність відмов i-го елемента, μ_i – інтенсивність відновлень i-го елемента. На підставі цих даних формують за відомими правилами [2, 3] математичну модель надійності технічної системи у вигляді диференціальних рівнянь Колмогорова–Чепмена, які описують в часі процес переходу технічної системи із одного стану в інший і уможливлюють використання відомих математичних методів розв’язування диференціальних рівнянь для надійнісного аналізу системи:

$$\frac{\mathrm{dP_i}(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{N} l_{ij}(t) P_i(t) + \sum_{\mathrm{j}=1}^{N} l_{ji}(t) P_j(t); \mathrm{i,\ j} = 1, 2, \ldots N\,, \qquad (1)$$

де $P_i(t)$, $P_j(t)$ – імовірності значень випадкового процесу (імовірності перебування системи) в момент часу t відповідно у станах i та j; $l_{ij}(t)$ – інтенсивність переходу із стану i у стан j; $l_{ji}(t)$ – інтенсивність переходу із стану j у стан i; N – кількість можливих станів системи.

Рівняння (1) є математичною моделлю надійності технічної системи, яка описує в часі процес переходу системи із одного стану в інший і уможливлює використання відомих математичних методів розв’язування диференціальних рівнянь для надійнісного аналізу системи. Одночасно слід зауважити, що математичні моделі відновлюваних систем з обмеженою кількістю відновлень є складнішими порівняно із математичними моделями відновлюваних систем з необмеженою кількістю відновлень, оскільки у першому випадку кількість можливих станів є завжди більшою.

Розв’язок рівнянь (1) описує часові залежності імовірностей перебування технічної системи у всіх можливих станах і тим самим дає змогу визначити потрібні показники надійності (імовірність безвідмовної роботи, функцію та коефіцієнт готовності, середній час безвідмовної роботи, середнє напрацювання на відмову, середній час відновлення тощо). Прийнявши, що інтенсивності переходів є величинами сталими (при експоненціальних розподілах часу безвідмовної роботи та часу відновлення елементів системи), модель (1) є системою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами, розв’язати яку можна за допомогою перетворення Лапласа і отримати розв’язок в аналітичний формі, застосувавши, наприклад, сучасні потужні програмні пакети символьної математики Matlab, Maple, Matematica та ін. Проте при декількох десятках можливих станів отримати аналітичний розв’язок практично неможливо, і тому доводиться використовувати числові методи з використанням тестових моделей для відлагодження відповідних програм. У цій роботі сформовано математичну модель надійності технічної системи з обмеженою кількістю відновлень, яку можна використати як тестову модель при відлагодженні програм автоматизованої побудови надійнісних моделей відповідних систем. Наведено результати порівняльного дослідження розв’язування рівнянь Колмогорова–Чепмена методом матричної експоненти та класичним методом Рунге–Кутта четвертого порядку.

Математична модель надійності технічної системи з обмеженою кількістю відновлень

Приймемо, що технічна система складається із трьох елементів (блоків), інтенсивності відмов яких відповідно дорівнюють $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а інтенсивності відновлень — відповідно $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ (рис. 1)

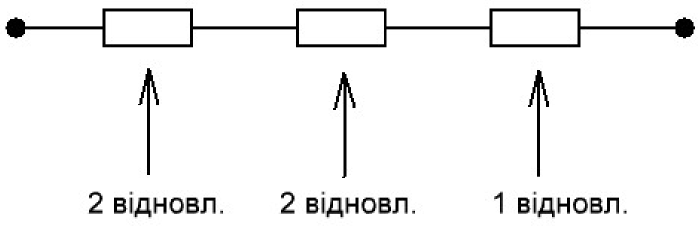

Рис.1. Структурна схема надійності технічної системи

Перший та другий елементи можна відновлювати (ремонтувати) двічі, а третій елемент-лише один раз. Початковим (першим) станом вважаємо стан, в якому всі елементи є працездатними. Така система може перебувати у 52 станах, переходи між якими відбуваються внаслідок відмов та відновлень окремих елементів системи.

Математична модель цієї системи набуває вигляду:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)P_1(t);\quad \frac{dP_2(t)}{dt} = -\mu_1 P_2(t)+\lambda_1 P_1(t);\quad \frac{dP_3(t)}{dt} = -\mu_2 P_3(t)+\lambda_2 P_1(t);$$

$$\frac{dP_4(t)}{dt} = -\mu_3 P_4(t)+\lambda_3 P_1(t);\quad \frac{dP_5(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)P_5(t)+\mu_1 P_2(t);$$

$$\frac{dP_6(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)P_6(t)+\mu_2 P_3(t);\quad \frac{dP_7(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)P_7(t)+\mu_3 P_4(t);$$

$$\frac{dP_8(t)}{dt} = -\mu_1 P_8(t)+\lambda_1 P_5(t);\quad \frac{dP_9(t)}{dt} = -\mu_2 P_9(t)+\lambda_2 P_5(t);\quad \frac{dP_{10}(t)}{dt} = -\mu_3 P_{10}(t)+\lambda_3 P_5(t);$$

$$\frac{dP_{11}(t)}{dt} = -\mu_1 P_{11}(t)+\lambda_1 P_6(t);\quad \frac{dP_{12}(t)}{dt} = -\mu_2 P_{12}(t)+\lambda_2 P_6(t);\quad \frac{dP_{13}(t)}{dt} = -\mu_3 P_{13}(t)+\lambda_3 P_6(t);$$

$$\frac{dP_{14}(t)}{dt} = -\mu_1 P_{14}(t)+\lambda_1 P_7(t);\quad \frac{dP_{15}(t)}{dt} = -\mu_2 P_{15}(t)+\lambda_2 P_7(t);$$

$$\frac{dP_{16}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)P_{16}(t)+\mu_1 P_8(t);$$

$$\frac{dP_{17}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)P_{17}(t)+\mu_2 P_9(t)+\mu_1 P_{11}(t);$$

$$\frac{dP_{18}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)P_{18}(t)+\mu_3 P_{13}(t)+\mu_1 P_{14}(t);$$

$$\frac{dP_{19}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)P_{19}(t)+\mu_1 P_{14}(t)+\mu_3 P_{10}(t);$$

$$\frac{dP_{20}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)P_{20}(t)+\mu_2 P_{12}(t);\quad \frac{dP_{21}(t)}{dt} = -\mu_2 P_{21}(t)+\lambda_2 P_{16}(t);$$

$$\frac{dP_{22}(t)}{dt} = -\mu_3 P_{22}(t)+\lambda_3 P_{16}(t);\quad \frac{dP_{23}(t)}{dt} = -\mu_1 P_{23}(t)+\lambda_1 P_{17}(t);$$

$$\frac{dP_{24}(t)}{dt} = -\mu_2 P_{24}(t)+\lambda_2 P_{17}(t);\quad \frac{dP_{25}(t)}{dt} = -\mu_3 P_{25}(t)+\lambda_3 P_{17}(t);$$

$$\frac{dP_{26}(t)}{dt} = -\mu_1 P_{26}(t)+\lambda_1 P_{18}(t);\quad \frac{dP_{27}(t)}{dt} = -\mu_2 P_{27}(t)+\lambda_2 P_{18}(t);$$

$$\frac{dP_{28}(t)}{dt} = -\mu_1 P_{28}(t)+\lambda_1 P_{19}(t);\quad \frac{dP_{29}(t)}{dT} = -\mu_2 P_{29}(t)+\lambda_2 P_{19}(t);$$

$$\frac{dP_{30}(t)}{dt} = -\mu_1 P_{30}(t)+\lambda_1 P_{20}(t);\quad \frac{dP_{31}(t)}{dt} = -\mu_3 P_{31}(t)+\lambda_3 P_{20}(t);$$

$$\frac{dP_{32}(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)P_{32}(t) + \mu_2 P_{21}(t) + \mu_1 P_{23}(t);$$
$$\frac{dP_{33}(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)P_{33}(t) + \mu_2 P_{24}(t) + \mu_1 P_{30}(t);$$
$$\frac{dP_{34}(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)P_{34}(t) + \mu_3 P_{25}(t) + \mu_1 P_{26}(t) + \mu_2 P_{29}(t);$$
$$\frac{dP_{35}(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)P_{35}(t) + \mu_2 P_{27}(t) + \mu_3 P_{31}(t);$$
$$\frac{dP_{36}(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)P_{36}(t) + \mu_1 P_{28}(t) + \mu_3 P_{22}(t);$$
$$\frac{dP_{37}(t)}{dt} = -\mu_2 P_{37}(t) + \lambda_2 P_{32}(t); \quad \frac{dP_{38}(t)}{dt} = -\mu_3 P_{38}(t) + \lambda_2 P_{32}(t);$$
$$\frac{dP_{39}(t)}{dt} = -\mu_1 P_{39}(t) + \lambda_1 P_{33}(t); \quad \frac{dP_{40}(t)}{dt} = -\mu_3 P_{40}(t) + \lambda_3 P_{33}(t);$$
$$\frac{dP_{41}(t)}{dt} = -\mu_1 P_{41}(t) + \lambda_1 P_{34}(t); \quad \frac{dP_{42}(t)}{dt} = -\mu_2 P_{42}(t) + \lambda_2 P_{34(t)};$$
$$\frac{dP_{43}(t)}{dt} = -\mu_1 P_{43}(t) + \lambda_1 P_{35}(t); \quad \frac{dP_{44}(t)}{dt} = -\mu_2 P_{44}(t) + \lambda_2 P_{36}(t);$$
$$\frac{dP_{45}(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)P_{45}(t) + \mu_2 P_{37}(t) + \mu_1 P_{39}(t);$$
$$\frac{dP_{46}(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)P_{46}(t) + \mu_1 P_{41}(t) + \mu_2 P_{44}(t) + \mu_3 P_{38}(t);$$
$$\frac{dP_{47}(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)P_{47}(t) + \mu_1 P_{43}(t) + \mu_2 P_{42}(t) + \mu_3 P_{40}(t);$$
$$\frac{dP_{48}(t)}{dt} = -\mu_3 P_{48}(t) + \lambda_3 P_{45}(t); \quad \frac{dP_{49}(t)}{dt} = -\mu_2 P_{49}(t) + \lambda_2 P_{46}(t);$$
$$\frac{dP_{50}(t)}{dt} = -\mu_1 P_{50}(t) + \lambda_1 P_{47}(t);$$
$$\frac{dP_{51}(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)P_{51}(t) + \mu_3 P_{48}(t) + \mu_2 P_{49}(t) + \mu_1 P_{50}(t);$$
$$\frac{dP_{52}(t)}{dt} = \lambda_1[P_{16}(t) + P_{32})t) + P_{36}(t) + P_{45}(t) + P_{46}(t) + P_{51}(t)] +$$
$$+\lambda_2[P_{20}(t) + P_{33}(t) + P_{35}(t) + P_{45}(t) + P_{47}(t) + P_{51}(t)] +$$
$$+\lambda_3[P_7(t) + P_{18}(t) + P_{19}(t) + P_{34}(t) + P_{35}(t) + P_{36}(t) + P_{46}(t) + P_{47}(t) + P_{51}(t)].$$

Очевидно, що у кожний момент часу t сума усіх імовірностей перебування системи у будь-якому із можливих станів дорівнює одиниці:

$$\sum_{k=1}^{52} P_k(t) = 1. \tag{2}$$

Це означає, що для знаходження розв’язків цієї системи рівнянь достатньо використати лише 51 рівняння, оскільки ймовірність перебування системи у граничному стані повної відмови знаходимо за умови (2):

$$P_{52}(t) = 1 - \sum_{k=1}^{51} P_k(t). \tag{3}$$

Оскільки сума правих частин усіх рівнянь математичної моделі дорівнює нулеві, то цю властивість можна використати для перевірки правильності формування моделі.

У наведеній моделі станами нормального функціонування є такі стани:

$$P_1, P_5, P_6, P_7, P_{16}, P_{17}, P_{18}, P_{19}, P_{20}, P_{32}, P_{33}, P_{34}, P_{35}, P_{36}, P_{45}, P_{46}, P_{47}, P_{51};$$

Стани простою (ремонту):

$$P_2, P_3, P_4, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}, P_{25}, P_{26}, P_{27}, P_{28}, P_{29}, P_{30}, P_{31},$$
$$P_{37}, P_{38}, P_{39}, P_{40}, P_{41}, P_{42}, P_{43}, P_{44}, P_{48}, P_{49}, P_{50}.$$

Наявність часових залежностей перебування системи у можливих станах $P_k(t)$ після знаходження розв’язків системи рівнянь дає змогу визначити **функцію готовності** $K_г(t)$ як суму часових залежностей усіх імовірностей перебування системи у стані нормального функціонування, а **функцію простою** $K_п(t)$ - як суму часових залежностей усіх імовірно-стей перебування системи у стані простою.

Середній наробіток (напрацювання) між відмовами MidAct визначаємо на підставі функції готовності $K_г(t)$:

$$\mathrm{MidAct} = \int_0^\infty K_г(t)dt\,, \tag{4}$$

а середній час відновлення (простою) – на підставі функції простою $K_п(t)$

$$\mathrm{MidPas} = \int_0^\infty К_п(t)dt. \tag{5}$$

Для прикладу було розраховано залежності функції готовності та функції простою від часу в годинах для таких значень інтенсивностей відмов та інтенсивностей відновлень:

λ_1=0,001(1/год); λ_2=0,001(1/год); λ_3=0,00001(1/год);

μ_1=0,01(1/год); μ_2=0,01(1/год); μ_3=1,0(1/год);

Ці залежності зображено на рис. 2, де вказано також значення середнього напрацювання між відмовами MidAct=2058,2 год та середнього часу відновлення (простою) MidPas=311,86 год.

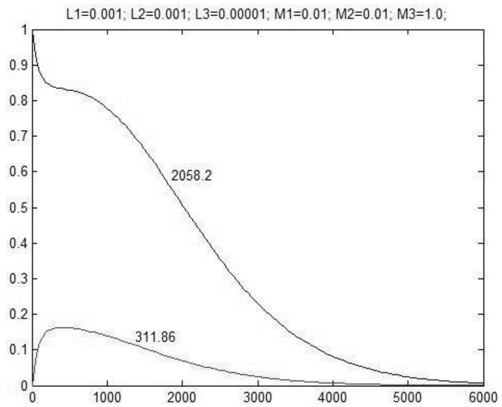

Рис. 2. Залежності функції готовності (вище) та функції простою від часу в годинах

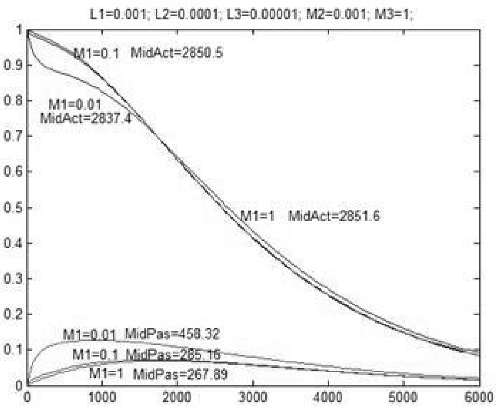

Рис. 3. Ті самі залежності при варіаціях параметра μ_1

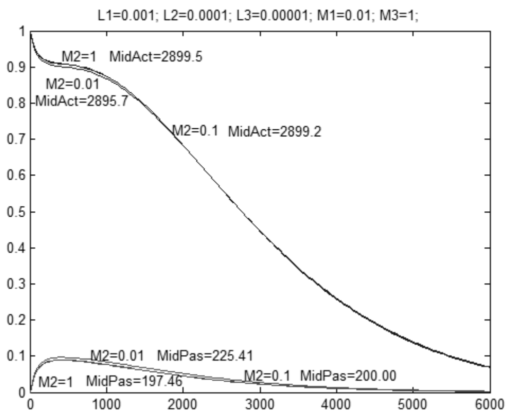

Рис. 4. Ті самі залежності при варіаціях параметра μ_2

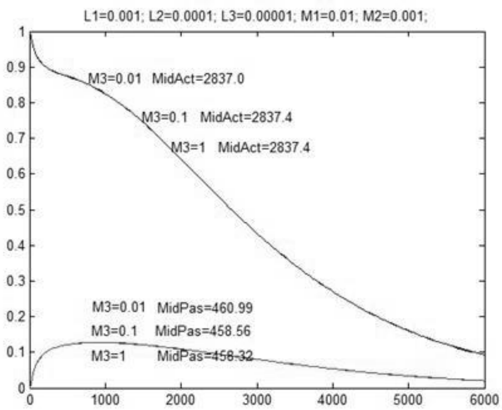

Рис. 5. Ті самі залежності при варіаціях параметра μ_3

На рис. 3–5 зображено часові залежності функції готовності та функції простою за незмінних значень інтенсивностей відмов λ_1=0,001(1/год), λ_2=0,0001(1/год), λ_3=0,00001(1/год) та при варіаціях параметра μ_1 (рис. 3), параметра μ_2 (рис. 4), параметра μ_3 (рис. 5), а також вказано значення середнього напрацювання між відмовами MidAct та середнього часу відновлення (простою) MidPas.

Всі обчислення зроблено в системі MATLAB.

Порівняльне дослідження методів розв'язування рівнянь Колмогорова–Чепмена

Добре відомі рівняння (1) можна стисло записати так:

$$dx/dt = A \cdot x, \qquad (6)$$

де x – вектор змінних стану; A – квадратна постійна матриця.

Це система лінійних звичайних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами у нормальній формі Коші, розв'язок якої відомий в аналітичному вигляді:

$$x(t) = e^{tA} \cdot x_0, \qquad (7)$$

де e^{tA} – матрична експонента, x_0 – вектор початкових умов [4].

Але дослідники, не задумуючись, розв'язують систему (6) методами числового інтегрування, що можуть бути гіршими, ніж аналітичний розв'язок (7).

Ми вирішили зробити пряме порівняння обох підходів за критеріями точності та часу розв'язування.

Спочатку треба вибрати конкретні методи для порівняння.

Матричну експоненту можна обчислювати різними методами [5]. Оскільки порівняння ми робимо в системі MATLAB, то скористаємось надійним досвідом розробників системи. Функція MATLAB **expm** обчислює матричну експоненту за Паде-апроксимацією з нормуванням.

Щодо числових методів, то нежорстка система (6) найшвидше і найточніше розв'язується класичним методом Рунге–Кутта четвертого порядку (функція MATLAB **ode45**).

Порівняння обох методів на прикладі тестової системи, описаної у цій статті, дало такі результати.

Абсолютні розбіжності розв'язків двома підходами не перевищують 10^{-5}, тож за точністю методи ідентичні. Залишається порівняти за часом розв'язування.

Цей час фіксували двома функціями MATLAB **tic – toc**. Для 125 часових відліків час розв'язування за числовим методом виявився загалом втричі більшим, ніж з використанням формули (7).

Зроблено узагальнююче порівняння часу розв'язування залежно від розміру матриці A системи (6) та від кількості часових відліків розв'язку. Матрицю A системи заповнювали випадковими числами, рівномірно розподіленими в діапазоні (-1,1). Елементи вектора початкових умов x_0 також є випадковими числами з тим самим розподілом.

Результати обрахунків відносного часу розв'язування системи (6) числовим методом і методом матричної експоненти для повної матриці A є функцією двох змінних. Графічно зображенно цю функцію засобами MATLAB на рис. 6.

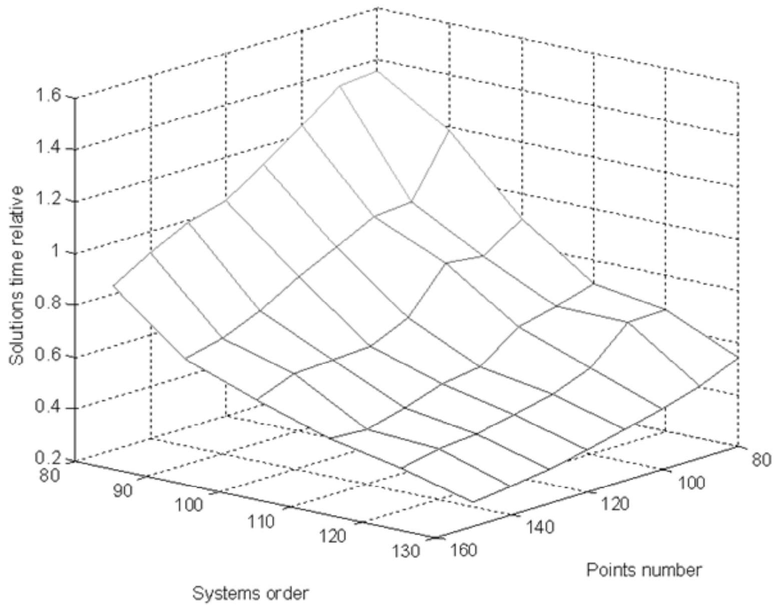

*Рис. 6. Залежність відносного часу розв'язування системи (6) від порядку **повної** матриці A та від кількості часових відліків розв'язку*

Конкретним випадкам відповідають точки на поверхні, зображеній на рис. 6. Якщо відповідне значення відносного часу більше за одиницю, то система (6) розв'язується швидше за формулою (7) з використанням Паде-апроксимації, ніж за числовим методом Рунге–Кутта.

Але в реальних системах, зокрема в тестовій системі, описаній вище, матриця A далеко не повна. Тому досліджено систему з тридіагональною матрицею A, в якої лише елементи головної діагоналі та двох прилеглих є ненульовими. Така матриця за структурою близька до матриці тестової системи.

Ненульові елементи тридіагональної матриці також є випадковими числами з рівномірним розподілом у діапазоні (-1,1). Результати розрахунків показано на рис. 7.

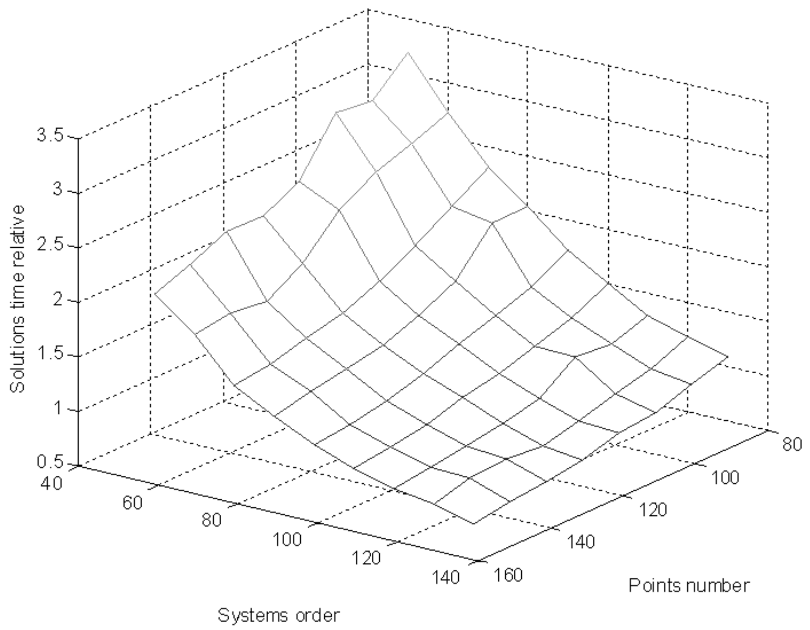

*Рис. 7. Залежність відносного часу розв'язування системи (6) від порядку **тридіагональної** матриці A та від кількості часових відліків*

Досліджуваний відносний час розв'язування системи (6) загалом монотонно залежить від порядку системи та від кількості часових відліків. Тому графічного зображення залежностей на рис. 6 та рис. 7 в околі одиничного значення достатньо для повного уявлення про переваги розв'язку за формулою (7) над числовими методами розв'язування.

Висновки

Розроблена у цій роботі математична модель нерезервованої відновлюваної технічної системи може слугувати тестовою моделлю при відлагодженні програм автоматизованої побудови надійнісних моделей відповідних технічних систем.

Порівняльне дослідження розв'язування системи рівнянь типу Колмогорова–Чепмена методами числового інтегрування та з використанням аналітичного розв'язку показало відсутність переваг у точності та певні переваги у часі розв'язування за другим підходом.

1. Державний стандарт України. Надійність техніки. Терміни та визначення. ДСТУ 2860-94. Видання офіційне. – К.: Держстандарт України. 2. Половко А. М., Гуров С. В. Основы теории надежности. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПБ.: БХВ – Петербург, 2008. – 704 с. 3. Математичні моделі та методи аналізу надійності радіоелектронних, електротехнічних та програмних систем: монографія / Ю. Я. Бобало, Б. Ю. Волочій, О. Ю. Лозинський, Б. А. Мандзій, Л. Д. Озірковський, Д. В. Федасюк, С. В. Щербовських, В. С. Яковина. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013. – 300 с. 4. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 448 с. 5. Moler, C. B.

and C. F. Van Loan, “Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix”, SIAM Review 20, 1978, pp. 801–836.

References

1. “State standard of Ukraine. Reliability of technology. Terms and definitions.” [“Derjavnyi standart Ukrainy. Nadiynist tehniky. Terminy ta vyznachennia.”] DSTU 2860-94. Official publication - Kyiv Gosstandart of Ukraine. 2. Polovko A. M., Gurov S. V. (2008), “The basics of reliability theory, 2nd ed., trans. and suppl. “ [“Osnovy teorii nadeznosti, 2-e izd., pererab. i dop.”], –- SPB: BHV-Petersburg, 2008.-704 pp. 3. Bobalo Yu. Ya., Volociy B. Yu., Lozinsky O. Yu., Mandziy B. A., Ozyrkovsky L. D., Fedasyuk D. V., Shcherbovskikh S. V., Yakovina V. S. (2013), “Mathematical Models and Methods for Analyzing the Reliability of Radioelectronic, Electrical and Program Systems: Monograph” [“Matematychni modeli ta metody analizu nadijnosti radioelektronnyh, elektrotehnichnyh ta programnyh system: monografia”] – Lviv, Publishing House of Lviv Polytechnic, 2013, 300 pp. 4. Fedoryuk M. V. (1985) “Ordinary Differential Equations – 2nd ed., trans. and suppl.” [“Obyknovennye differenzialnye upavnenia: 2-e izd, perepab. i dop.”] – M.: Science. The main edition of physical and mathematical literature, 1985. – 448 pp. 5. Moler, C. B. and C. F. Van Loan, (1978), “Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix”, SIAM Review 20, 1978, pp. 801–836.