

ЦЕНТР МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ІНСТИТУТУ ПРИКЛАДНИХ  
ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ІМ. Я.С.ПІДСТРИГАЧА  
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»  
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Вавричук Петро Григорович**

УДК 621.532.3.004.17:681.142:622.691.24:536.12

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**Математичне моделювання та чисельний аналіз двофазної фільтрації  
газу та рідини в пористому середовищі**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи  
05 «Технічні науки»

Подається на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

\_\_\_\_\_ П.Г.Вавричук

Науковий керівник  
П'янило Ярослав Данилович,  
доктор технічних наук

*Ідентичність всіх примірників дисертації*

**ЗАСВІДЧУЮ:**

*Вчений секретар спеціалізованої вченої ради*

**/Р. А. Бунь/**

Львів-2018

## АНОТАЦІЯ

**Вавричук П.Г.** Математичне моделювання та чисельний аналіз двофазної фільтрації газу та рідини в пористому середовищі. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи. – Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України; Національний університет «Львівська політехніка» МОН України, Львів, 2018.

Дисертація присвячена дослідженню процесів фільтрації газу та води в пористих середовищах та розробленню методів знаходження параметрів роботи підземного сховища газу за наявності водного фактору. У роботі розв'язано завдання науково-технічного характеру в галузі математичного моделювання та обчислювальних методів. У вступі зазначено актуальність проблем, обґрунтовано мету та основні завдання досліджень. Описано зв'язок роботи з науковими програмами та темами. Сформульовано наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів. Зазначено дані про особистий внесок автора, апробацію результатів роботи та публікації. У першому розділі проаналізовано процес руху газу в підземному сховищі газу при наявності водного фактору. Розглянуто вимоги до побудови математичної моделі таких фізичних процесів. Подано способи обробки вхідної інформації. Представлено огляд розвитку фундаментальних досліджень в області підземної гідромеханіки, дослідження фізико-математичних моделей руху газу, двофазної фільтрації газу, методів розв'язування рівнянь газової динаміки, теоретичних основ операційних методів. На основі проведеного огляду літератури та аналізу існуючих методів розв'язування задач обробки інформації та математичної фізики обґрунтовано необхідність побудови адаптивних математичних моделей процесів масопере- носу, зокрема, поширення газу в трубопроводах, фільтрації газу в пористих середовищах (підземних сховищах газу), поширення домішкових речовин в

приповерхневих шарах ґрунту, та регуляризованих методів розв’язування задач математичної фізики і обробки експериментальних даних, орієнтованих на використання апріорної інформації. Другий розділ присвячено математичному моделюванню процесу взаємозаміщення газу водою при наявності підшовної води. В даному розділі розроблено математичні моделі знаходження розподілу тиску води у водоносному шарі, визначення тиску на межі газоводяного контуру, визначення швидкості руху газоводяного контакту з метою недопущення заводнення свердловини. Приведено задачі гідравлічної ув’язки системи “пласт підземного сховища газу – газозбірний пункт” та алгоритми їх розв’язування. Подано алгоритм розрахунку параметрів гідравлічної ув’язки колекторного способу збору газу в підземних сховищах аналітичним способом. Проведено чисельні експерименти ряду поставлених завдань, а саме: знаходження залежності товщини водяного шару та швидкості підняття газоводяного контакту, при заданих значеннях дебіту свердловини, тиску на газозбірному пункті, тиску на нижній межі водяного шару, параметрів пористого середовища; знаходження залежності між тиском на газозбірному пункті, пластовим тиском та швидкістю підняття газоводяного контакту, при заданих значеннях дебіту свердловини, тиску на нижній межі водяного шару, товщини водяного шару, параметрів пористого середовища; знаходження залежності між дебітом свердловини, пластовим тиском та швидкістю підняття газоводяного контакту, при заданих значеннях тиску на газозбірному пункті, тиску на нижній межі водяного шару, товщини водяного шару, параметрів пористого середовища. Знайдені в ході чисельного експерименту співвідношення між дебітом свердловини, тиском на газозбірному пункті, пластовим тиском та швидкістю підняття газоводяного контакту дають змогу корегувати вхідні дані для недопущення заводнення свердловини. Результати дослідження можна використати для розрахунку депресії тисків у пласті під час визначення граничного безводного дебіту. Третій розділ присвячено математичному моделюванню процесу дифундування газу у воду при роботі підземного сховища газу. В даному розділі побудовано математичні моделі дифузії газів у пористих середовищах з ураху-

ванням конвективної складової, знаходження маси дифундованого газу у воді. Розроблено підхід для оцінки кількості дифундованого газу у воді при роботі підземного сховища газу. Досліджено вплив коефіцієнта дифузії, тиску на межі поділу “газ-вода” та тиску на нижній межі води на кількість дифундованого газу. Показано, що дифундований газ в більшості розміщений у верхній частині шару води, а також, що на кількість дифундованого газу значно впливає коефіцієнт дифузії та розміри пласту. Значний вплив на кількість газу має також тиск на межі поділу “газ-вода” та незначний вплив тиск на нижній межі для підтримування витіснення газу. Проведено чисельні експерименти ряду поставлених завдань, зокрема, визначення кількості дифундованого газу, знаходження залежності маси дифундованого газу від коефіцієнта дифузії тощо. Отримані результати в ході обчислювального експерименту дають змогу оцінити кількість газу в пластах підземних сховищ газу, а також можливість корегувати параметри підземного сховища газу для зменшення дифундування газу в воду при роботі підземного сховища газу. Четвертий розділ присвячено математичному моделюванню процесу руху газу в підземному сховищі газу за наявності законтурної води. В даному розділі досліджено процес відбирання газу при сталій швидкості його руху у вибійній зоні на основі послідовної зміни стаціонарних станів. Побудовано гідравлічну ув’язку процесу заміщення газу водою заусталеного масопереносу. Розроблено математичні моделі визначення тисків газу та води на межі поділу “газ-вода”, тиску води на зовнішньому контурі води. Побудовано балансову модель заміщення газу водою. Проведені чисельні експерименти дали змогу оцінити висоту стовпа води, яку необхідно підтримувати для ефективної експлуатації підземних сховищ газу, встановити ряд залежностей між різними параметрами пористого середовища.

У дисертаційній роботі адаптовано чисельно-аналітичні ітераційні методи для розв’язування вище поставлених завдань. Запропоновано нові чисельно-аналітичні моделі фільтрації газу у підземних сховищах та рекомендації щодо роботи підземного сховища газу за наявності водного фактору, а також методи дослідження вказаних моделей. Отримані теоретичні результати дали змогу

дослідити параметри, які впливають на роботу підземного сховища газу, та корегувати їх відповідно для покращення роботи підземного сховища газу.

Одержані в дисертаційній роботі результати дозволили: побудувати алгоритми для розрахунків параметрів, які впливають на роботу підземного сховища газу за наявності підшовної або контурної води; оцінити швидкість руху газоводяного контакту з метою недопущення заводнення свердловини; оцінити кількість газу, наявного у воді, залежно від тиску в пласті підземного сховища газу; розробити математичне забезпечення та пакет прикладних програм для знаходження параметрів ефективної роботи підземного сховища газу при водонапірному режимі.

*Ключові слова:* математичне моделювання, фільтрація газу та води, пористе середовище, дифузія, конвекція, підземне сховище газу, газоводяний контакт, газозбірний пункт.

### **СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Pyanylo J. Determining the gas-water contact moving boundary in underground gas storage operation / J. Pyanylo, P. Vavrychuk // TASK Quarterly. Scientific Bulletin of the Academic Computer Centre in Gdansk, Poland. – 2016. – Vol. 20, Number 1. – P. 33-41.
2. П'янило Я.Д. Визначення швидкості руху газоводяного контакту в процесі роботи підземних сховищ газу / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Вип. 18. – 2013. – С. 165-172.
3. П'янило Я.Д. Дифузія газів у пористих середовищах із урахуванням конвективної складової / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // Нафтогазова галузь України. – 2013. – Вип. 5. – С. 45-48.

4. Вавричук П.Г. Дослідження впливу тиску на наявність газу у воді в пластах підземних сховищ газу / П.Г. Вавричук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2016. – Вип. 23. – С. 9-16.
5. Pyanylo Ya. Calculation of the underground gas store functioning parameters in the water drive mode for maintenance of gas extraction process / Ya. Pyanylo, P. Vavrychuk // Mathematical Modeling and Computing, Lviv Polytechnic National University. – 2016. – Vol. 3, Number 2. – P. 208-216.
6. П'янило Я.Д. Процес заміщення газів в пористих середовищах з врахуванням конвективної складової / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // 10-та Відкрита наукова конференція ІМФН “PSC-IMFS-10” (17-18 травня 2012, Львів) : Збірник матеріалів. – Львів : НУ “ЛП”, 2012. – С. В17-В18.
7. Вавричук П.Г. Моделювання процесу руху газоводяного контакту в процесі відбирання газу з підземних сховищ / П.Г. Вавричук, Н.М. Припула // V Всеукраїнська наукова конференція «Нелінійні проблеми аналізу» (19-21 вересня 2013 року, Івано-Франківськ): Тези доп. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 15-16.
8. П'янило Я.Д. Моделювання процесу відбирання газу з водоносних пластів / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми термомеханіки” (22-24 вересня 2016 року, Львів): Зб. наук. праць / за заг. ред. Р.М. Кушніра [Електронний ресурс]. – Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2016. – С. 114-117.
9. П'янило Я.Д. Дослідження впливу водного фактору на параметри експлуатації підземних сховищ газу / П'янило Я.Д., Вавричук П.Г. // Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2017”: Секція А. Механіка (23-25 травня 2017 року, Львів). – Львів, 2017. – С. 14-16.

## ABSTRACT

**Vavrychuk P.** Mathematical modeling and numerical analysis of two-phase filtration of gas and water in a porous medium. – On the right of manuscript.

The Thesis for Ph.D degree in Technical Sciences in specialty 01.05.02 – “Mathematical modeling and computational methods”. – Centre for Mathematical Modelling of Pidstryhach IAPMM of NAS of Ukraine; – Lviv Polytechnic National University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2018.

The presented work is devoted to research of filtration process of gas and water in porous medium and development of finding parameters methods of an underground gas storage work in the presence of water factor. The task of the scientific and technical character in the field of mathematical modeling and computational methods is solved. The introduction indicates the urgency of the problems, the purpose-oriented goal and the main tasks of the research. The connection of work with scientific programs and themes is described. The scientific novelty and practical value of the obtained results are formulated. The data on the personal contribution of the author, the analysis of the results of the work and publication are indicated. The first section analyzes the process of gas movement in the underground storage of gas in the presence of water factor. The requirements for constructing a mathematical model of such physical processes are considered. The method of processing the input information is given. An overview of the development of fundamental research in the field of underground hydromechanics, the study of physical and mathematical models of gas motion, two-phase gas filtration, methods of solving gas dynamics equations, theoretical bases of operational methods is presented. Based on the literature review and the analysis of existing methods for solving problems of information processing and mathematical physics, the necessity of constructing adaptive mathematical models of mass transfer processes, in particular, the propagation of gas in pipelines, gas filtration in porous media (underground gas storage), the distribution of impurity substances in near-surface Soil layers and regularizing methods for solving problems of mathematical physics

and processing of experimental data, oriented on the use of a priori information. The second section is devoted to the mathematical modeling of the process of interchange of gas with water in the presence of plantar water. In this section, mathematical models of finding the distribution of water pressure in the aquifer, determining the pressure at the boundary of the gas-water circuit, determining the velocity of the gas-water contact, in order to prevent flooding of the well, have been developed. The tasks of the hydraulic linkage of the "reservoir of an underground storage of gas - gas collection point" system and algorithms of their solution are given. The algorithm of calculation of parameters of a hydraulic coupling of collector method of gas collection in underground storages is given in an analytical way. Numerical experiments on a number of tasks, in particular: finding the dependence of the thickness of the water layer and the speed of raising the gas-water contact, with given wells, pressure at the gas collection point, pressure on the lower boundary of the water layer, parameters of the porous medium; finding of the relationship between pressure at the gas collection point, reservoir pressure and the speed of raising the gas-water contact, with given wells, pressure on the lower boundary of the water layer, the thickness of the water layer, parameters of the porous medium; finding the dependence between the discharge of the well, reservoir pressure and the speed of raising the gas-water contact, at a given pressure at the gas collection point, pressure on the lower boundary of the water layer, the thickness of the water layer, parameters of the porous medium. Found in the course of a numerical experiment, the ratio between the discharge of the well, the pressure at the gas collection point, the reservoir pressure and the speed of raising the gas-water contact make it possible to correct the input data to prevent the flooding of the well. The results of the study can be used to calculate the pressure depression in the reservoir during the determination of the boundary anhydrous debit. The third section is devoted to the mathematical modeling of the process of diffusion of gas into water during operation of an underground gas storage facility. In this section mathematical models of gas diffusion in porous media are constructed taking into account the convective component, finding the mass of diffused gas in water. An approach was developed for estimating



the amount of diffused gas in water during operation of an underground gas storage facility. The influence of the diffusion coefficient, the pressure at the interface between the "gas-water" and the pressure at the bottom of the water on the amount of diffused gas is studied. It is shown that the diffused gas is mostly located in the upper part of the water layer, and also that the diffusion gas is significantly influenced by the diffusion coefficient and the size of the formation. Significant influence on the amount of gas also has pressure on the border of the gas-water separation and the insignificant effect of pressure on the lower limit to maintain gas displacement. Numerous experiments on a number of tasks, including the determination of the number of diffused gas, the dependence of the mass of diffused gas on the diffusion coefficient, etc., have been carried out. The results obtained during the computational experiments allow to estimate the amount of gas in underground gas storage layers and allow to adjust the parameters of underground gas storage to reduce dyfunduvannya gas in the water while working underground gas storage. The fourth section is devoted to the mathematical modeling of the gas flow process in underground gas storage in the presence of water flow. In this section, the process of gas removal at a steady speed of its movement in the vibe zone based on the successive change of stationary states is investigated. A hydraulic connection of the process of replacing methane with water from the massed mass transfer system was constructed. The mathematical models of determination of gas and water pressures on the interface between "gas-water", water pressure on the external contour of water are developed. The balance model of replacing the gas with water was constructed. The conducted numerical experiments made it possible to estimate the height of the water column, which must be maintained for the efficient exploitation of underground gas storage facilities, to establish a number of relationships between different parameters of the porous medium.

Numerical-analytical iterative methods for solving the above tasks are adapted. Recommendations concerning the operation of underground gas storage in the presence of water factor are proposed. New numerical-analytical models of gas filtration in underground storage facilities and operation of underground gas storage

in the presence of water factor, as well as methods of their research are proposed in the work. The obtained theoretical results made it possible to investigate the parameters that influence the operation of underground gas storage and the possibility to correct them accordingly in order to improve the operation of underground gas storage. The results obtained in the thesis resulted in: construction of algorithms for calculating the parameters that influence the work of the underground gas storage in the presence of plantar or contour water; estimation of the speed of gas-water contact in order to prevent flooding of the well; estimation of the amount of gas available in water, depending on the pressure in the formation of underground gas storage; development of the mathematical support and a package of applications for finding the parameters of the effective operation of underground gas storage in water pressure mode.

*Keywords:* mathematical modelling, filtration of gas and water, porous medium, diffusion, convection, underground gas storage, gas-water contact, gas collection point.

#### **LIST OF PUBLICATIONS BY THE SUBJECT OF THE THESIS:**

1. Pyanylo J. Determining the gas-water contact moving boundary in underground gas storage operation / J. Pyanylo, P. Vavrychuk // TASK Quarterly.Scientific Bulletin of the Academic Computer Centre in Gdansk, Poland. – 2016. –Vol. 20, Number 1. – P. 33-41.
2. Pyanylo Ya. Calculation of the gas-water boundary speed during operation of underground gas storage / Ya. Pyanylo, P. Vavrychuk // Physico-mathematical modelling and informational technologies. – 2013. – Vol.18. – P.165-172.
3. Pyanylo Ya. Diffusion of gases in porous media taking into account the convective component / Ya. Pyanylo, P. Vavrychuk // Oil & gas industry of Ukraine. – 2013. – Vol.5. – P. 45-48.
4. Vavrychuk P. The influence of pressure on the availability of gas in water in layers of underground gas storage / P.Vavrychuk // Physico-mathematical modelling and informational technologies. – 2016. – Vol.23. – C. 9-16.

5. Pyanylo Ya. Calculation of the underground gas store functioning parameters in the water drive mode for maintenance of gas extraction process / Ya. Pyanylo, P. Vavrychuk // *Mathematical Modeling and Computing*, Lviv Polytechnic National University. – 2016. – Vol. 3, Number 2, – P. 208-216.
6. Pyanylo Ya. The process of replacement of gases in porous media taking into account the convective component / Ya. Pyanylo, P. Vavrychuk // 10<sup>th</sup> Open Scientific Conference of IMFS “PSC-IMFS-10”(17-18 May 2012, Lviv): Collection of materials. – Lviv: NU “LP”, 2012. – P. B17-B18.
7. Vavrychuk P. Modeling of the process of gas-water contact in the gas withdrawal process from underground gas storage/ P. Vavrychuk, N. Prytula // Ukrainian scientific conference «Nonlinear analysis problems» (19-21 September 2013, Ivano-Frankivsk): Abstracts of reports. – Ivano-Frankivsk. – P. 15-16.
8. Pyanylo Ya. Modelling of process of gas withdrawal from aquifer reservoir / Ya. Pyanylo, P. Vavrychuk // International Scientific Conference “Modern problems of thermomechanics” (22-24 September 2016, Lviv): Collection of materials. – Lviv: IAPMM NASU, 2016. – P. 114-117.
9. Pyanylo Ya. The influence of water factor on operating parameters of underground gas storage reservoir / Ya. Pyanylo, P. Vavrychuk // The conference of young scientists “Pidstryhach readings – 2017”: Section A. *Mechanic* (23-25 May 2017, Lviv). – P. 14-16.

## ЗМІСТ

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ .....	15
ВСТУП .....	16
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ.....	23
1.1 Аналіз та формулювання проблеми .....	23
1.2 Математичні моделі процесу руху газу в пористих середовищах та обробка вхідної інформації .....	27
1.3 Огляд літератури .....	43
1.4 Висновки до Розділу 1 .....	48
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РУХУ ГА- ЗУ В ПІДЗЕМНОМУ СХОВИЩІ ГАЗУ ЗА НАЯВНОСТІ ПІДОШОВНОЇ ВОДИ.....	49
2.1 Формулювання задачі .....	49
2.2 Математична модель процесу фільтрації газу в пористих середови- щах .....	51
2.3 Математична модель знаходження розподілу тиску води у водоносному шарі .....	53
2.4 Розрахунок параметрів гідравлічної ув’язки колекторного способу збору газу в підземних сховищах аналітичним способом .....	55
2.4 Математична модель визначення тиску на межі газоводяного кон- туру .....	61
2.5. Математична модель визначення швидкості підняття газоводяного контурі .....	63
2.6 Задачі гідравлічної ув’язки системи “пласт підземного сховища газу – газозбірний пункт” та алгоритми їх розв’язування .....	65

2.7 Моделювання нестационарної фільтрації газу в пористих середовищах із зосередженими джерелами.....	68
2.8 Поведінка вагового дебіту поблизу свердловини малого діаметру...	71
2.9 Обчислення середнього тиску в пласті.....	73
2.10 Чисельні експерименти .....	75
2.11 Висновки до Розділу 2 .....	80
<b>РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДИФУНДУВАННЯ ГАЗУ У ВОДУ ПІД ЧАС РОБОТИ ПІДЗЕМНОГО СХОВИЩА ГАЗУ .....</b>	
3.1 Формулювання задачі.....	81
3.2 Математичне моделювання дифузії газів у пористих середовищах з урахуванням конвективної складової .....	81
3.3 Математична модель знаходження маси дифундованого газу у воді	87
3.4 Чисельні експерименти .....	88
3.5 Висновки до Розділу 3 .....	95
<b>РОЗДІЛ 4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РУХУ ГАЗУ В ПІДЗЕМНОМУ СХОВИЩІ ГАЗУ ЗА НАЯВНОСТІ ЗАКОНТУРНОЇ ВОДИ.....</b>	
4.1. Формулювання задачі.....	96
4.2 Дослідження процесу відбирання газу при сталій швидкості його руху у вибійній зоні на основі послідовної зміни стаціонарних станів ..	98
4.3 Гідравлічна ув'язка процесу заміщення газу у водою заусталеного масопереносу .....	100
4.4 Математичні моделі, які описують рух газу при роботі підземного сховища газу .....	102

4.5 Математична модель визначення тиску води на внутрішньому контурі .....	105
4.6 Математична модель визначення тиску газу на внутрішньому контурі .....	107
4.7 Математична модель визначення тиску води на зовнішньому контурі .....	108
4.8 Балансова модель процесу заміщення газу водою .....	112
4.9 Чисельні експерименти .....	118
4.10 Висновки до Розділу 4 .....	121
ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ.....	122
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	124
Додаток А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ .....	140
Додаток Б. АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ .....	142

## **СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ**

ПСГ – підземне сховище газу

ГВК – газоводяний контакт

ГЗП – газозбірний пункт

ШКС – шлейфо-колекторна система

МГ – магістральний газопровід

КС – компресорна станція

МКВ – міжколонний відвід

МКТ – міжколонний тиск

ГТС – газотранспортна система

ТО – технологічні об'єкти

НКТ – насосо-компресорні труби (робоча колона)

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Більшість сховищ газу створено у виснажених газових родовищах. Тиск газу, який в них зберігався, був не меншим, ніж гідростатичний. В останні роки, при суттєвому недовантаженні підземного сховища газу згідно встановлених технологічних схем, частина газосховищ експлуатується при пластових тисках, нижчих за гідростатичні. Слід очікувати, що водний фактор впливу на експлуатацію ПСГ буде посилюватися.

Вплив водного фактору проявляється на різних етапах експлуатації ПСГ та дослідження свердловин. Для забезпечення якісної експлуатації ПСГ (максимального уникнення/зменшення впливу водного фактору чи, можливо, в максимальній мірі його врахування на режим експлуатації) на всіх етапах планування режимів та підготовки технологічних об'єктів для забезпечення ефективної їх роботи необхідно розробити достатньо ефективні методи визначення процесу руху газоводяного контакту до свердловини.

Крім цього, в теперішній час актуальним для України є видобуток нафти та газу (газоконденсату) із виснажених родовищ. Одним із ефективних способів у таких випадках є використання сайклінг-процесу (витіснення рідиною чи газом).

Ефективна розробка вуглеводневих, зокрема газоконденсованих родовищ, та експлуатація газових сховищ з пластами-колекторами з наявною підшовною та контурною водою вимагають побудови системних математичних моделей, швидкозбіжних методів та алгоритмів якнайменшої складності.

У зв'язку з цим, важливим завданням є розроблення системної моделі, яка описує у взаємозв'язку фільтраційні, дифузійні, конвективні та газодинамічні процеси під час експлуатації ПСГ. Розрахунки режимів та оптимізація роботи згаданих процесів як єдиної термогідролічної системи є основними питаннями при її експлуатації та розвитку. Ці питання необхідно розв'язувати при формуванні технологічного режиму роботи системи, відпрацюванні рекомен-



дацій з оперативного керування процесами відбору та закачування, а також при корегуванні проектних режимів роботи в умовах реконструкції технологічного обладнання.

Незважаючи на велику кількість досліджень, вичерпної теорії для опису процесів, які відбуваються у пластах-колекторах газових сховищ з контурною та підошовною водою, на сьогодні ще не існує. Розрахунок параметрів фільтрації та руху двофазних середовищ ускладнюється ще й ступенем невизначеності параметрів пористого середовища та його неоднорідністю. Також на газосховищах у теперішній час дебіт свердловин в оперативних умовах не замірюється. Заміри відбуваються тільки при проведенні досліджень свердловин. Тому для систем зберігання газу є важливим завданням оцінювання дебітів свердловин за заданого тиску на газозбірному пункті, продуктивності, замірів тисків на гирлах свердловин і замірів пластових тисків. Це вимагає побудови відповідних адаптаційних моделей та методів, які за замірними параметрами (тиск, витрата, концентрація парів води у газі тощо) дають можливість уточнити як параметри моделі, так і здійснити чисельний аналіз двофазної фільтрації газу та рідини в такому складному пористому середовищі.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконувалась в рамках планових науково-дослідних робіт Центру математичного моделювання ІППММ імені Я.С.Підстригача НАН України та ПАТ «Укртрансгаз», в яких автор виступав як виконавець, зокрема:

- “Нестационарні задачі фільтрації газу в неоднорідних пористих середовищах в газовому і водонапірному режимах із зосередженими джерелами і стоками” (держ. реєстр. № 0107U000356);
- “Розробка та дослідження математичних моделей процесів деформування та переносу в неоднорідних середовищах з урахуванням локальної структури та зосереджених джерел і стоків” (I кв. 2012 –IV кв. 2016);
- “Розроблення математичних моделей, методів та алгоритмів для прогнозування і оптимального керування режимами експлуатації

підземних сховищ газу. Побудова методів та алгоритмів для прогнозування і оптимального керування процесами відбору-закачування газу в підземні сховища” (держ. реєстр. № 0107U005812);

- “Розроблення підсистеми оперативного планування динамічних режимів роботи магістральних газопроводів для автоматизованого диспетчерського керування потоками газу в газотранспортній системі України” (держ. реєстр. № 0110U004141);
- “Математичне моделювання нестационарної фільтрації газу в неоднорідних пористих середовищах з рухомими границями розділу газ-вода” Розділ 1 «Побудова математичної моделі та алгоритмів дослідження фільтрації газу та рідини в неоднорідних середовищах складної форми» до договору № 1 від 17 березня 2014 р. згідно з розпорядженням Президії НАН України від 05.03.2014, №142.

У рамках цих робіт здобувач розробив підходи до математичного моделювання та чисельного аналізу процесів двофазної фільтрації газу та рідини в пористому середовищі.

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертаційної роботи є розроблення моделей, методів, алгоритмів та математичного забезпечення для всестороннього вивчення впливу водного фактору на режим нагнітання і відбирання газу та дослідження шляхів зменшення його негативного впливу на якість експлуатації ПСГ.

Для досягнення цієї мети у дисертації були поставлені такі основні завдання:

- вивчити технологію роботи об’єктів, які задіяні в процесі відбору у випадку родовищ, відбору та закачування газу в підземні сховища з водонапірним режимом роботи пластів – колекторів;
- провести аналіз існуючих моделей окремих об’єктів та розробити системну модель, яка описує у взаємозв’язку фільтраційні, дифузійні, конвективні та газодинамічні процеси;

- побудувати математичну модель процесу заміщення газу водою залежно від параметрів роботи ПСГ та розробити алгоритм визначення швидкості руху ГВК;
- побудувати математичну модель та розробити алгоритм визначення дефундування газу у воду залежно від параметрів роботи ПСГ;
- дослідити вплив параметрів (тиск на газозбірному пункті, дебіт свердловини, пластовий тиск та швидкість підняття ГВК) пласту та газу на роботу ПСГ за наявності водного фактору з метою корегування їх для покращення експлуатації ПСГ.

*Об'єктом дослідження* є процеси фільтрації газу та води в пористих середовищах та робота підземного сховища газу за наявності водного фактору.

*Предметом дослідження* є математичні моделі масопереносу в пористих середовищах складної структури, розвиток підходів до побудови аналітико-числових моделей процесу заміщення газу водою і навпаки.

**Методи дослідження.** Основними методами, застосованими в роботі, є аналіз і обробка заміряних та розрахованих даних, інтегральні перетворення, математичний аналіз, розв'язування прямих та обернених задач математичної фізики, засоби побудови програмних комплексів.

**Наукова новизна результатів роботи** полягає у тому, що розв'язано актуальне науково-технічне завдання – аналітико-числове моделювання процесу взаємозаміщення газу водою з метою недопущення заводнення свердловини та визначення наявної кількості газу у воді.

У процесі розв'язання вказаного завдання отримано такі нові результати:

- вперше розроблено системну модель руху газу в ПСГ, яка описує у взаємозв'язку фільтраційні, дифузійні, конвективні та газодинамічні процеси, що дало змогу розробити підхід для оцінки кількості дифундованого газу у воду при роботі ПСГ;

- вперше побудовано математичну модель руху газу в ПСГ при наявності підшовної або контурної води та досліджено швидкість руху ГВК з метою недопущення заводнення свердловини;
- адаптовано існуючі чисельно-аналітичні ітераційні методи для уточнення рухомої межі поділу “газ-вода” та розроблено нові ітераційні процедури розв’язування обернених задач масопереносу та газової динаміки для знаходження параметрів (тиск на ГЗП, дебіт свердловини, пластовий тиск та швидкість підняття ГВК) роботи ПСГ.

**Практичне значення одержаних результатів.** В роботі розроблено чисельно-аналітичні моделі фільтрації газу у підземних сховищах та роботи ПСГ при наявності водного фактору, а також методи їх дослідження. Отримані теоретичні результати дали змогу дослідити параметри, які впливають на роботу ПСГ, та можливість корегувати їх відповідно для покращення роботи ПСГ.

Одержані в дисертаційній роботі результати дозволили:

- побудувати алгоритми для розрахунків параметрів, які впливають на роботу ПСГ за наявності підшовної або контурної води;
- оцінити швидкість руху ГВК з метою недопущення заводнення свердловини;
- оцінити кількість газу, наявного у воді, залежно від тиску в пласті ПСГ;
- розробити математичне забезпечення та пакет прикладних програм для знаходження параметрів ефективної роботи ПСГ при водонапірному режимі.

Частина результатів теоретичного і практичного характеру використано при розробці спецкурсу “Математичне моделювання фізичних процесів” для студентів Львівського національного університету імені Івана Франка та при формуванні оперативних та прогнозних параметрів роботи ПСГ в ДК “Укртрансгаз” НАК “Нафтогаз” України.

До дисертаційної роботи додано акти про використання результатів роботи на виробництві та в навчальному процесі.

**Вірогідність отриманих результатів** забезпечується строгістю постановок задач та їх математичного моделювання. Отримані теоретичні результати апробовані в обчислювальних експериментах на модельних задачах. Оцінки точності та збіжності запропонованих методів і алгоритмів обґрунтовані як теоретично, так і в процесі проведення числових експериментів на експериментальних даних.

**Особистий внесок здобувача.** Всі результати, отримані при вирішенні поставлених у дисертаційній роботі завдань, отримані автором самостійно. У наукових працях, опублікованих у співавторстві, автору належать: [88, 149] – підготовка вхідної інформації та верифікація результатів; [23, 87] – побудова алгоритму знаходження швидкості руху ГВК з метою недопущення заводнення свердловини; [99, 150] – аналіз моделей процесу руху газу в ПСГ; [90, 96] – аналіз режимних параметрів роботи ПСГ та побудова алгоритму розрахунку. У всіх наукових працях автору належить проведення числових експериментів та аналіз отриманих результатів.

**Апробація роботи.** Основні результати досліджень доповідалися на конференціях різного рівня: Десята відкрита наукова конференція Інституту прикладної математики та фундаментальних наук (17-18 травня 2012 року, Львів); V Всеукраїнська наукова конференція «Нелінійні проблеми аналізу» (19-21 вересня 2013 року, Івано-Франківськ); Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми термомеханіки" (22-24 вересня 2016 року, Львів); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2017" (23-25 травня 2017 року, Львів).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалась і обговорювалась на семінарах Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, кафедри прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка", Інституту

прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, кафедри математичного та функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка.

**Публікації.** Основні результати досліджень, що відображені у дисертації, опубліковані у 9 наукових працях, у тому числі: 5 статей, з них 4 статті у наукових фахових виданнях України, 1 стаття у науковому періодичному виданні іншої держави, з яких 2 статті у наукових виданнях, що входять до наукометричних баз, 4 публікації в матеріалах міжнародних та всеукраїнських конференцій.

**Структура і обсяг роботи.** Дисертаційна робота складається з чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 153 найменувань та додатків. Робота викладена на 143 сторінках, містить 114 сторінок основного тексту, 20 рисунків та 19 таблиць.

## РОЗДІЛ 1

### ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ

#### 1.1 Аналіз та формулювання проблеми

В останні роки, у зв'язку із зменшенням запасів енергоресурсів та постійним збільшенням витрат на їх використання, все гостріше стоїть питання ефективного та ощадного використання енергоресурсів. Згадана проблема пов'язана ще і з тим, що видобуток енергоресурсів вимагає постійного збільшення капітальних затрат. Оскільки одним із джерел енергоресурсів є газ, то розвиток підземного зберігання газу в світі зумовив розвиток відповідних фундаментальних та прикладних досліджень у наступних областях:

- газова динаміка [1-7, 10, 20, 27, 42-45, 56, 59, 106, 115-117, 131-134, 139-141, 143-145];
- формулювання задач математичної фізики стосовно проблем масо-переносу вуглеводнів та рідин в енергетичній галузі народного господарства [12, 16, 34, 47, 69, 79, 93, 138];
- масоперенос флюїдів в складних пористих середовищах [28, 32, 51, 79, 82, 116-118, 133, 139-141, 144];
- розробка аналітичних, чисельних і чисельно-аналітичних методів розв'язування різних типів задач, обґрунтування їх збіжності, оцінка швидкодії та складності [25, 35-37, 53, 54, 67, 69, 85, 86, 115, 121, 125];
- математичне моделювання руху газу в трубопровідних мережах [8, 9, 18, 19, 20, 34, 35, 42-44, 55, 62, 70-73, 81, 82, 94, 108] та складних пористих середовищах [79, 86, 91, 110, 126, 133, 136].

Зауважимо, що задачі, які при цьому виникають, є нелінійними, їх дослідження необхідно проводити в умовах значної невизначеності тощо. Тому, до появи швидкодіючих обчислювальних машин, дослідження проводились в

основному для окремих технологічних об'єктів аналітичними методами. З появою швидкодіючих обчислювальних машин, удосконаленням і розвитком методів розв'язування задач математичної фізики почався розвиток, як уточнених математичних моделей окремих технологічних об'єктів, так і моделювання складних систем в цілому [34, 35, 37, 77-79, 113-115].

Підземне сховище газу (на рис.1.1 показано структурну схему найбільшого в Україні Більче-Волицького ПСГ) є одним із найважливіших елементів всієї газотранспортної системи та призначене для ефективного регулювання сезонних перепадів постачання газу, а також для створення довгострокового, оперативного та інших резервів. Система підземного зберігання газу є важливою технологічною складовою ланкою єдиної системи газопостачання країни, що забезпечує надійність її функціонування та транзит газу через газотранспортну систему країни.

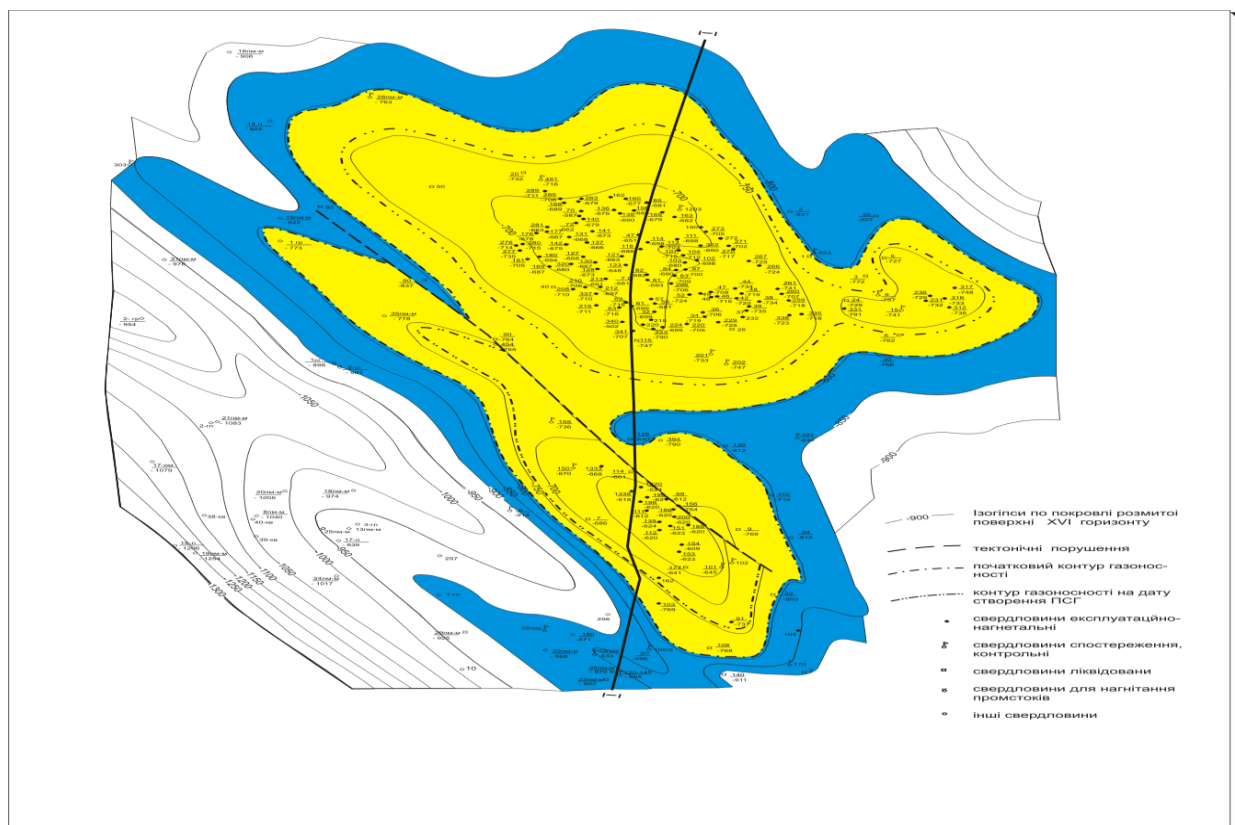


Рис. 1.1. Структурна схема Більче-Волицького ПСГ

ПСГ включає в себе:

- газопровід-підключення;



- внутрішньопромислові трубопроводи і газозбірні колектори;
- газозбірні пункти;
- компресорні станції;
- установки комплексної підготовки газу;
- свердловини різного технологічного призначення;
- пласт для зберігання газу (на рис. 1.2 показано вертикальний переріз пласту ПСГ);
- допоміжні споруди та інші об'єкти.

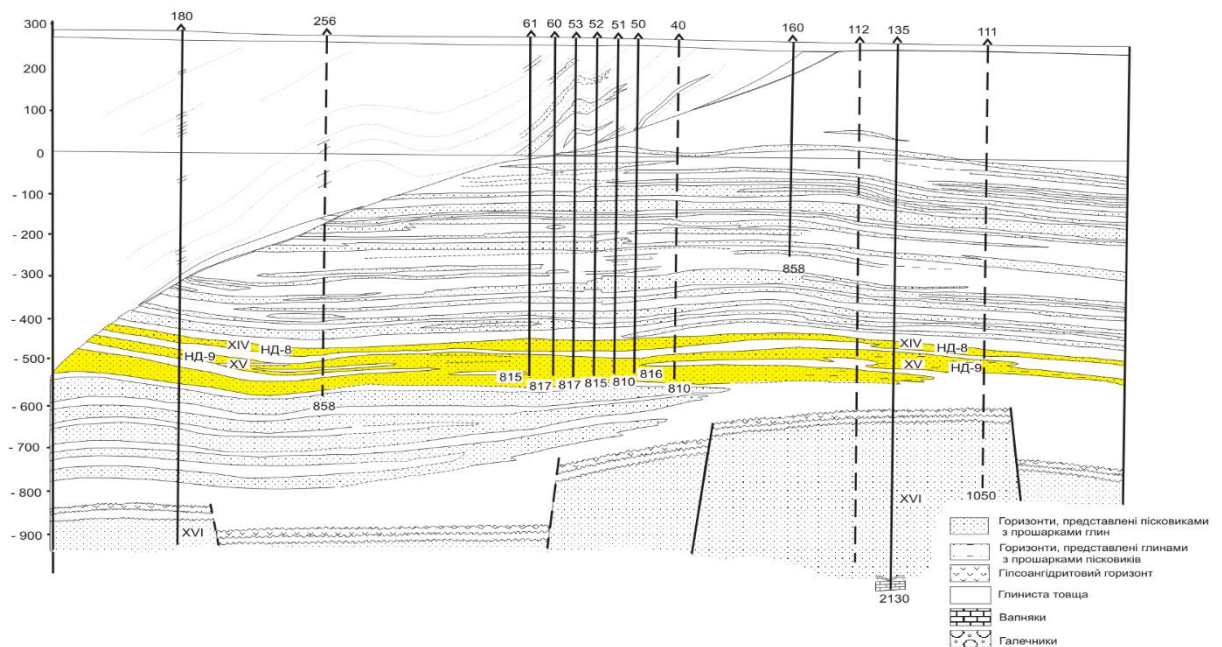


Рис. 1.2. Вертикальний переріз пласту ПСГ

У зв'язку з суттєвим недовантаженням ПСГ згідно встановлених технологічних схем, частина газосховищ експлуатується при пластових тисках нижчих за гідростатичні, тому виникає проблема врахування водного фактору при роботі підземного сховища газу. Наявність води знайдено практично у всіх газових сховищах (родовищах), створених у виснажених родовищах. Її кількість змінюється у значних межах. Вода утримується у порах в основному капілярними і адсорбційними силами. Важливою особливістю притоку газу до свердловини є значні втрати тиску у привибійній зоні пласту. У

результаті проведення числових експериментів встановлено, що на вибійну ділянку радіусом до 1 м припадає у реальних пластах-колекторах при незначних дебітах і стаціонарній фільтрації газу за законом Дарсі біля 50% усіх втрат тиску. Із збільшенням депресії на пласт втрати тиску в околі свердловини зростають. Також зростає відповідна доля загальних втрат тиску, яка припадає на привибійну зону пласту в умовах недосконалого за характером розкриття свердловини, порушення закону Дарсі та при нестационарному притоку газу до свердловини. В умовах водонапірного режиму величина втрати тиску в околі свердловини суттєво впливає на підтягування конусу води, що обмежує величину її максимального дебіту. Одним із основних параметрів газосховищ є їх піковість (сумарний максимальний відбір газу за заданий час) та мінімальні часові інтервали відборів і закачування. Оскільки на практиці в кожному із сховищ є наявною вода, то це вимагає детального вивчення газогідродинамічних процесів, які проходять в пористих середовищах. Тому для систем зберігання газу є важливим завдання оцінки дебітів свердловин за заданого тиску на ГЗП, продуктивності, замірів тисків на гирлах свердловин і замірів пластових тисків. Це вимагає побудови відповідних адаптаційних моделей та методів, які за заміряними параметрами (тиск, витрата, концентрація парів води у газі тощо) дозволяють уточнити параметри моделі. На рис. 1.3. показано структурну схему з'єднання “магістральний газопровід – підземне сховище газу” та приведено основні рівняння, які використовують при відбиранні (закачуванні) газу з ПСГ.

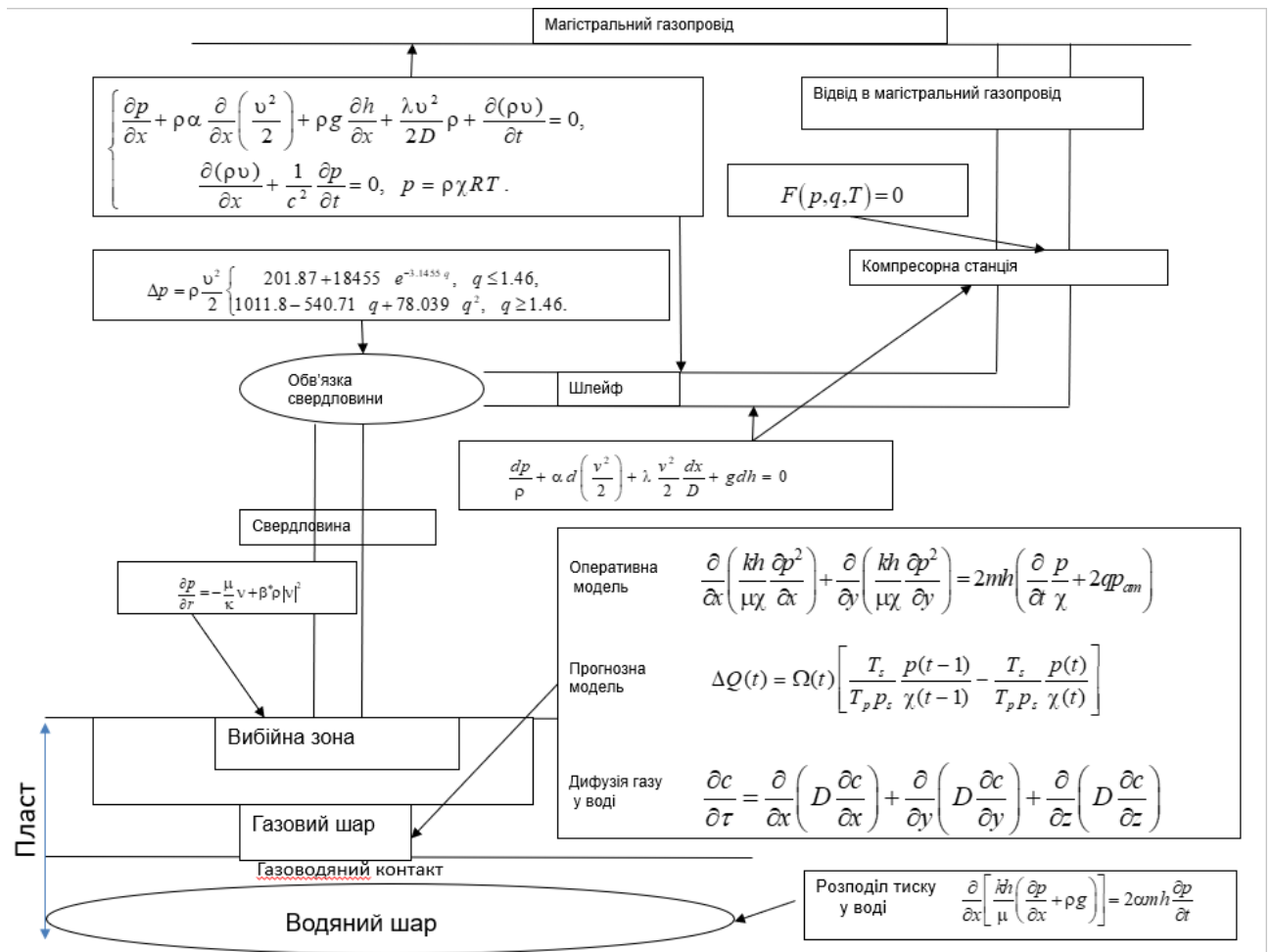


Рис 1.3. Структурна схема “Магістральний газопровід – підземне сховища газу”

## 1.2 Математичні моделі процесу руху газу в пористих середовищах та обробка вхідної інформації

Адекватність математичних моделей процесам руху газу в складних системах залежить від багатьох факторів, зокрема, наявної вхідної інформації, відповідності розрахункової структурної схеми топології, досліджуваної газотранспортної мережі тощо. Сформулюємо основні вимоги до складових математичної моделі фізичного процесу [79, 130, 151].

**Під математичною моделлю фізичного процесу розуміють:**

- формулювання відповідних задач математичної фізики;
- побудова початково-граничних умов;

- аналіз коефіцієнтів, що входять у рівняння, на основі яких визначаються просторові та часові границі дії побудованих рівнянь;
- параметричний зв'язок між характеристиками процесу (відповідні рівняння або системи рівнянь);
- методи розв'язування відповідних задач;
- визначення параметрів адаптації та способів їх знаходження.

#### **Вимоги до моделей:**

- адаптивність в заданих просторово-часових межах;
- врахування основних фізичних законів;
- адекватне врахування топології;
- адекватне врахування місцевих опорів – усереднення коефіцієнта гідравлічного опору;
- аналіз параметричних співвідношень – необхідність використання числових методів або побудова ітераційних процедур.

#### **Вимоги до вхідних даних:**

##### **Інформативність** – вхідні дані повинні:

- ідентифікувати моделі;
- у випадку використання емпіричних формул давати можливість уточнення значень коефіцієнтів, що в них входять;
- давати можливість порівняння заміряних та розрахованих даних.

##### **Точність** включає:

- точність адаптивності моделі;
- точність вхідних даних;
- точність методів розв'язування.

##### **Необхідна кількість даних повинна забезпечувати:**

- адаптацію моделі;
- побудову початково-граничних умов;
- аналіз числових результатів.

### **Вимоги до методів:**

**Збіжність** – необхідність дослідження границь застосування; числові методи не дають можливості отримувати розв’язки в особливих зонах.

**Точність** – числові методи мають обмежену похибку знизу; аналітичні методи, оскільки, як правило, розв’язки є у вигляді рядів, вимагають регуляризації операції сумування.

**Час реалізації** – суттєво залежить від поставлених задач:

- для планування на великі проміжки відступає на другий план;
- для розв’язування задач оперативного керування повинен бути таким, щоб після проведення розрахунків була можливість прийняти відповідні рішення;
- якщо остання вимога не виконується необхідно використовувати (по можливості) інші методи розрахунку.

**Точність розрахованих значень** – повинна бути такою, щоб можна було розв’язувати задачі оптимального керування потоками:

- в межах заданого діапазону на вказаному просторово-часовому проміжку;
- співмірна з точністю вхідних даних;
- зміна топології не повинна приводити до погіршення результатів.

Процеси, що проходять в технологічних об’єктах газотранспортної системи, описуються, як правило, нелінійними диференціальними рівняннями (звичайними або в частинних похідних) або нелінійними алгебраїчними рівняннями. Разом з тим, вхідною інформацією є покази відповідних приладів, які відомі з невисокою точністю та в нееквідистантних точках.

До основних особливостей об’єктів ГТС відносяться:

- нелінійність;

- залежність коефіцієнтів від просторово-часових координат та від шуканого рішення (зокрема параметру стиску);
- варіація параметрів системи в значних межах (зокрема довжина трубопроводу від декількох метрів до десятків кілометрів);
- невизначеність параметрів.

Оскільки, при формулюванні задач математичної фізики крайові умови визначаються за замірними даними і відомі в нееквідстантних точках з невисокою точністю, то такі особливості накладають значні обмеження на методи вирішення сформульованих задач. Особливості вирішення:

- оскільки вхідні дані дискретні, то необхідно використовувати тільки числові методи;
- внаслідок невисокої точності вхідних даних в процесі дискретизації існує мінімальний крок, оскільки в протилежному випадку проходить втрата значних цифр;
- для використання аналітичних методів необхідно проводити апроксимацію вхідних даних, яка теж вносить певний вклад в сумарну похибку.

Вирішити задачу в загальному нелінійному випадку можливо лише в окремих специфічних випадках. Дискретизація вихідної нелінійної задачі приводить до необхідності розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь, для яких використовують числові або наближені методи. Лінеаризація вихідної задачі може привести до порушення вихідних законів, на базі яких модель побудована. Одним із ефективних способів є лінеаризація вихідної задачі з побудовою нев'язки, яка уточнює рішення в процесі ітерації знайдене на попередньому кроці. Модель кожного ТО є адекватною в певних просторово-часових межах, оскільки однією із причин є те, що змінюються значення коефіцієнтів, які входять в модель. Встановити залежність коефіцієнтів в аналітичному вигляді, як правило, неможливо. Навіть в тому випадку, коли такі

напівемпіричні залежності побудовані, їх використання веде до ускладнення числової реалізації та, як показує практика, не завжди приводить до покращення результатів. Одним із шляхів вирішення цієї проблеми є побудова та розв'язання обернених коефіцієнтних задач або побудова ітераційного процесу з метою уточнення коефіцієнтів.

Поряд з тим, що газотранспортна система складається з дуже багатьох об'єктів, однорідні об'єкти мають різні геометричні розміри (наприклад, довжина трубопроводів є від декількох метрів до десятків кілометрів, крани різного типу тощо). Як відомо, в літературі крайові задачі математичної фізики вирішуються в канонічних формах та шляхом зведення довільних геометричних розмірів до одиничних. При цьому, як правило, для вирішення задач використовується один метод. Якщо досліджуються однакові ТО різного розміру і використовується один метод, переважно метод скінченних елементів, то виникає проблема розбиття на скінченні елементи. Оскільки визначити кількість елементів для кожного трубопроводу проблематично, тому вибирають певну однакову кількість розбиття. В цьому випадку для коротких трубопроводів за рахунок дискретизації втрачається значна кількість точних значущих цифр, що приводить до значної похибки остаточного рішення. Таким чином, об'єкти потрібно моделювати з врахування їх природних розмірів.

При створенні математичних моделей параметри, які використовуються, приймаються або табличними, або номінальними, геометрія ТО – канонічною. На практиці розміри ТО, здебільшого, не є канонічними, наприклад, трубопроводи не є лінійними і проходять в різних природних середовищах. У зв'язку з тим, для визначення реальних значень параметрів необхідно будувати додаткові алгоритми, зокрема формулювати обернені коефіцієнтні задачі математичної фізики.

Температура газу змінюється як за довжиною, так і по перерізу труби. Вона залежить і від середовища, в якому залягають трубопроводи. Встановити таку залежність практично неможливо і немає потреби, оскільки зміни темпера-

тури по перерізу та від середовища є незначними і їх врахування є за межами точності розв'язку задачі. Тому для розрахунку параметрів процесу руху газу в трубопроводі використовують нестационарну ізотермічну модель за різних крайових умов.

Відзначимо, що для багатьох прикладних задач достатньо мати рішення лінеаризованої моделі руху газу. В процесі моделювання ГТС використовуються ітераційні процедури. Збіжність цього методу залежить від початкового наближення шуканого розв'язку, за який доцільно взяти варіант лінеаризованої моделі.

На даний час існує велика кількість методів обробки інформації. Основними з них є спектральні в таких базисах, де існують швидкі перетворення. Це, зокрема, базиси тригонометричних функцій, Хаара, Уолша і деякі інші. З приведеного в літературі аналізу випливає, що вони задовольняють не всім вимогам, які на даний час ставляться при розв'язуванні прикладних задач. За останній час широкого вжитку при розв'язуванні задач обробки інформації набули інші ортогональні базиси, зокрема базиси класичних ортогональних многочленів Якобі.

Спектральні методи дають можливість розв'язувати задачі в тому випадку, коли функції, що входять в математичну модель опису фізичного процесу, зображуються збіжними рядами за даним базисом. В теорії ортогональних рядів наводяться теореми, в яких сформульовано умови збіжності [31, 142, 152]. Спектральні методи розв'язування задач зводяться до обчислення узагальнених спектрів, а способи їх обчислення залежать від виду вхідної інформації.

Нехай многочлени  $u_n(x)$  ортогональні на проміжку  $[a, b]$  і функція  $\varphi(x)$  представляється ортогональним рядом за даними многочленами

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} u_n(x). \quad (1.1)$$



Відомо [31, 142, 152], що  $(N+1)$ -й ортогональний многочлен має  $N+1$  дійсний корінь, який належить до проміжку ортогональності. Тоді для обчислення узагальнених спектрів  $\varphi_n$  має місце оптимальна в  $L_2$  квадратурна формула

$$\varphi_n = \sum_{j=0}^N \rho_j^2 u_n(x_j) \varphi(x_j), \quad (1.2)$$

де  $x_j$  – корені многочлена  $u_{N+1}(x)$ , тобто

$$u_{N+1}(x_j) = 0, \quad \rho_j^2 = \sum_{i=0}^N u_i^2(x_j).$$

Для многочленів Якобі  $u_n(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , формули (1.1) та (1.2) будуть такими [98]:

$$\varphi(x) = \omega(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (1.3)$$

$$\varphi_n = W_N \sum_{i=1}^{N+1} \eta_{N,i} P_n^{(\alpha, \beta)}(x_i), \quad (1.4)$$

$$P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(x_i) = 0,$$

де позначено:

$$\eta_{N,i} = \frac{(1-x_i)^{1-\alpha} (1+x_i)^{1-\beta}}{\left[ P_n^{(\alpha, \beta)}(x_i) \right]^2} \varphi(x_i),$$

$$W_N = 2^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(N+\alpha+2)\Gamma(N+\beta+2)}{(N+1)!\Gamma(N+\alpha+\beta+2)} \frac{(2N+\alpha+\beta+2)^2}{(N+\alpha+1)^2(N+\beta+1)^2},$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, N+1},$$

$$r_n = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}{N!(2N+\alpha+\beta+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}. \quad (1.5)$$

Нехай дискретні значення функції  $\varphi(x_i)$  задаються з деякою похибкою  $\varepsilon$ , тобто  $\varphi(x_i) = \tilde{\varphi}(x_i) + \varepsilon$ . Тоді з формули (1.2) маємо

$$\varphi_n = \int_{-1}^1 \omega(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) (\tilde{\varphi}(x) + \varepsilon) dx = \tilde{\varphi}_n + \varepsilon \Delta\varphi_n, \quad (1.6)$$

де

$$\tilde{\varphi}_n = \int_{-1}^1 \omega(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \tilde{\varphi}(x) dx, \quad \Delta\varphi_n = \int_{-1}^1 \omega(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx.$$

Підставляючи рівність (1.6) в ряд (1.1), отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \omega(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}_n}{r_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \varepsilon \omega(x) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\varphi_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \\ &= \omega(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}_n}{r_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином, точність відновленої функції така ж, як і точність вхідної інформації. Зауважимо, що аналогічний результат справедливий для довільної ортогональної системи функцій.

Як правило, на практиці точки замірів сигналу  $F(t)$  в точках  $t_i$  розміщені довільним чином. Згідно означення [31]:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{1}{r_n} \int_{-1}^1 \omega(x) \varphi(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \\ &= \frac{2}{r_n (t_1 - t_0)} \int_{t_0}^{t_1} \omega\left(\frac{2t - (t_1 - t_0)}{t_1 - t_0}\right) F(t) P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{2t - (t_1 - t_0)}{t_1 - t_0}\right) dt. \end{aligned}$$

Згідно геометричного змісту означеного інтегралу Рімана, це є площа криволінійної трапеції. Оскільки значення функції  $F(t)$  відомі в точках  $t_i$ , то площу криволінійної трапеції на проміжку  $[t_{i-1}, t_i]$  можна апроксимувати багатьма способами, зокрема прямокутною трапецією. Тоді

$$S_i = \frac{1}{2} (t_i - t_{i-1}) \left[ F(t_i) \omega(x_i) P_n^{(\alpha, \beta)}(x_i) + F(t_{i-1}) \omega(x_{i-1}) P_n^{(\alpha, \beta)}(x_{i-1}) \right]$$

та

$$\varphi_n = \frac{2}{r_n(t_1 - t_0)} \sum_{i=1}^N S_i.$$

Для  $n = 0$

$$\varphi_0 = \frac{1}{r_0(t_1 - t_0)} \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) [F(t_i)\omega(x_i) + F(t_{i-1})\omega(x_{i-1})].$$

Задано значення функції  $F(t)$  в точках  $t_i$ . За означенням усереднення функції на проміжку  $t \in [0, l]$  задається формулою [31]:

$$F_c = \frac{1}{l} \int_0^l F(t) dt.$$

Нехай функція  $F(t)$  апроксимується ортогональним рядом [31]:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{r_n} p_n(t),$$

де  $p_n(t)$  – многочлени, ортогональні на проміжку  $t \in [0, l]$ ,  $r_n$  – нормуючий множник. Тоді

$$F_n = \frac{1}{l} \int_0^l F(t) p_n(t) dt.$$

За умови одиничної вагової функції

$$F_0 = \frac{1}{l} \int_0^l F(t) dt = F_c,$$

тобто нульовий коефіцієнт ортогонального розкладу за умови одиничної вагової функції є не що інше, як усереднене значення функції на проміжку ортогональності.

Згідно побудови нульовий та перший коефіцієнти ортогонального розкладу є відповідно середнім значенням та дисперсією (середньоквадратичним відхиленням).

### Обчислювальний експеримент

Обчислювальний експеримент проводився на основі заміряних даних для трубопроводу довжиною 122 км з внутрішнім діаметром 1,388 м, поданих в табл. 1.1, де позначено:  $t$  – час;  $p$  – значення тиску.

Таблиця 1.1. Значення тиску в усталеному ( $p_{cm}$ ) та неусталеному ( $p_{нест}$ ) режимах руху газу для різних значень часів ( $t$ ).

$P_{cm}$	$P_{нест}$	$t$	$P_{cm}$	$P_{нест}$	$t$	$P_{cm}$	$P_{нест}$	$t$
65,57	68,62	3441	65,6	68,31	2726	65,83	62,9	2013
65,36	68,42	3372	65,3	68,2	2711	65,83	62,7	2011
65,57	68,28	3295	65,51	68,05	2614	65,59	62,9	1980
65,36	68,17	3246	65,51	67,91	2611	65,38	62,67	1975
65,57	68,06	3231	65,75	67,76	2605	65,75	62,96	1971
65,36	67,92	3194	65,35	67,62	2575	65,3	62,7	1936
65,57	68,07	3129	65,56	67,44	2550	65,53	62,47	1929
65,35	68,27	3111	65,32	67,29	2521	65,33	62,27	1915
65,56	68,47	3105	65,69	67,09	2518	65,64	62,48	1911
65,35	68,68	3096	65,69	66,85	2516	65,37	62,7	1891
65,59	68,89	3090	65,47	66,73	2306	65,68	62,91	1881
65,36	69,09	3087	65,7	66,56	2300	65,28	63,14	1840

$P_{cm}$	$P_{нест}$	$t$	$P_{cm}$	$P_{нест}$	$t$	$P_{cm}$	$P_{нест}$	$t$
65,36	69,29	3085	65,44	66,44	2245	65,48	63,37	1830
65,59	69,5	3058	66,04	66,32	2241	65,77	63,66	1822
65,59	69,7	3056	65,67	66,22	2230	65,77	63,71	1820
65,36	69,91	3041	65,44	66,09	2197	65,4	63,82	1801
65,58	70,11	3035	65,44	66,26	2195	65,62	63,95	1792
65,33	70,32	3010	65,81	66,14	2190	65,62	63,89	1790
65,56	70,52	2985	65,47	66,02	2125	65,35	63,77	1762
65,33	70,76	2974	66,25	65,81	2121	65,35	63,64	1760
65,6	70,63	2960	65,4	65,6	2115	65,74	63,52	1756
65,37	70,51	2896	65,15	65,4	2104	65,33	63,42	1741
65,58	70,3	2890	65,4	65,19	2079	65,6	63,67	1735
65,37	70,08	2885	65,83	64,93	2071	65,4	63,45	1535
65,57	69,88	2861	65,46	64,78	2060	65,61	63,62	1532
65,31	69,68	2850	65,25	64,56	2058	65,61	63,51	1530
65,56	69,47	2810	65,25	64,35	2056	65,39	63,66	1525
65,33	69,26	2806	65,7	64,14	2050	65,59	63,89	1521
65,54	69,05	2795	65,41	63,93	2045	65,35	63,68	1491
65,31	68,84	2785	64,88	63,72	2043	65,56	63,89	1480
65,53	68,57	2761	64,88	63,52	2041	65,34	64,09	1245
65,3	68,44	2750	65,8	63,32	2035	65,57	64,3	1211

На основі поданих значень обчислені нульовий та перший коефіцієнти ортогонального розкладу (1.2) для многочленів Лежандра, які приймають значення  $\varphi_0 = 65,4535$ ,  $\varphi_1 = -0,0220$ .

Таблиця 1.2. Значення перших трьох коефіцієнтів розкладу тиску в ряд за многочленами Лежандра за стаціонарного (стаціонар) та нестаціонарного (нестаціонар) руху газу.

$N$	стаціонар			нестаціонар		
	$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_0$	$F_1$	$F_2$
20	65,5304	-0,1108	3,8603	63,0763	0,6783	4,0807
25	65,525	-0,0715	2,7262	63,1008	0,4642	3,3597
30	65,5259	-0,0637	2,1005	63,2187	0,0612	3,2366
35	65,5117	-0,0112	1,3491	63,5404	-0,7882	3,1628
40	65,5407	-0,0845	1,6021	64,164	-1,8828	3,021
45	65,5555	-0,0895	7,5527	65,0998	-2,5757	7,5264
50	65,5488	-0,0549	5,3194	65,3663	-2,7597	5,1843
55	65,5294	0,0124	3,4739	65,7914	-3,0852	3,3002
60	65,5213	0,0334	2,6812	66,0704	-3,3753	2,6087
65	65,5172	0,0377	2,0642	66,4614	-3,8549	2,2061
70	65,5132	0,0445	1,6964	66,7107	-4,0817	1,7621
75	65,5118	0,0454	1,5197	66,8133	-4,0823	1,3349
80	65,5082	0,0495	1,2411	66,9097	-3,7776	0,1959
85	65,5019	0,052	0,8449	67,1146	-3,2811	-1,1796

У першій колонці табл. 1.2 подані значення кількості перших замірів тиску з табл. 1.1, на основі яких обчислюються коефіцієнти Фур'є-Лежандра. Як було показано вище, нульовий коефіцієнт Фур'є-Лежандра визначає середнє арифметичне значення заміряної величини на відповідному проміжку. Оскільки у випадку многочленів Лежандра  $P_1(t) = t$ , то за означенням [31]:

$$F_1 = \frac{1}{l} \int_0^l F(t) p_1(t) dt = \frac{1}{l} \int_0^l F(t) t dt .$$

Остання формула виражає математичне сподівання випадкової величини. Аналіз результатів поданих в табл. 1.1 та 1.2 показує, що цю величину можна використовувати для ідентифікації характеру руху газу в трубопроводі.

Побудуємо формулу, на основі якої будемо визначати об'єм газу в трубопроводі. Мають місце формули [10, 47, 132, 143]:

$$M = \rho V = \rho_0 V_0 ,$$

$$p = \rho z R T ,$$

$$z = \frac{1}{1 + fp} ,$$

$$f = (24 - 0.21(T - 273.15)) \times 0.98692327 \cdot 10^{-9} .$$

Тут  $M$ ,  $\rho$ ,  $V$  – маса, густина, об'єм газу в робочих умовах відповідно,  $R$  – універсальна газова стала,  $T$  – абсолютна температура, а  $\rho_0$ ,  $V_0$  – відповідно густина та об'єм газу в стандартних умовах. Якщо відомі значення тиску на початку  $p_0$  та в кінці  $p_k$  трубопроводу, то його середнє значення обчислюється наступним чином [98]:

$$p_c = \frac{2}{3} \left( p_0 + \frac{p_k^2}{p_0 + p_k} \right) .$$

В цьому випадку питома зміна об'ємної витрати газу  $\Delta q_v$  за час, протягом якого середнє значення тиску змінюється від  $p_{c0}$  до  $p_{c1}$ , обчислюється за формулою [98]:

$$\Delta q_v = \frac{p_{c1} - p_{c0}}{\rho_0 RT} [1 + (p_{c1} + p_{c0})].$$

Для того щоб знайти зміну запасу газу  $\Delta Q_0$  в трубопроводі необхідно величину  $\Delta q_v$  домножити на корисний об'єм трубопроводу  $V$ , тобто

$$\Delta Q_0 = \Delta q_v V.$$

Обчислювальний експеримент з необхідності проведення попередньої обробки вхідних даних проводився на основі поданої вище цифрової інформації. Результати обчислень показані у вигляді графіків.

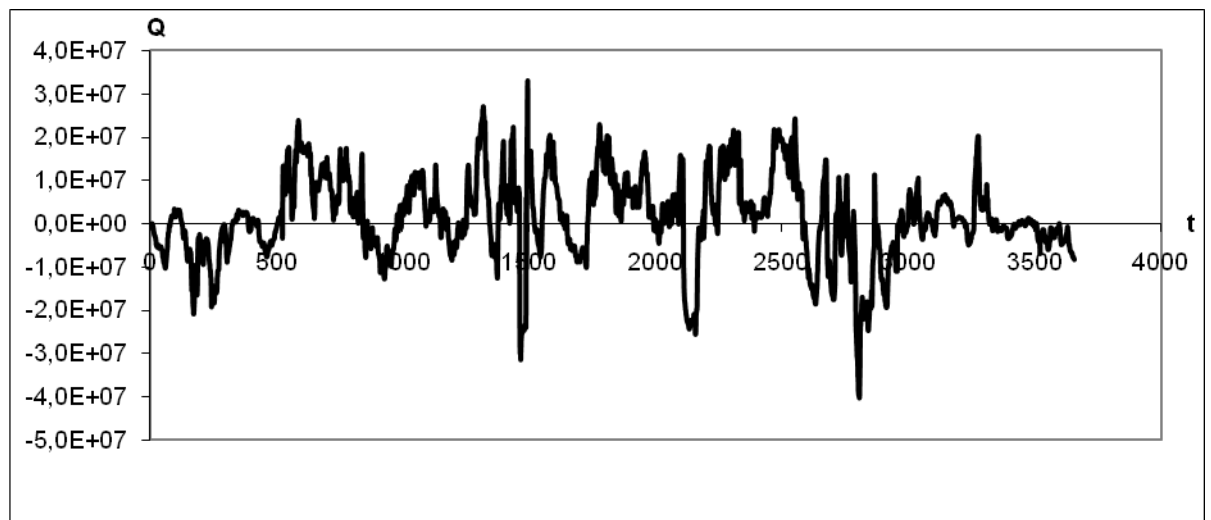


Рис.1.1. Залежність зміни запасу газу в трубі довжиною 122 км діаметром 1.388 м, обчисленого на основі заміряних даних вхідного та вихідного тисків через кожні дві години



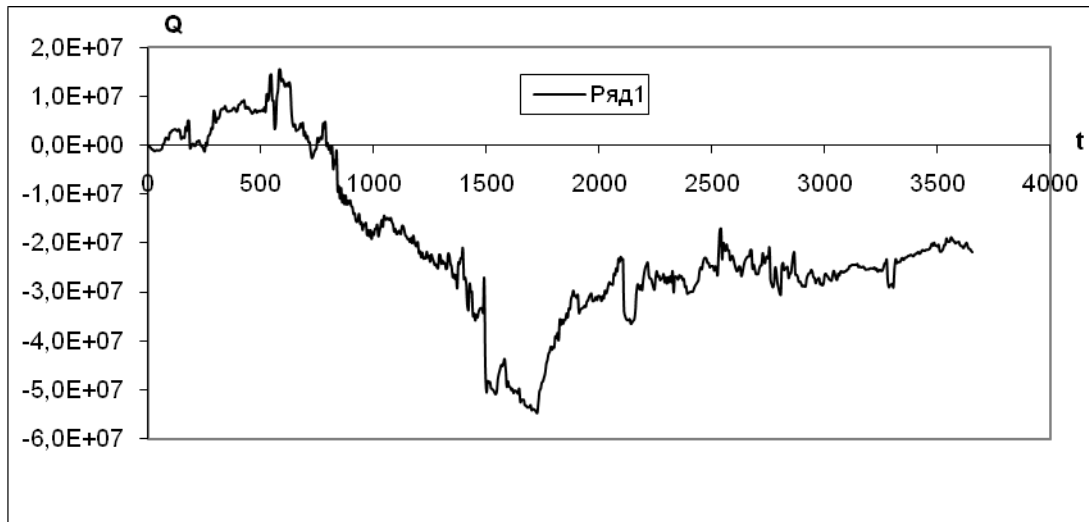


Рис.1.2. Залежність зміни запасу газу в трубі довжиною 122 км діаметром 1.388 м, обчисленого на основі заміряних даних вхідного та вихідного тисків через кожні десять годин

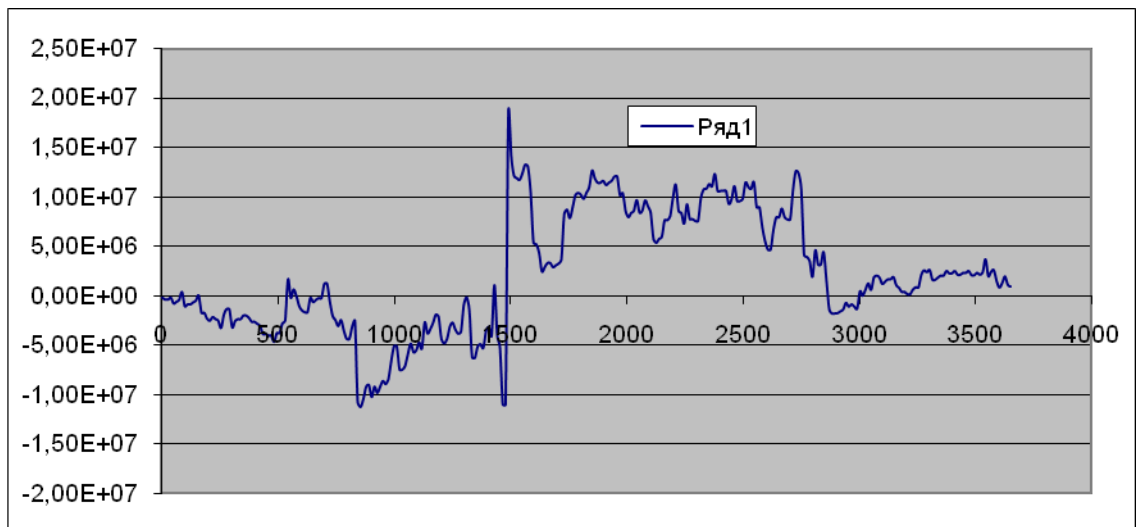


Рис.1.3. Залежність зміни запасу газу в трубі довжиною 122 км діаметром 1.388 м, обчисленого на основі заміряних даних вхідного та вихідного тисків через кожні двадцять чотири години

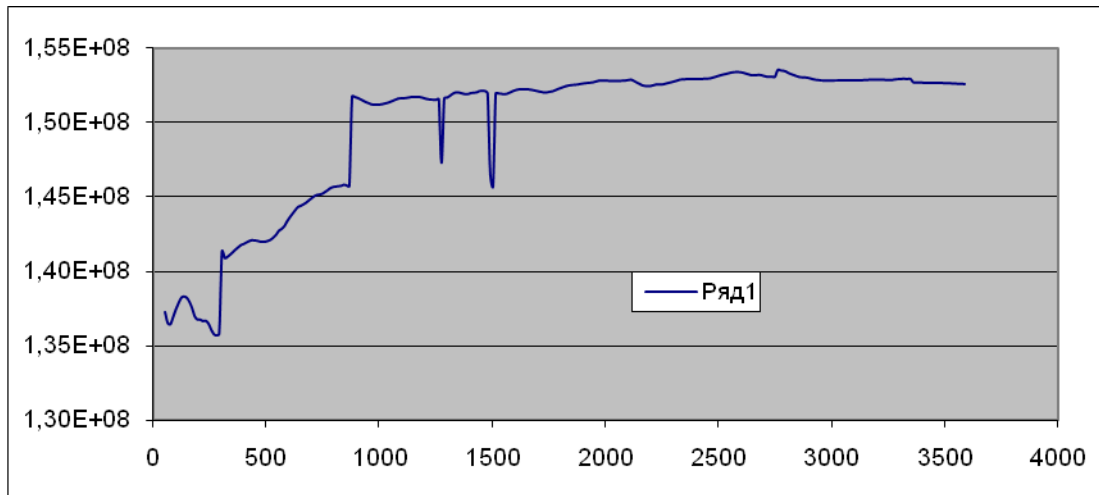


Рис.1.4. Залежність запасу газу в трубі довжиною 122 км діаметром 1,388 м, обчисленого на основі оброблених заміряних даних вхідного та вихідного тисків через кожні двадцять чотири години.

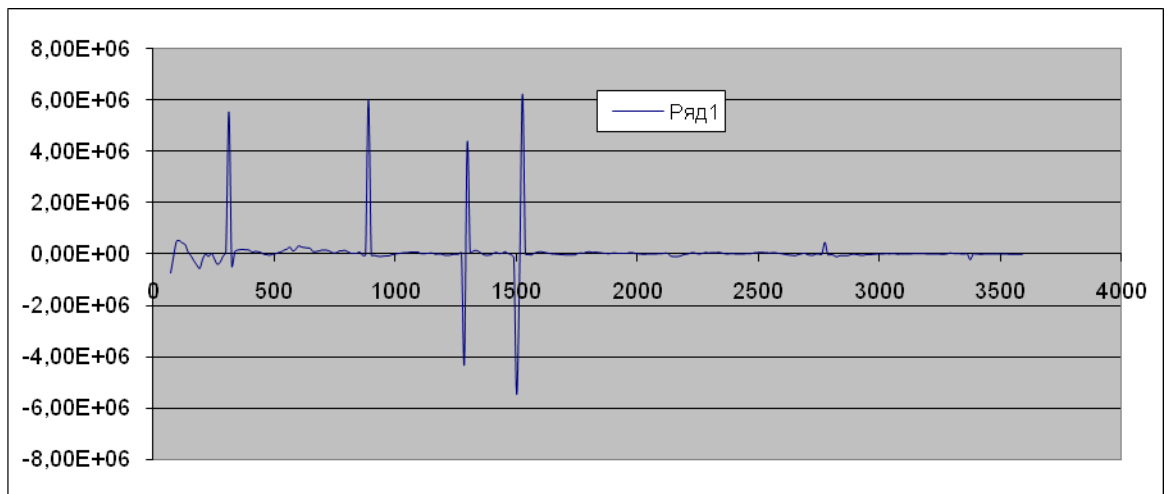


Рис.1.5. Залежність зміни запасу газу в трубі довжиною 122 км діаметром 1,388 м, обчисленого на основі оброблених заміряних даних вхідного та вихідного тисків через кожні двадцять чотири години

З результатів обчислювальних еспериментів слідують наступні висновки:

1. Оскільки, при зростанні довжини інтервалу буде наростати похибка, то на першому кроці необхідно вибрати таке значення довжини вибірки, при якій наближене значення нульового коефіцієнта  $\varphi_0$  буде стабільним.

2. Якщо оптимальне значення довжини вибірки  $l_0$  знайдене, то, вибираючи новий початок відліку, обчислити значення  $\varphi_0$ . При усталеному процесі  $\varphi_0$  повинно бути стабільним в межах заданої точності.
3. Знайдений інтервал стабільності коефіцієнта  $\varphi_0$  і саме його значення можна використовувати для ідентифікації моделей.
4. Аналогічним чином обчислюється

$$\varphi_n = \frac{1}{r_n(t_1 - t_0)} \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) \left[ F(t_i) \omega(x_i) P_n^{(\alpha, \beta)}(x_i) + F(t_{i-1}) \omega(x_{i-1}) P_n^{(\alpha, \beta)}(x_{i-1}) \right].$$

5. За знайденими значеннями коефіцієнтів  $\varphi_n$  обчислюється апроксимоване значення сигналу

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x).$$

6. При обчисленні запасу газу в трубопроводі та зміни запасу газу попередня обробка даних приводить до стабільних результатів. Аналіз вхідних даних (замірних даних) стосовно характеру руху показує, що наявні в обчисленнях відхилення (рис. 1.2) пов'язані з грубими помилками або промахами в процесі.

### 1.3 Огляд літератури

Особливості фільтрації рідини в пористих середовищах почали систематично вивчатись ще в середині XIX століття. В 1856 році французський інженер Анрі Дарсі встановив закон фільтрації, який виражає лінійну залежність між швидкістю фільтрації і градієнтом тиску [13, 144]:

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}.$$

При сумісному русі в пласті води і газу різних фаз вводиться поняття фазової проникності [13, 144] за формулами

$$v_g = -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad v_w = -\frac{k_w}{\mu_w} \frac{\partial p_2}{\partial x},$$

де  $p_1, p_2$  – відповідно тиск у газовій ( $g$ ) і водній ( $w$ ) фазах. Їх різниця рівна капілярному тиску. При фільтрації води чи газу у вертикальному напрямку маємо

$$v = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right).$$

В останніх формулах  $p = p(x_1, x_2, x_3, t)$  – розподіл тиску в середовищі,  $\rho$  – густина флюїду,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $k$  – коефіцієнт проникності середовища,  $\mu$  – динамічна в'язкість флюїду.

Пізніше французьким вченим Ж.Дюпюї було теоретично обґрунтовані досліджений закон Дарсі, отримавши формулу для визначення дебіту свердловини.

Загальні задачі теорії фільтрації, диференційні рівняння і розв'язування ряду задач про притік води до свердловини були вперше виконаними відомим російським механіком М.Є.Жуковським.

Перші фундаментальні теоретичні та експериментальні дослідження в області нафтогазової підземної гідромеханіки були проведені Л.С.Лейбензон. Він вивів диференційні рівняння руху газу та газованої рідини, сформулював задачі витіснення нафти водою, провів аналіз існуючих методів розрахунку запасів нафти і газу.

У працях Р.Коллінза, М.Маскета, С.Баклі, Р.Шілсюїза, У. Херета досліджується двофазна фільтрація, притік пружної рідини до свердловини, гідродинамічні розрахунки просування води у межі газових відкладів.

На сьогоднішній день, розвиток теорії фільтрації пов'язаний з вивченням багатофакторних процесів руху газу та рідини в складних пористих середовищах при тих чи інших граничних та початкових умовах.

Фізико-математичні моделі руху газу в пористих середовищах сформульовані та досліджені в роботах І.А.Чарного, А.В.Александрова, М.Г.Сударєва,

Є.І.Яковлева, С.А.Бобровського, П.П.Костробія, Я.Д.П'янила, М.А.Жідкової, Я.В.Грудза, А.Д.Тівяшева, Н.М.Притули, М.Г.Притули, Б.В. Гери та інших вчених. Методи розв'язування рівнянь газової динаміки викладені в роботах Ф.Г.Темпеля, М.А.Жідкової, А.В.Александрова, М.Г.Притули, Я.Д.П'янила, Н.М.Притули, Є.І.Яковлева, М.Г.Сухарєва та інших. При цьому слід зауважити, що система диференціальних рівнянь руху газу та рідини доповнюється рівняннями дифузії, термодинаміки, десорбції, абсорбції та ін. Наближеному розв'язуванню таких задач математичної фізики присвячені праці Ж.Міллера, Р.Галлагера, К.Мортонна, Д.Норрі, Я.Г.Савули, В.В.Іванова, Л.В.Канторовича, В.І.Крилова, Г.І.Марчука, М.М.Лаврентьєва, М.Г.Притули, Я.Д.П'янила, Н.М.Притули, Ф.Г.Темпеля, І.А.Чарного, А.В.Ликова, В.С.Дейнеки, В.І.Митропольського, А.А.Самарського, О.С.Лимарченка, Р.В.Хеммінга та інших.

Процеси, що відбуваються в пласті при розробці родовищ природних газів та експлуатації газових сховищ, також описуються нелінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних. Для визначення показників їх роботи з урахуванням неоднорідності пласта за колекторськими властивостями, довільного розташування різнодебітних свердловин, нерівномірності просування межі розділу “газ-вода” і так далі, необхідне інтегрування диференціальних рівнянь неусталеної фільтрації газу та води за відповідних початкових і граничних умов.

Колектори природного газу характеризуються неоднорідністю, мінливістю параметрів пласта. Потужність продуктивних відкладень по площі газового покладу може змінюватися в дуже широких межах (від кількох метрів до десятків кілометрів). Коефіцієнти проникності і пористості пласта зазнають значних змін як за висотою і площею газового покладу, так і в процесі експлуатації підземних сховищ газу.

До основних проблем застосування існуючих методів розв'язування прикладних задач масопереносу можна віднести:

- відсутність аналітичного подання вхідних даних, які часто відомі тільки в нерегулярних точках (зокрема задачі масопереносу та фільтрації газу в підземних сховищах);
- необхідність забезпечення адаптації математичних моделей до реальних фізичних процесів на основі розв'язування обернених задач з використанням апріорної інформації;
- необхідність забезпечення в певних випадках високої точності кінцевого результату (підвищення роздільної здатності в задачах цифрової обробки інформації).

Зазначимо, що не в усіх методах використання апріорної інформації приведе до покращення результатів.

Так, зокрема, описання процесу дифузії у середовищах із складною внутрішньою структурою приводить до системи диференціальних рівнянь з малим параметром та конвективною складовою, побудова розв'язку яких та їх числове дослідження існуючими методами пов'язане із значними труднощами. Крім цього, початково-крайові задачі масопереносу, особливо задачі газової динаміки і фільтрації газу в пористих середовищах, як правило, забезпечені початковими і крайовими даними в нерегулярних точках з невисокою точністю. Це приводить до потреби розробки таких схем їх розв'язування, які узгоджуються з існуючими експериментальними даними. При розв'язуванні температурних задач теорії пружності на основі перетворення Лапласа приходимо до зображень, обернення яких неможливе в аналітичному вигляді. Основою для розв'язування відповідних задач математичної фізики є спектральне подання функцій, що входять в математичну модель, та початкових і крайових умов у відповідних ортогональних базисах.

Теоретичні основи операційних методів закладено в працях В.А.Діткіна, А.П.Прудникова, Я.Мікусінського та їхніх учнів. При їх застосуванні часто виникає проблема обернення інтегралу Лапласа. Дослідженню цієї проблеми

присвячені роботи В.А.Діткіна, А.П.Пруднікова, В.М.Амербаєва, В.І.Крилова, Н.С.Скоблі, Дж.Уїддера, С.А.Баймультьдінової, В.М.Рябова, Дж.Влоха, Р.Беллмана, Р.Піссенса й інших.

Використання сучасних підходів до моделювання складних систем, сучасних технічних засобів збору, обробки та передачі даних, систем спряження їх із виконавськими пристроями та механізмами дає можливість в оперативному режимі приймати і реалізовувати обґрунтовані управлінські рішення. Для досягнення цього необхідно поставити і розв'язати комплекс оптимізаційних задач. Вказані проблеми розглядаються в роботах В.С.Дейнеки, І.В.Сергієнка, В.В.Скопецького, А.Г.Євдокимова, А.Д.Тевяшева, В.В.Дубровського, М.Н.Кулика, Б.Л.Кучика, Ю.І.Максимова, Р.М.Клемфуса.

З аналізу літератури випливає необхідність побудови адаптивних математичних моделей процесів масопереносу, зокрема, поширення газу в трубопроводах, фільтрації газу в пористих середовищах (підземних сховищах газу), поширення домішкових речовин в приповерхневих шарах ґрунту, та регуляризованих методів розв'язування задач математичної фізики і обробки експериментальних даних, орієнтованих на використання апріорної інформації. У випадку прикладних досліджень при дискретному заданні вхідних даних необхідно розробити способи побудови параметричних виглядів початково-крайових умов. Методи розв'язування прикладних задач повинні дозволяти контролювати точність обчислень, виключати наростання машинної похибки та використовувати апріорну інформацію про поведінку шуканих полів в певних областях.

На основі проведеного огляду літератури та аналізу існуючих методів розв'язування задач обробки інформації та математичної фізики обґрунтовано необхідність дальшого розвитку існуючих та побудови нових способів розв'язування згаданих вище задач.

#### **1.4 Висновки до Розділу 1**

В першому розділі наведено огляд літератури за темою дисертації, окреслено її місце у вирішенні науково-прикладних задач газової динаміки в газотранспортних мережах та обробки інформації. Показана необхідність побудови адаптивних математичних моделей процесів масопереносу та постановки відповідних задач математичної фізики. Сформульовані основні вимоги до моделей і методів, які дають можливість забезпечити достатню точність результатів в реальних умовах їх експлуатації.



## РОЗДІЛ 2.

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РУХУ ГАЗУ В ПІДЗЕМНОМУ СХОВИЩІ ГАЗУ ЗА НАЯВНОСТІ ПІДОШОВНОЇ ВОДИ

#### 2.1 Формулювання задачі

Експлуатація газових свердловин із підшовною водою супроводжується деформацією поверхні газоводяного контакту з утворенням конусу води. У разі досягнення граничних значень депресії та дебіту вода проривається на вибір свердловини. Тому в пластах із підшовною водою відбір газу зі свердловин обмежують допустимою депресією на пласт (граничним безводним дебітом).

Вода до вибою свердловини рухається внаслідок різниці тисків між гірлом свердловини та ГВК [87]. Опір рухові води чинить її вага й опір середовища (тиск газу, пористість і проникність). Вага стовпа води  $G$  обчислюється за формулою

$$G = mg = \rho gSh,$$

де  $S$  – площа основи,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $\rho$  – густина води,  $h$  – висота стовпа води. Своєю чергою, піднімальна сила внаслідок депресії тиску буде

$$F = \Delta pS.$$

Вода буде рухатися до вибою за умови

$$F \geq G,$$

або

$$\Delta p \geq \rho gh.$$

Гранична умова початку руху така:  $F = G$ , звідки

$$\Delta p = \rho gh.$$

В останній формулі не фігурує площа основи. Тому рух підшовної води до вибою свердловини будемо розглядати в плоскому безмежному середовищі товщиною  $l_s$  (рис.2.1).

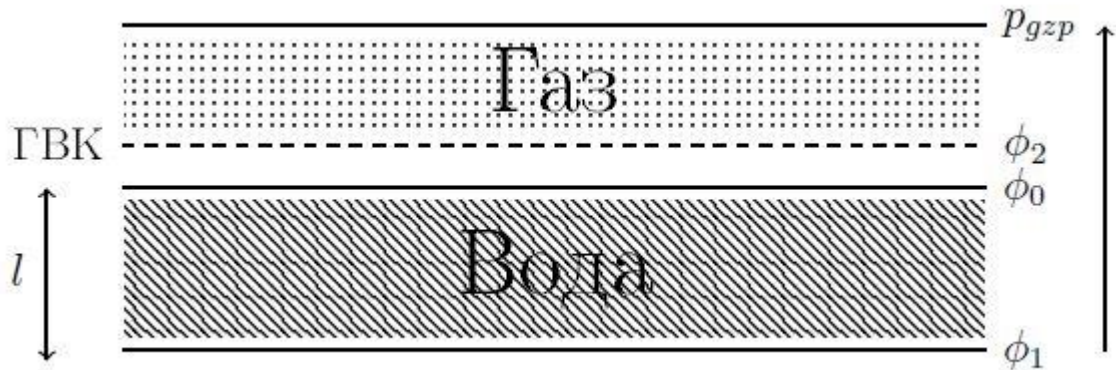


Рис. 2.1. Процес заміщення газу водою при наявності підшовної води

Розрахунок розподілу тиску води  $p(x,t)$  у плоскому безмежному середовищі товщиною  $l$  визначається як розв'язок одновимірного рівняння фільтрації [87]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{kh}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \right) \right] = 2\alpha m h \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Оскільки вода вважається нестисливою рідиною, то рівняння фільтрації буде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 2\alpha m h \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2.1)$$

де  $k$  – проникність пласту,  $\mu$  – динамічна в'язкість води,  $\alpha$  – коефіцієнт водонасиченості,  $m$  – пористість пласту. Оскільки товщина пласту вважається сталою, то рівняння (2.1) матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 2\alpha m \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Крайовими умовами вважаємо такі: на нижній границі шару тиск можна вважати сталим, рівним гідростатичному  $p_n$ ; на верхній границі значення тиску розраховується на основі гідравлічної ув'язки "ГЗП-вибійна зона-ГВК" і також вважається сталим  $p_v$ . Початковий розподіл тиску води у водяному шарі

$$p(x,0) = \rho g (h_0 + x), \quad 0 < x < l,$$

де  $h_0$  – висота до горизонту земної поверхні.

За таких умов, ставимо наступні завдання:

- за заданими тиском на ГЗП та дебітом свердловини, знайти тиск на верхній границі ГВК;
- за заданим тиском на нижній границі водяного шару та знайденим тиском на верхній границі ГВК, знайти розподіл тиску води у водоносному шарі;
- враховуючи знайдений розподіл тиску води у водоносному шарі, тиск на верхній границі ГВК, а також параметри пористого середовища (проникність, пористість і товщину пласту, динамічна в'язкість газу, коефіцієнт газонасиченості тощо), знайти швидкість підняття ГВК;
- знайшовши вище описані параметри, розробити алгоритм знаходження руху ГВК при відбиранні газу з ПСГ для недопущення заводнення свердловини.

## 2.2 Математична модель процесу фільтрації газу в пористих середовищах

Фільтрація газу в пласті підземного сховища в нестационарному випадку описується нелінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних [23]:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{k_{x_1} h}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{k_{x_2} h}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{k_{x_3} h}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial x_3} \right) = 2\alpha_n m h \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{z} \right) + 4m h q_{p_{st}}, \quad (2.2)$$

що має місце в трьохвимірній області  $\Omega_3 \subset R^3$ , яку займає пласт ПСГ. На  $\Omega_3$  задана множина точок (свердловин) з координатами  $\{x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , та

значення тисків  $p(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, t_0)$  в цих точках в момент часу  $t_0$ . В рівнянні (2.2) позначено:  $k_u$  – проникність пласту в напрямі  $u$ ,  $\mu$  – динамічна в'язкість газу,  $z$  – коефіцієнт стисливості,  $h$  – товщина пласту,  $m$  – пористість пласту,  $\alpha_n$  – коефіцієнт газонасиченості,  $q$  – густина відбору,  $p_{st}$  – значення атмосферного тиску в стандартних умовах ( $p_{st} = 0,1033$  МПа,  $T_A = 293$  К).

Рівняння (2.2) є нелінійним за тиском. Вхідними даними для знаходження його розв'язку на практиці є заміряні значення тиску в робочих і замірних свердловинах та умова непроникності на границі. Враховуючи такі особливості та неканонічність області  $\Omega_3$ , аналітично розв'язати таке рівняння можна лише в часткових випадках.

Пласти підземних сховищ газу, як і родовищ, мають порівняно незначну товщину. Зміна тиску на такому перепаді висот є незначною і нею можна знехтувати.

Якщо розглядати розподіл тиску в області свердловини, то рівняння (2.2) доцільно записати в циліндричних координатах. Враховуючи що область свердловини порівняно із всім сховищем є невеликою, параметри, які входять в рівняння (2.2), можна вважати сталими за координатою на деякому проміжку часу. За таких допущень рівняння фільтрації газу в циліндричних координатах буде мати вигляд [23]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{D}{p_0} \frac{\partial p}{\partial \tau}, \quad (2.3)$$

де  $r$  – радіус-вектор проведений з центру свердловини,  $p_0$ ,  $p$  – початкове значення тиску та значення тиску на границі області,  $D$  – коефіцієнт дифузії. За Лейбензоном

$$\tau = \frac{p}{p_0} t + \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}, \quad \beta = \frac{p_0 k \lambda_m^2}{2m\mu}.$$

Модель КС у найпростішому випадку можна подати у вигляді [87]:

$$p_n^2 - \theta p_k^2 = \sigma q^2, \quad (2.4)$$

де  $\theta$  та  $\sigma$  – деякі сталі.

Спад тиску на місцевих опорах визначається формулою:

$$\Delta p = \rho \frac{v^2}{2} \xi, \quad (2.5)$$

де  $v$  – швидкість руху газу,  $\xi$  – коефіцієнт місцевого опору, який обчислюється за формулою

$$\xi = \frac{A}{\text{Re}} + \xi_{KB}.$$

Тут  $A$  – коефіцієнт залежний від виду місцевого опору,  $\xi_{KB}$  – коефіцієнт місцевого опору у квадратичній зоні, яка визначається згідно формули [23]:

$$Q \geq Q_{nep} = 0.4 D^{2.5} \frac{\mu}{\Delta}.$$

Формула (2.5) використовується для побудови аналітичних та емпіричних моделей різного роду місцевих опорів, зокрема, поворотів трубопроводу, трійників, пристроїв звуження та розширення трубопроводів, відкриття та закриття кранів тощо.

### 2.3 Математична модель знаходження розподілу тиску води у водоносному шарі

Розглядається шар товщини  $l$ ,  $0 < x < l$ . Значення тисків на границях рівні  $\varphi_1(t)$  та  $\varphi_2(t)$ . Початковий тиск  $f(x)$ . У цьому випадку задача полягає у наступному [87]:

знайти розв'язок рівняння дифузії

$$\kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (0 < x < l), \quad t \in [0, \infty], \quad (2.6)$$

за крайових та початкової умов

$$p(0,t) = \varphi_1(t), \quad p(l,t) = \varphi_2(t), \quad p(x,0) = f(x).$$

Тут  $\kappa = \frac{\alpha k}{m\mu}$ , де  $\alpha$  – об’ємний модуль напруженості води,  $k$  – проникність

пористого середовища,  $\mu$  – динамічна в’язкість газу,  $m$  – пористість пласту.

Розв’язком поставленої задачі (2.6) є функція [87]:

$$p(x,t) = \frac{2}{l} \sum_1^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} \left[ \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy + \right. \\ \left. + \frac{n\pi \kappa}{l} \int_0^t \exp\left(\frac{\kappa n^2 \pi^2 y}{l^2}\right) [\varphi_1(y) - (-1)^n \varphi_2(y)] dy \right].$$

Стосовно фільтрації води, за згаданих вище крайових умов, значення другого інтеграла в останній формулі, враховуючи сталі граничні умови

$$p(0,t) = \varphi_1 \equiv const, \quad p(l,t) = \varphi_2 \equiv const,$$

знаходимо аналітично. Тоді отримуємо

$$p(x,t) = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi_2 - \varphi_1}{n} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy.$$

Оскільки

$$f(x) = \rho g (h_0 + x),$$

то

$$\int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l} dy = \rho g \int_0^l y \sin \frac{n\pi y}{l} dy = \rho g \frac{(-1)^{n+1} l^2}{n\pi}.$$

Тоді остаточно отримуємо наступну формулу [87]:

$$p(x,t) = \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi_2 - \varphi_1}{n} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{2\rho gl}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Знайшовши розподіл тиску води у водоносному шарі, а також приймаючи параметри пористого сердовища як задані, можна знайти швидкість підняття ГВК при відбиранні газу з ПСГ.

#### **2.4 Розрахунок параметрів гідравлічної ув'язки колекторного способу збору газу в підземних сховищах аналітичним способом**

При відбиранні газу з підземного сховища, як і при його видобуванні з родовища, використовують два способи збору: шлейфовий (кожна із свердловин має окреме з'єднання зі газозбірним пунктом) та колекторний (до одного шлейфу-колектора приєднано декілька свердловин). Якщо будувати модель роботи сховища, то математично шлейфове підключення простіше і легше піддається формальному опису та алгоритмізації. За умов колекторного підключення для розрахунку параметрів роботи свердловин застосовувався, в основному, числовий алгоритмічний підхід. Як і кожний з числових способів, він має свої переваги та недоліки. Тому є зміст розглянути аналітичний спосіб визначення параметрів роботи свердловин при їх колекторному підключенні.

Основними технологічними об'єктами, які приймають участь у відбиранні газу, є пласт, вибійна зона свердловини, робоча колона, обв'язка свердловини, шлейф та газозбірний пункт. При моделюванні такої системи необхідно мати схеми кожного з об'єктів.

Побудуємо аналітичний алгоритм розрахунку гідравлічної ув'язки системи “пласт підземного сховища – газозбірний пункт” за колекторного способу підключення свердловин [32, 79, 93]. При цьому використаємо подані

вище математичні моделі технологічних об'єктів, які приймають участь в процесі відбирання газу за виключенням тих, які ще не описані.

Коефіцієнт проникності вибою свердловини  $k_v$  визначається виразом [150]:

$$k_v = k_{v0} + k_{v1}, \quad (2.7)$$

$$k_{v0} = \frac{A_2}{\Delta_1 p}, \quad k_{v1} = \frac{B_2 q k_{v0}}{1.5 B_2 + A_2 q \sqrt{k_{v0}}}, \quad \Delta_1 p = \frac{A_1 q}{k_{pl}} + \frac{B_1 q^2}{k_{pl}^{1.5}} + C q^2.$$

$$A_1 = \frac{1}{h\pi} \mu p_s \ln \frac{R_k}{R_c}, \quad A_2 = \frac{\mu p_s}{\pi h_x} \ln \frac{2R_c h}{2r_k l_k n_0 h_x + \Theta(n_0)(r_1^2 - r_2^2)}, \quad (2.8)$$

$$B_1 = 12 \cdot 10^{-5} \frac{\rho_0 p_s d^2}{2\pi^2 h^2 m} \left( \frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_k} \right), \quad (2.9)$$

$$B_2 = \frac{\rho_0 p_s d^2}{\pi^2 h_x m} \left( \frac{1}{2r_k l_k n_0 h_x + \Theta(n_0)(r_1^2 - r_2^2)} - \frac{1}{2R_c h} \right), \quad C = \left( \frac{158}{\text{Re}} \right)^{10}. \quad (2.10)$$

Тут  $p_s, q_0, \rho_0$  – значення тиску, дебіту свердловини та густини газу в нормальних (стандартних) умовах відповідно,  $d$  – діаметр зерен породи,  $m$  – пористість пласту,  $k_{pl}$  та  $k_v$  – коефіцієнти проникності у пласті та околі вибою свердловини,  $\mu$  – динамічна в'язкість газу,  $h$  – середня потужність пласту,  $h_x$  – потужність пласту в області свердловини,  $r_1, r_2$  – радіуси обсадної (внутрішній) та робочої (зовнішній) колон відповідно,  $R_k$  – радіус поверхні циліндричної області живлення свердловини,  $R_c$  – радіус поверхні циліндра вибійної зони,  $r_k, l_k$  – радіус і довжина перфораційного каналу,  $n_0$  – густина перфорації,  $\text{Re}$  – число Рейнольдса. В останній формулі функція  $\Theta(n_0)$  визначається експериментальним шляхом і рівна нулю при  $n_0 = 0$ .

Спад тиску на місцевому опорі  $\Delta p$  визначається так [150]:

$$\Delta p = \rho \frac{v^2}{2} \xi.$$



Тут  $\nu$  – швидкість руху газу,  $\xi$  – коефіцієнт, який залежить від типу місцевого опору.

На основі останньої формули та заміряних даних будуються емпіричні формули для обв'язки свердловини, зокрема [150]:

$$\xi = \begin{cases} 201.87 + 18455 e^{-3.1455q}, & q \leq 1.46, \\ 1011.8 - 540.71q + 78.039q^2, & q \geq 1.46. \end{cases}$$

В останній формулі  $q$  – дебіт свердловин.

Якщо врахувати протидію тертю, то температура  $t$ , вздовж горизонтального трубопроводу, визначається виразом [150]:

$$t = t_r + (t_0 - t_r)e^{-ax} - D_h \frac{\Delta P}{aL}(1 - e^{-ax}) + \frac{gi}{ac_p}(1 - e^{-ax}),$$

де

$$i = \frac{\Delta P}{g\rho_c L}, \quad \Delta P = P_0 - P_k, \quad a = \frac{k\pi D}{MC_p}.$$

Середня температура  $t_c$  тоді визначається так [150]:

$$t_c = t_r + (t_0 - t_r) \frac{(1 - e^{-aL})}{aL} - D_h \frac{\Delta P}{aL} \left(1 - \frac{(1 - e^{-aL})}{aL}\right) + \frac{gi}{ac_p} \left(1 - \frac{(1 - e^{-aL})}{aL}\right).$$

Розрахунок параметрів роботи газосховища зводиться до розв'язання комплексу взаємопов'язаних задач. До основних задач відносяться:

- розрахунок термогазодинамічних параметрів газоносного пласту, свердловин, шлейфово-колекторної системи;
- розрахунок параметрів стану об'єктів газосховища, фізичних констант, гідравлічних еквівалентів тощо;
- розробка алгоритмів, які б узгоджували розрахункові статичні і динамічні параметри, знаходили параметри спряження окремих задач.

Розглянемо колектор, до якого приєднано  $n$  свердловин (рис. 2.2.). На рисунку позначено:  $p_{pl,i}$  – значення пластового,  $p_{v,i}$  – вибійного,  $p_{g,i}$  – гирлового тисків в околі  $i$ -ї свердловини.

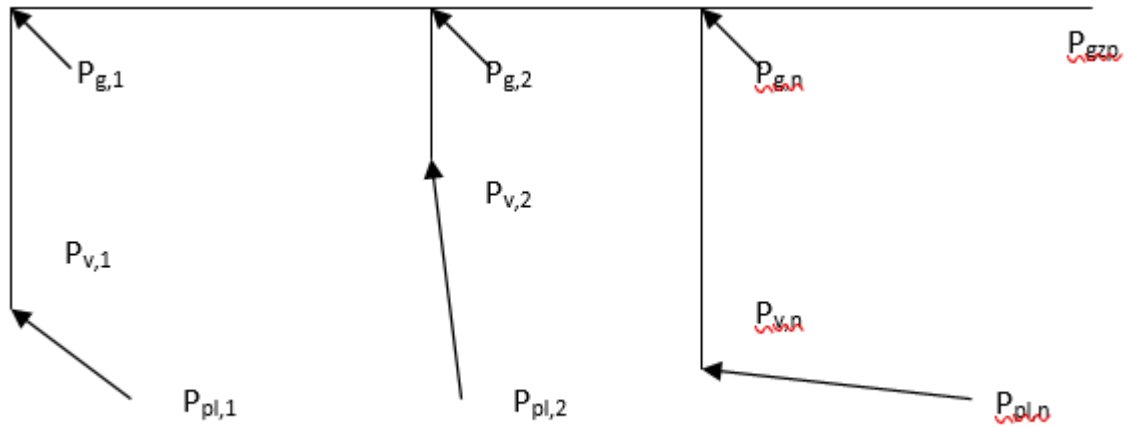


Рис. 2.2. Структурна схема колекторного збору газу [86]

Для побудови гідравлічної ув'язки системи “пласт – газозбірний пункт” використовують наступні співвідношення між вихідними та вхідними тисками на відповідних технологічних об'єктах [86, 101]:

$$p_{pl}^2 - p_v^2 = Aq_0 + Bq_0^2 \quad p_g^2 = p_v^2 e^{-b} - a_s q_0^2 \quad p_n^2 = p_g^2 - a_{sh,n} q_0^2.$$

Приведемо алгоритм розрахунку гідравлічної ув'язки системи “пласт – газозбірний пункт” [79, 86]:

1. Задамо початкове значення дебіту  $q_1$  останньої від ГЗП свердловини. Тоді мають місце наступні співвідношення:

$$p_{pl,1}^2 - p_{v,1}^2 = A_1 q_1 + B_1 q_1^2,$$

$$p_{v,1}^2 - p_{g,1}^2 \exp(b_1) = a_{s,1} q_1^2 \exp(b_1).$$

2. З останніх двох рівностей маємо, що

$$p_{pl,1}^2 - p_{g,1}^2 \exp(b_1) = A_1 q_1 + (B_1 + a_{s,1} \exp(b_1)) q_1^2,$$

або

$$p_{g,1}^2 = p_{pl,1}^2 \exp(-b_1) - [A_1 \exp(-b_1)q_1 + (B_1 \exp(-b_1) + a_s)q_1^2].$$

3. Оскільки

$$p_{g,1}^2 - p_{g,2}^2 = a_{sh,12}q_1^2,$$

то гирловий тиск на другій свердловині обчислюється за формулою

$$p_{g,2}^2 = p_{pl,1}^2 \exp(-b_1) - [A_1 \exp(-b_1)q_1 + (B_1 \exp(-b_1) + a_{s,1})q_1^2] - a_{sh,12}q_1^2.$$

4. Зв'язок між пластовим тиском в околі другої свердловини та відповідним гирловим тиском задається формулою

$$p_{pl,2}^2 - p_{g,2}^2 \exp(b_2) = A_2q_2 + (B_2 + a_{s,2} \exp(b_2))q_2^2.$$

5. З останнього рівняння знаходиться  $q_2$ . Для двох послідовних підключень свердловин до колектора можна записати

$$p_{g,2}^2 - p_{g,3}^2 = a_{sh,23} (q_1 + q_2)^2,$$

звідки знаходиться  $p_{g,3}$ .

6. Для третьої свердловини має місце співвідношення

$$p_{pl,3}^2 - p_{g,3}^2 \exp(b_2) = A_3q_3 + (B_3 + a_{s,3} \exp(b_2))q_3^2,$$

яке дає можливість знайти  $q_3$ .

7. Аналогічно процес продовжується до  $n$ -ної свердловини.

8. Рівність, що пов'язує  $n$ -ну свердловину з ГЗП, має вигляд

$$p_{g,n}^2 - p_{gzp}^2 = a_{sh,n,gzp} (q_1 + q_2 + \dots + q_n)^2.$$

9. Умова закінчення алгоритму. Якщо задається відбір газу  $Q_z$  з колектора, то за такого алгоритму можливі варіанти:

$$1 - Q_r = q_1 + q_2 + \dots + q_n < Q_z;$$

$$2 - Q_r = q_1 + q_2 + \dots + q_n = Q_z;$$

$$3 - Q_r = q_1 + q_2 + \dots + q_n > Q_z.$$

Якщо виконується друга умова, то поставлена задача розв'язана. Для заданого відбору газу на ГЗП необхідно підтримувати тиск  $p_{gzp}$ .

Якщо виконується перша умова, то для розв'язку поставленої задачі необхідно збільшити відбір газу з найдальшої свердловини, тобто замість  $q_1$  взяти  $q_1 + \Delta q$  та повторити поданий вище алгоритм.

За виконання третьої умови необхідно замість  $q_1$  взяти  $q_1 - \Delta q$  та повторити поданий вище алгоритм.

Процес необхідно продовжувати до того часу, поки не буде виконуватись нерівність

$$|Q_r - Q_z| \leq \varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  – задана точність обчислення сумарного відбору газу з колектора.

Описаний вище алгоритм має місце в тому випадку, коли відомо об'ємний відбір газу з пласта-колектора. Якщо ж задається значення тиску на ГЗП  $p_{gzp,z}$ , то описаний алгоритм дозволяє визначити відбір газу зі сховища. Для розв'язку поставленої задачі описаний алгоритм повторюється з тією відмінністю, що умовою його закінчення буде рівність

$$p_{gzp,r} = p_{gzp,z},$$

де

$$p_{gzp,r}^2 = p_{g,n}^2 - a_{sh,n,gzp} (q_1 + q_2 + \dots + q_n)^2.$$

Таким чином, маючи задані тиск на ГЗП та дебіт свердловини, використовуючи алгоритм розрахунку гідравлічної ув'язки системи “пласт підземного сховища газу – газозбірний пункт”, можна знайти тиск в пласті підземного сховища газу при колекторному типі відбору газу з ПСГ.

## 2.4 Математична модель визначення тиску на межі газоводяного контуру

Тиск на верхній границі ГВК визначається на базі гідравлічної ув'язки системи “пласт підземного газосховища – газозбірний пункт”. Будемо вважати, що відомими параметрами є тиск на газозбірному пункті  $p_{gzp}$  та дебіт свердловини  $q$ . Гідравлічна ув'язка будується на основі математичних моделей технологічних об'єктів, що входять в систему “пласт ПСГ – ГЗП”.

Фільтрація газу в пласті підземного сховища, що займає область  $\Omega_3 \subset R^3$ , у нестационарному випадку описується нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних із розподіленими параметрами [23, 87]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k_x h}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k_y h}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_z h}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial z} \right) = 2\alpha_n m h \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{z} \right) + 4m h q p_{st}. \quad (2.10)$$

Оскільки рівняння (2.9) є нелінійним за тиском, то аналітично розв'язати таке рівняння, по-перше, можна в лише часткових випадках і, по-друге, неможливо врахувати залежність багатьох параметрів, які входять у модель, від координат та часу, оскільки ці залежності або невідомі, або приводять до значних ускладнень під час дослідження математичних моделей. У зв'язку з тим використовують усереднені балансові залежності між основними параметрами сховища та газу, які дають можливість розв'язати значну кількість прикладних задач.

Сумарний відбір газу визначається згідно формули [79]:

$$Q(t) = \frac{\Omega(t) T_s}{T_p p_s} \frac{p(t)}{z(t)}. \quad (2.11)$$

Залежність, яка пов'язує об'єм відібраного газу  $\Delta Q(t)$ , середній тиск у ПСГ  $p(t)$  та поровий об'єм  $\Omega(t)$  в деякий момент часу  $t$ , задається формулою [79]:

$$\Delta Q(t) = \Omega(t) \left[ \frac{T_{st}}{T_p} \frac{p(t-1)}{p_{st}} \frac{1}{z(t-1)} - \frac{T_{st}}{T_p} \frac{p(t)}{p_{st}} \frac{1}{z(t)} \right], \quad (2.12)$$

де  $T_{st}, T_p$  – температура газу за стандартних умов і температура газу в ПСГ відповідно. У формулах (2.11) та (2.12) значення порового об'єму  $\Omega(t)$  або визначається на основі даних геологічних досліджень, або обчислюється на основі заміряних значень тисків і відборів та приймається сталим за часом.

Зв'язок пластового тиску  $p_{pl}$  з вибійним  $p_v$  задається формулою [87]:

$$p_{pl}^2 - p_v^2 = \left( \frac{A_1}{k_{pl}} + \frac{A_2}{k_v} \right) q_0 + \left( \frac{B_1}{k_{pl}^{1.5}} + \frac{B_2}{k_v^{1.5}} \right) q_0^2 = Aq_0 + Bq_0^2, \quad (2.13)$$

Коефіцієнт проникності вибою свердловини визначається виразом [87]:

$$k_v = k_{v0} + k_{v1}, \quad (2.14)$$

$$k_{v0} = \frac{A_2}{\Delta_1 p}, \quad k_{v1} = \frac{B_2 q}{1,5 B_2 + A_2 q} \frac{k_{v0}}{\sqrt{k_{v0}}}, \quad \Delta_1 p = \frac{A_1 q}{k_{pl}} + \frac{B_1 q^2}{k_{pl}^{1.5}} + C q^2.$$

Коефіцієнти  $A_1, A_2, B_1, B_2, C$  описані у формулах (2.8 – 2.10).

Гирловий тиск свердловини  $p_g$  обчислюється через вибійний  $p_v$  таким чином [87]:

$$p_g^2 = p_v^2 e^{-b} - \lambda z \frac{RT}{D} \left( \frac{\rho_0 q_0}{S} \right)^2 \frac{1 - e^{-b}}{b} L = p_v^2 e^{-b} - a_s q_0^2, \quad (2.15)$$

$$S = \frac{\pi D^2}{4}, \quad b = \frac{2gL}{zRT}, \quad a_s = \lambda z \frac{RT}{D} \left( \frac{\rho_0}{S} \right)^2 \frac{1 - e^{-b}}{b} L,$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт гідравлічного опору,  $R$  – універсальна газова стала,  $T$  – абсолютна температура,  $L$  – висота робочої колони,  $D$  – діаметр робочої колони,  $\rho_0$  – густина газу в нормальних умовах,  $z$  – коефіцієнт стисливості газу.

Коефіцієнт гідравлічного опору визначається виразом [87]:

$$\lambda = \left( \frac{Y + \varepsilon + C^{1.5}}{1 + 76C} \right)^{0.2}, \quad \varepsilon = \frac{k_u}{D}, \quad Y = \frac{79}{Re}, \quad C = (2Y)^{10}, \quad (2.16)$$

де числа Рейнольдса [57]:

$$\text{Re} = \frac{Dvp}{\mu_0 RT} \frac{T + C}{273 + C} \left( \frac{273}{T} \right)^{1.5}.$$

У межах тих газодинамічних параметрів, за яких працюють ГТС, коефіцієнт стисливості газу доцільно обчислювати за формулою [150]:

$$z = \frac{1}{1 + fp}. \quad (2.17)$$

Тут  $f = (24 - 0,21t^\circ\text{C}) \cdot 10^{-4}$ , а  $p(x)$  вимірюється в атмосферах.

Гідравлічна ув'язка названих вище технологічних об'єктів (2.13-2.17) призводить до такого співвідношення між пластовим тиском і тиском на газозбірному пункті [87]:

$$p_{pl} = \sqrt{\left[ p_{gcp}^2 + (a_s + a_{sh}) e^b q_0^2 + Aq_0 + Bq_0^2 \right]}. \quad (2.18)$$

Формула (2.18) використовується для знаходження пластового тиску підземного сховища газу при шлейфовому типі відбирання газу з ПСГ.

## 2.5. Математична модель визначення швидкості підняття газоводяного контуру

Швидкість руху води у вертикальному напрямку визначається формулою [87]:

$$v = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \right),$$

де  $\rho$  – густина флюїду,  $k$  – проникність пористого середовища,  $\mu$  – динамічна в'язкість газу,  $m$  – пористість пласту,  $g$  – прискорення вільного падіння.

Оскільки [87]

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n \varphi_2 - \varphi_1] \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \cos \frac{n\pi x}{l} +$$

$$+2\rho g \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) \cos \frac{n\pi x}{l},$$

то останні дві формули дають можливість визначити швидкість піднімання води в пористому середовищі, зокрема швидкість піднімання верхньої границі, тобто

$$v|_{x=l} = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \right) \Big|_{x=l}.$$

Зокрема, тому що

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(l,t)}{\partial x} = & (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_2 - (-1)^n \varphi_1] \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) - \\ & - 2\rho g \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} v|_{x=l} = & -\frac{k}{\mu} \left\{ (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_2 - (-1)^n \varphi_1] \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) - \right. \\ & \left. - 2\rho g \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{l^2}\right) + \rho g \right\}. \end{aligned}$$

Взагалі кажучи, тиск води на верхній границі змінюється з часом у процесі заповнення або відбирання газу зі сховища. У такому випадку  $p_v = p_v(t) = \varphi_2(t)$  та відповідні інтеграли необхідно обчислювати згідно заданої функції  $\varphi_2(t)$ . Відомо, що тиск у пласті змінюється достатньо повільно. Тому на деякому інтервалі часу можна вважати, що  $p_v \equiv const$  та досліджувати процес заводнення свердловини шляхом послідовної зміни тиску на верхній границі ГВК.

Маючи закон зміни тиску на верхній границі ГВК, швидкість підняття верхньої границі води та віддаль до ГВК, можна розрахувати час, за який вода може підійти до гирла за заданої депресії тиску у вибійній зоні. Разом із тим підняття води за такого формулювання задачі необхідно розглядати шляхом



послідовних наближень. При цьому необхідно постійно збільшувати товщину водяного шару  $l$  залежно від швидкості підняття ГВК.

## 2.6 Задачі гідравлічної ув'язки системи “пласт підземного сховища газу - газозбірний пункт” та алгоритми їх розв'язування

На ефективність експлуатації ПСГ суттєвий вплив має як робота індивідуально кожної свердловини, так і схема підключення їх усіх до газозбірного пункту. Замір дебетів окремих свердловин пов'язаний із певними технологічними переключеннями, які міняють у певних межах дебіт свердловини. У зв'язку із цим є потреба їх визначення розрахунковим шляхом. Окрім цього, гідравлічний розрахунок дає можливість розрахувати параметри місцевих опорів, коефіцієнти опору руху газу в свердловинах і шлейфах, що є важливим для розрахунку режимів роботи ПСГ.

Основними завданнями при розрахунку режимів роботи підземних сховищ газу є наступні:

- при заданому пластовому тиску та тиску на ГЗП визначити сумарний відбір газу зі сховища;
- при заданому пластовому тиску та сумарному відборі газу зі сховища визначити тиск на ГЗП.

При відборі або закачуванні газу в ПСГ є такі типи з'єднань свердловини із ГЗП [79, 95, 111]:

- Свердловина з'єднана із ГЗП окремим (індивідуальним) шлейфом. При цьому як елементи шлейфо-колекторної системи розглядаються: пласт, який задається пластовим тиском; вибійна зона; робоча колона; обв'язка свердловини; шлейф; ГЗП. Для розрахунку названих об'єктів використовують їх математичні моделі із врахуванням місцевих опорів, дисперсія на яких визначається згідно формули

$$\Delta p = 0.5 \xi \rho v^2.$$

- Колектор є спільним для двох свердловин. У цьому випадку до елементів, названих у попередньому пункті, додаються наступні: пласт; вибійна зона та робоча колона для другої свердловини і шлейф із відповідним місцевим опором, через який друга свердловина підключена до колектору.
- Шлейф-колектор є спільним для двох свердловин, причому робоча колона ближньої свердловини з'єднана із шлейфом горизонтальним трубопроводом. В останній тип з'єднання входять всі елементи другого разом із врахуванням обв'язки другої свердловини та додаткового шлейфу, який з'єднує другу свердловину із основним шлейфом.
- Шлейфо-колекторна система із колекторами, які є спільним для трьох і більше свердловин.

Розрахунок технологічного ланцюжка “пласт підземного сховища газу – газо-збірний пункт” у перших трьох випадках можна проводити аналітичними або аналітико-числовими методами, а четвертий – тільки числовими (методи розрахунку розподільчих мереж із різнотипними моделями об'єктів).

Розглянемо процес відбору газу. Нехай  $q_i, i = 1, 2$ , є додатні величини. Тоді отримуємо наступне нелінійне рівняння для визначення невідомого дебіту  $q_1$  [150]:

$$\sqrt{\frac{1}{\psi_1}(c_1 - d_2 q_1^2) - q_1} + (2\psi_2 q_1 - \sqrt{4\psi_2^2 q_1^2 + 4(d_2 + \psi_2)}) / (2(d_2 + \psi_2)) = 0.$$

Розв'язавши дане рівняння, знайдемо дебіт першої свердловини. Тоді дебіт другої свердловини знаходиться згідно формули [150]:

$$q_2 = \sqrt{\frac{1}{\psi_1}(c_1 - d_2 q_1^2) - q_1}.$$

Маючи тепер вихідні співвідношення для визначення дебетів свердловин, можна побудувати алгоритми розв'язування двох основних режимних задач при відборі або закачуванні газу в ПСГ.

Алгоритм розв'язування першої задачі достатньо простий, оскільки отримані раніше формули дозволяють визначити дебіт кожної свердловини, а їх сума дає сумарний відбір газу зі сховища.

Друга основна задача розв'язується ітераційним способом наступним чином:

1. На основі відомого пластового тиску й історії процесу відбору задається початкове наближення тиску на ГЗП.
2. За відомими значеннями пластового тиску та тиску на ГЗП визначається дебіт кожної свердловини.
3. Знаючи дебіт кожної свердловини, знаходять сумарний відбір газу.
4. Якщо розрахований сумарний відбір газу з необхідною точністю співпадає із заданим, то вважається, що тиск на ГЗП є знайденим.
5. Якщо розрахований сумарний відбір є більший від необхідного, то, збільшуючи тиск на вході в ГЗП, добиваються необхідного співпадіння розрахованого об'єму відбору із заданим.

Якщо заміряні дані не задовільняють, тоді слід очікувати, що

- система, при якій проходило вимірювання параметрів газу, не співпадає із діючою системою (змінена топологія і можливо геометрія системи);
- не враховано всі існуючі місцеві опори;
- параметри гідравлічного стану системи не співпадають із тими, які використовуються при розрахунках;
- заміряні дана не є достатньо точними;
- інтерпретація розрахованих даних за заміряними не відповідає реальним процесам;
- розрахункові параметри суттєво залежать від точності вимірювань.

Для того, щоб розраховані і заміряні дані з достатньою точністю співпали, потрібно провести наступні роботи:

1. Встановити характер місцевих опорів і їх параметрів.

2. Дослідити “чутливість” розрахунку параметрів тиску на ГЗП і дебітів свердловин від заміряних параметрів.
3. Знайти параметри стану свердловин і шлейфів після розв’язання задачі 1.
4. Встановити гідравлічний зв’язок середньопластового тиску із пластовим тиском в околі кожної свердловини.

## **2.7 Моделювання нестационарної фільтрації газу в пористих середовищах із зосередженими джерелами**

Однією із важливих особливостей притоку газу до свердловини є значні втрати тиску в вибійній зоні пласту. Так на вибійну зону радіусом 0.4 м припадає, в реальних пластах-колекторах при незначних дебітах і при стаціонарній фільтрації газу за законом Дарсі, біля 20% всіх втрат тиску. Із збільшенням депресії на пласт втрати тиску в околі свердловини зростають. Також зростає відповідна доля загальних втрат тиску, яка припадає на привибійну зону пласту, і в умовах недосконалого за характером розкриття свердловини, порушення закону Дарсі, і при нестационарному притоку газу до свердловини [140, 141, 144]. Величина втрати тиску в околі свердловини суттєво впливає, в умовах водонапірного режиму, на підтягування конусу води, що обмежує величину її максимального дебіту. На величину максимального дебіту впливає і обмеженість знизу тиску газу на гирлі свердловини. Так як основними параметрами газосховищ є їх піковість (сумарний максимальний відбір газу за заданий час) та мінімальні часові інтервали відборів і закачування, то це зумовлює вивчення газодинамічних процесів у вибійних зонах [51, 120, 137-139]. Складність такого вивчення полягає в тому, що розрахунок основних параметрів газу в околі свердловини та ідентифікацію гідродинамічних параметрів вибійної зони потрібно проводити одночасно. Не менша проблема виникає і з побудовою адекватних математичних моделей і методів. Це пов’язано, в першу чергу, з дискретністю вхідних даних та їх точністю. На основі цих даних будуються

початково-граничні умови відповідних задач математичної фізики. При їх розв'язуванні виникають питання існування, стійкості розв'язку та забезпечення, з потрібною точністю, відповідних балансових показників. Неточності в замірах, усереднення розподілених параметрів, дискретизація, метод та багато інших факторів впливають на неузгодженість початково-граничних умов та рівнянь математичної фізики, які описують рух газу в околі зосереджених джерел. Це приводить до результатів із значними похибками, або до неможливості отримати будь-який результат. Отримати обґрунтований результат без вивчення поведінки розв'язків від різного роду можливих, згаданих вище неузгодженостей, неможливо. Більше того, необхідно знайти спосіб нейтралізувати такий негативний вплив на розв'язок задачі максимально.

Рівняння фільтрації газу в декартових координатах мають місце в довільній просторовій області. Отримати параметричний розв'язок відповідної задачі математичної фізики в загальному випадку проблематично. Розв'язок можна отримати числовими способами, зокрема методом скінчених різниць та методом скінчених елементів. Числові методи мають той недолік, що при згущенні сітки розбиття погіршується їх стійкість. У випадку дослідження свердловин основна зміна газодинамічних параметрів проходить в невеликому околі свердловини. Це означає, що в цьому випадку необхідно достатньо сильно згущувати сітку розбиття, що може привести до нестійкого розв'язку. Мають місце ряд прогностичних задач, які не вимагають достатньо точних розв'язків і для яких достатньо отримати якісну картину процесу. В таких випадках достатньо добре зарекомендував себе метод зведення фільтраційного рівняння до циліндричних або полярних координат. Для даних рівнянь відомо багато методів, які дають можливість отримати розв'язок в аналітичному вигляді.

Розглянемо один з таких випадків на прикладі циліндричної області, в центрі якої знаходиться свердловина (рис. 2.3.).

Нехай радіус зовнішнього кола  $S_0$  (рис. 2.3) рівний  $a$ , радіус концентричного йому внутрішнього кола  $\tilde{S}$  рівний  $b$ . Задамо граничні умови.

На зовнішній границі  $S_0$  маємо

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0;$$

на внутрішній границі –  $P = P_2 \equiv const$ . Тут  $P = p^2$ ,  $P_2 = p_2^2$ ,  $P_0 = p_0^2$ . Початковий розподіл тиску є сталим і рівний  $P_0$ . За таких умов розв'язок поставленої задачі має вигляд [150]:

$$P = P_2 - 2(P_0 - P_2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(b\lambda_m) Z_1(b\lambda_m) Z_0(r\lambda_m) \exp\left(-\frac{P_0 \tau \lambda_m^2}{D}\right)}{(a\lambda_m)^2 Z_0^2(a\lambda_m) - (b\lambda_m)^2 Z_1^2(b\lambda_m)}. \quad (2.19)$$

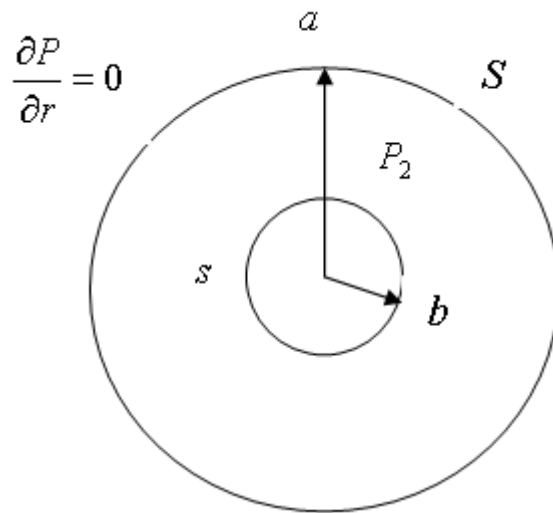


Рис. 2.3. Циліндрична область, в центрі якої знаходиться свердловина [86]

В останній рівності позначено

$$Z_0(\lambda_m r) = J_0(\lambda_m r) + A_m N_0(\lambda_m r), \quad Z_1(\lambda_m r) = J_1(\lambda_m r) + A_m N_1(\lambda_m r),$$

$$A_m = -\frac{J_0(\lambda_m b)}{N_0(\lambda_m b)} = -\frac{J_1(\lambda_m a)}{N_1(\lambda_m a)},$$

де  $J_i(\lambda_m r)$  – функція Бесселя дійсного аргументу порядку  $i$ ,  $N_i(\lambda_m r)$  – функція Неймана порядку  $i$ ,  $\lambda_m$  – дійсні корені рівняння

$$J_0(\mu x)N_1(x) - J_1(x)N_1(\mu x) = 0,$$

$$\mu = b/a, \quad a\lambda_m = x, \quad b\lambda_m = \mu x.$$

Ваговий дебіт  $G$  свердловини на довільній поверхні  $r = r_0$  ( $b < r_0 < a$ ) за відомим розподілом тиску в області обчислюється за формулою [132]:

$$G = \frac{2\pi nkhg}{\beta(n+1)\mu} \left[ r \frac{\partial P}{\partial r} \right]_{r=b}.$$

Тут  $\beta = \frac{p_0 k}{2m\mu}$ ,  $n$  – показник політропа. Якщо в останній формулі використати

знайдений розподіл тиску при заданих крайових умовах, то отримуємо

$$G = \frac{4\pi nkhg(P_0 - P_2)}{\beta(n+1)\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(b\lambda_m)^2 Z_1^2(b\lambda_m) Z_0(r\lambda_m) \exp\left(-\frac{p_0 \tau \lambda_m^2}{D}\right)}{(a\lambda_m)^2 Z_0^2(a\lambda_m) - (b\lambda_m)^2 Z_1^2(b\lambda_m)}.$$

Використовуючи властивості функцій Бесселя та Неймана, після тотожних перетворень отримуємо

$$G = \frac{4\pi nkhg(P_0 - P_2)}{\beta(n+1)\mu} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \exp\left(-\frac{p_0 \tau \lambda_m^2}{D}\right), \quad (2.20)$$

де

$$B_m = \frac{2N_1^2(a\lambda_m)}{N_0^2(b\lambda_m) - N_1^2(a\lambda_m)}.$$

Таким чином, знаючи значення тисків на верхній та нижній границях області  $S_0$ , а також параметри пористого середовища, розподіл тиску в околі свердловини знаходиться за формулою (2.19) та ваговий дебіт свердловини – за формулою (2.20) відповідно.

## 2.8 Поведінка вагового дебіту поблизу свердловини малого діаметру

Згідно означення вагового дебіту свердловини [79]:

$$G = \frac{nkhg}{\beta(n+1)\mu} \int_s \frac{dP}{dr} dS,$$

на основі отриманого розв'язку поблизу свердловини малого діаметру, отримуємо

$$G = \frac{nkhg}{\beta(n+1)\mu} \left[ C \int_s \frac{dN_0}{dr} dS + \int_s \frac{d\psi}{dr} dS \right] \exp\left(-\frac{\lambda^2 \tau p_0}{D}\right).$$

Тут постійну  $C$  необхідно визначити, а функція  $\psi$  задовольняє рівняння [79]:

$$\nabla^2 \psi + \lambda^2 \psi = 0.$$

Обидва інтеграли необхідно брати по контуру кола  $s$ . Оскільки для малих значень аргументу

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} + \dots,$$

то для малих значень  $\lambda$  та  $r$  отримуємо

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} + \frac{2}{\pi} \ln r$$

та

$$\frac{dN_0}{dr} = \frac{2}{\pi r}.$$

Якщо параметр  $r$  необмежено спадає, то другий інтеграл прямує до нуля.

В такому випадку розподіл тиску визначається наступною формулою [79]:

$$P = \frac{\beta(n+1)\mu}{4knhg} G(\tau) N_0(\lambda r) + \psi(x, y) \exp\left(-\frac{\lambda^2 \tau p_0}{D}\right).$$

Остання формула може бути використана для розрахунку параметрів вибійної зони свердловини.



## 2.9 Обчислення середнього тиску в пласті

На практиці середній тиск в пласті обчислюється на основі заміряних даних на гирлі свердловини, які перераховуються відповідним чином на значення пластового тиску. При цьому за середнє приймається середнє арифметичне перерахованих величин. Реально це не відповідає дійсності, оскільки пласти є неоднорідними за своїми властивостями і процес відбирання (закачування) є зосередженим, а не рівномірним. В загальному випадку середній пластовий тиск визначається як відношення [79, 129]

$$\tilde{p} = \frac{1}{\Omega} \int_V p dV .$$

Для випадків, коли в деякій області відомий розподіл тиску в параметричній формі, значення середнього пластового тиску можна знайти в аналітичному вигляді.

На віддалі  $r$  від свердловини визначимо кільцевий елемент пласту шириною  $dr$ . Якщо пористість пласту рівна  $m$ , то середньозважений за об'ємом тиск  $\tilde{p}$  в пласті буде [79, 129]

$$\tilde{p} = \frac{2\pi hm}{\pi(r_k^2 - r_c^2)hm} \int_{r_c}^{r_k} p(r) dr = \frac{2}{r_k^2 - r_c^2} \int_{r_c}^{r_k} p(r) dr .$$

За умов усталеної радіальної фільтрації газу розподіл тиску визначається формулою [79]:

$$p = \sqrt{p_c^2 + \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{r_k}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c}} ,$$

де  $p_k$  – тиск на круговому контурі кільцевої зони дренажу обмеженої радіусом  $r_k$ ,  $p_c$  – тиск на контурі свердловини радіусом  $r_c$ .

З останніх двох формул отримуємо, що

$$\tilde{P} = \frac{2}{R_k^2 - 1} \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^{\alpha P_k} \exp(y^2 - \alpha^2) y^2 dy,$$

де позначено

$$R_k = \frac{r_k}{r_c}, \quad P_k = \frac{p_k}{p_c} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \tilde{P} = \frac{\tilde{p}}{p_c}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2 \ln R_k}{P_k^2 - 1}}.$$

Показано, що з достатньою для практики точністю, середнє значення тиску можна обчислювати за формулою [79, 129]:

$$\tilde{P} = P_k + \frac{P_k - 1}{R_k^2 - 1} - \frac{R_k^2}{R_k^2 - 1} \frac{P_k^2 - 1}{4P_k \ln R_k} \int_0^8 \exp(-Z + \beta Z^2) dZ. \quad (2.21)$$

Тут  $\beta = \frac{P_k^2 - 1}{8 \ln R_k P_k^2}$ .

Інтеграл, що стоїть в рівності (2.21), можна знайти як числовими, так і наближеними способами. Отримані вище результати відносилися до досконалої свердловини. Випадок недосконалих свердловин можна розглядати як проміжний між радіально плоскою фільтрацією газу до гідродинамічно досконалих свердловин і просторово радіальним рухом газу.

Будемо вважати [28], що пласт задається сферою радіуса  $r_k$ , а свердловина – сфера радіуса  $r_c$ . Якщо знехтувати силою ваги газу, то в сферичних координатах усталений рух газу описується рівнянням:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) = 0.$$

У випадку просторово радіального усталеного руху граничні умови є наступними:

$$r = r_c, \quad p^2 = p_c^2, \quad r = r_k, \quad p^2 = p_k^2.$$

За таких умов розподіл тиску в області, яка міститься між сферами з радіусами  $r_c$  та  $r_k$  визначається за формулою [99]:

$$p = \sqrt{p_c^2 + \frac{p_k^2 - p_c^2}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_k}} \left( \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} \right)}.$$

Середнє значення тиску в цій області обчислюється за формулою [6]:

$$\tilde{p} = \frac{3}{4m\pi(r_k^2 - r_c^2)} \int_{r_c}^{r_k} 4\pi m p r^2 dr.$$

Якщо вважати, що радіус свердловини набагато менший радіуса дренажу і позначити

$$R = \frac{r}{r_c}, \quad R_k = \frac{r_k}{r_c}, \quad \varepsilon = \frac{p_c}{p_k},$$

то отримуємо

$$\xi = \frac{\tilde{p}}{p_k} = \frac{3}{R_k^2 - 1} \int_1^{R_k} R \sqrt{R^2 - (1 - \varepsilon)^2} R dR,$$

або

$$\tilde{p} = \frac{3p_k}{R_k^2 - 1} \int_1^{R_k} R \sqrt{R^2 - (1 - \varepsilon)^2} R dR. \quad (2.22)$$

Формула (2.22) використовується для знаходження середнього пластового тиску з достатньою для практики точністю на основі заміряних даних на гирлі свердловини.

## 2.10 Чисельні експерименти

Апробацію отриманих результатів проводили в ході обчислювального експерименту за різних значень вхідних параметрів. Обчислювальний експеримент охоплює наступні завдання:

- знайти залежність товщини водяного шару та швидкості підняття ГВК, при заданих дебіту свердловини, тиску на ГЗП, тиску на нижній межі водяного шару, параметрів пористого середовища;
- знайти залежність між тиском на ГЗП, пластовим тиском та швидкістю підняття ГВК, при заданих дебіту свердловини, тиску на нижній межі водяного шару, товщини водяного шару, параметрів пористого середовища;
- знайти залежність між дебітом свердловини, пластовим тиском та швидкістю підняття ГВК, при заданих тиску на ГЗП, тиску на нижній межі водяного шару, товщини водяного шару, параметрів пористого середовища.

Результати обчислень подано у вигляді таблиць та рисунків.

Вхідні параметри:  $p_0 = 4,9 \cdot 10^6 \text{ (Н/м}^2\text{)}$ ;  $p_{gzp} = 3,4 \cdot 10^6 \text{ (Н/м}^2\text{)}$ ;  $\Delta h = 500 \text{ (м)}$ ;  
 $p_{pl} = 4,3 \cdot 10^6 \text{ (Н/м}^2\text{)}$ ;  $\lambda = 0,01$ ;  $z = 0,9$ ;  $R = 8,3144621 \text{ (Дж/моль} \cdot \text{К)}$ ;  $T = 293 \text{ (К)}$ ;  
 $D = 0,1 \text{ (м)}$ ;  $L = 1000 \text{ (м)}$ ;  $\rho_0 = 0,68 \text{ (кг/м}^3\text{)}$ ;  $\mu = 0,0008 \text{ (м}^2\text{/с)}$ ;  $g = 9,8 \text{ (м/с}^2\text{)}$ ;  
 $\alpha = 0,8$ ;  $m = 0,28$ ;  $k = 4 \cdot 10^{-15}$ ;  $\rho = 998 \text{ (кг/м}^3\text{)}$ ;

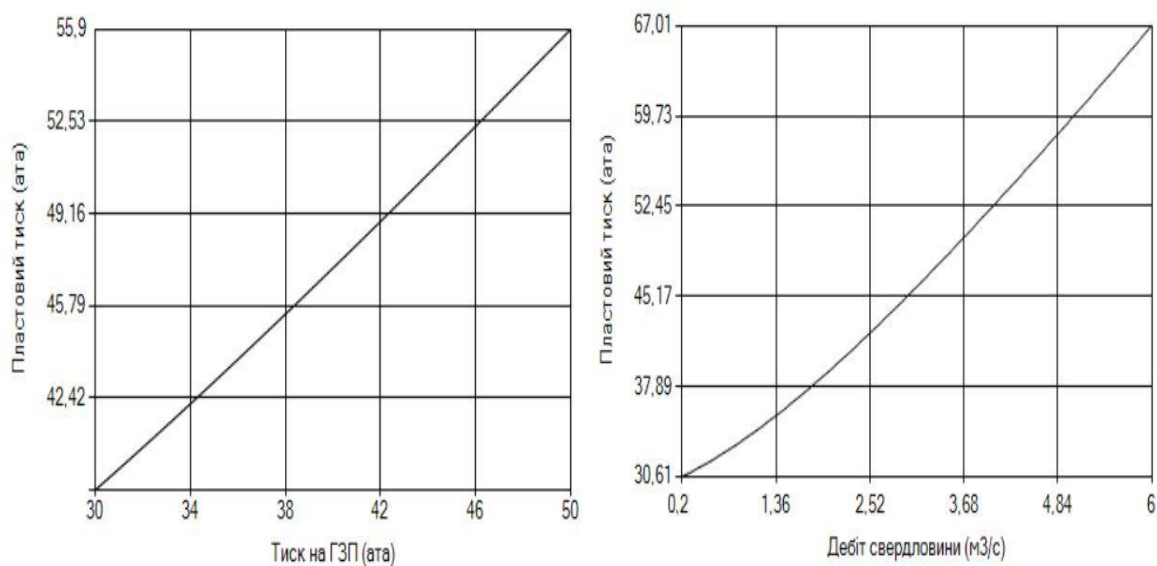


Рис 2.4. Залежність пластового тиску від тиску на ГЗП та дебіту свердловини

Таблиця 2.1. Залежність товщини водяного шару  $l$  (м) і швидкості підняття ГВК  $\nu$  (м/с) за різних значень часів  $t$  (с) та дебітів свердловини  $q_0$ .

$t$	$q_0 = 1 \text{ м}^3/\text{с}$		$q_0 = 2 \text{ м}^3/\text{с}$		$q_0 = 3 \text{ м}^3/\text{с}$	
	$l$	$\nu$	$l$	$\nu$	$l$	$\nu$
0	10	$9,27 \cdot 10^{-5}$	10	0,000104	10	0,000118
100 000	19,27	$4,69 \cdot 10^{-5}$	20,41	$4,98 \cdot 10^{-5}$	21,82	$5,28 \cdot 10^{-5}$
200 000	23,96	$3,73 \cdot 10^{-5}$	25,39	$3,95 \cdot 10^{-5}$	27,1	$4,21 \cdot 10^{-5}$
300 000	27,69	$3,19 \cdot 10^{-5}$	29,34	$3,39 \cdot 10^{-5}$	31,31	$3,61 \cdot 10^{-5}$
400 000	30,88	$2,84 \cdot 10^{-5}$	32,73	$3,01 \cdot 10^{-5}$	34,92	$3,21 \cdot 10^{-5}$
500 000	33,96	$2,63 \cdot 10^{-5}$	35,39	$2,95 \cdot 10^{-5}$	37,11	$2,91 \cdot 10^{-5}$
600 000	36,69	$2,49 \cdot 10^{-5}$	39,34	$2,59 \cdot 10^{-5}$	41,31	$2,52 \cdot 10^{-5}$
700 000	39,88	$2,34 \cdot 10^{-5}$	42,73	$2,31 \cdot 10^{-5}$	44,92	$2,21 \cdot 10^{-5}$
800 000	43,96	$2,29 \cdot 10^{-5}$	45,39	$2,29 \cdot 10^{-5}$	47,14	$1,98 \cdot 10^{-5}$
900 000	45,69	$2,02 \cdot 10^{-5}$	49,34	$2,01 \cdot 10^{-5}$	51,31	$1,72 \cdot 10^{-5}$

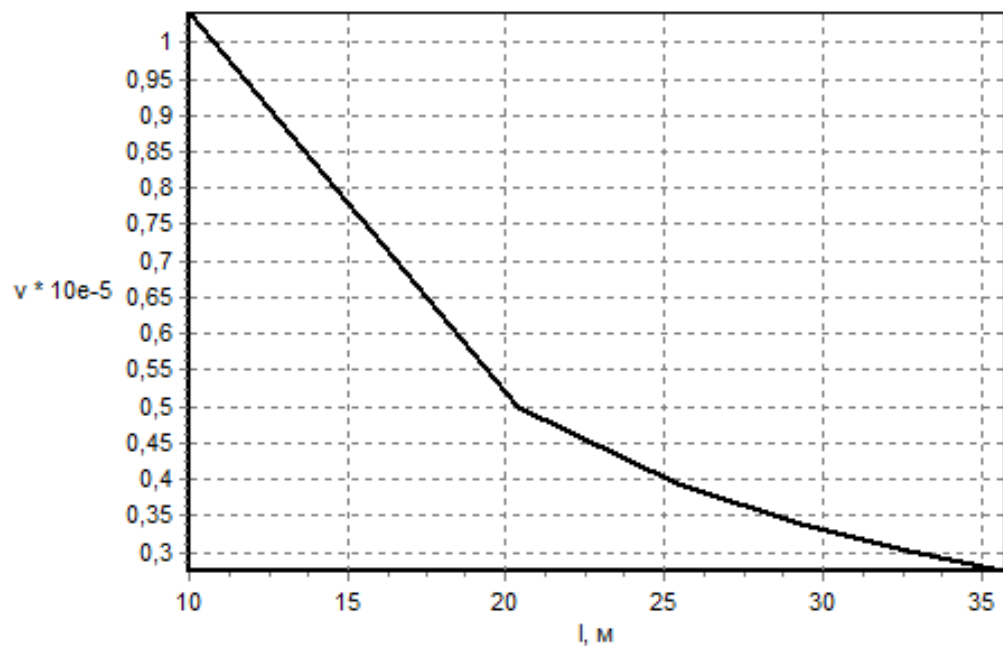


Рис 2.5. Залежність швидкості підняття ГВК від товщини водяного шару

Таблиця 2.2. Співвідношення між дебітом свердловини  $q_0$  (м<sup>3</sup>/с), пластовим тиском  $p_{pl}$  (ата) та швидкістю підняття ГВК  $\nu$  (м/с) за таких значень параметрів  $p_{гзр} = 3,4 \cdot 10^6$  (Н/м<sup>2</sup>),  $l = 20,41$ (м).

$q_0$	$p_{pl}$	$\nu$	$q_0$	$p_{pl}$	$\nu$
3,0	49,19	$5,67 \cdot 10^{-5}$	2,0	43,50	$4,98 \cdot 10^{-5}$
2,9	48,78	$5,55 \cdot 10^{-5}$	1,9	43,02	$4,87 \cdot 10^{-5}$
2,8	48,23	$5,47 \cdot 10^{-5}$	1,8	42,61	$4,78 \cdot 10^{-5}$
2,7	47,51	$5,41 \cdot 10^{-5}$	1,7	42,18	$4,72 \cdot 10^{-5}$
2,6	46,79	$5,37 \cdot 10^{-5}$	1,6	41,66	$4,7 \cdot 10^{-5}$
2,5	46,24	$5,31 \cdot 10^{-5}$	1,5	41,01	$4,68 \cdot 10^{-5}$
2,4	45,84	$5,22 \cdot 10^{-5}$	1,4	40,45	$4,61 \cdot 10^{-5}$
2,3	45,14	$5,19 \cdot 10^{-5}$	1,3	40,09	$4,57 \cdot 10^{-5}$
2,2	44,63	$5,15 \cdot 10^{-5}$	1,2	39,41	$4,52 \cdot 10^{-5}$
2,1	44,05	$5,01 \cdot 10^{-5}$	1,1	39,13	$4,48 \cdot 10^{-5}$

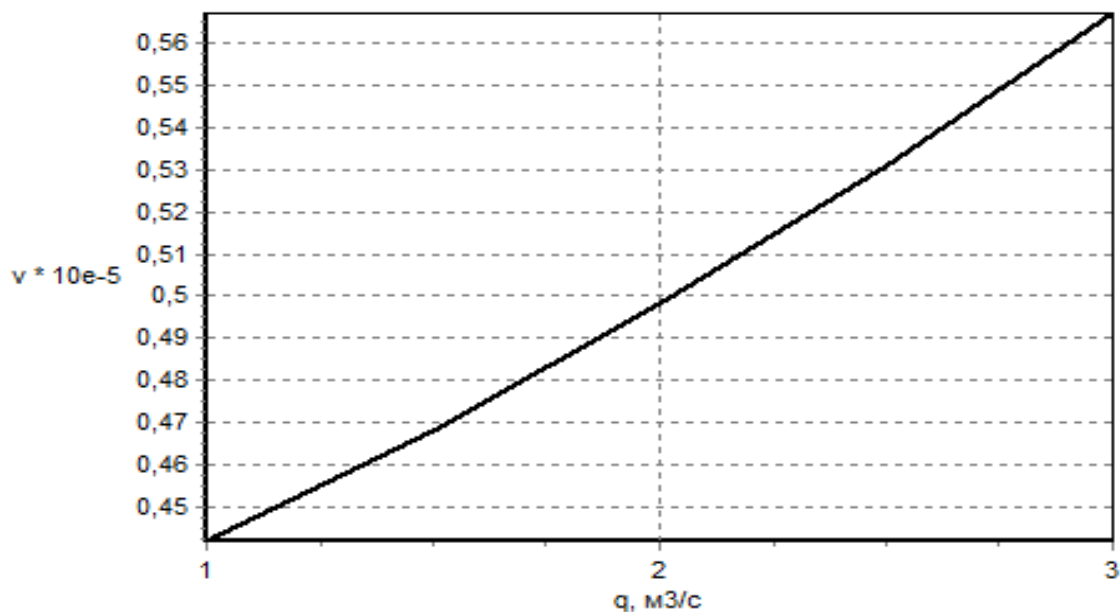


Рис. 2.6. Залежність швидкості підняття ГВК від дебіту свердловини

Таблиця 2.3. Співвідношення між тиском на ГЗП  $p_{gzp}$  (ата) та швидкістю підняття ГВК  $\nu$  (м/с) за наступних значень параметрів  $q_0 = 2(\text{м}^3/\text{с})$ ,  $l = 20,41(\text{м})$ ,  $t = 100\ 000(\text{с})$ .

$p_{gzp}$	42	40	38	36	34	32
$\nu_p$	$5,8 \cdot 10^{-5}$	$5,72 \cdot 10^{-5}$	$5,54 \cdot 10^{-5}$	$5,32 \cdot 10^{-5}$	$5,12 \cdot 10^{-5}$	$4,83 \cdot 10^{-5}$
$\nu_e$	$6,2 \cdot 10^{-5}$	$5,8 \cdot 10^{-5}$	$5,2 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$4,2 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$

Таблиця 2.4. Співвідношення між пластовим тиском  $p_{pl}$  (ата) та швидкістю підняття ГВК  $\nu$  (м/с) за наступних значень параметрів  $q_0 = 2(\text{м}^3/\text{с})$ ,  $l = 20,41(\text{м})$ ,  $t = 100\ 000(\text{с})$

$p_{pl}$	49,31	47,56	45,72	44,93	43,87	42,13
$\nu_p$	$5,7 \cdot 10^{-5}$	$5,62 \cdot 10^{-5}$	$5,53 \cdot 10^{-5}$	$5,42 \cdot 10^{-5}$	$5,18 \cdot 10^{-5}$	$4,91 \cdot 10^{-5}$
$\nu_e$	$6,1 \cdot 10^{-5}$	$5,7 \cdot 10^{-5}$	$5,3 \cdot 10^{-5}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$

В табл. 2.3 та 2.4 позначено  $\nu_p$ ,  $\nu_e$  – розраховане та експериментальне значення швидкості підняття ГВК відповідно.

З результатів обчислювальних есперементів слідують наступні висновки:

1. При збільшенні товщини водяного шару (при відборі газу з ПСГ), швидкість підняття ГВК зменшується.
2. При зменшенні тиску на газозбірному пункті або дебіту свердловини, зменшується і швидкість підняття газоводяного контакту.
3. Якщо пластовий тиск збільшується, то швидкість підняття ГВК також збільшується.

4. На швидкість підняття ГВК також впливають параметри пористого середовища.

## **2.11 Висновки до Розділу 2**

В другому розділі побудовано математичну модель руху газу в ПСГ за наявності підшовної води. Модель на основі газогідродинамічної ув'язки “пласт підземного сховища газу – газозбірний пункт” охоплює всі технологічні об'єкти й області пористого середовища, які беруть участь у роботі ПСГ. Розроблено алгоритм визначення швидкості підняття ГВК для визначення часу, за який вода може підійти до гирла свердловини. Отримані результати апробовані в ході чисельного експерименту на модельній задачі. Знайдені в ході чисельного експерименту співвідношення між дебітом свердловини, тиском на ГЗП, пластовим тиском та швидкістю підняття ГВК дають змогу корегувати вхідними даними для недопущення заводнення свердловини. Результати дослідження можна використати для розрахунку депресії на пласт під час визначення граничного безводного дебіту.



## РОЗДІЛ 3.

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДИФУНДУВАННЯ ГАЗУ У ВОДУ ПІД ЧАС РОБОТИ ПІДЗЕМНОГО СХОВИЩА ГАЗУ

#### 3.1 Формулювання задачі

Під час моделювання процесів фільтрації газу в пластах підземних сховищ необхідно враховувати багато факторів, зокрема наявність води, яка має значний вплив на рух газу за різних значень тиску. Особливо цей фактор слід враховувати при зниженні середнього тиску газу в пласті. Зауважимо, що тиски в пластах є достатньо високими, тому частина газу дифундує у воду та розчиняється в ній. Оскільки геометричні розміри пластів є достатньо великими, особливо за площею, то у воду може дифундувати значна кількість газу. При пониженні тиску газ виділяється з води у безводний простір. Вивченню цього питання в літературі присвячено незначну кількість робіт.

Для оцінки кількості дифундованого газу у воді потрібно:

- визначити розподіл тиску у воді;
- знайти концентрацію газу у воді;
- враховуючи вище згадані параметри, а також площу та товщину шару води, знайти розподіл маси дифундованого газу.

#### 3.2 Математичне моделювання дифузії газів у пористих середовищах з урахуванням конвективної складової

Дослідженням руху багатокomпонентного газу в пористих середовищах присвячено небагато робіт, що насамперед пояснюється специфікою та складністю задач. Моделювання таких процесів, як правило, призводить до необхідності розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних або їх систем із змінними, зокрема розривними, коефіцієнтами за умов істотної

невизначеності. Рух двокомпонентного газу є типовим процесом конвекції-дифузії. У процесі руху газу в пористому процесі конвективна складова на порядок більша, ніж дифузна. За малої конвективної швидкості та з огляду на процес змішування газів, потрібно враховувати одночасно процес конвекції-дифузії.

Дифузію двох газів без урахування конвективної складової описують диференціальним рівнянням [88]:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (3.1)$$

за заданих крайових умов, де параметр  $D$  означає коефіцієнт взаємної дифузії газів  $A$  та  $B$ .

Індійські науковці Саксена М. та Саксена С. для обчислення коефіцієнта взаємної дифузії газів  $D_{AB}$  (см<sup>2</sup>/с) запропонували таку видозмінену формулу Сезерленда [88]:

$$D_{AB} = \frac{AT^{1.5} \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)^{0.5}}{p(V_A^{1/3} + V_B^{1/3}) [1 + (BT_{AB}/T)]},$$

де  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $T_A$  та  $T_B$  – критичні об'єми (см<sup>3</sup>/моль) і температура (К) газів,  $p$  – тиск в атмосферах,  $T_{A,B} = (T_A T_B)^{0.5}$ ,  $m_A, m_B$  – питомі маси газів  $A$  та  $B$  відповідно. Для неполярних газів  $A=0,022023$  і  $B=1,1756$ , тоді як для систем, що складаються з комбінації полярних і неполярних газів,  $A=0,022023$  і  $B=1,90116$ .

Якщо відомі коефіцієнти самодифузії газів  $D_{AA}$  і  $D_{BB}$ , то

$$D_{AB} = \sqrt{\frac{m_A + m_B}{2\sqrt{m_A m_B}}} \sqrt{D_{AA} D_{BB}}.$$

Розглянемо циліндричне, рівномірно розподілене вздовж осі джерело нагнітання газу. Область пласта ПСГ моделюється циліндром, поділеним циліндричними поверхнями на відповідні підобласті, заповнені різними газами

або їх сумішню (рис.3.1.): зона I заповнена газом, що відбирається; зона II виникає унаслідок витіснення наявного газу водою; зона III заповнена водою.

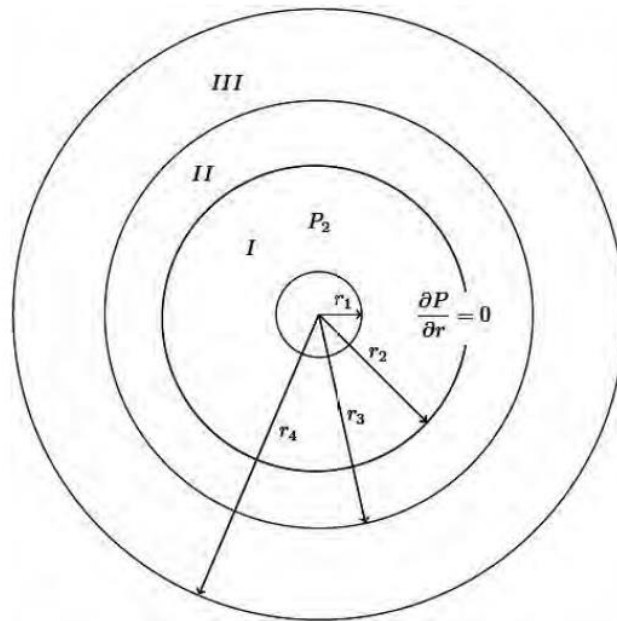


Рис. 3.1. Балансова модель процесу заміщення газу водою

Тоді рівняння для визначення розподілу тиску газу в кожній підобласті матиме вигляд [88]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\tilde{D}}{p_0} \frac{\partial p}{\partial \tau}, \quad (3.2)$$

де  $r$  – радіус-вектор, проведений із центра свердловини, за Лейбеноном:

$$\tau = \frac{p_2}{p_0} t + \left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right) \frac{1 - e^{-\beta r}}{\beta}, \quad \tilde{D} = \frac{m\mu}{k}, \quad \beta = \frac{p_0 k \lambda_m^2}{2m\mu}.$$

Тут  $p_0$  та  $p_2$  – початкове значення тиску та значення тиску на границі області відповідно.

Якщо розподіл тиску відомо, то швидкість руху газу визначається за формулою [88]:

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (3.3)$$

У формулі (3.3)  $\mu$  – абсолютна в'язкість газу,  $k$  – проникність пласта, зайнятого газом. Рівняння (3.1) має місце в другій зоні лише тоді, коли її границі не зміщуються. В іншому випадку необхідно враховувати швидкість руху границь. Під час витіснення одного газу іншим процес дифузії необхідно розглядати з урахуванням конвективної складової, тобто швидкості руху першої зони. Тоді задача зводиться до розв'язування рівняння дифузії з конвективною складовою [88]:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + v \frac{\partial c}{\partial r} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right)$$

за відповідних крайових умов. Тут  $v$  – швидкість руху газу в першій зоні, яка визначається з формули (3.3). Для числового аналізу впливу конвективної складової на процес дифузії розглянуто простішу модель, а саме дифузії газу в шарі завтовшки  $l$ , описану рівнянням [88]:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + v \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad x \in [0, l], \quad \tau \in [0, \infty] \quad (3.4)$$

за відповідних крайових умов, які запишемо у вигляді

$$c_1(t) = c(0, t), \quad c_2(t) = c(l, t), \quad c_3(x) = c(x, 0). \quad (3.5)$$

У формулі (3.4)  $v$  – швидкість руху газу,  $D$  – коефіцієнт дифузії. Для узгодженості умов необхідно виконання рівності  $c_1(0) = c_3(0)$ . Розв'язок рівняння (3.4) шукаємо з використанням перетворення Лапласа. За сталих коефіцієнтів рівняння (3.4) матиме вигляд [88]:

$$\bar{c}'' - b\bar{c}' - p_1\bar{c} = -c_{11}. \quad (3.6)$$

Тут  $b = v/D$ ,  $p_1 = s/D$ ,  $c_{11} = c(r, 0)/D$ ,  $s = q^2 - v^2/4D$ . Будемо вважати, що параметри  $b$  та  $p_1$  є постійними, а  $q$  – дебіт свердловини. Загальний розв'язок однорідного рівняння матиме вигляд [88]:

$$\bar{c}_z = A e^{\lambda_1 r} + B e^{-\lambda_2 r},$$

де  $\lambda_1 = \lambda_{11} - \lambda_{12}$ ,  $\lambda_{11} = \lambda_{11} + \lambda_{12}$ ,  $\lambda_{11} = \frac{\nu}{2D}$ ,  $\lambda_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\nu}{D}\right)^2 + \frac{4s}{D}}$ .

Частковий розв'язок диференціального рівняння (3.6) залежить від його правої частини, зокрема метод варіації сталих призводить до співвідношення [88]:

$$\bar{c}_{ch} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( e^{\lambda_1 r} \int c_{11} e^{-\lambda_1 y} dy + e^{-\lambda_2 r} \int c_{11} e^{-\lambda_2 y} dy \right).$$

Якщо функція  $c_{11}$  тотожно стала, то частковий розв'язок  $\bar{c}_{ch} = -c_{11} / \lambda_1 \lambda_2$ .

За сталих крайових умов загальний розв'язок задачі буде [88]:

$$\bar{c}_z = -\frac{c_{11}}{\lambda_1 \lambda_2} + c_{31} e^{\lambda_{11} r} \frac{sh \lambda_{12} (l-r)}{sh \lambda_{12} l} + c_{21} e^{\lambda_{11} (l-r)} \frac{sh \lambda_{12} r}{sh \lambda_{12} l}.$$

В останній рівності позначено

$$c_{31} = \bar{c}(0, s) + \frac{c_{11}}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad c_{21} = \bar{c}(l, s) + \frac{c_{11}}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Загальний розв'язок у зображеннях Лапласа має такий вигляд [88]:

$$\bar{c}_z = \frac{c_1}{s} + (c_3 - c_1) \frac{1}{s} e^{\lambda_{11} r} \frac{sh \lambda_{12} (l-r)}{sh \lambda_{12} l} + (c_2 - c_1) \frac{1}{s} e^{\lambda_{11} (l-r)} \frac{sh \lambda_{12} r}{sh \lambda_{12} l}.$$

Позначимо  $\Phi(a, b, s) = \frac{1}{s} \frac{shaq}{shbq}$ . Тоді

$$\bar{c}_z = \frac{c_1}{s} + (c_3 - c_1) e^{\lambda_{11} r} \Phi(l-r, l, s) + (c_2 - c_1) e^{\lambda_{11} (l-r)} \Phi(r, l, s).$$

Оригінал зображення  $\Phi(a, b, s)$  шукаємо шляхом розкладу його на прості дроби

$$\Phi(a, b, s) = \frac{1}{s} \frac{shaq}{shbq} = \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi a}{b} \frac{q^2}{q^2 + \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2}.$$

Оскільки

$$q^2 = s + \frac{v^2}{4D}, b = l / \sqrt{D}, a = \{(l-r) / \sqrt{D}, r / \sqrt{D}\}, a / b = \{(l-r) / l, r / l\},$$

то оригіналом зображення

$$\frac{1}{s} \frac{q^2}{q^2 + (k\pi / b)^2} = \frac{1}{s} \frac{s + \lambda_{13}^2}{s + \lambda_{lr}^2},$$

де

$$\lambda_{lr}^2 = \lambda_{13}^2 + (k\pi / b)^2, \lambda_{13} = v / 2\sqrt{D},$$

є функція

$$e^{-\lambda_{lr}^2 t} + \lambda_{13}^2 \frac{1 - e^{-\lambda_{lr}^2 t}}{\lambda_{lr}^2} = e^{-\lambda_{lr}^2 t} + \frac{\lambda_{13}^2}{\lambda_{lr}^2} (1 - e^{-\lambda_{lr}^2 t}).$$

Тоді

$$\phi(a, b, t) = \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi a}{b} \left( e^{-\lambda_{lr}^2 t} + \frac{\lambda_{13}^2}{\lambda_{lr}^2} (1 - e^{-\lambda_{lr}^2 t}) \right)$$

та остаточно

$$c_z = c_1 + (c_3 - c_1) e^{\lambda_{11} r} \phi(l-r, l, t) + (c_2 - c_1) e^{\lambda_{11}(l-r)} \phi(r, l, t). \quad (3.7)$$

Якщо конвективна складова відсутня, тобто  $v=0$ , то  $\lambda_{11}=\lambda_{13}=0$ ,  $\lambda_{lr}^2 = (k\pi / b)^2$  та

$$\phi_0(a, b, t) = \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} e^{-\lambda_{lr}^2 t} \sin \frac{k\pi a}{b},$$

тоді

$$c_{z_0} = c_1 + (c_3 - c_1) \phi_0(l-r, l, t) + (c_2 - c_1) \phi_0(r, l, t).$$

Із цих розв'язків легко отримати складову  $\Delta c$ , яка характеризує вплив конвективного руху на коефіцієнт дифузії [88]:

$$\Delta c = c_z - c_{z_0} = (c_3 - c_1) \left[ e^{\lambda_{11} r} \phi(l-r, l, t) - \phi_0(l-r, l, t) \right] +$$

$$+(c_2 - c_1) \left[ e^{\lambda_{11}(l-r)} \phi(r, l, t) - \phi_0(r, l, t) \right].$$

Таким чином, приймаючи крайові умови (3.5) як задані, коефіцієнт дифузії шукається за формулою (3.7).

### 3.3 Математична модель знаходження маси дифундованого газу у воді

Маса речовини обчислюється за формулою [22]:

$$M = \int_V \rho dv. \quad (3.8)$$

Оскільки

$$dM_x = m \rho dV = \rho m S dx,$$

тоді для шару, площею  $S$  та товщини  $L$ , отримуємо

$$M_x = S \int_0^x \rho m c(y) dy. \quad (3.9)$$

Тут  $m$  – пористість середовища. З рівняння стану

$$\rho = \frac{p}{zRT},$$

приймаючи параметри  $m$  та  $S$  постійними, отримуємо [22]:

$$M_x = \int_0^x \rho m S c dx = m S \int_0^x \frac{p(x)}{zRT} c(x) dx, \quad (3.10)$$

де  $z$  – коефіцієнт стисливості газу,  $R$  – універсальна газова стала,  $T$  – абсолютна температура,  $p(x)$  – розподіл тиску у воді,  $c(x)$  – концентрація дифундованого газу у воді.

Враховуючи газодинамічні параметри, за яких працюють ГТС, коефіцієнт стисливості газу доцільно обчислювати за формулою [23, 87]:

$$z = \frac{1}{1 + fp}.$$

Тут  $f = (24 - 0,21t^{\circ}C) \cdot 10^{-4}$ , а  $p(x)$  вимірюється в атмосферах.

Отже, при заданих крайових умовах на тиск та концентрацію дифундованого газу у воді, а також параметрів пористого середовища маса дифундованого газу у воді розраховується за формулою (3.10).

### 3.4 Чисельні експерименти

Апробацію отриманих результатів для знаходження концентрації газу у воді проводили в ході обчислювального експерименту за різних значень вхідних параметрів. Конвективну швидкість руху газу в пласті підземного сховища розраховували за формулою (3.3), а коефіцієнт дифузії – за поданими вище формулами. Обчислювальний експеримент охоплює наступні завдання:

- знайти залежність коефіцієнта концентрації та конвективної швидкості у фіксований момент часу при заданих крайових умовах на коефіцієнт концентрації та параметрів пористого середовища;
- знайти розподіл маси дифундованого газу на кожному шарі води при заданих крайових умовах на коефіцієнт концентрації, крайових умовах на тиск на верхній та нижній межі водяного шару та параметрів пористого середовища;
- знайти залежність маси дифундованого газу від коефіцієнта концентрації на фіксованому шарі води при заданих крайових умовах на коефіцієнт концентрації, крайових умовах на тиск на верхній та нижній межі водяного шару та параметрів пористого середовища;
- знайти залежність маси дифундованого газу від крайової умови тиску на нижній межі водяного шару при заданих крайових умовах на коефіцієнт концентрації, крайової умови тиску на верхній межі водяного шару та параметрів пористого середовища;



- знайти залежність маси дифундованого газу від крайової умови тиску на верхній межі водяного шару при заданих крайових умовах на коефіцієнт концентрації, крайової умови тиску на нижній межі водяного шару та параметрів пористого середовища.

Результати обчислень подано у вигляді таблиць та рисунків.

Результати подані в табл. 3.3, 3.4 відповідають таким значенням параметрів  $l=40$  м,  $D=0,05$  (см<sup>2</sup>/с),  $c(r, 0)=0,06$ ,  $c(0, t)=0,6$ ,  $c(l, t)=0,9$ .

Таблиця 3.2. Значення коефіцієнта концентрації для різних значень часів  $t$  та координати  $r$  при  $v=0,002$  м/с та  $T=10\ 000$  К.

$t/r$	0	8	16	24	32	40
0	0,6	0,3728	0,5591	0,6508	0,6800	0,9
2500		0,5582	0,6136	0,6966	0,7897	
5000		0,5688	0,6280	0,7087	0,7960	
7500		0,5702	0,6299	0,7103	0,7968	
10000		0,5704	0,6302	0,7105	0,7969	

Таблиця 3.3. Значення коефіцієнта концентрації для різних значень часів  $t$  та координати  $r$  при  $v=0,005$  м/с та  $T=400$  К.

$t/r$	0	8	16	24	32	40
0	0,5	0,3429	0,4466	0,5288	0,5906	0,9
100		0,4211	0,4618	0,5440	0,6663	
200		0,4559	0,4781	0,5601	0,7000	
300		0,4762	0,4987	0,5804	0,7196	
400		0,4909	0,5185	0,6001	0,7338	

Результати подані на рис. 3.3, 3.4 відповідають таким значенням параметрів  $l=32$  м,  $D=0,05$  (см<sup>2</sup>/с),  $c(r, 0)=0,9$ ,  $c(0, t)=0,9$ ,  $c(l, t)=0$ .

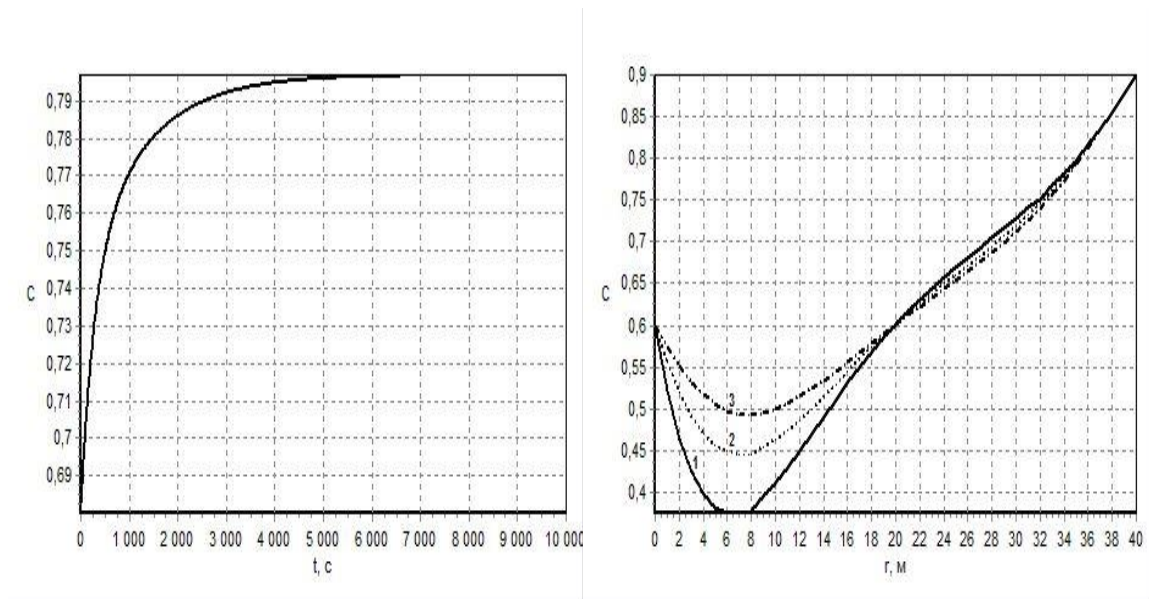


Рис. 3.3. Зліва - Залежність коефіцієнта дифузії  $c_z$  від часу  $t$  на віддалі  $r = 32$  м при  $v = 0,002$  м/с. Справа - Залежність коефіцієнта дифузії  $c_z$  від віддалі для часу  $t = 400$  с та різних значень конвективної швидкості  $v = \{0,004; 0,003; 0,002\}$  м/с, де крива 1 відповідає швидкості  $v = 0,004$  м/с, крива 2 –  $v = 0,003$  м/с, крива 3 –  $v = 0,002$  м/с

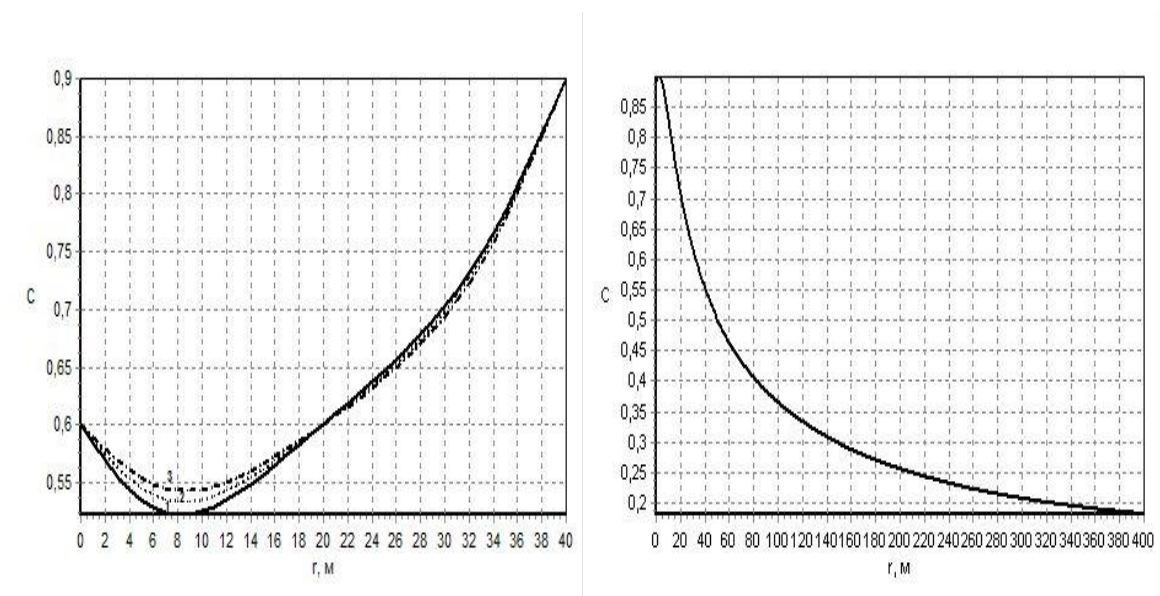


Рис. 3.4. Зліва - Залежність коефіцієнта дифузії  $c_z$  від віддалі для часу  $t = 400$  с та різних значень конвективної швидкості  $v = \{0,001; 0,0005; 0\}$  м/с, де крива 1 відповідає швидкості  $v = 0,001$  м/с, крива 2 –  $v = 0,0005$  м/с, крива 3 –  $v = 0$  м/с. Справа - Залежність коефіцієнта дифузії  $c_z$  від часу  $t$  на віддалі  $r = 32$  м для  $v = 0$

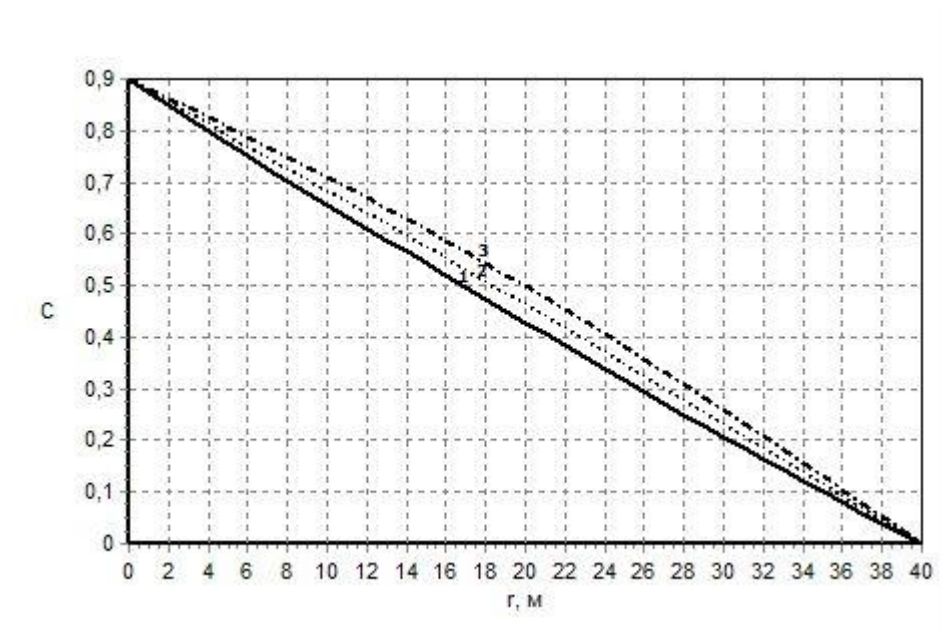


Рис. 3.5. Залежність коефіцієнта концентрації  $c_z$  від віддалі для часу  $t = 400$  с та різних значень конвективної швидкості  $v = \{0,004; 0,002; 0\}$  м/с, де крива 1 відповідає швидкості  $v = 0,004$  м/с, крива 2 –  $v = 0,002$  м/с, крива 3 –  $v = 0$  м/с

Результати обчислень знаходження кількості дифундованого газу у воді подано у вигляді таблиць та графіків. Обчислення проводилися за наступних вхідних параметрів:

$$p_0 = 6,9 \cdot 10^6 \text{ (Н / м}^2\text{)}; \quad p_{гзр} = 5,4 \cdot 10^6 \text{ (Н / м}^2\text{)}; \quad \Delta h = 500 \text{ (м)}; \quad \lambda = 0,01; \quad z = 0,9;$$

$$R = 8,3144621 \text{ (Дж/моль} \cdot \text{К)}; \quad \rho_0 = 0,68 \text{ (кг/м}^3\text{)}; \quad \mu = 0,0008 \text{ (м}^2\text{/с)}; \quad g = 9,8 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$\alpha = 0,8; \quad m = 0,28; \quad k = 4 \cdot 10^{-15}; \quad \rho = 998 \text{ (кг/м}^3\text{)}; \quad q = 70 \text{ (м}^3\text{/с)}.$$

Розподіл тиску у воді знаходився за наступних крайових умов  $p_2 = p_0$ , а  $p_1$  обчислювалось на базі гідравлічної ув'язки системи “пласт підземного газосховища – газозбірний пункт”.

Для знаходження концентрації дифундованого газу у воді приймалися наступні крайові умови  $c(0, t) = 0$ ,  $c(l, t) = 0,9$ . Площа  $S = 15000 \text{ м}^2$ .

Таблиця 3.4. Розподіл маси дифундованого газу  $M_x$  (кг) на кожному шарі води товщиною  $l$  (м) та відношення (у відсотках) маси дифундованого газу до маси води  $M_v$  (кг).

$l$	$M_x$	$M_x / M_v$ (%)
0	0	0
1	2002262	4,79
2	3312344	7,93
3	4169171	9,98
4	4728977	11,31
5	5093797	12,19
6	5330051	12,75
7	5480637	13,12
8	5572714	13,34
9	5622586	13,45
10	5638552	13,49

Таблиця 3.5. Залежність маси дифундованого газу  $M_x$  (кг) від коефіцієнта дифузії  $D$  на заданому шарі води товщиною  $l$  (м).

$D$	$M_x$	$D$	$M_x$
1E-10	96807	5E-08	560938
5E-10	109020	1E-07	788871
1E-09	122470	5E-07	1769030
5E-09	198887	1E-06	2516971
1E-08	264706	5E-06	5638552

Таблиця 3.6. Залежність маси дифундованого газу  $M_x$  ( $m^3$ ) від крайової умови тиску на нижній границі  $p_1$  (ата) на заданому шарі води товщиною  $l = 10$  (м) при  $x = 5$  (м) та крайовій умові на верхній границі  $p_2 = 50$  (ата).

$p_1$	$M_x$
10	1716852
15	2561088
20	3405324
25	4249561
30	5093797
35	5938033
40	6782270
45	7626506

Таблиця 3.7. Залежність маси дифундованого газу  $M_x$  ( $m^3$ ) від крайової умови тиску на верхній границі  $p_2$  (ата) на заданому шарі води товщиною  $l = 10$  (м) при  $x = 5$  (м) та крайовій умові на верхній границі  $p_1 = 30$  (ата).

$p_2$	$M_x$
50	5093797
55	5093825
60	5093854
65	5093882
70	5093910

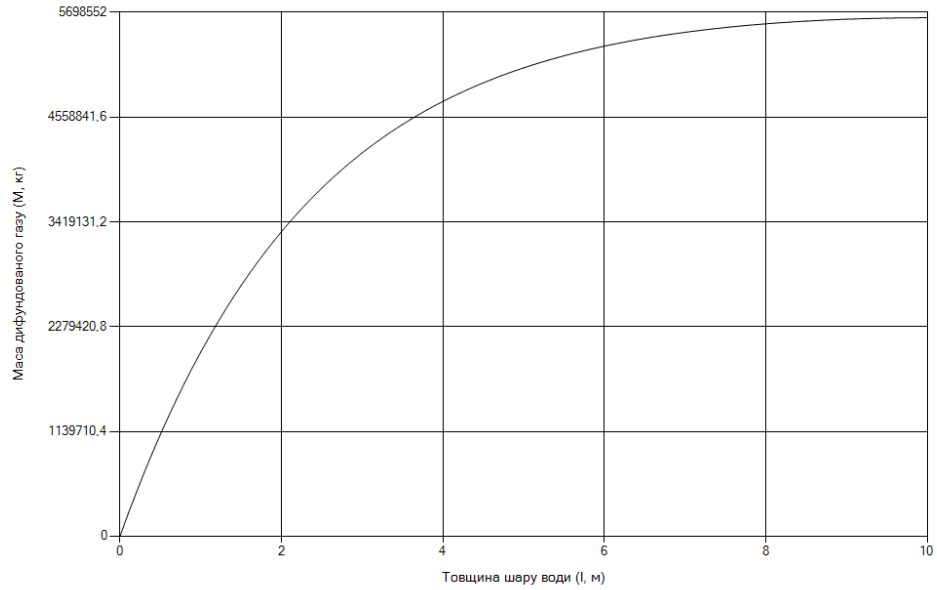


Рис. 3.6. Розподіл маси дифундованого газу  $M_x$  (кг) на кожному шарі води товщиною  $l$  (м)

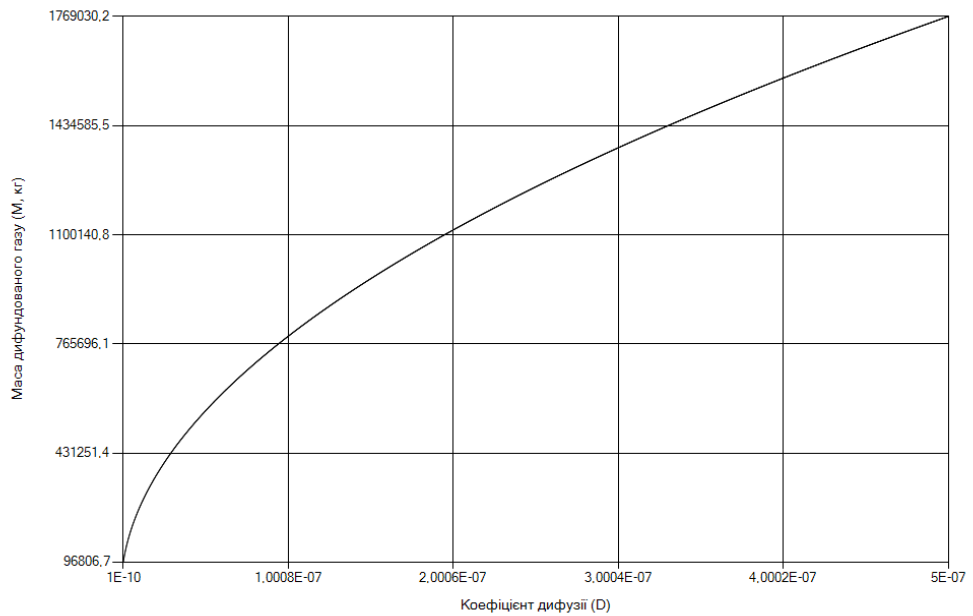


Рис. 3.7. Залежність маси дифундованого газу  $M_x$  (кг) від коефіцієнта дифузії  $D$

З результатів обчислювальних еспериментів слідують наступні висновки:

1. Значний вплив на кількість дифундованого газу має тиск на межі “газ-вода” та незначний – на нижні межі водяного шару.

2. Основна маса дифундованого газу знаходиться у приповерхневій зоні газоводяного контакту.
3. На кількість дифундованого газу впливають також і параметри пористого середовища.
4. На практиці різниця між розрахованою масою відібраного газу та реальною є приблизно на 15 %. Очевидно, що в цю різницю входить як розчинений газ, так і газ, який містився в закупорених порах.

### **3.5 Висновки до Розділу 3**

В третьому розділі побудовано системну модель руху газу в ПСГ, яка описує у взаємозв'язку фільтраційні, дифузійні, конвективні та газодинамічні процеси, що дало змогу розробити підхід для оцінки кількості дифундованого газу у воду при роботі ПСГ. Розроблено підхід до оцінки кількості дифундованого газу у воді, яка є наявною майже у всіх пластах підземних сховищ. Отримані теоретичні результати апробовано на модельній задачі в ході обчислювального експерименту. Досліджено вплив коефіцієнта дифузії, тиску на межі поділу “газ-вода” та тиску на нижній границі води на кількість дифундованого газу. Показано, що дифундований газ в більшості розміщений приповерхневій зоні газоводяного контакту, а також, що на кількість дифундованого газу значно впливає коефіцієнт дифузії та розміри пласту. Значний вплив на кількість газу має також тиск на межі поділу “газ-вода” та незначний вплив тиск на нижній границі для підтримування витіснення газу. Отримані результати в ході обчислювального експерименту дають змогу оцінити кількість газу в пластах підземних сховищ газу, а також корегувати параметрами ПСГ для зменшення дифундування газу у воду.

## РОЗДІЛ 4.

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РУХУ ГАЗУ В ПІДЗЕМНОМУ СХОВИЩІ ГАЗУ ЗА НАЯВНОСТІ ЗАКОНТУРНОЇ ВОДИ

## 4.1. Формулювання задачі

При створенні та експлуатації підземних газосховищ важливим питанням є встановлення параметрів роботи підземного сховища газу для підтримування процесу відбирання (закачування) газу при наявності в пластах води. Наявність води знайдено практично у всіх газових сховищах (родовищах) створених у виснажених родовищах. При великій кількості досліджень вичерпної теорії для опису процесів, які відбуваються в пластах-колекторах газових сховищ з контурною та підшовною водою, на сьогодні ще не існує. Розрахунок параметрів роботи ПСГ ускладнюється ще й ступенем невизначеності параметрів пористого середовища та його неоднорідністю. Це вимагає побудови відповідних адаптаційних моделей та методів, які за заміряними параметрами (тиск, витрата тощо) дозволяють уточнити параметри моделі.

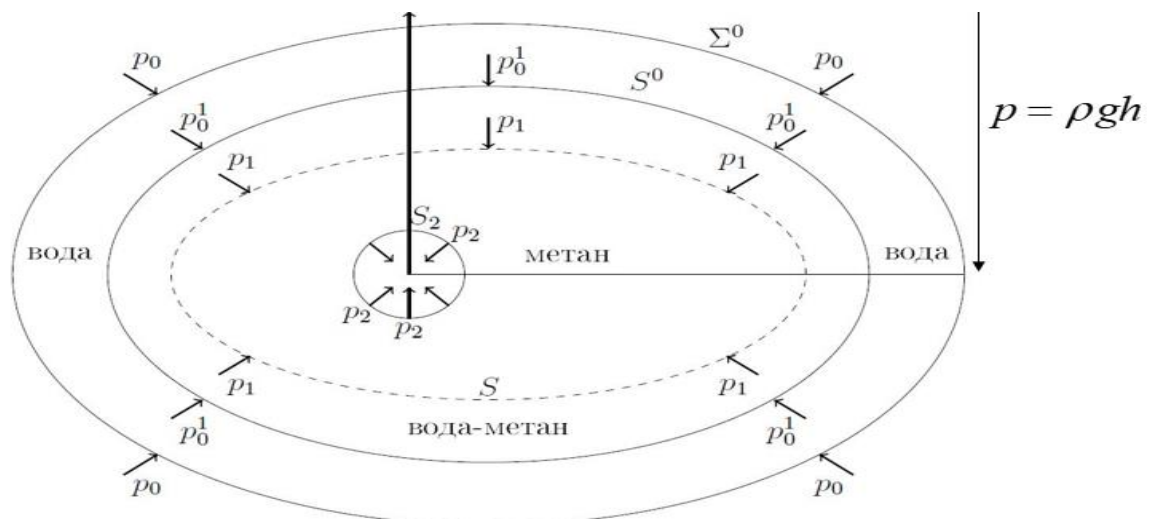


Рис. 4.1. Модель процесу взаємозаміщення газу водою в ПСГ при наявності законтурної води

Частина пласту, заповнена водою, обмежена контуром  $\Sigma_0$  (рис. 4.1.). Тиск води на цьому контурі рівний  $p_0$ . В початковий момент часу газ і вода роз-



межовані контуром  $S^0$  з тиском  $p_0^1$ . В довільний момент часу газ і вода розмежовані контуром  $S$  з тиском  $p_1$ . Тиск на контурі  $S_2$  рівний  $p_2$ . Тиск води задовольняє рівняння  $\Delta p = 0$ .

Складові швидкості води  $u$ ,  $v$  визначаються формулами [57]:

$$u = -\frac{k}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (4.1)$$

Тут  $\mu_1$  – абсолютна в'язкість води,  $k$  – проникність пласту, зайнятого водою.

Для води крайові умови наступні:

1.  $p = p_0$  на контурі живлення;
2.  $p = p_1$  на рухомому контурі;
3. рівняння витрати на рухомому контурі [57]:

$$-m \frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{k}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial n_0},$$

$\partial n_0$  – елемент зовнішньої нормалі до контуру  $S$ .

Дифузія газу в неусталеному режимі описується рівнянням [57]:

$$\Delta P = \frac{D}{p} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Тут  $D = \frac{m\mu}{k}$ ,  $\mu$  – абсолютна в'язкість газу, компоненти швидкостей

$$\rho u = -\frac{k}{2\beta\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \rho v = -\frac{k}{2\beta\mu} \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (4.3)$$

Крайові умови для газу:

1.  $P = P_1 = p_1^2$  на рухомому контурі;
2.  $p = p_2$  на контурі свердловини;
3. рівняння витрати на рухомому контурі [57]:

$$-m \frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{k}{2\mu r} \frac{\partial P}{\partial n_0}.$$

Поряд з цими умовами необхідно задати початкову умову при  $t = 0$  для води та газу  $p = p_0$ .

Приймаючи вище наведені моделі, ми можемо ставити наступні задачі (прямі та обернені) знаходження параметрів роботи ПСГ для підтримування відбирання (закачування) газу:

- за відомими параметрами середовища та значенням тиску на ГЗП знайти дебіт свердловини;
- за відомими параметрами середовища та дебітом свердловини знайти значення тиску на ГЗП;
- за відомими параметрами середовища та дебітом свердловини знайти швидкість руху газоводяного контакту;
- за заданими параметрами тиску на ГЗП та ГВК, а також дебіту свердловини знайти параметри середовища, що потрібні для підтримування заданого режиму роботи ПСГ.

#### **4.2 Дослідження процесу відбирання газу при сталій швидкості його руху у вибійній зоні на основі послідовної зміни стаціонарних станів**

Сформульована задача зводиться до інтегрування диференціального рівняння

$$qdt = -\Omega dp$$

за граничної умови

$$q = cp_c.$$

З першого рівняння отримуємо, що

$$q = -\Omega \frac{dp}{dt}.$$

Тут  $\Omega$  – об'єм пористого середовища, заповнений газом. Якщо припустити, що в кожний момент часу розподіл тиску такий, як і при усталеному русі газу, то отримуємо співвідношення [150]:

$$q = \frac{\pi k h p_{at}}{\mu} \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{r_k}{r_c}}.$$

В останніх формулах під тисками  $p, p_k, p_c$  прийнято відношення відповідних тисків до атмосферного. Таким чином, дані величини є безрозмірними. Позначимо

$$A = \frac{\pi k h p_{at}}{\mu \ln \frac{r_k}{r_c}},$$

тоді отримуємо

$$q = A(p_k^2 - p_c^2).$$

Якщо вважати, що похибка при заміні  $\frac{dp}{dt}$  на  $\frac{dp_k}{dt}$  є незначною, то отримуємо диференціальне рівняння [150]:

$$-\Omega \frac{dp_k}{dt} = \frac{c^2}{2A} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2A}{c} \right)^2 p_k^2} \right].$$

Введемо позначення:

$$y = \frac{2A}{c} p_k = \frac{2\pi k h p_{at}}{c \mu \ln \frac{r_k}{r_c}} p_k, a = \frac{2A}{c}.$$

Тоді, за початкової умови

$$y = y_n = \frac{2A}{c} p_n,$$

отримуємо розв'язок диференціального рівняння у вигляді

$$t = \frac{Q}{c} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{-1 + a p_k + \sqrt{1 + a^2 p_k^2}} - \frac{1}{-1 + a p_n + \sqrt{1 + a^2 p_n^2}} \right] + \ln \frac{a p_k + \sqrt{1 + a^2 p_k^2}}{p_k + \sqrt{1 + a^2 p_k^2}} \right\}.$$

Задаючи тепер певні значення змінної  $t$ , можемо знайти відповідне значення тиску  $p_k$ . За знайденим значенням  $p_k$ , за формулою

$$p_c = \frac{c}{2A} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2A}{c} \right)^2 p_k^2} \right],$$

обчислюється значення тиску на контурі вибієної зони свердловини та дебіт свердловини.

### 4.3 Гідравлічна ув'язка процесу заміщення газу водою засталеного масопереносу

При дослідженні процесу руху газу в області свердловини доцільно користуватись циліндричною системою координат [95, 97, 102]. Будемо розглядати три зони: перша зона – зона квадратичного закону руху газу до свердловини; друга зона – рух газу за лінійним законом; третя зона – рух води до свердловини.

В першій зоні має місце квадратичний закон руху газу, який задається [150]:

$$p_1^2 - p_2^2 = A_a q_a + B_a q_a^2. \quad (4.4)$$

В другій зоні рух води проходить за лінійним законом Дарсі [150]:

$$p_2^2 - p^2 = C_a q_a. \quad (4.5)$$

В третій зоні – розподіл тиску води за граничних умов  $r = R_c, p = p_c$  на внутрішньому контурі та  $r = R_k, p = p_k$  на зовнішньому, за усталеного руху має вигляд [150]:

$$p(r) = p_k + \frac{p_k - p_c}{\ln R_k / R_c} \ln \frac{r}{R_k}. \quad (4.6)$$

Тиск води  $p_k$  на зовнішньому контурі визначається гідростатикою і є постійним. Тиск  $p_c$  на внутрішньому контурі визначається із гідравлічної ув'язки “ГЗП – вибій свердловини”. Усталена швидкість руху внутрішнього контуру води до свердловини визначається формулою [150]:

$$v = -\frac{k_v}{\mu_v} \left( \frac{p_k - p_c}{r(\ln R_k / R_c)} + \rho g \right),$$

оскільки

$$\frac{dp(r)}{dr} = \frac{p_k - p_c}{r(\ln R_k / R_c)}.$$

Радіальна швидкість описується наступним чином

$$v = \frac{dr}{dt} = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{p_k - p_c}{r(\ln R_k / R_c)} + \rho g \right).$$

Введемо позначення:

$$\alpha = -\frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_c}{r(\ln R_k / R_c)}, \quad \beta = -\frac{k\rho g}{\mu}.$$

Тоді отримуємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними для визначення зміни радіуса внутрішнього контуру руху води [150]:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\alpha}{r} + \beta, \\ \frac{dr}{dt} = \frac{\alpha}{r} + \beta &= \frac{\alpha + \beta r}{r}, \quad \frac{r dr}{\alpha + \beta r} = dt, \\ \frac{(\alpha + \beta r - \alpha) dr}{\beta(\alpha + \beta r)} &= \frac{1}{\beta} dr - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{d(\alpha + \beta r)}{(\alpha + \beta r)} = dt. \end{aligned}$$

Якщо радіус внутрішнього контуру води змінюється від  $r_1$  до  $r_2$  за час від деякого значення  $t_1$  до  $t_2$ , то з останньої рівності отримуємо рівність

$$\frac{1}{\beta} (r_2 - r_1) - \frac{\alpha}{\beta^2} \ln \frac{\alpha + \beta r_2}{\alpha + \beta r_1} = t_2 - t_1. \quad (4.7)$$

Рівняння (4.7) дає можливість за заданих значень на тиск та за час  $\Delta t = t_2 - t_1$  визначити величину зменшення внутрішнього радіуса контуру води на величину

$$\Delta r = \frac{\alpha + \beta r_2}{r_2} (t_2 - t_1).$$

Зауважимо, що отримані значення повинні узгоджуватись з об'ємом газу, отриманого за рахунок зміни об'єму пористого середовища.

#### 4.4 Математичні моделі, які описують рух газу при роботі підземного сховища газу

Розподіл пластового тиску в околі свердловини, при заданому ваговому дебіті свердловини  $G$  на поверхні  $r = r_0$  ( $b < r_0 < a$ ), описується формулою [150]:

$$p_{nl}^2 - p_c^2 = 2DFG, \quad (4.8)$$

де

$$D(r, \tau) = \frac{(b\lambda_m) Z_1(b\lambda_m) Z_0(r\lambda_m)}{(a\lambda_m)^2 Z_0^2(a\lambda_m) - (b\lambda_m)^2 Z_1^2(b\lambda_m)}$$

та

$$\frac{1}{F} = \frac{4\pi nkhg}{\beta(n+1)\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(b\lambda_m)^2 Z_1(b\lambda_m) Z_1(r\lambda_m) \exp\left(-\frac{p_0 \tau \lambda_m^2}{D}\right)}{(a\lambda_m)^2 Z_0^2(a\lambda_m) - (b\lambda_m)^2 Z_1^2(b\lambda_m)}.$$

Зв'язок пластового тиску з вибійним [150]:

$$p_{nl}^2 - p_b^2 = Aq + Bq^2, \quad (4.9)$$

тут

$$A = \frac{A_1}{k_{nl}} + \frac{A_2}{k_b}, \quad B = \frac{B_1}{k_{nl}^{3/2}} + \frac{B_2}{k_b^{3/2}}.$$

Для обчислення розподілу тиску в шлейфах та горизонтальних трубопроводах достатньо використати стаціонарні моделі руху газу [150]:

в робочій колоні

$$p(x) = \sqrt{p_0^2 e^{-b} - \lambda z \frac{RT}{D} \left(\frac{M}{S}\right)^2 \frac{1 - e^{-b}}{b} x} \quad (4.10)$$

та горизонтальній трубі (шлейфі) [89, 94]

$$p(x) = \sqrt{p_0^2 - \lambda z \frac{gRT}{D} \left(\frac{M}{S}\right)^2 x}. \quad (4.11)$$

Тут позначено:

$$S = \frac{\pi D^2}{4}, \quad b = \frac{2g\Delta h}{zRT}.$$

Коефіцієнт стисливості газу можна обчислювати за формулою [23, 87]

$$z = \frac{1}{1 + fp}, \quad (4.12)$$

де  $f = (24 - 0.21t^\circ C) \cdot 10^{-4}$ , а  $p(x)$  – вимірюється в атмосферах.

Для розрахунку параметрів обв'язки свердловин та місцевих опорів використовується емпірична формула [150]:

$$\Delta p = p_g - p_o = \frac{\xi}{2} \rho v^2, \quad (4.13)$$

яку можна звести до вигляду

$$p_g^2 - p_o^2 = \xi \frac{zRT}{S^2} q^2, \quad (4.14)$$

де  $q$  – дебіт свердловини. Тут  $v$  – швидкість руху газу,  $\xi$  – коефіцієнт, який залежить від типу місцевого опору. Враховуючи рівняння (4.14) та заміряні дані, можна побудувати емпіричні формули для обв'язки свердловини, зокрема однією із таких залежностей може бути наступна [150]:

$$\xi = \begin{cases} 201.87 + 18455e^{-3.1455q}, & q \leq 1.46, \\ 1011.8 - 540.71q + 78.039q^2, & q \geq 1.46. \end{cases}$$

В структурі технологічних об'єктів ГТС значне місце займають звужуючі пристрої-крани, діафрагми тощо. Масова витрата газу  $\omega$ , яка проходить через звуження площею  $S$  визначається наступним чином [150]:

$$\omega = k_q S \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_{z1} \rho_{z1} \left[ \left( \frac{p_{z2}}{p_{z1}} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_{z2}}{p_{z1}} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}, \quad (4.15)$$

де  $k_q$  – коефіцієнт врахування впливу багатьох факторів і відома емпірична формула його розрахунку,  $k$  – показник адиабати,  $p_{z1}, \rho_{z1}$  – тиск і густина газу справа, а  $p_{z2}$  – тиск зліва від звужуючого пристрою. Тут  $p_{z2} / p_{z1} \leq 1$ .

Проведемо деякі математичні перетворення рівності (4.15). Оскільки  $p_{z2} / p_{z1} \leq 1$ , то отримуємо рівність

$$\omega^2 = 2k_q^2 S^2 \frac{k}{k-1} p_{z1} \rho_{z1} \left[ \left( \frac{p_{z2}}{p_{z1}} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_{z2}}{p_{z1}} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right],$$

$$p = \rho z RT.$$

Оскільки [150]

$$\left( \frac{p_{z2}}{p_{z1}} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_{z2}}{p_{z1}} \right)^{\frac{k+1}{k}} = \frac{\omega^2 (k-1)}{2k_q^2 S^2 p_{z1} \rho_{z1} k},$$

то останню рівність можна привести до вигляду

$$p_{z1}^2 - p_{z2}^2 = q^2 \frac{zRT \omega^2 (k-1)}{q^2 (k-1) k_q^2 S^2} = a_{zz} q^2, \quad (4.16)$$

$$a_{zz} = \frac{zRT \omega^2 (k-1)}{q^2 (k-1) k_q^2 S^2}. \quad (4.17)$$



Робота компресорної станції характеризується коефіцієнтом стиску  $\varepsilon$ . В такому випадку, якщо  $p_{k2}$  – тиск газу після виходу з КС, то  $p_{k2} = \varepsilon p_{z2}$ , або  $p_{k2}^2 = \varepsilon^2 p_{z2}^2$ .

Використовуючи формули (4.8-4.17), які необхідні для побудови газодинамічної ув'язки, отримуємо наступну формулу для визначення дебіту свердловини  $q$ :

$$p_{pl}^2 - \varepsilon^{-2} p_{k2}^2 e^b = q \left( A + \frac{2}{q} DFG \right) + q^2 \left( B + a_r + \xi \frac{zRT}{s^2} + a_s + a_{zz} \right) e^b.$$

Побудована гідравлічна ув'язка дає змогу знайти значення пластового тиску при заданих тиску на ГЗП та дебіту свердловини.

#### 4.5 Математича модель визначення тиску води на внутрішньому контурі

Якщо відома пористість та проникність пустотілих циліндричних середовищ, в яких міститься вода і дебіт свердловини, то на цей дебіт газу і збільшується ефективний поровий об'єм, який займає вода. В початковий момент часу ефективний поровий об'єм  $\Omega_{1v}$ , в якому міститься такий же об'єм води, має вигляд [150]:

$$\Omega_{1v} = \pi h m_v (b_v^2 - a_v^2). \quad (4.19)$$

Якщо  $q$  – дебіт свердловини, то на таку саму величину збільшиться підтік води. Тому внутрішній радіус водяного циліндра зменшиться на деяку величину  $r_v$ . Кількість води за рахунок руху нижньої межі буде [150]

$$\Omega_{1v} + q = \pi h m_v \left( b_v^2 - (a_v - r_v)^2 \right). \quad (4.20)$$

З формули (4.20) можна знайти на скільки зменшиться внутрішній радіус за одиницю часу

$$r_v = a_v - \sqrt{b_v^2 - \frac{\Omega_{1v} + q}{\pi h m_v}}. \quad (4.21)$$

Рівняння (4.21) визначає зміну радіуса за одиницю часу, то це є не що інше як усереднена швидкість руху контуру води, тобто

$$v_v = a_v - \sqrt{b_v^2 - \frac{\Omega_{1v} + q}{\pi h m_v}}.$$

Беручи до уваги, що

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r},$$

то

$$dp = -\frac{\mu}{k} v dr = -\frac{\mu}{k} \left( a_v - \sqrt{b_v^2 - \frac{\Omega_{1v} + q}{\pi h m_v}} \right) dr. \quad (4.22)$$

Якщо всі параметри вважаються сталими, то з рівняння (4.22) для зміни радіуса ГВК на  $r$  необхідно виконання рівності [150]

$$p_1 - p_0 = \frac{\mu}{k} v r = -\frac{\mu}{k} \left( a_v - \sqrt{b_v^2 - \frac{\Omega_{1v} + q}{\pi h m_v}} \right) r. \quad (4.23)$$

Тут  $p_0$  – початкове значення тиску на поверхні внутрішнього циліндра для води, а  $p_1$  – значення тиску на поверхні внутрішнього циліндра води при зміні об'єму на дебіт свердловини. Формула (4.23) визначає падіння тиску на поверхні внутрішнього циліндра за одиницю часу. Звідси з балансових співвідношень внутрішня гранична умова для рухомої води буде [150]

$$p_1 = p_0 - \frac{\mu}{k} v r = p_0 - \frac{\mu}{k} \left( a_v - \sqrt{b_v^2 - \frac{\Omega_{1v} + q}{\pi h m_v}} \right) r. \quad (4.24)$$

Якщо  $t_v$  – час, протягом якого проходить відбирання газу, то формула (4.24) набуде вигляду

$$p_{1v} = p_0 - \frac{\mu}{k} \left( a_v - \sqrt{b_v^2 - \frac{\Omega_{1v} + t_v q}{\pi h m_v}} \right) r_v.$$

Знайдений тиск води на внутрішньому контурі використовується як одна з крайових умов для знаходження розподілу тиску у воді.

#### 4.6 Математична модель визначення тиску газу на внутрішньому контурі

Проведемо аналогічну балансову процедуру для газу. В початковий момент часу ефективний поровий об'єм в області газу є  $\Omega_g$ . Тоді [150]

$$\Omega_g = \pi h m_g (a_g^2 - c_g^2). \quad (4.25)$$

За одиницю часу об'єм зменшиться на дебіт  $q$ . Зовнішній радіус газу зменшиться на величину  $r_v$ , тобто

$$\Omega_g - q = \pi h m_g ((a_g - r_v)^2 - c_g^2). \quad (4.26)$$

В цьому випадку буде рухатися лише верхня границя. З формули (4.26) можна знайти на скільки зменшиться зовнішній радіус за одиницю часу [150]

$$r_v = a_g - \sqrt{\frac{\Omega_g - q}{\pi h m} + c_g^2}. \quad (4.27)$$

Формула (4.27) описує рух внутрішньої границі води. Оскільки [150]:

$$G = \gamma v = -\frac{k}{2\mu\beta} \frac{\partial p}{\partial x},$$

то

$$dp = -\frac{2\mu\beta\gamma}{k} v dr = -\frac{2\mu\beta\gamma}{k} \left( a_g - \sqrt{\frac{\Omega_1 - q}{\pi h m} + c_g^2} \right) dr. \quad (4.28)$$

Приймаючи всі параметри сталими, з рівняння (4.28) отримуємо

$$p_1 - p_0 = \frac{2\mu\beta\gamma}{k} \nu r = -\frac{2\mu\beta\gamma}{k} \left( a_g - \sqrt{\frac{\Omega_1 - q}{\pi h m} + c_g^2} \right) r. \quad (4.29)$$

Тут  $p_0$  – початкове значення тиску на поверхні внутрішнього циліндра для води. Формула (4.29) визначає падіння тиску на поверхні внутрішнього циліндра за одиницю часу. Приймаючи що  $t_v$  – час, протягом якого проходить відбирання газу, отримуємо, що внутрішня гранична умова для руху газу буде мати вигляд [150]:

$$p_1 = p_0 - \frac{2\mu\beta\gamma}{k} \nu r = p_0 - \frac{2\mu\beta\gamma}{k} \left( a_g - \sqrt{\frac{\Omega_1 - t_v q}{\pi h m} + c_g^2} \right) r. \quad (4.30)$$

На границі ГВК не повинно бути розриву поля швидкостей, тобто швидкість відтоку газу повинна бути рівною швидкості підтоку води, і відповідно значення тисків розрахованих за формулами (4.24) та (4.30) мають співпадати.

#### 4.7 Математична модель визначення тиску води на зовнішньому контурі

Нехай на поверхні  $r_1 = a$  підтримується тиск води  $P_1$ , а на поверхні  $r_2 = b$  – тиск  $P_2$ , початковий розподіл тиску задається формулою  $f(r)$ . В цьому випадку розв’язок вихідної задачі математичної фізики подамо у вигляді [149]:

$$P_g = P_s + P_n,$$

де

$$P_s = \frac{P_1 \ln(b/r) + P_2 \ln(r/a)}{\ln(b/a)}$$

визначає усталений розподіл тиску між поверхнями, а друга складова розв’язку [149]:

$$P_n = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 J_0^2(a\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} \exp(-\kappa\alpha_n^2\tau) U_0(r\alpha_n) \int_a^b r f(r) U_0(r\alpha_n) dr - \\ - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[P_2 J_0(a\alpha_n) - P_1 J_0(b\alpha_n)] J_0(a\alpha_n) U_0(r\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} \exp(-\kappa\alpha_n^2\tau).$$

Тут  $U_0(ar) = J_0(ar)Y_0(ab) + J_0(ab)Y_0(ar)$ ,  $J_i(x)$  і  $Y_i(x)$  – функції Бесселя дійсного аргументу першого і другого роду порядку  $i$  відповідно.

Тоді

$$\frac{\partial P_n}{\partial r} = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 J_0^2(a\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} \exp(-\kappa\alpha_n^2\tau) U_1(r\alpha_n) \int_a^b x f(x) U_0(x\alpha_n) dx - \\ - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[P_2 J_0(a\alpha_n) - P_1 J_0(b\alpha_n)] J_0(a\alpha_n) U_1(r\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} \exp(-\kappa\alpha_n^2\tau),$$

де  $U_1(r\alpha_n) = -\alpha_n [J_1(\alpha_n r)Y_0(ab) + J_0(ab)Y_1(\alpha_n r)]$ , а  $\alpha_n$  – корені нелінійного рівняння  $J_0(\alpha a)Y_0(\alpha b) - J_0(\alpha b)Y_0(\alpha a) = 0$ .

Оскільки

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad q = vS = 2\pi rSv, \quad v = \frac{q}{2\pi rS}, \quad \frac{q}{2\pi rS} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad q = -2\pi rS \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r},$$

то отримуємо, таке співвідношення:

$$\frac{q}{2\pi rS} = \left\{ \frac{P_2 - P_1}{\ln(b/a)} + r \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 J_0^2(a\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} \exp(-\kappa\alpha_n^2\tau) U_1(r\alpha_n) \int_a^b x f(x) U_0(x\alpha_n) dx - \right. \\ \left. - r\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[P_2 J_0(a\alpha_n) - P_1 J_0(b\alpha_n)] J_0(a\alpha_n) U_1(r\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} \exp(-\kappa\alpha_n^2\tau) \right\} \frac{k}{\mu}.$$

Тут  $\kappa = \frac{\alpha k}{m\mu}$ , де

$\alpha$  – об'ємний модуль напруженості,

$k$  – проникність середовища,

$\mu$  – динамічна в'язкість газу,

$m$  – пористість пласту.

Початковий розподіл тиску задаємо наступною формулою [149]:

$$f(r) = \frac{P_1 \ln(b/r) + P_2 \ln(r/a)}{\ln(b/a)},$$

тоді

$$\begin{aligned} & \int_a^b x \frac{P_1 \ln(b/x) + P_2 \ln(x/a)}{\ln(b/a)} U_0(x\alpha_n) dx = \\ &= \frac{1}{\ln(b/a)} \int_a^b x [P_1 \ln b - P_1 \ln x + P_2 \ln x - P_2 \ln a] U_0(x\alpha_n) dx = \\ &= \frac{1}{\ln(b/a)} \int_a^b x [P_1 \ln b - P_2 \ln a + (P_2 - P_1) \ln x] U_0(x\alpha_n) dx = \\ &= \frac{1}{\ln(b/a)} \left[ (P_1 \ln b - P_2 \ln a) \int_a^b x U_0(x\alpha_n) dx \right] + (P_2 - P_1) \int_a^b x \ln x U_0(x\alpha_n) dx. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Використавши аналітичне представлення наступних інтегралів [48]:

$$\begin{aligned} \int_a^b x U_0(x\alpha_n) dx &= \frac{2[J_0(a\alpha_n) - J_0(b\alpha_n)]}{\pi\alpha_n^2 J_0(a\alpha_n)}, \\ \int_a^b x U_0(x\alpha_n) \ln x dx &= \frac{2[J_0(a\alpha_n) \ln b - J_0(b\alpha_n) \ln a]}{\pi\alpha_n^2 J_0(a\alpha_n)}, \end{aligned}$$

отримуємо що рівняння (4.31) набуде наступного вигляду

$$\begin{aligned} \int_a^b x \frac{P_1 \ln(b/x) + P_2 \ln(x/a)}{\ln(b/a)} U_0(x\alpha_n) dx &= \frac{1}{\ln(b/a)} (P_1 \ln b - P_2 \ln a) \frac{2[J_0(a\alpha_n) - J_0(b\alpha_n)]}{\pi\alpha_n^2 J_0(a\alpha_n)} + \\ &+ \frac{1}{\ln(b/a)} (P_2 - P_1) \frac{2[J_0(a\alpha_n) \ln b - J_0(b\alpha_n) \ln a]}{\pi\alpha_n^2 J_0(a\alpha_n)}. \end{aligned}$$

Погрупувавши окремо доданки, в які входить  $P_1$  та  $P_2$ , останню формулу можна переписати у вигляді:

$$\int_a^b x \frac{P_1 \ln(b/x) + P_2 \ln(x/a)}{\ln(b/a)} U_0(x\alpha_n) dx = \frac{2(\ln a - \ln b)}{\pi\alpha_n^2 \ln(b/a)} \left[ P_1 \frac{J_0(b\alpha_n)}{J_0(a\alpha_n)} - P_2 \right].$$

Нехай

$$U_2(r, \alpha_n, \kappa, \tau) = \exp(-\kappa\alpha_n^2 \tau) U_1(r\alpha_n),$$

тоді рівняння (4.31) запишеться, як

$$\begin{aligned} \frac{q\mu}{2\pi rkS} &= \frac{P_2 - P_1}{\ln(b/a)} + \\ &+ r \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 J_0^2(a\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} U_2(r, \alpha_n, \kappa, \tau) \frac{2(\ln a - \ln b)}{\pi \alpha_n^2 \ln(b/a)} \left[ P_1 \frac{J_0(b\alpha_n)}{J_0(a\alpha_n)} - P_2 \right] - \\ &- r\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[P_2 J_0(a\alpha_n) - P_1 J_0(b\alpha_n)] J_0(a\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} U_2(r, \alpha_n, \kappa, \tau). \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} F_2(a, b, r, \alpha_n, \kappa, \tau) &= \frac{1}{\ln(b/a)} - r\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \frac{(\ln a - \ln b)}{\ln(b/a)} J_0^2(a\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} U_2(r, \alpha_n, \kappa, \tau), \\ F_1(a, b, r, \alpha_n, \kappa, \tau) &= -\frac{1}{\ln(b/a)} + r\pi \left( \frac{(\ln a - \ln b)}{\ln(b/a)} + 1 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a\alpha_n) J_0(b\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} U_2(r, \alpha_n, \kappa, \tau). \end{aligned}$$

Тоді рівняння (4.31) набуде вигляду

$$\frac{q\mu}{2\pi rkS} = P_2 F_2(a, b, r, \alpha_n, \kappa, \tau) + P_1 F_1(a, b, r, \alpha_n, \kappa, \tau).$$

Звідси

$$P_2 = \frac{\frac{q\mu}{2\pi rkS} - P_1 F_1}{F_2}.$$

Якщо  $\tau \rightarrow \infty$ , або достатньо велике, то  $F_2 = \frac{1}{\ln(b/a)}$ ,  $F_1 = -\frac{1}{\ln(b/a)}$ .

Тоді

$$P_2 = P_1 + \ln(b/a) \frac{q\mu}{2\pi rkS}.$$

Знайдений тиск  $P_2$  на зовнішньому контурі води використовується для знаходження висоти стовпа води, який потрібно підтримувати для забезпечення ефективної роботи ПСГ.

#### 4.8 Балансова модель процесу заміщення газу водою

При моделюванні процесу взаємозаміщення газу водою важливим завданням є побудова балансової моделі процесу заміщення газу водою. При цьому потрібно враховувати ряд факторів, які впливають на даний процес, а саме: параметри пористого сердовища, вхідні дані (тиск на ГЗП, дебіт свердловини тощо). Нехай пласт підземного сховища газу моделюється порожнистими циліндрами (рис. 4.2), в центрі якого розміщена свердловина і який поділений на зони:

I зона заповнена газом;

II зона виникає внаслідок руху води, яка заземлює деяку кількість пор, до свердловини;

III зона заповнена водою.

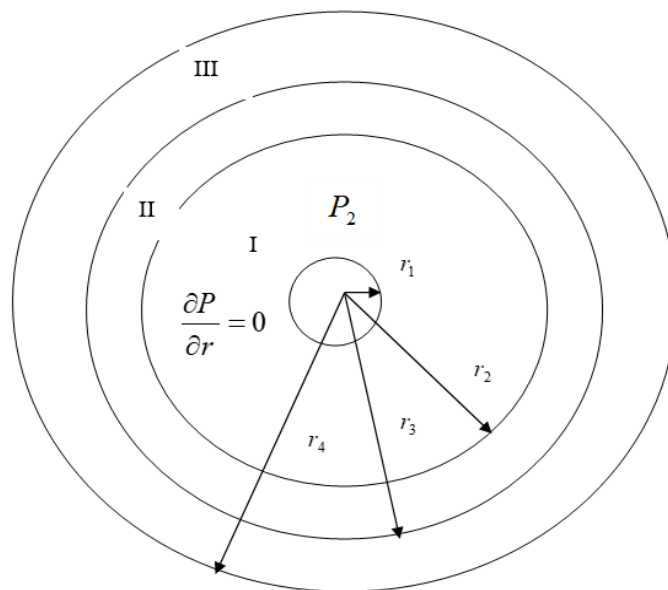


Рис. 4.2. Схема розподілу зон пласту ПСГ

Позначимо  $m_1$  та  $m_3$  пористості пласту у відповідних зонах. Параметр  $m_2$  характеризує частину заземлених пор. Поровий об'єм зон відповідно має вигляд [149]:

$$\Omega_1 = \pi h m_1 (r_2^2 - r_1^2), \Omega_2 = \pi h m_2 (r_3^2 - r_2^2), \Omega_3 = \pi h m_3 (r_4^2 - r_3^2).$$



На початок періоду відбирання границя розподілу газу та води проходила по циліндричній поверхні радіуса  $r_3$ . Відповідно початковий запас газу запишемо у вигляді [149]:

$$Q_{gp} = \frac{\pi h m_1 p_1}{T_p p_s z_1} (r_3^2 - r_1^2),$$

а кількість води

$$Q_{vp} = \pi h m_3 (r_4^2 - r_3^2).$$

Якщо через деякий час відібрано об'єм газу  $\Delta Q$ , то межа води переміститься на циліндричну поверхню з радіусом  $r_2$ . При своєму русі вода зацемить деяку кількість пор, в яких знаходиться газ об'ємом [149]

$$Q_2 = \frac{\pi h m_2 p}{T_p p_s z} (r_3^2 - r_2^2).$$

Кількість води, що поступила в зону II, буде

$$Q_v = \pi h (m_1 - m_2) (r_3^2 - r_2^2).$$

Оскільки початковий об'єм газу  $Q_{vp}$  та об'єм  $\Delta Q$  відібраного газу відомий, то балансова рівність буде

$$Q_{vp} = Q_1 + Q_2 + \Delta Q.$$

В останній формулі

$$Q_1 = \frac{\pi h m_1 p}{T_p p_s z} (r_2^2 - r_1^2)$$

кількість газу, що є в порожнистому циліндрі з радіусами  $r_1$  та  $r_2$  і висотою  $h$ .

Тому

$$Q_{vp} = \frac{\pi h m_1 p}{T_p p_s z} (r_2^2 - r_1^2) - \frac{\pi h m_2 p}{T_p p_s z} (r_3^2 - r_2^2) + \Delta Q,$$

або

$$\frac{\pi h m_1}{T_p p_s} \frac{p_1}{z_1} (r_3^2 - r_1^2) = \frac{\pi h m_1}{T_p p_s} \frac{p}{z} (r_2^2 - r_1^2) - \frac{\pi h m_2}{T_p p_s} \frac{p}{z} (r_3^2 - r_2^2) + \Delta Q,$$

звідки отримується рівність

$$\frac{p_1}{z_1} m_1 (r_3^2 - r_1^2) = \frac{p}{z} m_1 (r_2^2 - r_1^2) + \frac{p}{z} m_2 (r_3^2 - r_2^2) + \frac{T_p p_s}{\pi h} \Delta Q.$$

Таким чином, за відомими значеннями параметрів  $r_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $p_1$ ,  $T_p$ ,  $h$  для знаходження значень параметрів  $m_2$  та  $r_2$  отримуємо система

$$\begin{cases} Q_v = \pi h (m_1 - m_2) (r_3^2 - r_2^2) \\ \frac{p_1}{z_1} m_1 (r_3^2 - r_1^2) = \frac{p}{z} m_1 (r_2^2 - r_1^2) + \frac{p}{z} m_2 (r_3^2 - r_2^2) + \frac{T_p p_s}{\pi h} \Delta Q \end{cases}.$$

Якщо проходить процес відбору газу, то тиск  $p$  падає. Оскільки змінними є тільки  $p$  та  $r_2$ , то із зменшенням тиску зменшується і радіус  $r_2$ .

Зробимо перетворення рівнянь. З першого рівняння системи отримуємо, що

$$Q_v = \pi h (m_1 - m_2) r_3^2 - \pi h (m_1 - m_2) r_2^2,$$

звідки

$$r_2^2 = r_3^2 - \frac{Q_v}{\pi h (m_1 - m_2)}.$$

Якщо ввести позначення  $\bar{p} = \frac{p}{z}$ , то з другого рівняння системи отримуємо рівняння для визначення параметру  $m_2$

$$m_1 (r_3^2 - r_1^2) \frac{\bar{p}_1}{p} = \frac{p}{z} (m_1 - m_2) \left( r_3^2 - \frac{Q_v}{\pi h (m_1 - m_2)} \right) + m_2 r_3^2 - m_1 r_1^2 + \frac{T_p p_s}{\pi h} \Delta Q.$$

Останнє рівняння дає можливість за кількістю поступленої води в пласт ПСГ  $Q_v$  визначити кількість відібраного газу  $\Delta Q$ . При цьому вважаються відомими значення параметрів  $r_i, i = \overline{1,4}, m_1, m_2, p_1, T_p, h$ . Середнє значення тиску в зоні I обчислюється на основі моделі фільтрації газу в полярних координатах.

Якщо є можливість заміряти величини  $Q_v$  та  $\Delta Q$ , то з останнього рівняння можна визначити значення параметру  $m_2$ , за яким визначається кількість зацмленого газу  $Q_2$  в області, обмеженій циліндричними поверхнями з радіусами  $r_2$  та  $r_3$  ( $r_3 > r_2$ ).

Алгоритм розрахунку витіснення газу водою [90, 150]:

1. Задається (вимірюється) тиск на ГЗП та дебіт свердловини.
2. На базі гідравлічного розрахунку ланцюжка “ГЗП – шлейф – обв’язка свердловини – робоча колона – вибій – пласт” розраховується тиск газу на межі поділу “газ-вода”.
3. Маючи значення тисків на внутрішньому та зовнішньому контурах води, знаходимо розподіл тиску води.
4. За відомим розподілом тиску знаходиться швидкість руху внутрішнього контуру води.
5. За розподілом тиску в газовій зоні знаходиться швидкість руху зовнішнього контуру газу. На межі поділу “газ-вода” швидкість води та газу повинні бути рівними. Рівними повинні бути і тиски газу та води. Рівність швидкостей та тисків необхідна для узгодження параметрів пласту в газовій та водяній зонах.
6. За відомим об’ємом відібраного газу визначається звільнений об’єм пласта-колектора газу, який заповнюється водою. Звільнений об’єм визначається зменшенням радіуса зовнішнього контуру газу. Значення зменшення радіусу повинно співпадати з аналогічною величиною, знайденою на основі швидкості руху як внутрішнього контуру води, так і зовнішнього контуру газу.

7. Маючи знайдені величини, можна знайти час, за який вода підійде до вибою свердловини, або об'єм газу, який можна отримати без заводнення свердловини.

При цьому, потрібно враховувати наступні зауваження:

1. Підтік води визначається в припущенні, що є чітка межа розподілу води та газу.
2. Врахування капілярних явищ, защемлення газу в порах має незначний вплив на заводнення свердловини і можливість його врахування в умовах невизначеності вхідних даних є проблематичним.
3. Розподіл тиску у водяній та газовій зонах можна визначати і в нестационарному режимі руху речовин.

Визначення розподілу тиску газу в нестационарному випадку [150]:

1. Вхідними даними для визначення розподілу тиску є значення тиску на ГЗП та дебіт свердловини.
2. За цими даними знаходиться тиск на межі квадратичної зони руху газу.
3. Квадратична зона визначається за критеріями Рейнольда.
4. Оскільки  $q = vS = v2\pi rh$ , то з формули

$$q = 2\pi rh \left\{ \frac{P_2 - P_1}{\ln(b/a)} + r \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 J_0^2(a\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} \times \right. \\ \left. \times \exp(-\kappa\alpha_n^2\tau) U_1(r\alpha_n) \int_a^b xf(x)U_0(x\alpha_n)dx - \right. \\ \left. - r\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[P_2 J_0(a\alpha_n) - P_1 J_0(b\alpha_n)] J_0(a\alpha_n) U_1(r\alpha_n)}{J_0^2(a\alpha_n) - J_0^2(b\alpha_n)} \exp(-\kappa\alpha_n^2\tau) \right\} \frac{\pi kh}{\beta\mu} \frac{\chi RT}{pS},$$

за відомим значенням тиску  $P_1$  знаходимо значення тиску  $P_2$  на зовнішній границі контуру. При цьому вважається, що в початковий момент часу тиск в газовій зоні є сталим.

5. Верхня межа газової зони визначається за відомою кількістю газу в пласті-колекторі.

Визначення розподілу тиску води в нестационарному випадку [150]:

1. Тиск на зовнішньому контурі вважається сталим гідростатичним і визначається на основі висотної відмітки.
2. Тиск на внутрішньому контурі визначається на базі гідравлічного розрахунку ланцюжка “ГЗП – шлейф – обв’язка свердловини – робоча колона – вибій – пласт”.

Зв’язок пластового тиску в квадратичній зоні з вибійним [79, 86]:

$$p_{пл}^2 - p_b^2 = Aq + Bq^2.$$

Вибійний тиск зв’язаний з гирловим наступним співвідношенням [79, 86]:

$$p_v^2 e^{-b} - p_g^2 = a_r q^2.$$

В свою чергу для гирлового тиску і тиску на виході з обв’язки свердловини має місце формула [79, 86]:

$$p_g^2 - p_o^2 = a_o q^2.$$

Зв’язок тиску на виході з обв’язки свердловини з тиском на вході в газозбірному пункті [79, 86]:

$$p_o^2 - p_{gзп}^2 = a_s q^2.$$

На основі знайдених тисків на границях розраховуємо початковий розподіл тиску та розв’язуємо рівняння. Даний підхід є наближеним, але дає можливість оцінити параметри руху води та газу за прийнятих умов: рух вважається усталеним, параметри руху та газу постійними і підтримується постійний тиск в свердловинах та на межі “газ-вода”. Аналогічні результати можна отримати і за інших умов. Також потрібно враховувати, що на межі “газ-вода” проходить дефундування газу у воду.

#### 4.9 Чисельні експерименти

За отриманими теоретичними результатами проведено чисельні експерименти, деякі результати з яких подано в таблицях. Обчислювальний експеримент охоплює наступні завдання:

- знайти залежність швидкості руху води до вибою свердловини від пластового тиску та тиску на ГЗП, при заданих дебіту свердловини, тиску на зовнішньому контурі води та параметрів пористого середовища;
- знайти залежність радіусів внутрішнього та зовнішнього контурів та швидкості руху води до вибою свердловини, при заданих тиску на ГЗП, дебіту свердловини, параметрів пористого середовища та розрахованого пластового тиску на базі гідравлічної ув'язки “пласт підземного газосховища – газозбірний пункт”;
- знайти тиск на зовнішньому контурі води при заданих тиску на ГЗП, дебіту свердловини, параметрів пористого середовища та розрахованого пластового тиску на базі гідравлічної ув'язки “пласт підземного газосховища – газозбірний пункт” для розрахунку висоти стовпа води, який необхідно підтримувати для ефективної експлуатації ПСГ;
- знайти залежність дебіту свердловини та швидкості руху води до вибою свердловини при заданих тиску на ГЗП та на зовнішньому контурі води, параметрів пористого середовища, при цьому, оскільки, тиски газу та води на межі поділу “газ-вода” повинні бути рівні, то значення тиску газу на даній межі (пластового тиску) розраховувалося через побудовану формулу знаходження розподілу тиску у воді;
- знайти залежність тисків на зовнішньому і внутрішньому контурі та швидкості руху води до вибою свердловини, при заданих тиску на ГЗП, дебіту свердловини, параметрів пористого середовища та розрахованого пластового тиску (тиску на внутрішньому контурі) на базі гідравлічної ув'язки “пласт підземного газосховища – газозбірний пункт”.

Обчислення проводилися за наступних вхідних параметрів:

$$p_0 = 6,9 \cdot 10^6 (H / m^2); \quad p_{gzp} = 4,9 \cdot 10^6 (H / m^2); \quad T = 293(K); \quad \mu = 0,0008 (m^2 / c);$$

$$g = 9,8 (m / c^2); \quad \alpha = 0,8; \quad m = 0,28; \quad k = 4 \cdot 10^{-15}; \quad \rho = 998 (кг / m^3); \quad z = 0,9;$$

$$\rho_0 = 0,68 (кг / m^3), \quad R = 8,3144621 (Дж / моль \cdot K);$$

В табл. 4.1 приведені наступні параметри ПСГ:  $a(m)$  – радіус внутрішнього контуру,  $b(m)$  – радіус зовнішнього контуру,  $P_1(ama)$  – значення тиску на внутрішньому контурі,  $P_2(ama)$  – значення тиску на зовнішньому контурі,  $h(m)$  – висота стовпа води, для підтримування тиску на зовнішньому контурі води.

Таблиця 4.1. Значення тисків на внутрішньому ( $P_1(ama)$ ) та зовнішньому ( $P_2(ama)$ ) контурах при зміні об'єму наявного газу в ПСГ.

$a$	$b - a$	$P_1$	$P_2$	$h$
500	500	56,29	59,24	592,8
400	600	54,97	61,43	614,7
300	700	54,12	62,87	629,1
200	800	53,87	63,85	638,9
100	900	52,18	66,91	669,6
50	950	51,36	69,16	692,06

Таблиця 4.2. Розподіл тиску на зовнішньому контурі в залежності від часу та тиску на внутрішньому контурі ( $t(c)$  – час,  $P_1(ama)$  – значення тиску на внутрішньому контурі,  $P_2(ama)$  – значення тиску на зовнішньому контурі).

$t$	$P_1$	$P_2$	$t$	$P_1$	$P_2$
1000	56,29	59,24	50000	54,21	62,88
5000	55,17	60,23	75000	54,17	63,05
10000	54,24	62,47	100000	54,17	63,05

Таблиця 4.3. Залежність швидкості руху води  $\nu$  від тиску на ГЗП  $p_{gzp}$ , пластового тиску  $p_{pl}$  за наступних значень параметрів  $q = 2(\text{м}^3/\text{с})$ ,  $R_k = 350(\text{м})$ ,  $R_c = 330(\text{м})$ .

$p_{gzp}$	45	43	41	39	37	35	33
$p_{pl}$	51,89	50,17	48,46	46,78	45,13	43,5	41,91
$\nu_p$	3E-06	4E-05	8E-05	1E-04	2E-04	2E-04	2E-04
$\nu_e$	2E-06	3E-05	7E-05	0,8E-04	1,9E-04	1,8E-04	1,8E-04

Таблиця 4.4. Залежність радіусів контурів  $R_k$ ,  $R_c$  та швидкістю руху води  $\nu$  за наступних значень параметрів  $R_k = 400(\text{м})$ ,  $q = 2(\text{м}^3/\text{с})$ ,  $p_{gzp} = 3,4 \cdot 10^6 (\text{Н/м}^2)$ ,  $p_{pl} = 4,3 \cdot 10^6 (\text{Н/м}^2)$ ,  $p_0 = 4,9 \cdot 10^6 (\text{Н/м}^2)$ .

$R_k - R_c$	5	0	15	20	25	30	35
$\nu_p$	6E-04	3E-04	3E-04	2E-04	2E-04	2E-04	1E-04
$\nu_e$	7E-04	2,5E-04	2E-04	1,8E-04	1,2E-04	1,01E-04	1E-04

Таблиця 4.5. Залежність дебіту свердловини  $q$  та швидкості руху води  $\nu$  за наступних значень параметрів  $R_k = 350(\text{м})$ ,  $R_c = 330(\text{м})$ ,  $p_{gzp} = 3,4 \cdot 10^6 (\text{Н/м}^2)$ .

$q$	5	4	3	2	1
$p_{pl}$	62,48	55,59	49,19	43,5	38,84
$\nu_p$	1E-06	8E-05	6E-05	2E-04	3E-04
$\nu_e$	1,4E-06	8,2E-05	6,3E-05	2,4E-04	3,6E-04

В табл. 4.3 – 4.5 позначено  $\nu_p$ ,  $\nu_e$  – розраховане та експериментальне значення швидкості руху ГВК до свердловини відповідно.



Таблиця 4.6. Залежність тисків  $P_1$  (при  $P_2 = 5,4 \cdot 10^6$  (Н/м<sup>2</sup>)) на поверхні  $r_1$  та  $P_2$  (при  $P_1 = 4,4 \cdot 10^6$  (Н/м<sup>2</sup>)) на поверхні  $r_2$  від швидкості руху води  $v$  за наступних значень параметрів  $r_2 = 400$ (м),  $r_1 = 350$ (м).

$v$	2E-04	2E-05	2E-06
$P_1$	44,41	47,21	49,32
$P_2$	48,01	49,88	51,23

З результатів обчислювальних експериментів слідують наступні висновки:

1. При зменшенні тиску на газозбірному пункті, дебіту свердловини або пластового тиску зменшується і швидкість руху газоводяного контакту до свердловини.
2. При збільшенні радіуса водяної зони потрібно збільшувати висоту стовпа води.

#### 4.10 Висновки до Розділу 4

В четвертому розділі побудовано математичну модель руху газу в ПСГ за наявності контурної води та досліджено вплив параметрів пористого середовища та газу на швидкість підняття ГВК. Побудовано зв'язок між дебітом свердловини та значеннями тисків на ГЗП та на зовнішній межі води. Отримані теоретичні результати апробовано на модельній задачі в ході обчислювального експерименту. Показано співвідношення між дебітом свердловини, тиском на ГЗП та тиском на зовнішній межі води. Розроблено алгоритм знаходження швидкості руху ГВК до свердловини з недопущенням її заводнення. Показано залежність дебіту свердловини, тиску на ГЗП, пластового тиску та швидкості руху ГВК. Отримані результати в ході обчислювального експерименту дають змогу корегувати вхідні параметри ПСГ для ефективної експлуатації.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

В роботі розв'язано актуальне науково-технічне завдання – аналітико-числове моделювання процесу взаємозаміщення газу водою з метою недопущення заводнення свердловини та визначення наявної кількості газу у воді. Таким чином, основними результатами є наступні:

1. На основі аналізу відомих математичних моделей процесів взаємодії руху газу з технологічними об'єктами та методів розв'язування відповідних нелінійних рівнянь і систем показана необхідність побудови нових та уточнення існуючих моделей і методів для забезпечення отримання необхідної точності результатів за прийнятний час.
2. Побудовано математичну модель роботи ПСГ при наявності підшовної води та досліджено швидкість руху ГВК з метою недопущення заводнення свердловини. Розроблено алгоритм визначення швидкості підняття ГВК для визначення часу, за який вода може підійти до гирла свердловини. Отримані результати апробовані в ході чисельного експерименту на модельній задачі. Знайдені в ході чисельного експерименту співвідношення між дебітом свердловини, тиском на ГЗП, пластовим тиском та швидкістю підняття ГВК дають змогу корегувати вхідні дані для недопущення заводнення свердловини. Результати дослідження можна використати для розрахунку депресії тисків у пласті під час визначення граничного безводного дебіту.
3. Розроблено системну модель руху газу в ПСГ, яка описує у взаємозв'язку фільтраційні, дифузійні, конвективні та газодинамічні процеси, що дало змогу розробити підхід для оцінки кількості дифундованого газу у воду при роботі ПСГ. Досліджено вплив коефіцієнта дифузії, тиску на межі поділу “газ-вода” та тиску на нижній межі води на кількість дифундованого газу. Показано, що дифундований газ в більшості розміщений у верхній частині шару води, а також, що на кількість дифундованого газу

значно впливає коефіцієнт дифузії та розміри пласту. Значний вплив на кількість газу має також тиск на межі поділу “газ-вода” та незначний вплив тиск на нижній межі для підтримування витіснення газу. Отримані результати в ході обчислювального експерименту дають змогу оцінити кількість газу в пластах підземних сховищ газу, а також дають змогу корегувати параметри ПСГ для зменшення дифундування газу в воду при роботі ПСГ.

4. Побудовано математичну модель руху газу в ПСГ за наявності контурної води та досліджено вплив параметрів пористого середовища та газу на швидкість підняття ГВК. Розроблено алгоритм знаходження швидкості руху ГВК до свердловини з метою недопущення її заводнення. Побудовано зв’язок між дебітом свердловини та значеннями тисків на ГЗП та на зовнішній межі води, що дає змогу корегувати вхідні параметри ПСГ для ефективної експлуатації.
5. Побудовані чисельно-аналітичні моделі заміщення газу водою в ПСГ дають змогу розраховувати параметри роботи системи “пласт-колектор-МГ” з метою недопущення заводнення свердловин та планувати сумісну роботу об’єктів підземних сховищ газу та газотранспортної системи на етапах відбирання та нагнітання газу.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика / Г.Н. Абрамович // – М. : Наука, 1969. – 825 с.
2. Александров А.В. Проектирование и эксплуатация систем дальнего транспорта газа / А.В. Александров, Е.И. Яковлев // – М. : Недра, 1974. – 432 с.
3. Альбом характеристик центробежных нагнетателей природного газа. / – М. : ВНИИГаз, 1985.
4. Альтшуль А.Д. Гидравлика и аэродинамика / А.Д. Альтшуль, Л.С. Животовский, Л.П. Иванов // – М. : Стройиздат, 1987. – 240 с.
5. Альтшуль А.Д. Гидравлика и аэродинамика (Основы механики жидкости) / А.Д. Альтшуль, П.Г. Киселев // – М. : Стройиздат, 1975. – 323 с.
6. Альтшуль А.Д. Гидравлические сопротивления / А.Д. Альтшуль// – М.: Недра, 1982. – 2-е изд. – 224 с.
7. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер // В 2 томах / Пер. с англ. – М. : Мир, 1990. – Т.1. – 384 с.
8. Атавин А.А. Описание переходных процессов в сложных трубопроводных системах моделями с сосредоточенными параметрами / А.А. Атавин, В.В. Тарасевич // Труды Международной конференции RDAMM-2001. – Т.6, Ч. 2.
9. Бабе Г.Д. Образование гидратов при движении газа в трубах / Г.Д. Бабе, Э.А. Бондарев, А.Г. Гройсман, М.А. Каниболотский // Инженерно-физический журнал. –1973. – Т. 25, № 1 – С. 94-98.
10. Базаров И.П. Термодинамика: Учеб. для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. / И.П. Базаров // – М.: Высшая школа, 1991.
11. Балавин М.А. Автоматизация процессов газовой промышленности / М.А. Балавин, С.П. Продовиков, А.З. Шайхутдинов, О.В. Назаров,

- В.Б. Яковлев, Я.А. Евдокимов, Н.С. Зотов, Ю.А. Кораблев // – М.: Наука, 2003. – 496 с.
12. Баренблатт Г.И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г.И. Баренблатт, Б.М. Ентов, В.М. Рыжик // – М.: Недра, 1972. – 288 с.
  13. Баренблатт Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик // – М.: Недра, 1984, – 211 с.
  14. Безверхий П.П. Коэффициенты диффузии метана. Процесс растворения газа / П.П. Безверхий, В.Г. Мартынец, Э.В. Матизен // Химия и компьютерное моделирование. Бутлеровские сообщения. – 2002. – С. 181-183.
  15. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи // В 2-х томах. – М.: Наука, 1974. – т.1 – 296 с., т.2. – 300 с.
  16. Бек Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клэр // Пер. с англ. – М.: Мир. – 1989. – 132 с.
  17. Белман Р. Динамическое программирование и уравнения в частных производных / Р. Белман, Э. Энджел // – М.: Наука, 1974. – 207 с.
  18. Бермак Р. Автоматизированная система управления магистральными газопроводами / Р. Бермак // – Л.: Недра, 1978. – 155 с.
  19. Берман Р.Я. Оптимизация режимов газотранспортных систем в АСУ / Р.Я. Берман // –М.: ВНИИЭГазпром, 1983. – Вып.3. – 35 с.
  20. Бобровский С.А. Движение газа в газопроводах с путевым отбором / С.А. Бобровский, С.Г. Щербаков, М.А. Гусейн-Заде // – М.: Наука, 1972. – 192 с.
  21. Бобровский С.А. Трубопроводный транспорт газа / С.А. Бобровский, С.Г. Щербаков, Е.И. Яковлев и др. // – М.: Наука, 1976. – 495 с.
  22. Вавричук П.Г. Дослідження впливу тиску на наявність газу у воді в пластах підземних сховищ газу / П.Г. Вавричук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2016. – Вип.23. – С. 9-16.
  23. Вавричук П.Г. Моделювання процесу руху газоводяного контакту в процесі відбирання газу з підземних сховищ / П.Г. Вавричук, Н.М. Припула // V Всеукраїнська наукова конференція «Нелінійні проблеми

- аналізу» (19-21 вересня 2013 року, Івано-Франківськ): Тези доп. – Івано-Франківськ. – С. 15-16.
24. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. / Н.Б. Варгафтик // – М.: Наука, 1972. – 708 с.
  25. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев // – М.: Наука, 1981. – 400 с.
  26. Ваулина Е.В. Моделирование и исследование режимов функционирования комплекса технологических объектов газодобывающего предприятия: Дис. к.т.н. / Е.В. Ваулина // – Москва, 1999.
  27. Вейник А.И. Термодинамика необратимых процессов / А.И. Вейник // – Минск: Наука и техника. – 359 с.
  28. Вечерік Р.Л. Математичне моделювання процесу руху газу в системі пласт підземного сховища газу-магістральний газопровід / Р.Л. Вечерік, Я.Д. П'янило, М.Г. Притула, Ю.Б. Хаєцький // Нефть и газ. – 2004. – №6. – С. 83-89.
  29. Волков М.М. Справочник работника газовой промышленности. 2-е издание, переработанное и дополненное. / М.М. Волков, А.Л.Михеев, К.А. Конев // – М.: Энергоатомиздат, 1989.
  30. Вольский Э.Л. Режим работы магистрального газопровода / Э.Л. Вольский, И.М. Константинова // – Л.: Недра, 1970. – 168 с.
  31. Геронимус Я.Л. Теория ортогональных многочленов / Я.Л. Геронимус // – Москва, 1950. – 138 с.
  32. Гладун С. Моделювання масопереносу в системі пласт підземного сховища газу-магістральний газопровід з метою оптимізації його роботи / С. Гладун // Фізико–математичне моделювання та інформаційні технології. – 2016. – Вип. 23. – С. 52-61.
  33. Гладун С. Розрахунок гідродинамічних параметрів стану об'єктів транспорту газу / С. Гладун, Н. Притула, Б. Землянський, О. Химко // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”. – Львів, 2008. – № 629. – С. 92-99.

34. Григорьев Л.И. Основные проблемы теории диспетчерского управления. / Л.И. Григорьев, В.Г. Герке, С.А. Сарданашвили / – Москва: Изд. «Газоил–пресс», декабрь 2002. – (Производственно-технический журнал Газовая промышленность).
35. Дацюк А.В. Программний комплекс для моделювання і оптимізації роботи газотранспортних систем / А.В. Дацюк, В.А. Фролов, С.В. Гладун, О.М. Химко, Я.Д. Пянило, М.Г. Притула, Н.М. Притула, Н.Б. Лопух, Б.В. Землянський // 3-я Міжнародна науково-технічна конференція “Комп’ютерні науки та інформаційні технології” (CSIT 2008). Львів, – 2008. – С. 217-221.
36. Дацюк А. Розрахунок об’ємів акумульованого газу в газотранспортній системі / А. Дацюк, С. Гладун, Н. Притула, М. Притула, Я. П’янило // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”. – 2009. – № 638. – С. 81-85.
37. Дацюк А.В. Управление потоками газа в газотранспортных системах / А.В. Дацюк, В.А. Фролов, С.В. Гладун, Н.М. Притула, Я.Д. Пяныло, М.Г. Притула // 4-ая Межд. науч.-техн. конф. “Компьютерные технологии поддержки принятия решений в диспетчерском управлении газотранспортными и газодобывающими системами”: сборник докладов (Москва, 2009). – С. 277-282.
38. Дейнека В.С. Математические модели и методы расчета задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В.Скопецкий // – К.: Наук. думка, 1998. – 615 с.
39. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Г. Деч // – М.: Наука, 1965. – 287 с.
40. Диткин В.А. Операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников // – М.: Высшая школа, – 1975. – 407 с.
41. Диткин В.А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников // – М.: Высшая школа, – 1965. – 466 с.
42. Евдокимов А.Г. Моделирование и оптимизация потокораспределением в

- КС / А.Г. Евдокимов, А.Д. Тевяшев, В.В. Дубровский // – М: Стройиздат, 1990. – 368 с.
43. Егоров А.В. Оптимизация режимов транспорта газа по ГТС. / А.В. Егоров, С.К. Митичкин, С.А. Сарданашвили // – 1991. – Вып. 3 – (Газовая промышленность, сер. Экономика, организация и управление производством в газовой промышленности).
44. Жидкова М.А. О точности линеаризации уравнений неустановившегося движения газа / М.А. Жидкова // Газовая промышленность. – 1965, №11. – С. 20-26.
45. Жидкова М.А. Трубопроводный транспорт газа / М.А. Жидкова // – Киев: Наук. думка, 1973. – 142 с.
46. Ісичко Л. В. Математичне моделювання як один з етапів процесу розв'язування фізичних задач / Л. В. Ісичко // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Педагогічні науки. – 2013. – Вип. 109. – С. 176-180.
47. Казарян В.А. Подземное хранение газов и жидкостей / В.А. Казарян // – М.: Институт компьютерных исследований, 2006, – 432 с.
48. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер // – М.: Наука, 1964. – 487 с.
49. Ковалко М.П. Трубопровідний транспорт газу / М.П. Ковалко, В.Б. Михалків, В.Я. Грудз, Тимків Д.Ф. і інші. // – К.: Арена, 2002. – 600 с.
50. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн // – М.: Наука, – 1974. – 831 с.
51. Коротаев Ю.П. Добыча, транспорт и подземное хранение газа / Ю.П. Коротаев, А.И. Ширковский // – М.: Недра, – 1984. – 288 с.
52. Кочуева О.Н. Эвристические алгоритмы расчета экономичных режимов магистрального газопровода в диспетчерском управлении / О.Н. Кочуева, С.К. Митичкин, С.А. Сарданашвили – Газовая промышленность. ИРЦ РА.0 "Газпром". – (Серия : Экономика, организация и управление производством в газовой промышленности), № 4-5, 1993.



53. Крылов В.И. Вычислительные методы высшей математики: В 2-х томах / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский // – Минск: Вышэйшая школа, т.1. – 1972. – 296 с., т.2. – 1975. – 320 с.
54. Кулик М.Н. Методы системного анализа в энергетических исследованиях / М.Н. Кулик // – Киев: Наук.думка. – 1987. – 200 с.
55. Кучин Б.Л. Оперативная информация в АСУ магистральных газопроводов / Б.Л. Кучин // – М.: Недра, 1979, – 216 с.
56. Кучин Б.Л. Управление системой газоснабжения в осложненных условиях эксплуатации / Б.Л. Кучин, А.Е. Алтунин // – Москва: Недра, 1984. – 208 с.
57. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л.С. Лейбензон // – М.: ГИТТЛ, 1947, – 244 с.
58. Логинов К.В. Расчет, оптимизация и управление режимами работы больших гидравлических сетей / К.В. Логинов, А.М. Мызников, Р.Т. Файзуллин // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, № 9. – С. 92–106.
59. Лопух Н. Б. Розрахунок початково-граничних умов в задачах фільтрації газу в пористих середовищах / Н.Б. Лопух, Я.Д. Пянило, М.Г. Притула, Н.М. Притула // “Вісник Національного університету “Львівська політехніка” “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”. – Львів, 2008, – № 12 . – С. 19-23.
60. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк // – М.: Мир, 1980. – 608 с.
61. Ляшко С.И. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса / С.И. Ляшко, Д.А. Ключин, А.С. Тригуб // – К.: Наукова думка. 1998. – 240 с.
62. Максимов Ю.И. Иммитационные модели оперативного планирования и управления магистральным транспортом газа / Ю.И. Максимов // – Новосибирск : Наука, 1982. – 194 с.
63. Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А.В. Манжиров, А.Д. Полянин // – М.: Из-ство “Факториал

- Пресс”, 2000. – 384 с.
64. Маркин Н.С. Основы теории обработки результатов измерений / Н.С. Маркин // – М.: Из-ство стандартов, 1991. – 176 с.
  65. Миркин А. Трубопроводные системы: Справочное издание / А. Миркин, В. Усиныш // – М.: Химия, 1991, 366 с.
  66. Митичкин С.К. Оптимизация режимов транспорта газа по газотранспортным сетям. / С.К. Митичкин, С.А. Сарданашвили // – (Газовая промышленность, Сер. Экономика, организация и управление производством в газовой промышленности), – 1991. – № 2.
  67. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения / И.Н. Молчанов // – К.: Наук. думка, 1988. – 342 с.
  68. Монтгомери Д.К. Планирование эксперимента и анализ данных: Пер. с англ. / Д.К. Монтгомери // – Л.: Судостроение, 1980. – 384 с.
  69. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач: Пер. с англ. / Ц. На // – М.: Мир, 1982. – 296 с.
  70. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред: В 2-х томах / Р.И. Нигматулин // – М.: Наука, 1987. – Т.1. – 464 с.; – Т.2. – 360 с.
  71. Новицкий Н. Трубопроводные системы энергетики: Управление развитием и функционированием. Коллективная монография / Н. Новицкий, Е. Сеннова, М. Сухарев и др. // – Новосибирск: Наука, 2004. – 461 с.
  72. Панкратов В.С. Комплекс моделирования и оптимизации режимов работы ГТС / В.С. Панкратов, В.Г. Герке, С.К. Митичкин, С.А. Сарданашвили // – М.: Газпром, 2002. – 56 с. – (Газовая промышленность. Серия: Автоматизация, телемеханизация и связь в газовой промышленности Изд. ООО ИРЦ).
  73. Панкратов В.С. Разработка и эксплуатация АСУ газотранспортными системами / В.С. Панкратов, Р.Я. Берман // – Л.: Недра, 1982. – 142 с.
  74. Пыхачев Г.Б. Подземная гидравлика. – М.: Недра, 1973. – 359 с.
  75. Полянин А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической

- физики: точные решения // А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев // – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
76. Прилуцкий М.Х. Оптимизационные задачи оперативного управления работой компрессорной станцией. / М.Х. Прилуцкий, И.Р. Бухвалов, Л.Г. Афраймович, Н.В. Старостин, А.В. Филимонов // Электронный научный журнал «Исследовано в России». – 2008. – С. 375-382. – <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2008/032.pdf>
77. Притула Н.М. Задачі оптимізації потокорозподілу в газотранспортних системах / Н.М. Притула // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”. – Львів, 2007. – № 604. – С. 220-227.
78. Притула Н.М. Математичні моделі і методи розрахунку режимів роботи газотранспортної системи України (програмний комплекс) / Н.М. Притула, Я.Д. П’янило, М.Г. Притула, А.В. Дацюк, В.А. Фролов, С.В. Гладун // П’ята науково-практична конференція з міжнародною участю “Математичне та імітаційне моделювання систем”. – 2010. – С. 138-139.
79. Притула Н.М. Підземні сховища газу (математичні моделі та методи) / Притула Н.М., П’янило Я.Д., Притула М.Г. // — Львів: РАСТР-7, 2015.- 266 с.
80. Притула М.Г. Розрахунок дебіту свердловини з врахуванням глибини спуску ліфтової труби / М.Г. Притула, Я.Д. П’янило, С.В. Савула // Нафтова і газова промисловість. – 2002. – № 3. – С. 25-28.
81. Притула Н.М. Розрахунок параметрів потокорозподілу в газотранспортній системі (стаціонарний випадок) / Н.М. Притула // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – Львів, 2007. – Вип. 5. – С. 146-157.
82. Притула Н.М. Розрахунок параметрів усталеного руху газу в магістральних газопроводах / Н.М. Притула, М.Г. Притула, Я.Д. П’янило // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”. – Львів, 2006. – № 565. – С. 270-274.

83. Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев // – М.: Наука, 1981. – 800 с.
84. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
85. П'янило Я.Д. Алгоритм термогідрравлічних розрахунків газових мереж / Я.Д. П'янило, М.Г. Притула, В.А. Павленко, Б.В. Землянський // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” “Комп’ютерна інженерія та інформаційні технології”. – 2004. – № 521. – С. 196-200.
86. П'янило Я. Аналітичний спосіб розрахунку параметрів гідравлічної ув'язки колекторного збору газу / Я. П'янило, С. Гладун, Г. П'янило // Вісник Національного університету “Львівська політехніка” “Комп’ютерна інженерія та інформаційні технології”. – Львів, – 2011. – №719. – С. 250-256.
87. П'янило Я.Д. Визначення швидкості руху газоводяного контакту в процесі роботи підземних сховищ газу / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Вип.18. – С. 165-172.
88. П'янило Я.Д. Дифузія газів у пористих середовищах із урахуванням конвективної складової / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // Нафтогазова галузь України. – 2013. – Вип.5. – С. 45-48.
89. П'янило Я.Д. Дослідження гідравлічного тиску при нестационарному русі газу в горизонтальних трубопроводах / Я.Д. П'янило // Мат. методи і фіз. мех. поля. – 2004. – Т. 47, №1. – С. 169-174.
90. П'янило Я.Д. Дослідження впливу водного фактору на параметри експлуатації підземних сховищ газу / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2017”: Секція А. Механіка (23-25 травня 2017 року, Львів). – С. 14-16.
91. П'янило Я.Д. Дослідження неусталеного руху газу в пористих середовищах / Я.Д. П'янило // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2004. – Вип.2. – С. 178–184.

92. П'янило Я.Д. Дослідження перехідних процесів при моделюванні руху газу в горизонтальних трубопроводах / Я.Д. П'янило, М.Г. Притула // Матеріали 2-ої Українсько-Польської конференція "Інформаційно-математичне моделювання складних систем–MIMUZ" – Львів: Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Ахілл. – 2002. – С. 105–110.
93. П'янило Я.Д. Задачі, моделі і методи в задачах керування рухом газу в системі пласт підземного сховища газу – магістральний газопровід / Я.Д. П'янило, М.Г. Притула, Н.М. Притула // Матеріали 4-ої Українсько-Польської конференції “Механіка середовища, методи комп'ютерних наук та моделювання” – Львів: Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Сполон. – 2004. – С. 242–247.
94. П'янило Я.Д. Ітераційні методи розв'язування задач про розподіл тиску в трубопроводах / Я.Д. П'янило, М.Г. Притула, Б.В. Землянський // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – Львів, 2005. – Вип. 1. – С. 97-105.
95. П'янило Я. Математичні моделі процесів енергомасопереносу в газовій динаміці. Задачі та аналіз методів їх розв'язування / Я. П'янило, М. Притула // International workshop on free boundary flows and related problems of analysis. – Ukraine, Kiev, 2005. – P.58-59.
96. П'янило Я.Д. Моделювання процесу відбирання газу з водоносних пластів / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми термомеханіки” (22-24 вересня 2016 року, Львів): Зб. наук. праць / за заг. ред. Р.М. Кушніра [Електронний ресурс]. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2016. – С. 114-117.
97. П'янило Я.Д. Неусталений рух газу в трубопроводах і пористих середовищах / Я.Д. П'янило, М.Г. Притула, Н.М. Притула // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 4.

- С. 72-80.
98. П'янило Я.Д. Ортогональні многочлени в задачах апроксимації функцій двох змінних / Я.Д. П'янило // *Мат. методи і фіз. мех. поля.* – 2002. – №1. – С. 119-124.
99. П'янило Я.Д. Процес заміщення газів в пористих середовищах з врахуванням конвективної складової / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // 10-та Відкрита наукова конференція ІМФН “PSC-IMFS-10” (17-18 травня 2012, Львів): Збірник матеріалів. – Львів: НУ“ЛП”, 2012. – С. В17-В18.
100. П'янило Я.Д. Розподіл гідравлічного тиску при нестационарному русі газу в трубопроводах при наявності компресорних станцій та відборів / Я.Д. П'янило // *Нелінійні коливання.* – Вип. 2. – 1998. – С. 84–88.
101. П'янило Я. Розрахунок режимних параметрів роботи підсистеми транспорту газу пласт підземного сховища-магістральний газопровід / Я. П'янило, С. Гладун, М. Притула, Н. Притула, Г. П'янило // *Науково-технічна конференція «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент» (INTERPOR'15) 22–24 вересня 2015 року (Львів, Україна).* – 2015. – С.67-69.
102. П'янило Я.Д. Система прийняття рішень: Моделі, методи (для газотранспортної системи України) / Я.Д. П'янило, М.Г. Притула, В.А. Фролов, С.В. Гладун // *Тези конф. “Інтелектуальні системи прийняття рішень та прикладні аспекти інформаційних технологій”.* – Україна, Євпаторія, – 2005. С. 35–38.
103. Рид Р. Свойства газов и жидкостей / Р. Рид, Т. Шервуд // [Пер. с англ.; Под ред. В.Б. Когана]. – Л.: Химия, 1971.
104. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский // – М.: Наука, 1971. – 552 с.
105. Сарданашвили С.А. Расчетные методы и алгоритмы / С.А. Сарданашвили // – М.: Изд-во “Нефть и газ”, 2005. – 577 с.
106. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов // – М.: Наука, 1970, – 503 с.

107. Селезнев В.Е. Методы и технологии численного моделирования газопроводных систем / В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, Г.С. Клишин // – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 448 с.
108. Селезнев В.Е. Численный анализ и оптимизация газодинамических режимов транспорта природного газа / В.Е. Селезнев, Г.С. Клишин и др. // – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 224 с.
109. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека // – К.: Наук. думка, – 1991. – 432 с.
110. Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем / Э. Сеттари, Х. Азис // – М.: Недра, 1982. – 416 с.
111. Силаш А.П. Добыча и транспорт нефти и газа / А.П. Силаш // – М.: Недра, 1980. – 264 с.
112. Сеницын С.Н. Исследование на оптимум системы газопровод – компрессорная станция. / С.Н. Сеницын, Е.В. Леонтьев // «Труды Всесоюз. науч.-исслед. ин-та природного газа». – 1970. – Вып. 38. – С. 129-139.
113. Сиперштейн Б.И. Идентифицируемость сложных газопроводных систем / Б.И. Сиперштейн // – Москва, 1986. 20 с. – Деп. во ВНИИЭгазпроме, № 987 гз.
114. Сухарев М.Г. Оптимальное развитие систем газоснабжения / М.Г. Сухарев, Е.Р. Ставровский, В.Е. Брянских // – М.: Недра, – 1981. – 294 с.
115. Сухарев М.Г. Технологический расчет и обеспечение надежности газо- и нефтепроводов / М.Г. Сухарев, А.М. Карасевич // – М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2000. – 272 с.
116. Тевяшев А.Д. Эффективный метод анализа существенно нестационарных неизотермических режимов транспорта газа по системе магистральных газопроводов. / А.Д. Тевяшев, И.Г. Гусарова, Ю.В. Понамарев // – Київ: “Нафтова та газова промисловість”, 1997. – № 4.– С. 23-27.
117. Тевяшев А.Д. Эффективный метод построения модели установившегося потокораспределения в трубопроводных системах энергетики по опера-

- тивным данным / А.Д. Тевяшев, С.И. Козыренко // – Санкт-Петербург, СЭИ СО РАН, сб. “Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики”, 1997. – Вып. 49. – С. 448-459.
- 118.Тевяшева О.А. Комплекс программ моделирования и оптимизации режимов работы многоцеховой компрессорной станции (НИПИАСУтрансгаз, УМГ «Донбастрансгаз») / О.А. Тевяшева, В.Б. Коток, М.В. Пожидаев // III Международная научно-техническая конференция “Компьютерные технологии поддержки принятия решений в диспетчерском управлении газотранспортными и газодобывающими системами”. – Материалы конференции. – М.: ВНИИГАЗ, – 2007. – С. 22–22
- 119.Темпель В.Ф. Моделирование газоснабжающих систем / В.Ф. Темпель // – Л.: Недра, 1986. – 184 с.
- 120.Тетерев И.Г. Управление процессами добычи газа / И.Г. Тетерев, Н.Л. Шешуков, Е.М. Нанивский // – М.: Недра, – 1981. – 248 с.
- 121.Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин // – М.: Наука, – 1979. – 288 с.
- 122.Трофимов А.С. Неизотермическая модель транспорта газа. / А.С. Трофимов, В.А. Куцев, Е.В. Кочарян // Нефтегазовое дело, 2004.
- 123.Трофимов А.С. Приближенная нестационарная модель расчета линейной части МГ / А.С. Трофимов, В.А. Куцев // – Газовая промышленность, 1999 г. № 7.
- 124.Федоткин И.М. Математическое моделирование технологических процессов / И.М. Федоткин // – К.: Выща школа, 1988. – 415 с.
- 125.Хаймер Ю. Метод оценки параметров сложной трубопроводной сети / Ю. Хаймер, Е. Яковлев // – М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 1979. – Вып. 141. – С.74-80.
- 126.Химко М.П. Вплив сил тертя на розподіл температури газових потоків та склад газу / М.П. Химко, В.А. Фролов, С.В. Гладун, Я.Д. П'янило, М.Г. Притула, Б.В. Землянський // Нафтова і газова промисловість. – 2005. – № 5. – С. 56-58.



127. Химко М.П. Програмный комплекс для определения газодинамических параметров работы газотранспортных систем / М.П. Химко, А.В. Дацюк, Н.М. Притула и др. // Тезисы докладов 3-й Международной науч.-техн. конференции “Компьютерные технологии поддержки принятия решений в диспетчерском управлении газотранспортными и газодобывающими системами”. – Москва, 2007. – С.27-27.
128. Химко М.П. Програмный комплекс для расчета режимных параметров газотранспортной системы / М.П. Химко, О.Т. Михалевич, Н.М. Притула и др. // Сборник тезисов 2-ой Международной научно-технической конференции “Теория и практика разработки, промышленного внедрения компьютерных комплексов”. – Москва, 2004. – С.75-76.
129. Химко М.П. Розрахунок режимних параметрів роботи газотранспортних систем / М.П. Химко, О.Т. Михалевич, В.А. Фролов, С.В. Гладун, В.А. Павленко, Я.Д. П’янило, М.Г. Притула, Н.М. Притула // Інформаційний огляд. ДК “Укртрансгаз”. – 2004. – №5(29). – С. 2-5.
130. Хусаїнов Д.Я. Введення в моделювання динамічних систем: Навч. посібник / Д.Я. Хусаїнов, І.І. Харченко, А.В. Шатирко // Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – 2010. – 127 с.
131. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. / И.А. Чарный // – М.: Недра, – 1975. – 240 с.
132. Чарный И.А. Основы газовой динамики / И.А. Чарный // – М.: Гостехиздат, – 1961. – 200 с.
133. Чарный И.А. О продвижении подошвенной воды в газовых залежах купольного типа. / И.А. Чарный // ОТН, – 1950, №9. – С. 1326-1344.
134. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика / И.А. Чарный // – М.: Гостехиздат, – 1961. – 200 с.
135. Черников А.В. Формула для расчета коэффициента гидравлического сопротивления газопроводов / А.В. Черников, З.Т. Галиуллин // Газовая промышленность. – № 1. – 1998. – С. 32-33.

136. Шимко Р.Я. Расчет режимных параметров работы подземных хранилищ газа / Р.Я. Шимко, Р.Л. Вечерик, Н.М. Притула и др. // Тезисы докладов 3-й Международной научно-технической конференции “Компьютерные технологии поддержки принятия решений в диспетчерском управлении газотранспортными и газодобывающими системами”. – Москва, 2007. – С. 49.
137. Ширковский Л.И. Добыча и подземное хранение газа / Л.И. Ширковский, Г.И. Задора // Недра, Москва, 1974.
138. Carslaw H. Conduction of heat in solids / H. Carslaw, J. Jaeger. // Oxford University Press, Amen House, London E.C.4. – 1959. – P. 509.
139. Carman P. Flow of gases in porous media / P. Carman // Academic Press, New York, 1956. – P. 182.
140. Dietrich P. Flow and Transport in Fractured Porous Media / P. Dietrich, R. Helmig, M. Sauter, H. Hötzl, J. Köngeter, G. Teutsch // Springer-Verlag, Berlin. – 2005. – P. 447.
141. Ho C. Gas Transport in Porous Media / Ho C., Webb S. // Springer, The Netherlands. – 2006. – P. 446.
142. Ismail M. Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable // Cambridge: Cambridge Univ. Press. – 2005. – P. 216.
143. Lee A. The viscosity of natural gases. / A. Lee, M. Gonzalez, B. Eakin – J. Petr. Technol., 1966, – N28. – P. 997-1000.
144. Nield D. Convection in Porous Media / D. Nield, A. Bejan // Springer Sciences & Business Media, USA. – 2006. – P. 654.
145. Schuck A. Time lapse seismic for the development of an underground gas storage. EAGE 64th Conference & Exhibition / Schuck A., Rost F., Czoble P. and Klafki M. // – Florence, Italy, 27–30 May 2000. – P. 1–4.
146. Seleznev V. Implementation of mathematical optimization models for the efficacy enhancing and pipelines' surety / V. Seleznev, G. Klishin, S. Peretrukhin, E. Samsonov // Report MA24.1 of Papers Book of International Conference

- INFORMS'98 (25–28 October 1998, Seattle. Washington. USA). INFORMS: Seattle, Washington, USA, – 1998. – P. 12.
147. Seleznev V. Implementation of the Non-Linear Programming Techniques for Solving the Optimization and Surety Problems of the Gas Transfer Compressor Station / V. Seleznev, G. Klishin, V. Chuchko // High Consequence Operations Safety Symposium II (Sandia National Laboratories / Albuquerque. New Mexico. USA. 29-31 July 1997). Publication of Reports SAND98-1557, USA. – 1998. – P. 367-375.
148. SIMONE documentation library. SIMONE Research Group. Prague. / [Kralik J. etc.] – Dynamic Modeling of Large Scale Network with Application to Gas Distribution. Elsevier. – 1988. – P. 517.
149. Pyanylo J. Determining the gas-water contact moving boundary in underground gas storage operation / J. Pyanylo, P. Vavrychuk // TASK Quarterly. Scientific Bulletin of the Academic Computer Centre in Gdansk, Poland. – 2016. – Vol. 20, Number 1. – P. 33-41.
150. Pyanylo Ya. Calculation of the underground gas store functioning parameters in the water drive mode for maintenance of gas extraction process / Ya. Pyanylo, P. Vavrychuk // Mathematical Modeling and Computing, Lviv Polytechnic National University. – 2016. – Vol. 3, Number 2, – P. 208-216.
151. Pyanylo Ya. Models of mass transfer in gas transmission systems / Ya. Pyanylo, M. Prytula, N. Prytula, N. Lopuh // Math. Model. Comp. – 2014. – V.1. – P. 84-96.
152. Refaat El Attar. Special Functions and Orthogonal Polynomials / El Attar Refaat // Lulu Press, Morrisville NC 27560. – 2006. – P. 310.
153. True W. Worldwide gas processing continues to expand, shift balance / W. True // Oil & Gas Journal. 14 June. 1999. – P. 41-46.

## Додаток А

### СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ

1. Pyanylo J. Determining the gas-water contact moving boundary in underground gas storage operation / J. Pyanylo, P. Vavrychuk // TASK Quarterly. Scientific Bulletin of the Academic Computer Centre in Gdansk, Poland. – 2016. – Vol. 20, Number 1. – P. 33-41.
2. П'янило Я.Д. Визначення швидкості руху газоводяного контакту в процесі роботи підземних сховищ газу / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Вип. 18. – 2013. – С. 165-172.
3. П'янило Я.Д. Дифузія газів у пористих середовищах із урахуванням конвективної складової / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // Нафтогазова галузь України. – 2013. – Вип. 5. – С. 45-48.
4. Вавричук П.Г. Дослідження впливу тиску на наявність газу у воді в пластах підземних сховищ газу / П.Г. Вавричук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2016. – Вип. 23. – С. 9-16.
5. Pyanylo Ya. Calculation of the underground gas store functioning parameters in the water drive mode for maintenance of gas extraction process / Ya. Pyanylo, P. Vavrychuk // Mathematical Modeling and Computing, Lviv Polytechnic National University. – 2016. – Vol. 3, Number 2. – P. 208-216.
6. П'янило Я.Д. Процес заміщення газів в пористих середовищах з врахуванням конвективної складової / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // 10-та Відкрита наукова конференція ІМФН “PSC-IMFS-10” (17-18 травня 2012, Львів) : Збірник матеріалів. – Львів : НУ “ЛП”, 2012. – С. В17-В18.

7. Вавричук П.Г. Моделювання процесу руху газоводяного контакту в процесі відбирання газу з підземних сховищ / П.Г. Вавричук, Н.М. Притула // V Всеукраїнська наукова конференція «Нелінійні проблеми аналізу» (19-21 вересня 2013 року, Івано-Франківськ): Тези доп. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 15-16.
8. П'янило Я.Д. Моделювання процесу відбирання газу з водоносних пластів / Я.Д. П'янило, П.Г. Вавричук // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми термомеханіки” (22-24 вересня 2016 року, Львів): Зб. наук. праць / за заг. ред. Р.М. Кушніра [Електронний ресурс]. – Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2016. – С. 114-117.
9. П'янило Я.Д. Дослідження впливу водного фактору на параметри експлуатації підземних сховищ газу / П'янило Я.Д., Вавричук П.Г. // Конференція молодих учених “Підстригачівські читання – 2017”: Секція А. Механіка (23-25 травня 2017 року, Львів). – Львів, 2017. – С. 14-16.

## Додаток Б

## АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ



## АКТ ПРО ВИКОРИСТАННЯ

в ДК „Укртрансгаз” НАК „Нафтогаз” України  
наукових результатів дисертаційної роботи Вавричука Петра Григоровича

Ми, що нижче підписалися, склали цей акт про використання результатів наукової роботи провідного інженера науково-дослідного інституту транспорту газу ПАТ «Укртрансгаз» П.Г.Вавричука, що увійшли до дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук, у формуванні оперативних та прогнозних параметрів роботи підземного сховища газу за наявності водонапірного режиму експлуатації і розв'язання відповідних оптимізаційних режимних задач.

В роботі запропоновано чисельно-аналітичні моделі заміщення газу водою в пластах-колекторах підземних сховищ газу, системні моделі сумісної роботи об'єктів технологічного ланцюжка пласт-колектор-МГ, а також методи їх дослідження. Отримані теоретичні результати дали змогу побудувати розрахункові схеми визначення руху ГВК в залежності від тиску газу і наявності водяного фактора та отримати основні співвідношення, які забезпечили постановку оптимізаційних задач їх роботи. Це дало можливість розраховувати параметри роботи системи пласт-колектор-МГ з метою оптимізації енергетичних затрат та планувати сумісну роботу об'єктів підземних сховищ газу та газотранспортної системи на етапах відбирання та нагнітання газу.

Вечерік Р.Л.

Галій П.П.



Затверджую

Декан факультету прикладної математики та інформатики

І.І.Дияк

19 вересня 2017р

**АКТ**

про впровадження результатів кандидатської дисертації  
**Вавричука Петра Григоровича**

на тему **“Математичне моделювання та чисельний аналіз двофазної фільтрації газу та рідини в пористому середовищі”**  
 у навчальний процес на кафедрі прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка

Даним актом засвідчується, що наукові та практичні результати дисертаційної роботи Вавричука Петра Григоровича на тему “Математичне моделювання та чисельний аналіз двофазної фільтрації газу та рідини в пористому середовищі”, в якій розглядаються питання математичного моделювання процесів масопереносу в складних системах та побудови методів вирішення крайових задач математичної фізики, впроваджено в навчальний процес кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка для читання спецкурсів «Математичне моделювання фізичних процесів» для магістрів та спеціалістів з дисципліни прикладне статистичне моделювання спеціальності 6.08020 - прикладна математика.

Завідувач кафедри прикладної математики  
 д.ф.-м.н., проф.

Я.Г.Савула