ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 601, 2007, с. 50–53

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 601, 2007, p. 50–53

ЛІНІЙНІ ФОРМИ РОЗВ'ЯЗКІВ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ПРОБЛЕМИ МОМЕНТІВ

М.М. Чип

Національний університет "Львівська політехніка"
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 11 вересня 2007 р.)

Встановлено критерії лінійної незалежності розв'язків узагальненої проблеми моментів. Описано способи знаходження величини радіуса круга аналітичності твірної функції послідовності узагальнених моментів для лінійно залежних систем розв'язків.

Ключові слова: узагальнена проблема моментів, лінійна залежність, радіус збіжності

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

УДК: 517.53

Вступ

Потреби дослідження класичної проблеми моментів зумовили необхідність її узагальнень в різних напрямках. Одне з них запропоновано формулювати в такому вигляді ([1]).

Нехай задано послідовність $\{s_n\}_0^\infty$ комплексних чисел. Потрібно знайти дві послідовності $\{a_k(\tau)\}_0^\infty$ та $\{b_l(\tau)\}_0^\infty$ в просторі інтегрованих з квадратом функцій, для яких

$$s_{k+l} = \int\limits_\Gamma a_k(\tau) b_l(\tau)\, d\mu(\tau) \qquad (1)$$

на деякій множині Γ комплексної площини з мірою $d\mu(\tau)$ на ній.

Узагальнення класичної проблеми моментів у такому вигляді виявилось ефективним для побудови раціональних наближень твірних функцій послідовностей узагальнених моментів з одержанням асимптотичної формули оцінки похибки наближень ([2]) та для побудови інтегральних зображень твірних функцій послідовностей узагальнених моментів з можливостями аналітичного продовження зображуваних функцій за межі області аналітичності ([3]).

Способи вивчення властивостей розв'язків узагальненої проблеми моментів залежать від співвідношень між лінійними формами розв'язків. Стаття містить результати застосувань лінійних форм розв'язків для встановлення лінійної залежності чи лінійної незалежності розв'язків та для знаходження радіуса круга аналітичності твірної функції послідовності узагальнених моментів.

I. Умови лінійної незалежності розв'язків

Встановимо умови зображення розв'язків узагальненої проблеми моментів у вигляді лінійних форм інших її розв'язків і умови лінійної незалежності та лінійної залежності систем розв'язків.

Теорема 1. *Лінійні форми розв'язків узагальненої проблеми моментів є її розв'язками тільки тоді, коли відповідні лінійні форми узагальнених моментів є узагальненими моментами. Система розв'язків узагальненої проблеми моментів є лінійно незалежною (лінійно залежною) системою тоді і тільки тоді, коли відповідна система узагальнених моментів є лінійно незалежною (лінійно залежною) системою.*

□ *Доведення.* Нехай лінійні форми в кожній з обидвох послідовностей розв'язків узагальненої проблеми моментів є її розв'язками, тобто

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_{k+\nu,m} a_{k+\nu}(\tau) = a_p(\tau),\ p = 0,1,2,...\\ \sum_{\nu=0}^{n} \beta_{l+\nu,n}(\tau)\, b_{l+\nu}(\tau) = b_q(\tau),\ q = 0,1,2,...\end{gathered} \qquad (2)$$

для фіксованого $m = 1,2,...$ та кожного $k = 0,1,2,...$ і фіксованого $n = 1,2,3...$ та кожного $l = 0,1,2...$ з коефіцієнтами з поля комплексних чисел. Тоді

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_{k+\nu,m} s_{k+l+\nu} = \\ = \int\limits_\Gamma \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_{k+\nu,m} a_{k+\nu}(\tau)\, b_l(\tau)\, d\mu(\tau) = s_{p+l},\\ \sum_{\nu=0}^{n} \beta_{l+\nu,n} s_{k+l+\nu} = \\ = \int\limits_\Gamma a_k(\tau) \sum_{\nu=0}^{n} \beta_{l+\nu,n} b_{l+\nu}(\tau)\, d\mu(\tau) = s_{k+q}\end{gathered} \qquad (3)$$

Обидві лінійні форми узагальнених моментів є узагальненими моментами.

Нехай обидві системи розв'язків узагальненої проблеми моментів є лінійно незалежними, тобто

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{m} p_{k+\nu,m} a_{k+\nu}(\tau) = 0, \\ &\sum_{\nu=0}^{n} q_{l+\nu,n} b_{l+\nu}(\tau) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

для фіксованого $m = 1, 2, ...$ та кожного $k = 0, 1, 2, ...$ і фіксованого $n = 1, 2, 3...$ та кожного $l = 0, 1, 2...$, причому $p_{k+\nu,m} = q_{l+\nu,n} = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{m} p_{k+\nu,m} s_{k+l+\nu} = \\ &= \int_{\Gamma} \sum_{\nu=0}^{m} p_{k+\nu,m} a_{k+\nu}(\tau) b_l(\tau) d\mu(\tau) = 0, \\ &\sum_{\nu=0}^{n} q_{l+\nu,n} s_{k+l+\nu} = \\ &= \int_{\Gamma} a_k(\tau) \sum_{\nu=0}^{n} q_{l+\nu,n} b_{l+\nu}(\tau) d\mu(\tau) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Обидві системи узагальнених моментів є лінійно незалежними системами.

Нехай обидві системи розв'язків узагальненої проблеми моментів є лінійно залежними, тобто є істинними співвідношення (4), причому існують значення ν, для яких $p_{k+\nu,m} \neq 0$ та $q_{l+\nu,n} \neq 0$. Тоді виконуються співвідношення (5), тобто обидві системи узагальнених моментів є лінійно залежними системами.

Якщо система узагальнених моментів є лінійно незалежною, то відповідна система розв'язків є лінійно незалежною, бо з лінійної залежності системи розв'язків випливає лінійна залежність системи узагальнених моментів. Якщо система узагальнених моментів є лінійно залежною, то відповідна система розв'язків є лінійно залежною, бо з лінійної незалежності системи розв'язків випливає лінійна незалежність системи узагальнених моментів. Теорема доведена. ■

Умова зображення розв'язків узагальненої проблеми моментів у вигляді лінійних форм інших її розв'язків, яка встановлена в теоремі , є необхідною умовою, але не достатньою умовою. Справді, на основі співвідношень (3), враховуючи (1), не завжди можна одержати співвідношення (2).

II. Твірна функція послідовності моментів

Знайдемо величину радіуса круга аналітичності твірної функції послідовності узагальнених моментів.

Теорема 1. *Якщо послідовність коефіцієнтів однієї з лінійних форм розв'язків є збіжною до відмінної від нуля границі, то твірна функція послідовності узагальнених моментів є аналітичною функцією в одиничному крузі.*

□ *Доведення.* Розглянемо функцію $f(z)$ вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n, \tag{6}$$

в якому коефіцієнти $\{s_n\}_0^{\infty}$ зображені у вигляді (1), яка є аналітичною в крузі $\{z : |z| < r\}$. Величину радіуса збіжності знаходимо за формулою

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{s_n}{s_{n+1}} \right| \tag{7}$$

за умови існування границі.

З умов теореми випливає, що існують натуральні числа , m або n такі, що системи $\{a_k(\tau)\}_0^{\infty}$ та $\{b_l(\tau)\}_0^{\infty}$ є лінійно залежні системи, тобто

$$\sum_{\nu=0}^{m} p_{k+\nu,m} a_{k+\nu}(\tau) = 0 \quad \sum_{\nu=0}^{n} q_{l+\nu,n} b_{l+\nu}(\tau) = 0,$$

причому існують значення ν, для яких $p_{k+\nu,m} \neq 0$ та $q_{l+\nu,n} \neq 0$. Тоді на основі співвідношення (1) буде

$$\sum_{\nu=0}^{m} p_{k+\nu,m} s_{k+l+\nu} = 0 \quad \sum_{\nu=0}^{n} q_{l+\nu,n} s_{k+l+\nu} = 0,$$

Поділимо обидві частини цих співвідношень на s_{k+l+m} і s_{k+l+n} відповідно та приймемо $\lim_{k\to\infty} p_{k+\nu,m} = c_m \neq 0$ і $\lim_{l\to\infty} q_{l+\nu,n} = d_n \neq 0$. Врахувавши формулу (7), встановлюємо, що величина r радіуса збіжності збігається з модулем одного з коренів рівнянь

$$\sum_{\nu=0}^{m} \sigma^{\nu} = 0 \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \sigma^{\nu} = 0, \tag{8}$$

які всі містяться на одиничному колі. Теорема доведена. ■

III. Приклади

Опишемо способи знаходження величини радіуса круга аналітичності у випадках існування в системах розв'язків лінійних форм першого і другого порядків та явного вираження наступних розв'язків через попередні.

Нехай лінійні форми першого порядку в системах розв'язків мають вигляд

$$\begin{aligned} &a_{k+1}(\tau) = \alpha_k a_k(\tau), \quad b_{l+1}(\tau) = \beta_l b_l(\tau), \\ &\{\alpha_k\}_0^{\infty} \subset \mathrm{C}, \, \alpha_k \neq 0, \quad \{\beta_l\}_0^{\infty} \subset \mathrm{C}, \beta_l \neq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Лінійні форми в системах моментів на основі (1) мають вигляд

$$
\begin{aligned}
s_{k+l+1} &= \alpha_k s_{k+l}, \\
s_{k+l+1} &= \beta_l s_{k+l}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Рекурентні співвідношення (9) і (10) приводять до знаходження загальних членів послідовності моментів та послідовностей розв'язків. Маємо

$$
\begin{aligned}
&\alpha_k = \beta_l = \gamma, \quad s_n = \gamma^n s_0, \quad n = 1, 2, 3.... \\
&a_k(\tau) = \gamma^k a_0(\tau), \quad b_l(\tau) = \gamma^l b_0(\tau).
\end{aligned} \tag{11}
$$

Величину радіуса збіжності на основі (7) та (11) знаходимо з формули

$$
r = \frac{1}{|\gamma|}, \tag{12}
$$

яку одержуємо також з співвідношення $s_{n+1} = \gamma s_n$ внаслідок ділення обидвох її частин на s_{n+1} і переходу до границі при $n \to \infty$.

Твірна функція

$$
f(z) = \frac{s_0}{1 - \gamma z}
$$

є аналітичною функцією в крузі $\left\{ z : |z| < \frac{1}{|\gamma|} \right\}$.

Нехай лінійні форми другого порядку в системах розв'язків мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&a_{k+2}(\tau) = \alpha_{k0} a_k(\tau) + \alpha_{k1} a_{k+1}(\tau), \\
&\{\alpha_{k0}\}_0^\infty \subset \mathrm{C}, \quad \{\alpha_{k1}\}_0^\infty \subset \mathrm{C}, \\
&b_{l+2}(\tau) = \beta_{l0} b_l(\tau) + \beta_{l1} b_{l+1}(\tau), \\
&\{\beta_{l0}\}_0^\infty \subset \mathrm{C}, \quad \{\beta_{l1}\}_0^\infty \subset \mathrm{C}
\end{aligned} \tag{13}
$$

Тоді відповідні лінійні форми узагальнених моментів на основі співвідношення (1) мають вигляд

$$
\begin{aligned}
s_{k+l+2} &= \alpha_{k0} s_{k+l} + \alpha_{k1} s_{k+l+1}, \\
s_{k+l+2} &= \beta_{l0} s_{k+l} + \beta_{l1} s_{k+l+1}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Форми (13) та (14) виражають фундаментальні співвідношення в теорії неперервних дробів ([4]). Вважаючи послідовності коефіцієнтів лінійних форм (14) збіжними, приймемо

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \alpha_{k0} = \alpha_0, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_{k1} = \alpha_1, \\
&\lim_{l\to\infty} \beta_{l0} = \beta_0, \quad \lim_{l\to\infty} \beta_{l1} = \beta_1.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Обидві частини співвідношень (14) поділимо на s_{k+l} та приймемо

$$
\lim_{n\to 0} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \sigma. \tag{16}
$$

Тоді з формул (14), з врахуванням (15) і (16), маємо

$$
\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma, \quad \sigma^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma. \tag{17}
$$

Знайшовши із співвідношень (17) величину σ та врахувавши формулу (7), одержуємо

$$
r = \frac{1}{|\sigma|} = \left| \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_0 - \beta_0} \right| \tag{18}
$$

за умови, що чисельник і знаменник одночасно не перетворюються в нуль. Якщо $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$, $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0$, то одержуємо квадратне рівняння $\sigma^2 - \gamma_1 \sigma - \gamma_0 = 0$, модуль одного з коренів якого дорівнює оберненій величині радіуса круга аналітичності. Якщо $\alpha_0 = \beta_0$ і $\alpha_1 \neq \beta_1$, то функція $f(z)$ вигляду (6) є цілою функцією.

Якщо одна з послідовностей $\{a_k(\tau)\}_0^\infty$ чи $\{b_l(\tau)\}_0^\infty$ утворює арифметичну прогресію, тобто $\alpha_{k1} = \beta_{l1} = 2$, та $\alpha_{k0} = \beta_{l0} = -1$, то з (17) маємо $\sigma^2 - 2\sigma + 1 = 0$. Функція $f(z)$ вигляду (6) є аналітичною функцією в крузі $\{z : |z| < 1\}$. Справді,

$$
s_n = s_0 + (s_1 - s_0) n, \quad f(z) = \frac{s_0 + (s_1 - 2s_0) z}{(1 - z)^2}.
$$

Нехай лінійні форми розв'язків мають вигляд першого з співвідношень (9) та другого з співвідношень (13), або другого з співвідношень (9) та першого з співвідношень (13). Тоді в системі моментів маємо відповідно

$$
\begin{aligned}
s_{k+l+3} &= \alpha_k \beta_{l0} s_{k+l} + \alpha_k \beta_{l1} s_{k+l+1}, \\
s_{k+l+3} &= \alpha_{k0} \beta_l s_{k+l} + \alpha_{k1} \beta_l s_{k+l+1}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Вважаючи послідовності коефіцієнтів лінійних форм (19) збіжними, приймемо

$$
\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha, \quad \lim_{l\to\infty} \beta_l = \beta. \tag{20}
$$

Обидві частини співвідношень (19) поділимо на s_{k+l}. Тоді на підставі формули (16), враховуючи (20) та (15), а потім (17), одержимо рівняння

$$
\begin{aligned}
\sigma^3 &= \alpha(\beta_0 + \beta_1 \sigma), \\
\sigma^3 &= \beta(\alpha_0 + \alpha_1 \sigma).
\end{aligned} \tag{21}
$$

Якщо $\alpha \neq 0$ або $\beta \neq 0$, то для $\sigma \neq 0$ з (21), враховуючи (17), відповідно знаходимо

$$
r = \frac{1}{|\alpha|}, \quad r = \frac{1}{|\beta|}. \tag{22}
$$

Якщо $\alpha = 0$ або $\beta = 0$, то функція $f(z)$ вигляду (6) є цілою функцією.

Висновки

Запроваджені лінійні форми розв'язків визначають відповідні лінійні форми узагальнених моментів. Твірні функції послідовностей лінійних форм узагальнених моментів є аналітичними функціями в кругах, радіуси яких виражаються через граничні значення послідовностей коефіцієнтів лінійних форм розв'язків.

Література

[1] Дзядик В.К. Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1981, № 6. – С. 8–12.

[2] Чип М.М. Наближення Паде та узагальнені моменти // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996, т. 39, № 2. – С. 110–115.

[3] Чип М.М. Метод моментів зображення функції рядом та інтегралом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003, т. 46, № 4. – С. 65–72.

[4] Джоунс У., Трон В. Неперервные дроби. – М. : Мир, 1985, – 414 с.

LINEAR FORMS OF THE SOLUTIONS FOR THE GENERALIZED MOMENTS PROBLEM

M.M. Chyp

National University "Lvivska Politekhnika", 12 Bandera St, UA-79013 Lviv, Ukraine

The test of the linear independendence of the solutions for the generalized moments problem are obtained. In the case of linear dependent systems of the solutions the methods for determining the radius of analycity for the generating function of the sequence of generalized moments are proposed.

Keywords: generalized moments problem, linear dependence, radius of analycity

2000 MSC: 30B40, 30E05, 30E20

UDK: 517.53