ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
№ 601, 2007, с. 12–17

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
“Physical and mathematical sciences”
№ 601, 2007, p. 12–17

ПРО КОНСТАНТУ В ЛЕМІ ПЯРТЛІ

В.С. Ільків[a], Т.В. Магеровська[b]

[a] *Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна*
[b] *Львівський державний університет внутрішніх справ
вул. Городоцька 26, 79007, Львів, Україна*

(Отримано 17 жовтня 2007 р.)

Встановлено константу C_n, а саме $C_n = 2n$, в лемі Пяртлі, яка дає оцінку meas $G(\varepsilon, \delta, n) \leq \leq C_n \sqrt[n]{\varepsilon/\delta}$ для міри множини $G(\varepsilon, \delta, n) = \{x \in [a, b] : |f(x)| \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, для функції $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, яка задовольняє на $[a, b]$ умову $|f^{(n)}(x)| \geq \delta > 0$, де $\delta > 0$, $[a, b]$ – довільний відрізок з $\mathbb{R}$.

Ключові слова: міра множини, діофантовий аналіз, малі знаменники.

2000 MSC: 11J83

УДК: 517.2

Вступ[1]

Нехай дійснозначна функція f є неперервно диференційовною n, разів, $n \geq 1$, на проміжку $[a, b]$ і $|f^{(n)}(x)| \geq \delta$ для всіх $x \in [a, b]$, множина $G(\varepsilon, \delta, n)$ складається з точок $x \in [a, b]$, для яких $|f(x)| \leq \varepsilon$. Очевидно, що множина $G(\varepsilon, \delta, n)$ є вимірною множиною і $0 \leq \text{meas } G(\varepsilon, \delta, n) \leq b - a$.

Питання про оцінювання зверху в термінах ε, δ, n міри множини $G(\varepsilon, \delta, n)$ виникає під час дослідження крайових задач для рівнянь із частинними похідними [6]–[8], які пов’язані з проблемою малих знаменників.

У теорії апроксимацій Паде [1, с. 257] аналітичних функцій використовується лема Картана [11], яка для унітальних многочленів $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ степеня n встановлює оцінку[2]

$$\text{meas } \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq \varepsilon\} \leq \pi \sqrt[n]{\varepsilon^2}.$$

Із результатів А. С. Пяртлі [9] випливає таке твердження для гладких дійснозначних функцій [10]:

Лема 1.(Пяртлі) *Нехай $f \in \mathbf{C}^{(n+1)}[a, b]$ і в кожній точці $x \in [a, b]$ справджуються нерівності*

$$\max_{1 \leq i \leq n+1} |f^{(i)}(x)| \leq M, \qquad |f^{(n)}(x)| \geq \delta > 0.$$

Якщо $\varepsilon < \delta \min\left(1/2, (\delta/(2^n - 2)\sqrt[n]{2}M)^n\right)$, $\varepsilon > 0$, *то*

$$\text{meas } G(\varepsilon, \delta, n) \leq C_n \sqrt[n]{\varepsilon/\delta}, \tag{1}$$

де $C_n = (2n + 1)(2^n - 2)\sqrt[n]{2}$.

Уточнення та узагальнення леми Пяртлі встановлено в роботах [2, 4, 5, 10]. Зокрема усунуто умову на величину ε та зменшено гладкість функції f на одиницю, розширено клас функцій f функціями багатьох змінних та вектор-функціями, оператор $\partial^n/\partial x^n$, який фігурує в оцінці знизу, замінено класом операторів, що допускають розклад в добуток операторів першого порядку з дійсними неперервно диференційовними (відповідну кількість разів) коефіцієнтами.

У роботах [5] та [10] встановлено такі значення сталої C_n в нерівності (1): $n2^{(n+1)/2}$ та $2n\sqrt[n]{n!}$.

Метою роботи є доведення леми Пяртлі з константою $C_n = 2n$, яка є меншою від отриманих раніше значень. Методика доведення ґрунтується на властивостях розділених різниць функції f, тоді як попередні результати отримано за допомогою математичної індукції.

I. Частинні випадки для многочленів

Для многочленів, множину $G(\varepsilon, \delta, n)$ та її міру можна точно встановити. Наведемо такі приклади, вважаючи що $[a, b]$ збігається з множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$.

1. Для функції $f(x) = x^n$, для якої $\delta = n!$ і яка зростає при непарному n та спадає до нуля на від’ємній півосі і зростає на додатній при парному n, множина $G(\varepsilon, \delta, n)$ збігається з відрізком $\left[-\sqrt[n]{\varepsilon}, \sqrt[n]{\varepsilon}\right]$, що має міру $2\sqrt[n]{\varepsilon}$.

Для парного n та функції $f(x) = x^n - \varepsilon$ множина $G(\varepsilon, \delta, n)$ збігається з відрізком $\left[-\sqrt[n]{2\varepsilon}, \sqrt[n]{2\varepsilon}\right]$, який має міру $2\sqrt[n]{2\varepsilon}$, яка перевищує число $2\sqrt[n]{\varepsilon}$, що отримане для функції x^n.

Зауважимо, що $\delta = n!$ для функцій x^n та $x^n - \varepsilon$.

2. Для унітальних многочленів другого порядку (квадратних тричленів) число $2\sqrt{2\varepsilon}$ є максимально можливим для міри множини $G(\varepsilon, \delta, n)$.

Дійсно, оскільки переміщення початку системи координат вздовж осі x не впливає на міру множини $G(\varepsilon, \delta, n)$, то достатньо розглядати лише многочлени вигляду $x^2 + q$, де q – довільне дійсне число.

---

[1] Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № 14.1/017).

[2] Для таких многочленів $f^{(n)}(x) = n!$, тобто $\delta = n!$.

Тоді множина $G(\varepsilon,\delta,n)$ є порожньою при $q>\varepsilon$,

$$G(\varepsilon,\delta,n)=\big[-\sqrt{\varepsilon-q},-\sqrt{-\varepsilon-q}\big]\cup\big[\sqrt{-\varepsilon-q},\sqrt{\varepsilon-q}\big]$$

при $q<-\varepsilon$,

$$G(\varepsilon,\delta,n)=\big[-\sqrt{\varepsilon-q},\sqrt{\varepsilon-q}\big]$$

при $-\varepsilon\le q\le\varepsilon$. Звідси отримуємо формулу

$$\operatorname{meas} G(\varepsilon,\delta,n)=\begin{cases}2\big(\sqrt{\varepsilon-q}-\sqrt{-\varepsilon-q}\big), & q<-\varepsilon,\\ 2\sqrt{\varepsilon-q}, & |q|\le\varepsilon,\\ 0, & q>\varepsilon.\end{cases}$$

Функція $\operatorname{meas} G(\varepsilon,\delta,n)$ зростає (рис. 1) на проміжку $(-\infty,-\varepsilon)$ і спадає до нуля на проміжку $[-\varepsilon,\varepsilon]$. Вона набуває максимального значення $2\sqrt{2\varepsilon}$ при $q=-\varepsilon$, тобто якраз для многочлена $x^2-\varepsilon$.

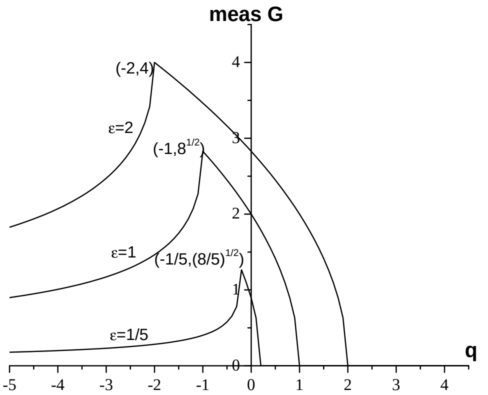

Рис. 1. Графіки функції $\operatorname{meas} G(\varepsilon,2,2)$ при $\varepsilon=2$, $\varepsilon=1$ та $\varepsilon=1/5$. Максимум досягається у точці $(-\varepsilon,2\sqrt{2\varepsilon})$

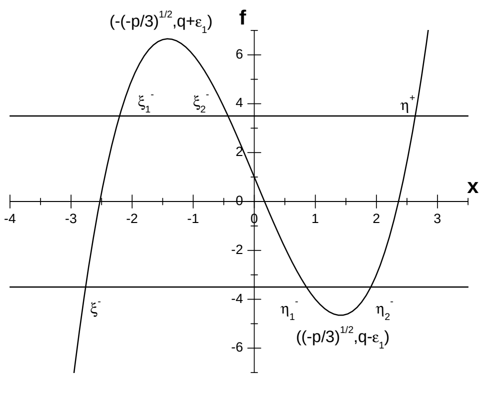

Рис. 2. Графіки функції $f(x)=x^3-6x+1$ та функцій $f(x)=\pm 7/2$

Для унітальних многочленів другого порядку маємо $\delta=2$, тому для них $C_2=4$, оскільки

$$2\sqrt{2\varepsilon}=4\sqrt{\varepsilon/2}=4\sqrt{\varepsilon/\delta}.$$

3. Визначимо також сталу C_3 для унітальних многочленів третього порядку, які, не обмежуючи загальності міркувань, вважаємо функціями

$$f(x)=x^3+px+q,$$

де p та q – довільні дійсні числа.

Позначимо через $G_3[p,q]$ множину $G(\varepsilon,\delta,n)$ для функції x^3+px+q, де $n=3$, $\delta=3!=6$.

Нехай $\xi=\xi(p,q)$ – корінь (з неперервної гілки) якогось із многочленів $x^3+px+q\mp\varepsilon$, тоді диференціюючи тотожність $\xi^3+p\xi+q=\pm\varepsilon$, отримуємо рівняння

$$(3\xi^2+p)\frac{\partial\xi}{\partial p}+\xi=0,\quad (3\xi^2+p)\frac{\partial\xi}{\partial q}+1=0.$$

Якщо $3\xi^2+p\ne0$, то існують частинні похідні $\partial\xi/\partial p$ та $\partial\xi/\partial q$, а саме:

$$\frac{\partial\xi}{\partial p}=-\frac{\xi}{3\xi^2+p},\quad \frac{\partial\xi}{\partial q}=-\frac{1}{3\xi^2+p}. \tag{2}$$

Функція x^3+px+q приймає значення q при $x=0$, монотонно зростає у випадку $p\ge0$, а у випадку $p<0$ має локальний максимум $q+\varepsilon_1$ при $x=-\sqrt{|p|/3}$ та локальний мінімум $q-\varepsilon_1$ при $x=\sqrt{|p|/3}$, де $\varepsilon_1=2\sqrt{(|p|/3)^3}$.

Позначимо через $\xi^\pm$ від'ємні, а через $\eta^\pm$ додатні корені рівнянь

$$x^3+px+q=\pm\varepsilon.$$

У випадку $p\ge0$ маємо один дійсний корінь – додатний $\eta^\pm$ при $\pm\varepsilon>q$ і від'ємний $\xi^\pm$ при $\pm\varepsilon<q$. У випадку $p<0$ є такі можливості: якщо $\pm\varepsilon>q+\varepsilon_1$, то маємо один дійсний додатний корінь $\eta^\pm$; якщо $\pm\varepsilon<q-\varepsilon_1$, то маємо від'ємний корінь $\xi^\pm$; якщо $q<\pm\varepsilon<q+\varepsilon_1$, то маємо два від'ємних кореня $\xi_1^\pm$ і $\xi_2^\pm$, де $\xi_1^\pm<-\sqrt{|p|/3}<\xi_2^\pm$, та один додатний $\eta^\pm$; якщо ж $q-\varepsilon_1<\pm\varepsilon<q$, то маємо від'ємний корінь $\xi^\pm$ і два додатні $\eta_1^\pm$ та $\eta_2^\pm$, де $\eta_1^\pm<-\sqrt{|p|/3}<\eta_2^\pm$.

На рис. 2 зображено криву $f(x)=x^3+px+q$ та прямі $f(x)=\pm\varepsilon$ для випадку трьох дійсних коренів рівнянь $x^3+px+q=\pm\varepsilon$.

Отже, для значень $p\ge0$ множина $G_3[p,q]$ є відрізком $[\eta^-,\eta^+]$, $[\xi^-,\eta^+]$ або $[\xi^-,\xi^+]$ при значеннях $q<-\varepsilon$, $|q|<\varepsilon$, $q>\varepsilon$ відповідно, а функція $\operatorname{meas} G_3[p,q]$ тоді дорівнює $\eta^+-\eta^-$, $\eta^+-\xi^-$, $\xi^+-\xi^-$.

Оскільки з формули (2) випливає, що

$$\frac{\partial(\eta^+-\eta^-)}{\partial q}=3\frac{(\eta^+)^2-(\eta^-)^2}{\big(3(\eta^+)^2+p\big)\big(3(\eta^-)^2+p\big)}>0,$$

$$\frac{\partial(\xi^+-\xi^-)}{\partial q}=3\frac{(\xi^+)^2-(\xi^-)^2}{\big(3(\xi^+)^2+p\big)\big(3(\xi^-)^2+p\big)}<0,$$

$$\frac{\partial(\eta^+-\xi^-)}{\partial q}=3\frac{(\eta^+)^2-(\xi^-)^2}{\big(3(\eta^+)^2+p\big)\big(3(\xi^-)^2+p\big)},$$

то $(\eta^+ - \eta^-)$ зростає на інтервалі $(-\infty, -\varepsilon)$, $(\xi^+ - \xi^-)$ спадає на інтервалі $(\varepsilon, \infty,)$, $(\eta^+ - \xi^-)$ зростає на інтервалі $(0, \varepsilon)$ і спадає на інтервалі $(-\varepsilon, 0)$.

Отже, при $p \geq 0$ максимальне значення $2\eta^+$ функція meas $G_3[p,q]$ приймає в точці $q = 0$, де η^+ – дійсний корінь рівняння $x^3 + px = \varepsilon$.

У випадку $p < 0$ достатньо розглядати лише невід'ємні q, оскільки $\min\limits_{q\in\mathbb{R}} G_3[p,q] = \min\limits_{q\geq 0} G_3[p,q]$. При $q > \varepsilon + \varepsilon_1$ множина $G_3[p,q]$ є відрізком $[\xi^+, \xi^-]$, довжина якого зменшується при зростанні $|q|$.

Якщо p є таким, що $\varepsilon > \varepsilon_1$, то для $q \in [0, \varepsilon - \varepsilon_1)$ маємо $G_3[p,q] = [\xi^-, \eta^+]$, meas $G_3[p,q] = \eta^+ - \xi^-$, причому число $(\eta^+ - \xi^-)$ спадає при зростанні q, для $q \in (\varepsilon - \varepsilon_1, \varepsilon)$ маємо

$$G_3[p,q] = [\xi^-, \xi_1^+] \cup [\xi_2^+, \eta^+],$$

а для $q \in (\varepsilon, \varepsilon + \varepsilon_1)$ –

$$G_3[p,q] = [\xi^-, \xi^+] \cup [\eta_1^+, \eta_2^+],$$

до того ж числа

$$\xi_1^+ - \xi^- + \eta^+ - \xi_2^+, \quad \xi^+ - \xi^- + \eta_2^+ - \xi_1^+$$

спадають при зростанні q на інтервалах $(\varepsilon - \varepsilon_1, \varepsilon)$ та $(\varepsilon, \varepsilon_1 + \varepsilon)$ відповідно. Отже, при $\varepsilon > \varepsilon_1$ екстремальним буде значення $q = 0$, і оскільки $\eta^+ = -\xi^-$, то

$$\max_{q\geq 0} G_3[p,q] = G_3[p,0] = 2\eta^+.$$

Якщо p є таким, що $\varepsilon < \varepsilon_1$, то для $q \in (0, \varepsilon_1 - \varepsilon)$, згідно з формулою Кардано,

$$\text{meas } G_3[p,q] = 2s\Big(\cos\frac{\varphi^+}{3} - \cos\frac{\varphi^-}{3} + \cos\frac{\varphi^+ + \pi}{3} - \\ - \cos\frac{\varphi^- + \pi}{3} - \cos\frac{\varphi^+ - \pi}{3} + \cos\frac{\varphi^- - \pi}{3}\Big), \quad (3)$$

де $2s\cos\frac{\varphi^+}{3}$, $2s\cos\frac{\varphi^+ + \pi}{3}$, $2s\cos\frac{\varphi^+ - \pi}{3}$ – записані в порядку спадання корені рівнянь $x^3+px+q = \pm\varepsilon$, $\varphi^\pm$ визначаються із формули $\cos\varphi^\pm = (\pm\varepsilon - q)/2s^3$, причому $\varepsilon_1 = 2s^3$, $s = \sqrt{-p/3}$. Перетворюючи формулу (3), отримуємо

$$\text{meas } G_3[p,q] = 8s\sin\frac{\varphi^- - \varphi^+}{6}\sin\frac{\varphi^+ + \varphi^- + 2\pi}{6},$$

причому

$$\sup_{q\in(0,\varepsilon_1-\varepsilon)} \text{meas } G_3[p,q] = \text{meas } G_3[p, \varepsilon_1 - \varepsilon] = \\ = 8s\sin\frac{\pi - \varphi^+}{6}\cos\frac{\varphi^+}{6},$$

де $\cos\varphi^+ = (2\varepsilon - \varepsilon_1)/2s^3$. На відрізку $[\varepsilon_1 - \varepsilon, \varepsilon_1 + \varepsilon]$ функція meas $G_3[p,q]$ також спадає за змінною q.

Підсумовуючи, отримуємо, що при довільному фіксованому p максимальне значення $g_3[p]$ функції meas $G_3[p,q]$ визначається формулою $g_3[p] = 2\eta^+$ при $p > -3\sqrt[3]{(\varepsilon/2)^2}$ і формулами

$$g_3[p] = 2\sqrt{-p/3} + \eta^+ - \xi_1^+ - \xi_2^+$$

при $\varepsilon_1 < 2\varepsilon$,

$$g_3[p] = 2\sqrt{-p/3} + +\xi^+\eta_2^+ - \eta_1^+$$

при $\varepsilon_1 > 2\varepsilon$ у випадку $p > -3\sqrt[3]{(\varepsilon/2)^2}$, де

$$\xi_1^+,\ \xi_2^+,\ \eta^+, \quad \xi_1^+ < \xi_2^+ < \eta^+,$$

та

$$\xi^+,\ \eta_1^+,\ \eta_2^+, \quad \xi^+ < \eta_1^+ < \eta^+, \ –$$

дійсні корені рівняння

$$x^3 + px = 2\varepsilon - \varepsilon_1.$$

Функція $g_3[p]$ спадає на інтервалі $(-3\sqrt[3]{(\varepsilon/2)^2}, \infty)$, оскільки

$$\frac{\partial\eta^+}{\partial p} = -\frac{\eta^+}{3(\eta^+)^2 + p} < 0,$$

і зростає на інтервалі $(-\infty, -3\sqrt[3]{(\varepsilon/2)^2})$; максимальне значення цієї функції $4\sqrt[3]{\varepsilon/2}$ досягається у точці $p = -3\sqrt[3]{(\varepsilon/2)^2}$ і визначається такою формулою: $2\eta^+ = 4\sqrt[3]{\varepsilon/2}$, де додатний корінь η^+ рівняння

$$x^3 - 3\sqrt[3]{(\varepsilon/2)^2}x = \varepsilon$$

дорівнює $2\sqrt[3]{\varepsilon/2}$.

Оскільки для многочлена x^3+px+q третя похідна дорівнює 6, тобто $\delta = 6$, то нерівність (1) буде такою:

$$\text{meas } G_3[p,q] \leq 4\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\varepsilon/\delta}.$$

II. Загальний результат: основна лема

Доведемо тепер лему Пяртлі для довільної гладкої функції.

Лема 2. *Нехай $f \in \mathbf{C}^{(n)}[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, і для всіх точок x відрізка $[a,b]$ виконується умова*

$$|f^{(n)}(x)| \geq \delta,$$

множина $G(\varepsilon,\delta,n)$ визначається формулою

$$G(\varepsilon,\delta,n) = \{x \in [a,b] : |f(x)| \leq \varepsilon\}, \quad (4)$$

де $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $b > a$. Тоді для міри множини $G(\varepsilon,\delta,n)$ справджується нерівність[3]

$$\text{meas } G(\varepsilon,\delta,n) \leq 2n\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}. \quad (5)$$

[3]Права частина (5) не залежить від довжини інтервала $[a,b]$ та від його кінців, а ліва частина (5) обмежена числом $b-a$, тому справедлива також сильніша нерівність meas $G(\varepsilon,\delta,n) \leq \min\big(b-a, 2n\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}\big)$.

□ *Доведення.* Якщо $G(\varepsilon,\delta,n)=\emptyset$, то нерівність (5) очевидно виконується. Якщо $G(\varepsilon,\delta,n)\neq\emptyset$ і $x\in G(\varepsilon,\delta,n)$, то з неперервності функції f випливає, що існує такий найбільший окіл – інтервал (a_1,b_1), де $a\le a_1\le b_1\le b$, – точки x, що $[a_1,b_1]\subset G(\varepsilon,\delta,n)$, при цьому $|f(a_1)|=|f(b_1)|=\varepsilon$, якщо $\{a_1,b_1\}\subset\{a,b\}$, або $|f(a_1)|\le\varepsilon$, $|f(b_1)|=\varepsilon$ та $|f(a_1)|=\varepsilon$, $|f(b_1)|\le\varepsilon$, якщо $a_1=a$ та $b_1=b$ відповідно.

Нехай j – кількість таких інтервалів додатної довжини, які позначимо $(x_0,x_1),(y_1,x_2),\ldots,(y_{j-1},x_j)$.

У випадку $j=1$ маємо лише один інтервал (x_0,x_1), а випадок $j=0$ означає, що

$$\text{meas } G(\varepsilon,\delta,n)=0,$$

оскільки множина $G(\varepsilon,\delta,n)$ або порожня, або складається зі скінченної (як буде показано далі) кількості точок із відрізка $[a,b]$.

Звідси випливає, що при $j=0$ нерівність (5) справджується, і тому залишається довести цю нерівність при $j>0$.

Для кінців розглядуваних інтервалів виконуються нерівності $a\le x_0$, $x_j\le b$,

$$x_0<x_1<y_1<x_2<y_2<\cdots<x_{j-1}<y_{j-1}<x_j,$$

а також нерівність $|f(x)|\ge\varepsilon$ на інтервалах

$$[a,x_0],\ [x_1,y_1],\ldots,\ [x_{j-1},y_{j-1}],\ [x_j,b]$$

та рівності $f(x_1)=f(y_1),\ldots,f(x_{j-1})=f(y_{j-1})$.

Позначимо через j^* кількість відрізків, які є підмножинами відрізка $[a,b]$ і для всіх точок x яких виконується нерівність $|f(x)|\le\varepsilon$. Множина цих відрізків складається з (j^*-j) відрізків нульової довжини та з j відрізків $[x_0,x_1],[y_1,x_2],\ldots,[y_{j-1},x_j]$ додатної довжини. Вони не перетинаються між собою і функція f набуває однакових значень (ε або $-\varepsilon$) у найближчих між собою точках сусідніх відрізків.

Оцінимо кількість відрізків j^*. Якщо $j^*>n$, то за теоремою Ролля функція f' має щонайменше j^*-1 нуль, функція f'' має j^*-2 нулі, ..., функція $f^{(n)}$ має j^*-n нулів. Оскільки похідна $f^{(n)}$ не перетворюється в нуль, то припущення про величину j^* не є правильним; отже, j^* не може перевищувати n, тобто $j^*\le n$. Крім того, якщо l разів виконується рівність $f(y_i)=f(x_{i+1})$, то на кожному з інтервалів (y_i,x_{i+1}) похідна f' також обертається в нуль, тому $j^*\le n-l$.

Для $j=0$ множина $G(\varepsilon,\delta,n)$ є j^*-точковою множиною, а для $j>0$ має додатну міру.

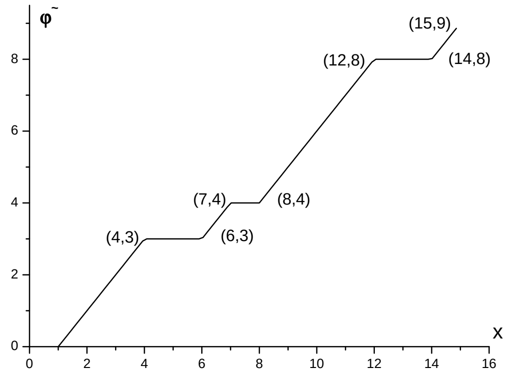

Рис. 3. Графік функції $\widetilde{\varphi}$ у випадку $x_0=1$, $x_1=4$, $x_2=7$, $x_3=12$, $x_4=15$, $y_1=6$, $y_2=8$, $y_3=14$

Нехай $\alpha_1,\ldots,\alpha_j$ – довжини непорожніх інтервалів із $G(\varepsilon,\delta,n)$, $j\ge1$, а саме

$$\alpha_1=x_1-x_0,\ \alpha_2=x_2-y_1,\ldots,\ \alpha_j=x_j-y_{j-1},$$

тоді виконується рівність

$$\text{meas } G(\varepsilon,\delta,n)=\alpha_1+\cdots+\alpha_j. \tag{6}$$

Запровадимо функцію $\widetilde{\varphi}:[x_0,x_j]\to[0,\alpha_1+\cdots+\alpha_j]$ за формулами: $\widetilde{\varphi}(x_0)=0$, $\widetilde{\varphi}(x)=x-x_0$, якщо $x\in(x_0,x_1]$, $\widetilde{\varphi}(x)=\alpha_1+\cdots+\alpha_r$, якщо $x\in(x_r,y_r]$, $\widetilde{\varphi}(x)=x-y_{r-1}+\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-1}$, якщо $x\in(y_{r-1},x_r]$.

Графік функції $\widetilde{\varphi}$ зображено на рис. 3.

Функція $\varphi:[0,\alpha_1+\cdots+\alpha_j]\to[x_0,x_1]\cup\bigcup_{r=2}^{j}(y_{r-1},x_r]$ визначається формулою

$$\varphi(x)=y\equiv\min\{z\in[a,b]:\widetilde{\varphi}(z)=x\};$$

вона є бієктивною і не зменшує віддалі між точками, тобто $\varphi(\alpha^{**})-\varphi(\alpha^*)\ge\alpha^{**}-\alpha^*$ при $\alpha^{**}\ge\alpha^*$.

Якщо $j=1$, то $\varphi(x)=\widetilde{\varphi}^{\,-1}(x)=x+x_0$.

Нехай $\vartheta=(\alpha_1+\cdots+\alpha_j)/n$, $\xi_i=\varphi(i\vartheta)$ для $i=0,1,\ldots,n$, тоді за побудовою $\xi_i\in[a,b]$, $|f(\xi_i)|\le\varepsilon$ та $\xi_{i^{**}}-\xi_{i^*}\ge(i^{**}-i^*)\vartheta\ge\vartheta$ для $0\le i^*<i^{**}\le n$.

Число ϑ є невідомим, як і числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_j$, крім того, як випливає з рівності (6),

$$\text{meas } G(\varepsilon,\delta,n)=n\vartheta. \tag{7}$$

Оцінимо ϑ за допомогою властивостей розділеної різниці функції f.

Оскільки $\xi_{i-1}<\xi_i$ для значень $i=1,\ldots,n$, то точки $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n$, використовуємо для побудови розділеної різниці $R(f;\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ порядку n для функції f [3, с. 219–229]; будемо зображати розділену різницю двома способами.

Для оцінки розділеної різниці зверху використаємо рівність [3]

$$R(f;\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(\xi_i)}{\prod\limits_{r=0,r\neq i}^{n}(\xi_i-\xi_r)},$$

в яку входять значення функції f. Із наступних формул для добутків

$$\Big|\prod_{r=1}^{n}(\xi_0-\xi_r)\Big|=\prod_{r=1}^{n}(\xi_r-\xi_0)\geq n!\vartheta^n,$$

$$\Big|\prod_{r=0}^{n-1}(\xi_n-\xi_r)\Big|=\prod_{r=0}^{n-1}(\xi_n-\xi_r)\geq n!\vartheta^n,$$

$$\Big|\prod_{r=0,r\neq i}^{n}(\xi_i-\xi_r)\Big|=\prod_{r=0}^{i-1}(\xi_i-\xi_r)\prod_{r=i+1}^{n}(\xi_r-\xi_i)\geq$$
$$\geq i!(n-i)!\vartheta^n,\qquad 1\leq i\leq n-1,$$

випливає така оцінка зверху для розділеної різниці:

$$|R(f;\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)|\leq\sum_{i=0}^{n}\frac{\varepsilon}{i!(n-i)!\vartheta^n}=$$
$$=\frac{\varepsilon}{n!\vartheta^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}=\frac{\varepsilon}{n!}\Big(\frac{2}{\vartheta}\Big)^n.$$

Зміна знака функції f не впливає на множину $G(\varepsilon,\delta,n)$, тому можна вважати, що $f^{(n)}(x)\geq\delta$ на $[a,b]$. Цю нерівність використано при оцінюванні знизу розділеної різниці $R(f;\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Таку оцінку отримуємо з інтегральної формули [3], що містить значення похідної $f^{(n)}$ функції f,

$$R(f;\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)=$$
$$=\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}f^{(n)}\big(g(t_1,\ldots,t_n)\big)dt_1\ldots dt_n,$$

де функція g набуває свої значення на відрізку $[a,b]$ і визначається формулою

$$g(t_1,\ldots,t_n)=\xi_0+t_1(\xi_1-\xi_0)+\cdots+t_n(\xi_n-\xi_{n-1})=$$
$$=\xi_0(1-t_1)+\xi_1(t_1-t_2)+\cdots+\xi_{n-1}(t_{n-1}-t_n)+\xi_nt_n.$$

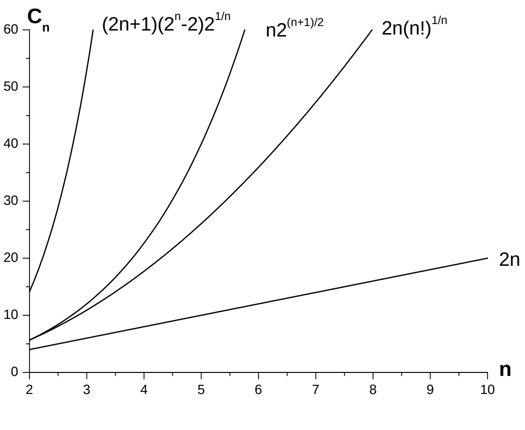

Рис. 4. Порівняння графіків функції C_n

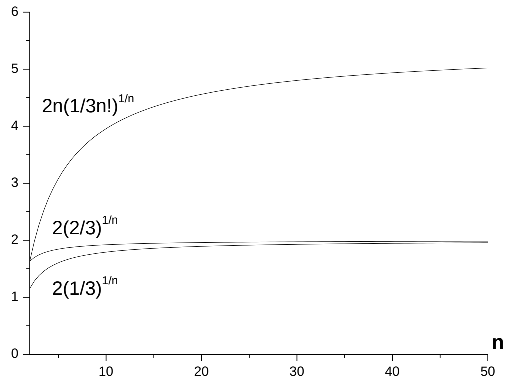

Рис. 5. Порівняння графіка функції $2n\sqrt[n]{1/3n!}$ із точними значеннями meas $G(1/3,n!,n)$ для поліномів x^n та $x^n-1/3$

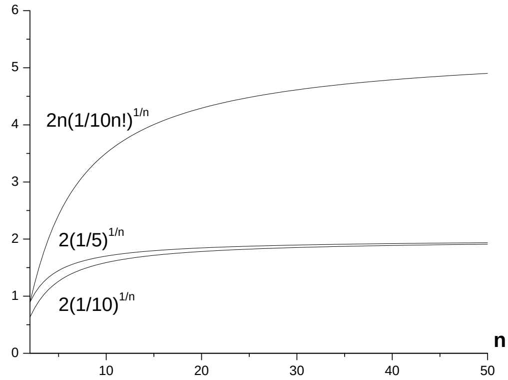

Рис. 6. Порівняння графіка функції $2n\sqrt[n]{1/10n!}$ із точними значеннями meas $G(1/10,n!,n)$ для поліномів x^n та $x^n-1/10$

Із нерівності $f^{(n)}\big(g(t_1,\ldots,t_n)\big)\geq\delta$, яка справджується для всіх точок симплекса

$$0\leq t_n\leq t_{n-1}\leq\cdots\leq t_1\leq 1,$$

випливає формула

$$|R(f;\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)|\geq$$
$$\geq\delta\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}dt_1\ldots dt_n=\frac{\delta}{n!}.$$

На основі отриманих оцінок маємо нерівність

$$\frac{\delta}{n!}\leq\frac{\varepsilon}{n!}\Big(\frac{2}{\vartheta}\Big)^n$$

або $\vartheta\leq 2\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}$, яка, разом із рівністю (7), використовується для встановлення шуканої формули

$$\text{meas }G(\varepsilon,\delta,n)=n\vartheta\leq 2n\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}.$$

Лему доведено. ■

III. Порівняння результатів

На рис. 4 подано графіки, що характеризують поведінку при $n \to \infty$ сталих C_n із оцінок

$$\text{meas } G(\varepsilon, \delta, n) \le C_n \sqrt[n]{\varepsilon/\delta},$$

які отримано відповідно в роботах [5, 9, 10] та в цій роботі: $C_n = 2n$.

Для многочленів другого степеня стала $C_2 = 4$, є точною, а для многочленів третього степеня стала $C_3 = 6$, є більшою за оптимальну сталу $4\sqrt[3]{3}$ тому, що $4\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{8/9} < 6$.

Для функції x^n отримана в лемі нерівність (5) дає (як і для всіх унітальних многочленів степеня n) оцінку meas $G(\varepsilon, \delta, n) \le 2n\sqrt[n]{\varepsilon/n!}$, причому послідовність $2n\sqrt[n]{\varepsilon/n!}$ еквівалентна до послідовності $2e\sqrt[n]{\varepsilon}$, якщо $n \to \infty$.

Цей результат асимптотично збігається (не враховуючи абсолютного множника) з точним результатом $2\sqrt[n]{\varepsilon}$ для функції x^n та при парному n з точним результатом $2\sqrt[n]{2\varepsilon}$ для функції $x^n - \varepsilon$.

Графіки функцій $2n\sqrt[n]{\varepsilon/n!}$, $2\sqrt[n]{2\varepsilon}$ та $2\sqrt[n]{\varepsilon}$ зображено на рисунках 5 та 6 при $\varepsilon = 1/3$ і $\varepsilon = 1/10$.

Висновки

У роботі отримано оцінку зверху для міри множини точок x із проміжку $[a, b]$, які задовольняють нерівність $|f(x)| \le \varepsilon$, де функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ справджує на $[a, b]$ умову $|f^{(n)}(x)| \ge \delta > 0$.

Ця оцінка має вигляд $C_n\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}$, де $C_n = 2n$. Значення сталої $2n$ уточнює раніше відомі значення.

Отримане значення є оптимальним для многочленів другого степеня, але може бути зменшеним для многочленів більших степенів.

Література

[1] *Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

[2] *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами// Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.

[3] *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

[4] *Илькив В. С.* Обобщение одной леммы Пяртли. – В сб.: Материалы 10-й конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и матем. АН УССР, ч. 2 (Львов, 15–17 мая 1984 г.) Львов, 1984. – С. 96–99. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10.11.1984 г., № 7197-84 Деп).

[5] *Ільків В. С.* Аналоги леми Пяртлі із абсолютними константами// Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 68–74.

[6] *Илькив В. С., Пташник Б. И.* Задача с нелокальными краевыми условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами// Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012–1023.

[7] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук.думка, 1984. – 264 с.

[8] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[9] *Пяртли А. С.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства// Функц. анализ и его прилож. – 1969. – **3**, вып. 4. – С. 59–62.

[10] *Симотюк М.М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху// Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 90–95.

[11] *Cartan H.* Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires et leurs applications// Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. – 1928.– (3), **45**. – P. 255–346.

ON THE CONSTANT IN THE PIARTLY LEMMA

V.S. Il'kiv[a], T.V. Maherovska[b]

[a] *National University "Lvivska Politechnika"*
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine
[b] *Lviv State University of Internal Affairs*
26 Horodots'ka Str., 79007, Lviv, Ukraine

We obtain the constant $C_n = 2n$, in the Piartly lemma, which gives the estimate meas $G(\varepsilon, \delta, n) \le C_n\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}$ of the measure of the set $G(\varepsilon, \delta, n) = \{x \in [a, b] : |f(x)| \le \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, for function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfying the condition $|f^{(n)}(x)| \ge \delta > 0$ on $[a, b]$, where $\delta > 0$, $[a, b]$ is an arbitrary closed interval in $\mathbb{R}$.

Keywords: Lebesgue measure, Diophantine analysis, small denominators.

2000 MSC: 11J83

UDK: 517.2