ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 601, 2007, с. 54–58

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 601, 2007, p. 54–58

УЗАГАЛЬНЕНІ РЕТРАКТИ, ПОВ'ЯЗАНІ З ТОПОЛОГІЧНИМИ ГРУПАМИ

Н.М. Пирч

Українська академія друкарства,
(79020, Львів, вул. Підголоско 19)

(Отримано 16 вересня 2007 р.)

Розглянуто узагальнення поняття ретракту, пов'язане з топологічними групами. Наведено способи побудови узагальнених ретрактів, а також подано їхнє застосування до теорії вільних топологогічних груп.

Ключові слова: топологічна група, G-ретракт, ортогональні G-ретракти

2000 MSC: 22A05

УДК: 512.46

Вступ

Поняття ретракту належить до фундаментальних понять топології. Оскільки ретракції — це в точності відображення, що задовольняють функціональне співвідношення $r \circ r = r$, то їх часто використовували у теорії топологічних груп для побудови топологічних ізоморфізмів чи гомоморфізмів з потрібними властивостями. Зокрема всі відомі сьогодні методи побудови просторів з топологічно ізоморфними вільними топологічними групами так чи інакше пов'язані з ретракціями. У цій роботі пропонуємо узагальнення поняття ретракту, пов'язане з топологічними групами. Встановимо властивості G-ретрактів, подамо методи їх побудови, розглянемо їх застосування до теорії вільних топологічних груп. В останньому розділі наводиться узагальнення поняття ортогональних ретрактів — поняття ортогональних G-ретрактів.

Означення 1. Нехай X — топологічний простір. Вільною топологічною групою простору X називається пара $(F(X), \eta_X)$, де $F(X)$ — топологічна група, $\eta_X \colon X \to F(X)$ — неперервне відображення, такі, що:

1) група $F(X)$ породжується множиною $\eta_X(X)$;

2) для кожного неперервного відображення f з топологічного простору X у топологічну групу G існує неперервний гомоморфізм $f^* \colon F(X) \to G$ групи $F(X)$ у групу G, такий, що $f^* \circ \eta_X = f$.

Топологічний простір X називається функціонально гаусдорфовим, якщо для довільних двох відмінних точок $x, y \in X$ існує неперервна дійснозначна функція f така, що $f(x) \neq f(y)$. Для кожного функціонально гаусдорфового простору вільна топологічна група $(F(X), \eta_X)$ існує, $F(X)$ є віддільною топологічною групою, відображення η_X є ін'єктивним. Якщо X — тихоновський простір, то відображення η_X є замкненим вкладеням, і наведене вище означення вільної топологічної групи збігається з означенням, запропонованим А.А. Марковим у [1]. Тихоновські простори X і Y називаються М-еквівалентними, якщо топологічні групи $F(X)$ і $F(Y)$ є топологічно ізоморфними.

Означення 2. Підпростір Y топологічного простору X називається G-ретрактом топологічного простору X, якщо кожне неперервне відображення з топологічного простору Y у віддільну топологічну групу G неперервно продовжується на X.

I. Властивості G-ретрактів.

Наступне твердження подає властивості G-ретрактів.

Твердження 1. а) Нехай підпростір Y є G-ретрактом топологічного простору X, підпростір Z є G-ретрактом топологічного простору Y. Тоді підпростір Z є G-ретрактом топологічного простору X.

б) Нехай підпростір Y_1 є G-ретрактом топологічного простору X_1, підпростір Y_2 є G-ретрактом топологічного простору X_2. Тоді підпростір $Y_1 \oplus Y_2$ є G-ретрактом топологічного простору $X_1 \oplus X_2$.

в) Нехай підпростір Y є G-ретрактом зв'язного топологічного простору X. Тоді простір Y є зв'язним.

$\square$ *Доведення.* в.) Припустимо, що простір Y є незв'язним. Тоді існує неперервне сюр'єктивне відображення $h \colon Y \to Z_2$ з простору Y у дискретну топологічну групу Z_2. Оскільки підпростір Y є G-ретрактом простору X, то відображення h продовжується до неперервного сюр'єктивного відображення $h \colon X \to Z_2$, тобто простір X є незв'язним. $\blacksquare$

Твердження 2. Нехай Y є підпростором функціонально гаусдорфового простору X. Нехай також $(F(X), \eta_X)$, $(F(Y), \eta_Y)$ — вільні топологічні групи над просторами X та Y. Тоді такі умови є еквівалентними:

1) Y є G-ретрактом у X;

2) існує гомоморфізм $h \colon F(X) \to F(Y)$, такий, що $h(\eta_X(y)) = \eta_Y(y)$ для всіх $y \in Y$;

3) існує неперервне відображення $g\colon X \to F(Y)$, таке, що $g(y) = \eta_Y(y)$ для всіх $y \in Y$.

□ *Доведення.* ($1 \Rightarrow 3$) Розглянемо неперервне відображення $\eta_Y\colon Y \to F(Y)$. За означенням G-ретракту існує неперервне відображення $g\colon X \to F(Y)$ таке, що $g|_Y = \eta_Y$, тобто $g(y) = \eta_Y(y)$ для всіх $y \in Y$.

($3 \Rightarrow 2$) Нехай $g\colon X \to F(Y)$ — відображення, таке, що $g(y) = \eta_Y(y)$ для всіх $y \in Y$. За означенням вільної топологічної групи існує гомоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$, такий, що $h \circ \eta_X = g$, тобто $h(\eta_X(y)) = g(y) = \eta_Y(y)$ для всіх $y \in Y$.

($2 \Rightarrow 1$) Нехай існує гомоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$, такий, що $h(\eta_X(y)) = \eta_Y(y)$ для всіх $y \in Y$. Нехай також $f\colon Y \to G$ — неперервне відображення з топологічного простору Y у топологічну групу G. Тоді існує неперервний гомоморфізм $f^*\colon F(Y) \to G$ такий, що $f^* \circ \eta_Y = f$. Розглянемо композицію $f^* \circ h$. Приймемо $f_1 = f^* \circ h \circ \eta_X$. Тоді $f_1|_Y = (f^* \circ h \circ \eta_X)|_Y = (f^* \circ \eta_Y)|_Y = f$. ■

Твердження 3. Нехай підпростір Y є G-ретрактом функціонально гаусдорфового простору X. Тоді підгрупа вільної топологічної групи $F(X)$, породжена множиною $\eta_X(Y)$, є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі $F(Y)$, а відображення $\eta_X|_Y\colon Y \to \eta_X(Y)$ є топологічно еквівалентним відображенню η_Y.

□ *Доведення.* Нехай підпростір Y є G-ретрактом простору X. Нехай також $f\colon Y \to G$ — неперервне відображення з топологічного Y простору у топологічну групу G. Тоді існує неперервне відображення $h\colon X \to G$, таке, що $h|_Y = f$. За означенням вільної топологічної групи існує гомоморфізм $h^*\colon F(X) \to G$ групи $F(X)$ у групу G, такий, що $h^* \circ \eta_X = h$. Нехай $G(\eta_X(Y))$ — підгрупа топологічної групи $F(X)$ породжена множиною $\eta_X(Y)$. Приймемо $f^* = h^*|_{G(\eta_X(Y))}$. Отже, для кожного неперервного відображення $f\colon Y \to G$ з топологічного простору Y у топологічну групу G, існує неперервний гомоморфізм $f^*\colon G(\eta_X(Y)) \to G$, такий, що $f^* \circ (\eta_X|_Y) = f$. За єдиністю вільної топологічної групи отримаємо, що пара $(G(\eta_X(Y)), \eta_X|Y)$ є вільною топологічною групою простору Y. ■

Твердження 4. Нехай Y є G-ретрактом функціонально гаусдорфового простору X. Тоді підпростір Y є замкненим у топологічному просторі X.

□ *Доведення.* Нехай підпростір Y є G-ретрактом функціонально гаусдорфового топологічного простору X. Оскільки вивливає з твердження I., підгрупа топологічної групи $F(X)$ породжена множиною $\eta_X(Y)$, є топологічно ізоморфною $F(Y)$ і є ретрактом простору $F(X)$. Так як кожен ретракт гаусдорфового простору є замкненим у цьому просторі, то підпростір $F(Y)$ замкнений у топологічному просторі $F(X)$, отже, підпростір $\eta_X(Y) = \eta_X(X) \cap F(Y)$ замкнений у топологічному просторі $\eta_X(X)$. Відображення $\eta_X\colon X \to F(X)$ є ін'єктивним, а тому $\eta_X^{-1}(\eta_X(Y)) = Y$. З неперервності відображення η_X випливає, що підпростір Y є замкненим у топологічному просторі X. ■

Безпосередньо з означень вільної топологічної групи і G-ретракту випливає таке твердження.

Твердження 5. Кожен тихоновський простір X є G-ретрактом своєї вільної топологічної групи $F(X)$.

Як було встановлено у роботі [5], не кожен тихоновський простір є ретрактом своєї вільної топологічної групи.

II. G-ретракти як узагальнення ретрактів

Твердження 1. Нехай $r_1\colon X \to K_1$ і $r_2\colon X \to K_2$ — ретракції топологічного простору X, такі, що $r_1 \circ r_2(X) = r_2 \circ r_1(X)$. Тоді підпростір $K_1 \cup K_2$ є G-ретрактом в X.

□ *Доведення.* Нехай $f\colon K_1 \cup K_2 \to G$ — неперервне відображення з топологічного простору $K_1 \cup K_2$ у топологічну групу G . Розглянемо відображення $f_1\colon X \to G$, означене як $f_1(x) = f(r_1(x)) \times f(r_2(r_1(x)))^{-1} \times f(r_2(x))$.

Нехай $x \in K_1$. Тоді $r_1(x) = x$ і $f_1(x) = f(r_1(x)) \times f(r_2(r_1(x)))^{-1} \times f(r_2(x)) = f(x) \times f(r_2(x))^{-1} \times f(r_2(x)) = f(x)$.

Нехай $x \in K_2$. Тоді $r_1(x) = r_1 \circ r_2(x)$. Оскільки $r_1 \circ r_2(X) = r_2 \circ r_1(X)$, то $r_1 \circ r_2(x) \in K_2$. Отже, $r_2 \circ r_1(x) = r_2 \circ r_1 \circ r_2(x) = r_1 \circ r_2(x) = r_1(x)$, а тому $f_1(x) = f(r_1(x)) \times f(r_2(r_1(x)))^{-1} \times f(r_2(x)) = f(r_1(x)) \times f(r_1(x))^{-1} \times f(x) = f(x)$.

Отже, $f_1(x) = f(x)$ для всіх $x \in K_1 \cup K_2$. ■

Наслідок 1. Нехай X, Y — топологічні простори, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Тоді операції проектування $r_1(x, y) = (x_0, y)$ і $r_2(x, y) = (x, y_0)$ є ретракціями простору $X \times Y$ такими, що $r_1 \circ r_2(X \times Y) = r_2 \circ r_1(X \times Y) = \{(x_0, y_0)\}$. Отже, підпростір $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ є G-ретрактом топологічного простору $X \times Y$.

Приклад 1. Нехай $X = I = [0, 1]$ — одиничний відрізок зі стандартною топологією, $Y = S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in N}$ — збіжна послідовність. Покажемо, що множина $K = (X \times \{0\}) \cup (\{0\} \times Y)$ не є ретрактом топологічного простору $X \times Y$.

Припустимо, що існує ретракція $r\colon X \times Y \to K$. Оскільки для довільного $y \in Y \setminus \{0\}$ множина $X \times \{y\}$ є зв'язною і $r(0, y) = (0, y)$, то $r(x, y) = (0, y)$ для всіх $x \in X$, $y \in Y \setminus \{0\}$. Розглянемо послідовність точок $z_n = (1, \frac{1}{n})$. Тоді $z_n \to z = (1, 0)$, $r(z_n) = (0, \frac{1}{n})$ і $r(z) = z = (1, 0)$. Тобто, $r(z_n)$ не збігається до $r(z)$. Отже, ми отримали суперечність з неперервністю відображення r.

Зауважимо, що в прикладі II. як X можемо взяти довільний нетривіальний зв'язний простір, а в якості Y — довільний екстремально незв'язний топологічний простір, що містить збіжну послідовність. Нагадаємо, що топологічний простір X називається ретральним, якщо X є ретрактом деякої топологічної групи G. Топологічний простір X є ретральним тоді і тільки тоді, коли X є ретрактом своєї вільної топологічної групи $F(X)$ (див. [5]). Топологічний простір X називається простором Мальцева, якщо існує неперервне відображення $M\colon X^3 \to X$, таке, що $M(x,y,y) = M(y,x,x) = x$ для всіх $x,y \in X$. Нагадаємо також, що в класі компактних просторів властивості бути ретральним простором і простором Мальцева збігаються (див. [5]).

Твердження 2. Такі умови є еквівалентними для тихоновського простору X:

1) топологічний простір X є ретральним простором;

2) для кожного топологічного простору Y, що містить X як G-ретракт існує ретракція з Y на X.

□ *Доведення.* (1 ⇒ 2) Нехай X — ретральний простір. Тоді існує ретракція $r\colon F(X) \to X$ (див. [5]). Нехай X є G-ретрактом простору Y. За твердженням I. існує гомоморфізм $h\colon F(Y) \to F(X)$, такий, що $h(x) = x$ для всіх $x \in X$. Композиція $r \circ h$ буде ретракцією з простору $F(Y)$ на підпростір X, а її звуження на Y буде ретракцією з Y на X.

(2 ⇒ 1) З твердження I. маємо, що кожен тихоновський простір X є G-ретрактом своєї вільної топологічної групи $F(X)$. Отже, топологічний простір X є ретрактом топологічної групи $F(X)$. ■

Узагальнюючи відому теорему Брауера, можемо відзначити, що коло не є G-ретрактом круга, який обмежується цим колом.

Приклад 2. Нехай $K{=}(X{\times}\{0\}){\cup}(\{0\}{\times}Y)$ – простір, описаний у прикладі II.. Простір K є G-ретрактом топологічного простору $X \times Y$, але не є ретрактом цього простору, отже, за твердженням II. простір K не є ретральним. Простір I є ретральним, оскільки він є ретрактом топологічної групи дійсних чисел з операцією додавання. Простір S є ретральним, оскільки він є ретрактом топологічної групи раціональних чисел з операцією додавання. Оскільки сума ретральних просторів є ретральним простором (див. [5]), то простір $K_1 = I \oplus S$ є ретральним. Покажемо, що простори K і K_1 мають топологічно ізоморфні вільні топологічні групи. Нагадаємо [6], що ретракції $r_1\colon X \to T_1$ і $r_2\colon X \to T_2$ топологічного простору X називаються паралельними якщо виконано умови $r_1 \circ r_2 = r_1$ і $r_2 \circ r_1 = r_2$. Образи топологічного простору X при його паралельних ретракціях називаються паралельними ретрактами простору X. Як було встановлено у роботі [6] факторпростори топологічного простору X за його паралельними ретрактами мають топологічно ізоморфні вільні топологічні групи.

Розглянемо простір $Z = S \oplus I$ і нехай z_1 — довільна точка з I, z_2 — гранична точка з S , z_3 — довільна негранична точка з S. Розглянемо підпростори $T_1 = \{z_1, z_2\}$, $T_2 = \{z_1, z_3\}$. Підпростори T_1 і T_2 є паралельними ретрактами простору Z, отже, факторпростори Z/T_1 і Z/T_2 мають топологічно ізоморфні вільні топологічні групи. Залишається зауважити, що простір Z/T_1 гомеоморфний K, а простір Z/T_2 гомеоморфний K_1.

Наслідок 2. Властивості бути ретральним простором та простором Мальцева не зберігаються M-еквівалентністю у класі компактних просторів.

Група цілих чисел з дискретною топологією є топологічною групою. Будемо позначати її через Z. Скажемо, що гомоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$ є спеціальним, якщо композиція $e_Y^* \circ h$ є постійним відображенням на X, де $e_Y^*\colon F(Y) \to Z$ — гомоморфізм, що продовжує функцію $e_Y : Y \to Z$, що тотожньо дорівнює 1.

Твердження 3. Нехай X — тихоновський простір, Y — його G-ретракт. Тоді існує спеціальна гомоморфна ретракція $f^*\colon F(X) \to F(Y)$.

□ *Доведення.* Нехай $h\colon X \to F(Y)$ — неперервне відображення, таке, що $h(y){=}y$ для всіх $y \in Y$. Нехай $e_Y : Y \to Z$ — функція, тотожньо дорівнює 1 на Y, $e_Y^*\colon F(Y) \to Z$ — її гомоморфне відображення. Розглянемо композицію $g = e_Y^* \circ h$. Позначимо $X_n = g^{-1}(n)$. Топологічний простір X є дискретною сумою своїх підпросторів X_n. Позначимо $h_n = h|_{X_n}$. Для кожного $n \in Z$ означимо відображення $f_n(x)$, прийнявши $f_n(x) = h_n(x) \times a^{1-n}$, де $a \in Y$. Розглянемо відображення $f\colon X \to F(Y)$ означене як $f(x) = f_n(x)$, якщо $x \in X_n$. Продовжимо відображення f до гомоморфізму вільних топологічних груп $f^*\colon F(X) \to F(Y)$. Покажемо, що f^* — спеціальний гомоморфізм. Нехай $x \in X_n$. Тоді $e_Y^* \circ f(x) = e_Y^* \circ f_n(x) = e_Y^*(h_n(x) \times a^{1-n}) = e_Y^* \circ h_n(x) + (1-n)e_Y(a) = n + 1 - n = 1$. ■

Твердження 4. Нехай підпростір Y є G-ретрактом тихоновського простору X, Z — тихоновський простір такий, що Z є локально компактним, або простір $Y \times Z$ є k-простором. Тоді підпростір $Y \times Z$ є G-ретрактом топологічного простору $X \times Z$.

□ *Доведення.* Нехай підпростір Y є G-ретрактом топологічного простору X. За твердженням I. існує неперервне відображення $g\colon X \to F(Y)$, таке, що $g(y) = y$ для всіх $y \in Y$. Розглянемо відображення $g_Z\colon X \times Z \to F(Y \times Z)$, прийнявши $g(x,z) = (y_1, z)^{\epsilon_1}(y_2, z)^{\epsilon_2}...(y_n, z)^{\epsilon_n}$, якщо $g(x) = y_1^{\epsilon_1} y_2^{\epsilon_2}...y_n^{\epsilon_n}$. Якщо Z є локально компактним простором або простір $Y \times Z$ є k-простором, то відображення g_Z є неперервним (див. [2]). Зауважимо, що $g_Z(y,z) = (y,z)$, для всіх $y \in Y$, $z \in Z$ тобто, за твердженням I. підпростір $Y \times Z$ є G-ретрактом топологічного простору $X \times Z$. ■

III. Ортогональні G-ретракти

Нагадаємо, що ретракції $r_1\colon X \to K_1$ і $r_2\colon X \to K_2$ топологічного простору X називаються ортогональними, якщо множини $r_1 \circ r_2(X)$ і $r_2 \circ r_1(X)$ є одноточковими. Образи топологічного простору X при ортогональних ретракціях називаються ортогональними ретрактами простору X. У роботі [7] встановлено властивості ортогональних ретрактів, а також подано їхнє застосування до побудови просторів з топологічно ізоморфними вільними топологічними групами.

Означення 1. Скажемо, що підпростори K_1 і K_2 є ортогональними G-ретрактами топологічного простору X якщо :

а) для кожного неперервного відображення $f\colon K_1 \to G$ з топологічного простору K_1 у топологічну групу G існує неперервне відображення $f_1\colon X \to G$ таке, що $f_1|_{K_1} = f$ і $f_1|_{K_2} = const$;

б) для кожного неперервного відображення $h\colon K_2 \to G$ з топологічного простору K_2 у топологічну групу G існує неперервне відображення $h_1\colon X \to G$ таке, що $h_1|_{K_2} = h$ і $h_1|_{K_1} = const$.

Твердження 1. Підпростори K_1 і K_2 тихоновського простору X є ортогональними G-ретрактами простору X тоді і тільки тоді, коли існують гомоморфізми $R_1\colon F(X) \to F(K_1)$ і $R_2\colon F(X) \to F(K_2)$ такі, що $R_1(x) = x$ для всіх $x \in K_1$, $R_2(x) = x$ для всіх $x \in K_2$, а множини $R_1(K_2)$ і $R_2(K_1)$ є одноточковими.

□ *Доведення. Необхідність.* Нехай підпростори K_1 і K_2 тихоновського простору X є ортогональними G-ретрактами простору X. Тоді вкладення $t_1\colon K_1 \to F(K_1)$ топологічного простору у K_1 топологічну групу $F(K_1)$ можемо продовжити до неперервного відображення $r_1\colon X \to F(K_1)$ такого, що $r_1|_{K2} = const$. Продовжимо відображення r_1 до гомоморфізму вільних топологічних груп $R_1\colon F(X) \to F(K_1)$. Оскільки $R_1|_X = r_1$, то $R_1(x) = x$ для всіх $x \in K_1$ і $R_1|_{K_2} = r_1|_{K_2} = const$. Аналогічно можна показати, що існує гомоморфна ретракція $R_2\colon F(X) \to F(K_2)$ така, що $R_2|_{K_1} = const$.

Достатність. Нехай існують гомоморфізми $R_1\colon F(X) \to F(K_1)$ і $R_2\colon F(X) \to F(K_2)$ такі, що $R_1(x) = x$ для всіх $x \in K_1$, $R_2(x) = x$ для всіх $x \in K_2$, а множини $R_1(K_2)$ і $R_2(K_1)$ є одноточковими. Нехай $f\colon K_1 \to G$ — неперервне відображення з топологічного простору K_1 у топологічну групу G. Продовжимо відображення f до гомоморфізму топологічних груп $F\colon F(K_1) \to G$. Приймемо $H = F \circ R_1\colon X \to G$. Розглянемо відображення $f_1 = H|_X\colon X \to G$ — звуження гомоморфізму H на підпростір X. Тоді $f_1|_{K_1} = H|_{K_1} = (F \circ R_1)|_{K_1} = F|_{K_1} = f$ і $f_1|_{K_2} = H|_{K_2} = (F \circ R_1)|_{K_2} = const$.

Пункт б) з означення ортогональних G-ретрактів доводиться аналогічно. ■

Твердження 2. Нехай X — функціонально гаусдорфовий простір, K_1 і K_2 — його замкнені підпростори, $p_1\colon X \to X/K_1$, $p_2\colon X \to X/K_2$ — факторні відображення. Для того, щоб підпростори K_1 і K_2 були ортогональними G -ретрактами в X необхідно і достатньо, щоб виконувались умови :

а) $|K_1 \cap K_2| \leq 1$,

б) підпростір $p_2(K_1)$ є G-ретрактом фактор-простору X/K_2,

в) підпростір $p_1(K_2)$ є G-ретрактом фактор-простору X/K_1.

□ *Доведення. Достатність.* Нехай підпростори K_1 і K_2 є ортогональними G-ретрактами топологічного простору X. Покажемо, що виконується пункт а). Приймемо $|K_1 \cap K_2| > 1$. Нехай $a, b \in K_1 \cap K_2$ — довільні відмінні точки. Оскільки простір K_1 функціонально гаусдорфовий, то існує неперервна дійснозначна функція $f\colon K_1 \to R$, така, що $f(a) \neq f(b)$. Нехай $f_1\colon X \to R$ — неперервне продовження відображення f. Тоді $f_1|_{K_2} \neq const$ оскільки $f_1(a) = f(a) \neq f(b) = f_1(b)$. Покажемо, що виконується пункт б). Нехай $f\colon p_2(K_1) \to G$ — неперервне відображення з топологічного простору $p_2(K_1)$ у топологічну групу G. Приймемо $h = f \circ p_2\colon K_1 \to G$. Відображення h продовжується до неперервного відображення $h_1\colon X \to G$ такого, що $h_1|_{K_1} = h$ і $h_1|_{K_2} = const$. Оскільки $h_1|_{K_2} = const$, то існує відображення $f_1\colon X/K_2 \to G$ таке, що $h_1 = f_1 \circ p_2$. Неперервність відображення f_1 випливає з неперервності відображення h_1 і факторності відображення p_2. Оскільки $f_1 \circ p_2|_{K_1} = h_1|_{K_1} = h = f \circ p_2$, то відображення f_1 є продовженням відображення f. Пункт в) доводиться аналогічно.

Необхідність. Покажемо, що підпростір $p_2(K_1)$ замкнений у фактор-просторі X/K_2. Справді, якщо $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, то $p_2^{-1}(p_2(K_1)) = K_1$ — замкнений підпростір у просторі X. Якщо $K_1 \cap K_2$ є одноточковою множиною, то $p_2^{-1}(p_2(K_1) = K_1 \cup K_2$ — замкнений підпростір у просторі X. Оскільки підмножина $p_2(K_1)$ є замкненою у фактор-просторі X/K_2, то звуження $p_2|_{p_2^{-1}(p_2(K_1))}$ є фактор-відображенням. Якщо $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, тоді $p_2|_{p_2^{-1}(p_2(K_1))} = p_2|_{K_1}$, отже, відображення $p_2|_{K_1}$ є факторною біекцією, тобто гомеоморфізмом. Якщо $K_1 \cap K_2$ є одноточковою множиною, то $p_2|_{p_2^{-1}(p_2(K_1))} = p_2|_{K_1 \cup K_2}$. У цьому випадку відображення $p_2|_{K_1 \cup K_2}$ є факторним. Оскільки об'єднання $K_1 \cup K_2$ є букетом, то звуження відображення $p_2|_{K_1 \cup K_2}$ на підпростір K_2 є гомеоморфізмом [3, Впр 2.4.12]. Отже, відображення $p_2|_{K_1}$ є гомеоморфізмом. Нехай $f\colon K_1 \to G$ — неперервне відображення топологічного простору K_1 у топологічну групу G. Оскільки простір $p_2(K_1)$ гомеоморфний простору K_1, а підпростір $p_2(K_1)$ є G-ретрактом фактор-простору X/K_2, то існує відображення $f_1\colon X/K_2 \to G$, що продовжує відображення $f = p_2 \circ f$. Розглянемо відображення $f_2 = p_2 \circ f_1$. Тоді $f_2|_{K_2} = (p_2 \circ f_1)|_{K_2} = const$.

Нехай X — тихоновський простір, $f\colon X \to Y$ — сюр'єктивне відображення. Найсильніша з усіх тихоновських топологій на множині Y, щодо яких відображення f є неперервним, називається R-факторною топологією на множині Y (породженою відображенням f). Сюр'єктивне відображення $f\colon X \to Y$ називається R-факторним, якщо топологія простору Y збігається з R-факторною топологією, породженою відображенням f. ■

Твердження 3. Нехай X – тихоновський простір, K_1 і K_2 – ортогональні G -ретракти в X, $p_1 : X \to X/K_1$, $p_2 : X \to X/K_2$ — R-факторні відображення. Тоді підпростір $p_2(K_1)$ гомеоморфний K_1 і є G-ретрактом R-факторного простору X/K_2, підпростір $p_1(K_2)$ гомеоморфний K_2 і є G-ретрактом R-факторного простору X/K_1.

□ *Доведення.* Нехай підпростори K_1 і K_2 є ортогональними G-ретрактами топологічного простору X. Покажемо, що простір $p_2(K_1)$ гомеоморфний K_1. За твердженням III. маємо, що $|K_1 \cap K_2| \leq 1$. Тобто, відображення $p_2 : K_1 \to p_2(K_1)$ є бієктивним. Покажемо, що це відображення є R-факторним. Нехай $u : p_2(K_1) \to R$ — неперервна дійснозначна функція така, що композиція $u_1 = u \circ p_2$ є неперервною. Оскільки підпростори K_1 і K_2 є ортогональними є G-ретрактами простору X, то існує неперервна функція $v_1 : X \to R$, така, що $v_1|_{K_1} = u_1$ і $v_1|_{K_2} = const$. Оскільки відображення v_1 є сталим на підпросторі K_2, то існує функція $v : p_2(X) \to R$, така, що $v_1 = v \circ p_2$. Функція v є неперервною, оскільки відображення p_2 є R-факторним, а отже і функція $u = v|_{p_2(K_1)}$ є неперервною.

Оскільки R-факторне бієктивне відображення задане на тихоновському просторі, є гомеоморфізмом (див. [6]), то простір $p_2(K_1)$ гомеоморфний K_1.

Покажемо, шо підпростір $p_2(K_1)$ є G-ретрактом R-факторного простору X/K_2. Нехай $f : p_2(K_1) \to G$ – неперервне відображення з топологічного простору $p_2(K_1)$ у топологічну групу G. Приймемо $h = f \circ p_2 : K_1 \to G$. Відображення h продовжується до неперервного відображення $h_1 : X \to G$ такого, що $h_1|_{K_1} = h$ і $h_1|_{K_2} = const$. Оскільки $h_1|_{K_2} = const$, то існує відображення $f_1 : X/K_2 \to G$ таке, що $h_1 = f_1 \circ p_2$. Неперервність відображення f_1 випливає з неперервності відображення h_1 і R-факторності відображення p_2 (див. [2]). Оскільки $f_1 \circ p_2|_{K_1} = h_1|_{p_2(K_1)} = h = f \circ p_2$, то відображення f_1 є продовженням відображення f. ■

Література

[1] *Марков А.А.* О свободных топологических группах // ДАН СССР, – 1941, – 31. – С. 299–302.

[2] *Окунев О.Г.* M-эквивалентность произведений // Тр. Моск. мат. общ. – 1995. – Т. 56. – С. 192–205.

[3] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 751 с.

[4] *Fay T.H., Ordman E.T., SmithThomas B.V.* The free topological groups over rationals// General Topology and its Applications – 1979. – V.10. – P. 33–47.

[5] *Gartside P.M., Reznichenko E.A., Sipacheva O.V.* Mal'tsev and retral spaces // Topology Appl. – 1997. – 80. – P. 115–129.

[6] *Okunev O. G.* A method for constructing examples of M-equivalent spaces // Topology Appl. – 1990. – V. 36. – P. 157–171.

[7] *Pyrch N.M.* Orthogonal retractions and the relation of M-equivalence // Matematychni Studii. – 2003. – V. 20. – P. 151–161.

ON GENERALIZED RETRACTS RELATED TO TOPOLOGICAL GROUPS

N.M. Pyrch

Ukrainian Academy of Printing,
79020, Lviv, 19, Pidgolosko Str.

In the paper we consider generalized retracts related to topological groups. Methods for constructing examples of generalized retracts are presented and their applications to the theory of the free topological groups is given.

Keywords: topological group, G-retract, orthogonal G-retracts

2000 MSC: 22A05

UDK: 512.46